受験番号	番

２０２１年度　一橋大学大学院経済学研究科
特別選考による外国人の修士課程入学試験問題

経済学

実 施 日　2021年1月26日（火）
試験時間　10:00～12:00

注意事項

1.「解答はじめ」の指示があるまでは問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は1冊（**本文１９ページ**）、解答用紙は以下の2種類、下書き用紙は1枚です。
　①罫線入り解答用紙（両面刷り）1枚：全受験者が使用
　②マークシート式解答用紙1枚：「ミクロ・マクロ経済学」受験者のみ使用
　試験開始後、直ちに確認し、ページ数・枚数が異なる場合は、手を挙げてください。
　下書き用紙はさらに1枚のみ追加配付できます。試験中、希望する場合は、手を挙げてください。
　追加の解答用紙は配付しません。ただし書き損じた場合、解答用紙の交換は認めますので、手を挙げてください。
3. **試験開始後、解答用紙・下書き用紙と、問題冊子の表紙に受験番号を記入してください。氏名を記入してはいけません。**
　ミクロ・マクロ経済学を選択した場合は、マークシート式解答用紙にも受験番号を記入し、同時に、マーク欄に受験番号をマークしてください。
4. 問題冊子は、ミクロ・マクロ経済学、政治経済学、統計学・計量経済学、経済史の4科目の合冊です。
　任意の１科目を選択してください。２科目以上に解答した場合は得点を与えません。
5. **試験開始後、選択した科目名等を罫線入り解答用紙の「選択科目」欄から選び、○で囲んでください。記載がない場合は得点を与えません。**
　（例）

解答用紙　　選択した科目等を必ず○で囲むこと

（選択科目）選んだ科目ひとつを○で囲みなさい					受験番号						番
ミクロ・マクロ経済学（第2題）	ミクロ・マクロ経済学（第3題）	政治経済学	統計学・計量経済学	経済史							

6. **解答用紙には、「第２題の問１」などの問題番号も記入した上で、解答してください。**
　なお、問題番号は□で囲み、目立つように記載してください。

　（例）　$\boxed{\textbf{第２題の問１}}$

7. **ミクロ・マクロ経済学を選択した場合の第１題は、マークシート式解答用紙に解答してください。第２題、第３題については、どちらか一方の問題のみ、罫線入り解答用紙に解答してください。これら（第２題、第３題）両方ともに解答した場合には、得点を与えません。その他の科目（政治経済学、統計学・計量経済学、経済史）は、罫線入り解答用紙に解答してください。**
8. 2ヶ国語間の対訳辞書のみ、持込を許可します。ただし、用語集や辞典等、および電子辞書タイプの辞書の持込は認めません。
9. 問題冊子、解答用紙、下書き用紙は一切持ち帰ってはいけません。

１．ミクロ・マクロ経済学

解答にあたっての注意

１． 第1題はすべて解答すること。第2題・第3題は、いずれか1題を選択すること。第2題・第3題の両方に解答した場合は、採点対象としない。

２． 第1題の解答と、第2題または第3題の解答は、別々の解答用紙に記入すること。第2題・第3題はどちらかの解答を、罫線入り解答用紙に、日本語または英語で記述すること。

Notes:

1. There are three sections: 第1題, 第2題, and 第3題. Everyone must answer 第1題. Then, choose either 第2題, or 第3題. If you answer both 第2題 and 第3題, your answers shall not be graded.

2. Use different answer sheets for 第1題 and for 第2題 or 第3題. For 第2題 or 第3題, write your answers on the ruled answer sheets in Japanese or English.

第１題

以下の問 1〜20 の各問すべてに解答しなさい。なお、問 1 から問 10 はミクロ経済学、問 11 から問 20 はマクロ経済学に関する問題である。

Answer all questions from 問 1 to 問 20. Questions from 問 1 to 問 10 are about microeconomics. Questions from 問 11 to 問 20 are about macroeconomics.

問１　ある消費者にとって、コカ・コーラとスプライトは、完全代替財である。その消費者にとって、コカ・コーラ２杯と、スプライト１杯と同じ効用があることとする。この消費者の予算制約線は、3C+S=10 である（ここで、C はコカ・コーラの量、S はスプライトの量とする。）この消費者にとって、最適な消費の組み合わせはどれか、下記の中から一つ選びなさい。

① 2 杯のコカ・コーラと 4 杯のスプライト
② 4 杯のコカ・コーラと 0 杯のスプライト
③ 20/7 杯のコカ・コーラと 10/7 杯のスプライト
④ 0 杯のコカ・コーラと 10 杯のスプライト

問２　企業の生産関数（$f(X_1, X_2)$）がX_1とX_2を生産要素として以下で与えられている。X_1とX_2の価格はそれぞれr_1とr_2とする。この時、X_2が短期的に100に固定されている場合の総費用関数と、X_2が可変である長期の総費用関数の組み合わせとして正しいものを選びなさい。なおqは生産量とする。

生産関数：$f(X_1, X_2) = {X_1}^{1/2} + {X_2}^{1/2}$

① 短期： $r_1(q-10)^2 + 100r_2$　長期： $\frac{r_1}{r_1+r_2}q^2$
② 短期： $r_1 q + 10 + 100r_2$　長期： $\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}q^2$
③ 短期： $r_1(q-10)^2 + 100r_2$　長期： $\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}q^2$
④ 短期： $r_1 q + 10 + 100r_2$　長期： $\frac{r_1}{r_1+r_2}q^2$
⑤ ①から④のいずれでもない。

問３　消費者は財X_1と財X_2に関して次の効用関数を持っている。

$$u = \frac{1}{\frac{1}{X_1} + \frac{4}{X_2}}$$

財X_1と財X_2の価格をそれぞれp_1とp_2、所得をmとした時に消費者の間接効用関数として正しいものを選びなさい。

① $\frac{m}{p_1+4p_1p_2+4p_2}$

② $\frac{m}{p_1+4(p_1p_2)^{1/2}+4p_2}$

③ $\frac{m}{4p_1p_2+p_2}$

④ $\frac{m}{4(p_1p_2)^2+4p_2}$

⑤ ①から④のいずれでもない。

問４　完全競争市場において、ある財の需要量をQ^d、供給量をQ^S、価格をP円とした場合、この財市場の需要曲線は$Q^d = 30 - P$、供給曲線は$Q^S = -2 + P$で表されるものとする。政府が市場に加わり、財に従量税を課したとする。財を一単位販売するごとに４円の税金が課される場合の死荷重を求めよ。

①　2

②　4

③　6

④　8

問５　ある財の需要曲線と供給曲線が、次式で与えられている。ただし、Dを需要量、pを価格、MCを限界費用、xを生産量とする。

需要曲線：$D = 210 - p$

供給曲線：$MC = x + 40$

生産者は、生産1単位につき10の負の外部性を排出するとする。ここで政府が、生産量を社会的に最適な水準にするためにピグー税を導入したとき、生産者による生産量はいくらになるか、正しい解答を選びなさい。

① 60

② 70

③ 80

④ 90

⑤ ①から④のいずれでもない

問６　ある財の需要曲線が，Pを価格として$Q^d = 48 - p$で与えられている。また、企業の費用関数は，個々の企業の生産量をqとして$TC(q) = 16 + q^2$とする。長期均衡における企業数として正しいものを以下から選びなさい。

① 5

② 7

③ 12

④ 14

⑤ ①から④のいずれでもない

問７　ある独占市場において、財の需要量をQ^d、価格をPとした場合、需要曲線は$Q^d = 50 - 1/6P$で表されるものとする。独占企業の限界費用曲線が$MC = 3Q$である場合、その企業の利潤を最大にする販売価格を求めよ。

① 60

② 100

③ 150

④ 180

問８　ある独占市場において、財の需要量をQ^d、価格をPとした場合、需要曲線は$Q^d = 100 - 0.25P$で表されるものとする。独占企業の限界費用曲線は$MC = 80$である。この独占企業が完全価格差別（第１種価格差別）をする場合の生産者余剰を求めよ。

① 0

② 1600

③ 3200

④ 12800

問９　ある商品が２つの企業によってのみ供給されるベルトラン複占市場において、財の需要量をQ^d、価格をPとした場合、需要曲線は$Q^d = 50 - P$で表されるものとする。両企業の限界費用曲線は$MC = 20$であるとする。このときの市場均衡価格を求めよ。

① 10

② 20

③ 30

④ 40

問１０　消費者の効用関数を$u = \sqrt{c}$、疾病確率が10%、初期の所得水準を10000、疾病になった場合の治療費を9600とする。消費（C）が所得と治療費の差額で決まる場合、リスクプレミアムを求めなさい。

① 576

② 645

③ 784

④ 970

⑤ ①から④のいずれでもない

問１１　ある閉鎖経済の国には全部で３つの産業A、B及びCがあり、全部で３種類の財X、Y及びZが生産されているものと仮定する。2020年において、この国ではそれぞれの産業が財X、Y及びZを表Sのように生産し、それぞれの産業はその際に財X、Y及びZを表Uのように投入したとしよう。ただし、表中の数字の単位はすべて10億USドルとする。この国の2020年のGDP（単位：10億USドル）はいくらか、以下の①～④から正しいものをひとつ選びなさい。

表S

	産業A	産業B	産業C
財X	100	0	0
財Y	0	180	40
財Z	0	20	110

表U

	産業A	産業B	産業C
財X	50	20	10
財Y	20	90	50
財Z	10	40	50

①　90

②　100

③　110

④　120

問１２　ある国のマクロ経済が以下のIS-LMモデルで記述されるものとする。

$$Y = C + I + G$$

$$C = 30 + 0.5Y$$

$$I = 150 - 30r$$

$$\frac{M}{P} = 550 + 0.25Y - 60r$$

ただし、YはGDP、Cは民間消費、Iは民間投資、Gは政府支出、rは利子率、Mは名目貨幣供給量、Pは物価水準とする。いま、物価水準は2、政府支出は20で固定されているとして、完全雇用GDPが200だとしよう。完全雇用GDPを実現するために必要となる名目貨幣供給量の水準はいくらか、以下の①～④から正しいものをひとつ選びなさい。

① 600

② 800

③ 1000

④ 1200

問１３　ある国のマクロ経済が問１２のモデルの他の部分を変えずに LM 曲線を

$$Mv = PY$$

で置き換えたもので記述されるものとする。ただし、vは貨幣の流通速度で、その値は 1/2 以上 2 以下のある実数で一定とする。ここで、物価水準は 1、名目貨幣供給量は 180 で固定されているとして、政府支出を 0 から 10 に増加させたとする。このときの GDP の変化はどうなるか、以下の①～④から正しいものをひとつ選びなさい。

① 20 増加する

② 20 減少する

③ 変化しない

④ 与えられた条件では決まらない

問１４　2015 年に基準年を固定したラスパイレス（Laspeyres）価格指数で 2020 年の消費者物価水準を評価したい。財iのy年における消費者の購入価格をP_i^y、購入数量をQ_i^yとしたときに、ふさわしい指数の数式はどれか、以下の①～④から正しいものをひとつ選びなさい。

① $\frac{\sum_i P_i^{2015} Q_i^{2020}}{\sum_i P_i^{2015} Q_i^{2015}}$

② $\frac{\sum_i P_i^{2020} Q_i^{2015}}{\sum_i P_i^{2015} Q_i^{2015}}$

③ $\frac{\sum_i P_i^{2020} Q_i^{2020}}{\sum_i P_i^{2015} Q_i^{2020}}$

④ $\frac{\sum_i P_i^{2020} Q_i^{2020}}{\sum_i P_i^{2020} Q_i^{2015}}$

問１５　時間が整数 tで表されるとして、ある国のt期のマクロ経済が以下の方程式系により逐次決定されているものとする。

$$Y_t = 100 + 0.4(P_t - P_t^e) + \varepsilon_t$$
$$M_t = P_t + 0.5Y_t + \nu_t$$

ただし、Y_tは GDP、P_tは物価水準、P_t^eは$t-1$期に形成されるt期の期待物価水準、M_tは名目貨幣供給量とし、ε_t及びν_tは互い及び自身の過去に無相関な平均 0、分散 10 の正規分布に従いt期に実現するショックだとする。いま、P_t^eは合理的期待形成仮説に従って決まるものとし、「名目貨幣供給量を 250 で一定水準に保つ」という公開の宣言に政策当局がコミットしているとしよう。このとき、P_t^eの値はいくらになるか、以下の①～④から正しいものをひとつ選びなさい。

① 50
② 100
③ 150
④ 200

問１６ X 国の資本ストックK・労働投入量Lと産出量Yの関係が、以下のようなコブ＝ダグラス型の総生産関数によって表されるものとする。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

ただしAは技術水準を表すパラメーター、αは$0 < \alpha < 1$であるようなパラメーターであり、共に時間を通じて一定だとする。また X 国の貯蓄率＝投資率をs、資本の減耗率をδで表すものとする。

いま簡単化のために労働投入量Lは時間を通じて一定だとする。今年の産出量Yが 50、資本ストックKが 100、また貯蓄率sが 25%、資本減耗率率δが 5%であるとき、今年から来年にかけての X 国の資本ストックの純増額として正しいものを、以下の①～④から選びなさい。

① 5
② 7.5
③ 10
④ 12.5
⑤ 15

問１７　貯蓄率のみが 20%で、それ以外の総生産関数の形状やパラメーターの数値は問１６の X 国と全く同じであるような、Z 国が存在するものとする。定常状態における二つの国の労働人口一人当たり産出量の比較について、①～④から正しい記述を選びなさい。

① X 国の一人当たり産出量は、Z 国より約 6%少ない

② X 国と Z 国の一人当たり産出量は同じである

③ X 国の一人当たり産出量は、Z 国より約 6%多い

④ X 国の一人当たり産出量は、Z 国より約 8%多い

⑤ X 国の一人当たり産出量は、Z 国より約 12%多い

問１８　以下は 2019 年と 2020 年 10 月の労働力調査で報告されている数字であり、いずれも単位は万人である。これらのデータから 2020 年に入ってからの日本の労働市場の状況の変化について、最も正確な記述を選びなさい。

（単位：万人）

	2019 年平均	2020 年 10 月
15 歳以上人口	11,092	11,076
労働力人口	6,886	6,910
就業者数	6,724	6,694

① 失業率は約 0.8%ポイント上昇した。コロナ感染症拡大により家で過ごすことを選ぶ人が増えたためか、労働力率も低下した。

② 失業率は約 1%ポイント上昇した。コロナ感染症拡大により家で過ごすことを選ぶ人が増えたためか、労働力率も低下した。

③ 失業率は約 1.2%ポイント上昇した。コロナ感染症拡大により家で過ごすことを選ぶ人が増えたためか、労働力率も低下した。

④ 失業率は約 0.8%ポイント上昇した。コロナ感染症拡大にも関わらず、労働力率にほとんど変化は見られなかった。

問１９　ある個人の毎期の効用が以下のような相対的リスク回避度一定（CRRA）型の効用関数で与えられているものとする：

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad \gamma \neq 1$$
$$= ln(C_t), \qquad \gamma = 1$$

C_tは第t期の消費、ただしγは相対的リスク回避度を表すパラメーターである($\gamma > 0$)。またこの個人は、来期の消費から得られる効用を主観的割引因子βで割り引いて評価している($0 < \beta < 1$)。利子率の変化に対する、この個人の異時点間の代替の弾力性（Elasticity of Intertemporal Substitution: 以下 EIS）に関する記述として正しいものを選びなさい。

① リスク回避度が高いと EIS は小さくなり、βが大きいと EIS は大きくなる
② リスク回避度が高いと EIS は小さくなるが、βの値と EIS は無関係
③ リスク回避度が高いと EIS は大きくなり、βが大きいと EIS は大きくなる
④ リスク回避度が高いと EIS は大きくなり、βが大きいと EIS は小さくなる

問２０　あなたは実証分析で、大企業のサンプルと中小企業のサンプルに分けて、以下のような投資関数を推計しようとしている。

$$\frac{I_i}{K_i} = \alpha + \beta_1 \cdot Q_i + \beta_2 \cdot \frac{CF_i}{K_i} + \beta_3 \cdot \ln(A_i)$$

ただし I_iは企業 i の投資額、K_iは資本、Q_iはトービンの Q、CF_iはキャッシュフローである。資本市場が完全でないとすると、この式の右辺の説明変数のパラメーターはどのような符号をとると予測されるか。正しい組み合わせを選びなさい。

① β_1(+)、β_2(+)。β_2の絶対値は中小企業の方が大きい。
② β_1(+)、β_2(+)。β_2の絶対値は大企業の方が大きい。
③ β_1(−)、β_2(−)。β_2の絶対値は大企業の方が大きい。
④ β_1(+)、β_2(−)。β_2の絶対値は中小企業の方が大きい。
⑤ β_1(+)、β_2(−)。β_2の絶対値は大企業の方が大きい。

第 2 題

第 2 題と第 3 題から一題のみ選択すること。この問題（第 2 題）を解いた場合は第 3 題に解答してはいけない。

Choose either 第 2 題 or 第 3 題. If you choose 第 2 題, do not answer 第 3 題.

2 人の消費者（A さんと B さん）が公共財と金銭移転から効用を得るとする。2 人の効用関数をそれぞれ、

$$u_A(G, m_A) = ln\,G + m_A$$
$$u_B(G, m_B) = 3\,ln\,G + m_B$$

とする。ただし、Gは公共財の消費量、m_A, m_Bはそれぞれ A さんと B さんへの金銭移転である。また、$ln\,x$はxの自然対数を表す。公共財をG単位生産するための費用は$2G$とする。以下の問いに答えなさい。

(a) Gを公共財として考えて良い理由を述べなさい。

(b) 公共財の供給費用を消費者で負担するとき（すなわち$m_A + m_B = -2G$のとき）、Gのパレート効率的な供給量を求めなさい。

公共財のパレート効率的な供給量をリンダール・メカニズムにより達成したい。リンダール・メカニズムにおいてiさんが希望する公共財供給量をG_i, iさんの公共財供給費用の負担割合をθ_iとする。このとき、iさんの予算制約式は、$m_i + \theta_i 2G_i = 0$である。（$i \in \{A, B\}$）

(c) 負担割合がθ_Aのときに A さんが希望する公共財供給量を求めなさい。

(d) 負担割合がθ_Bのときに B さんが希望する公共財供給量を求めなさい。

(e) リンダール均衡における公共財供給量と A さんの負担割合をそれぞれ求めなさい。

(f) B さんが問(d)のように希望する公共財供給量を申告する一方で、A さんは負担割合に関わらず、希望する公共財供給量として$z\left(> \frac{3}{2}\right)$を申告したとき、公共財供給量と A さんの負担割合を求めなさい。ヒント：zの関数として求めること。

(g) リンダール均衡において、A さんは希望する公共財供給量を虚偽申告するインセンティブがあることを示しなさい。

第 3 題

<u>第 2 題と第 3 題から一題のみ選択すること。この問題（第 3 題）を解いた場合は第 2 題に解答してはいけない</u>。

<u>Choose either 第 2 題 or 第 3 題. If you choose 第 3 題, do not answer 第 2 題</u>.

家計は、0 期の消費量C_0と、1 期の消費量C_1と、貯蓄量Sを適切に選んで、効用関数

$$ln(C_0) + ln(C_1)$$

を最大化する。ただし、家計は 0 期の予算制約式

$$C_0 + S = Y_0 - T_0$$

および、1 期の予算制約式

$$C_1 = S + Y_1 - T_1$$

を満たさなければならない。ここで、Y_0は 0 期の所得、T_0は 0 期の税金、Y_1は 1 期の所得、T_1は 1 期の税金である。$Y_0 > T_0 > 0$、および、$Y_1 > T_1 > 0$が満たされていると仮定する。

(a) 消費者にとって最適な消費量と貯蓄量$\{C_0^*, C_1^*, S^*\}$を求めなさい。

(b) 問(a)で求めた 0 期と 1 期の消費量を、それぞれ 0 期と 1 期の所得と税金の関数として$C_0^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$と$C_1^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$と表すことにする。0 期の税金が限界的に上がった時の 0 期の消費への影響

$$\frac{\partial C_0^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)}{\partial T_0}$$

を求めなさい。

(c) ケインズ型消費関数と呼ばれる消費関数では、0 期の消費量は 0 期の可処分所得$(Y_0 - T_0)$に依存して決まると考える。つまり、0 期の消費量は

$$C_0^K(Y_0 - T_0) = \bar{C} + c(Y_0 - T_0)$$

という式で与えられる。ここで、$\bar{C}$とcは正の定数である。ケインズ型消費関数と、(a)で求めた消費関数$C_0^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$に関して

$$\frac{\partial C_0^*}{\partial T_0} = \frac{\partial C_0^K}{\partial T_0}$$

が成立することはあるか？あるとすれば、それはどのような条件のもとか？

(d) ケインズ型消費関数と、問(a)で求めた消費関数$C_0^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$に関して

$$\frac{\partial C_0^*}{\partial T_1} = \frac{\partial C_0^K}{\partial T_1}$$

が成立することはあるか？あるとすれば、それはどのような条件のもとか？

(e) 0 期の消費を減税で刺激したいが、0 期と 1 期を通じた税収の総額は減らしたくないと、政府が考えたとする。そこで、0 期の税金をT_0から$T_0 - \Delta$に減らす一方、1 期の税金をT_1から$T_1 + \Delta$に増やしたとする。ここで、Δは正の定数である。問(a)を解いて導いた 0 期の消費関数$C_0^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$によると、この税額の変更によって 0 期の消費はどのくらい増えるか？

(f) 問(e)で考えた税額の変更は、1 期の消費をどのくらい減らすか？問(a)を解いて導いた 1 期の消費関数$C_1^*(Y_0, T_0, Y_1, T_1)$をもとに答えよ。

２．政治経済学

1. 貨幣の流通手段機能について説明しなさい。

2. 相対的剰余価値生産について説明しなさい。

3. 「汚染者負担の原則（Polluter Pays Principle）」について、①定義と、②この原則が適用された政策の具体例を論じなさい。

4. 現存した社会主義計画経済は、企業の管理方法において重大な非効率性を抱えていた。社会主義経済の長期的停滞を説明するにあたって極めて整合的な解釈の１つは規模に関する収穫逓減である。規模に関する収穫逓減による場合、社会主義の停滞はどのように説明できるであろうか。歴史的経緯、政治制度および開発手法を勘案し、記述しなさい。

３．統計学・計量経済学

第 1 題

以下の用語説明問題 6 問の中から **4 問選択し答えよ．5 問以上答えた場合には，すべての解答を無効とする場合がある．**

1. トービット (Tobit) モデルとその推定法について説明せよ．
2. 処置効果の分析における差の差分析 (difference-in-differences analysis) について説明せよ．
3. ベイズの定理について説明せよ．
4. ガウス・マルコフの定理について説明せよ．
5. インフォメーション・レシオについて説明せよ．
6. 需要曲線と供給曲線の識別における同時決定性 (simultaneity) の問題とその解決法について説明せよ.

第 2 題

以下の 3 問の中から **1 問だけ選択し答えよ．2 問以上答えた場合には，すべての解答を無効とする場合がある．**

1. 以下の統計学関係の問題 **(a)** から **(c)** のすべてに答えよ．いずれの問題においても特に断りのない限り導出過程は省略しないこと．

(a) $X_1, \ldots, X_n$ は独立に同一分布に従い，それぞれは以下の密度関数を持つとする．ここで θ と $\lambda\,(\lambda > 0)$ は未知パラメータである．

$$f(x;\theta,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\exp\left(-\frac{|x-\theta|}{\lambda}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

このとき θ と λ の最尤推定量を求めよ．簡単のため標本数 n は奇数 (an odd number) としてよい．また観測値もすべて異なるとしてよい．

(b) **(i)** 二つの互いに独立な確率変数 X と Y があり，それぞれ密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つとする．このとき，$Z = X + Y$ の密度関数 $f_Z(z)$ は以下で与えられることを示せ．微分と積分の順序交換などは適宜成立するとしてよい．被積分関数が 0 の領域は積分範囲から除かれるが，この (i) では気にしなくてよい．

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

(ii) パラメータ α と β を持つガンマ分布の密度関数は以下の通りである．パラメータは正とする．

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad 0 < x < \infty$$

二つの互いに独立な確率変数 X と Y が，それぞれパラメータ α_1 と β，パラメータ α_2 と β のガンマ分布に従うとする．$Z = X + Y$ で定義される Z はパラメータ $\alpha_1 + \alpha_2$ と β のガンマ分布に従うことを示せ．

(ヒント) $\Gamma(s)$ は以下のガンマ関数で，k が自然数のときは $\Gamma(k) = (k-1)!$ である．

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \exp(-x) dx \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1} dx = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

(iii) $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立にパラメータ β^{-1} の指数分布に従うとする (平均が β)．このとき，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ は，パラメータ n と β のガンマ分布に従うことを示せ．

(iv) ある事象が時間間隔をおいて観測され，その観測時刻は $T_1, T_2, \ldots$ とする．時刻は 0 から始まり ($T_0 = 0$)，最初の観測時刻が T_1 であるとする．観測間隔 $V_n = T_n - T_{n-1}$ は互いに独立にパラメータ β^{-1} の指数分布に従うとする．β は共通である．このとき，時刻 1 までにちょうど k 回だけその事象が観測される確率を求めよ．

(c) ポアソン分布についても (b) の (ii) と同様な性質が成り立つ．その性質を述べた上で証明せよ．

(ヒント) $(a+b)^k$ の展開に関する結果は使ってよい．

2. 以下の計量経済学関係の問題 **(a)** から **(f)** のすべてに答えよ．いずれの問題においても**特に断りのない限り導出過程は省略しないこと．**

(Y_i, X_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ は, 独立に同一分布に従う無作為標本だとする．以下の回帰モデルについて考える．

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

ここで u_i は誤差項を表し, $E(u_i \mid X_i) = 0$ を満たすとする．

(a) 未知パラメータ α, β の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めよ．

(b) 残差 $\hat{u}_i$ を以下のように定義する．

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i.$$

$\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i = 0$ および $\sum_{i=1}^{N} X_i \hat{u}_i = 0$ となることを示せ．

(c) $\hat{\beta}$ が β の一致推定量となるための条件を与えつつ, 一致性を示せ．

(d) X_i が 0 または 1 の値のみを取るとする．$X_i = 0$ である観測値による Y_i の標本平均を $\bar{Y}_0$ とする．同様に $X_i = 1$ である場合は $\bar{Y}_1$ とする．$\hat{\beta} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ となることを示せ．

(e) Y_i が 0 または 1 の値のみを取るとする．u_i の分散が不均一 (heteroskedasticity) であることについて説明せよ．

(f) $E(u_i \mid X_i) = 0$ の仮定が疑われる場合の, X_i の操作変数を Z_i とする．β の 2 段階最小二乗推定量 $\tilde{\beta}$ を求めよ．

3. 以下のファイナンス関係の問題 **(a)** から **(d)** のすべてに答えよ．いずれの問題においても**特に断りのない限り導出過程は省略しないこと．**

(a) m 円持っている人が,「コインを投げ, 表が出れば相手から 1 円もらい，裏が出れば 1 円を相手に渡す」という賭けを行う．この人は，M 円に達するか，破産する（0 円になる）までこの賭けを繰り返すとする．この人が破産する確率を求めよ．

(b) 現時点の株価指数が $10,000$ 円のとき，この株価指数を原資産とする満期まで 1 年の権利行使価格 $10,500$ 円のコール・オプションの価格が $1,000$ 円であるとする．無リスク金利（年利）を 5%として，プット・コール・パリティから導出されるプット・オプションの価格を求めよ．ただし，X 円の無リスク資産は n 年後に $X \times (1 + 0.05)^n$ になるとして計算してよい．

(c) 原資産の価格を S，満期を T，権利行使価格を K，無リスク金利を $r=0$，原資産の変動を表すパラメータを Σ とする．コール・オプションの価格が

$$C(S,T,K,\Sigma) = (S-K)N(d) + \Sigma\sqrt{T}n(d)$$

で与えられるとする．ただし，$d = \frac{S-K}{\Sigma\sqrt{T}}$，$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$N(x) = \int_{-\infty}^{x} n(y)dy$ である．$\frac{\partial}{\partial S}C(S,T,K,\Sigma)$ と $\frac{\partial^2}{\partial S^2}C(S,T,K,\Sigma)$ をモデルパラメータと d，関数 n，N を用いて表せ．

(d) ある損害保険会社が，初年度 (1 年度) に自動車保険を始めるとする．各年度始めに集まる自動車保険の新規保険数はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従い，各契約が次の年度に継続するか否かは互いに独立であり，その確率は $p \in (0,1)$ であるとする．このとき，n 年度始めの保険契約数 X_n はどのような確率分布に従うか．

４．経済史

下記の第１題から第３題のうち、任意の２題を選択して、それぞれ別紙に解答しなさい。解答に用いる言語は、日本語でも英語でもどちらでもよいものとする。

なお、解答文の冒頭に問題番号（１、２、３）を明記すること。

第１題

荘園制から太閤検地を経て地租改正にいたる日本農業経済史上の変化について、制度（institution）と成果（performance）の関係を明確にしながら具体的に論じなさい。

第２題

計画（planning）の果たした社会経済史上の意義について、任意の事例に即して具体的に論じなさい。

第３題

奴隷(slave)や年季契約労働者(indentured labor)などの不自由労働者(unfree labor)の移動がもたらした社会経済史上の帰結について、その移出地域及び移入地域の双方の変化に言及しつつ、任意の事例に即して具体的に論じなさい。