マクロおよびミクロ経済学
出題の趣旨・解答例

問題Ｉ

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）
単純な効用最大化問題の最適解の導出と、買手独占均衡の導出を通じ、ミクロ経済学の基礎力を問う。買手独占の設問では、経済厚生に関する設問を通じ、経済厚生に関する理解も問う。

１．（１）$x_i = \alpha I / p_i$ （基本的なコブ・ダグラス型の効用最大化。ラグランジ乗数法等を用いて導出できる。
（$L = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$ から一階条件 $\partial L / \partial x_i = 0, i = 1, 2$ と予算制約を連立させて解く。）

（２）－１ （（１）より、$\ln x_i = \ln(\alpha I) - \ln(p_i)$ であるため、$\Delta \ln x_i = -\Delta \ln(p_i)$、したがって $\Delta \ln(x_i) / \Delta \ln(p_i) = -1$ ）

２．（１）労働供給関数を逆関数の形にすると：

$$w = L / 2 + 4$$

これから $X = L(L / 2 + 4)$ 。

（２）$\partial X / \partial L = L + 4$ となり、これが限界支出。これと、$VMPL$ を一致させる L は、$L = 3.$

（３）$10 - L = L / 2 + 4$ を満たす L は $L = 4.$ そのため、（２）と比較して、雇用量が少なくなっている。買手独占企業は、雇用量を低く抑えて賃金を下げることによって利潤を増やすために、効率的である競争均衡よりも雇用量が少なくなっている。これが買手独占の社会厚生上の損失である。(余剰などについて議論してもよい)

問題Ⅱ

現在マクロ経済学において主流となっている「ミクロ的基礎づけのあるマクロ」をテーマとした，経済成長理論の問題である．Harrod-Domar モデルの名前は受験生には馴染みがないと思われるが，あえてその名を出すことにより，初めて聞くことも諦めずに理解しようとする姿勢を試しており，実際，問題文を注意深く読めば，ソローの経済成長モデルよりも単純であることに気づける．なお，本問は受験者が「ミクロ的基礎づけ」について聞いたことがなくても解けるように構成されている．

各設問は，等式制約付きの最大化問題，逐次代入，無限等比級数の和，および数学的帰納法などの基本的な数理的能力を試すものとなっている．例えば問 2-(2)が解けなくとも(3)や(5)は答えられるようになっているが，これに気づけるかどうかも，受験者が問題を注意深く読むかどうかにかかっている．

解答

１.

$I_t = S_t = sY_t = sAK_t$ より

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ &= sAK_t + (1-\delta)K_t \\ &= (sA + 1 - \delta)K_t \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = sA + 1 - \delta.$$

したがって

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{AK_{t+1}}{AK_t} = sA + 1 - \delta.$$

２.

資源制約より

$$K_1 + C_0 = RK_0$$

および

$$\frac{K_2}{R}+\frac{C_1}{R}=K_1$$

が成立するので，後者を前者に代入して K_1 を消去すれば

$$\frac{K_2}{R}+\frac{C_1}{R}+C_0=RK_0.$$

同様に資源制約より

$$\frac{K_3}{R}+\frac{C_2}{R}=K_2$$

であるから，これを先の式に代入して K_2 を消去すれば

$$\frac{K_3}{R^2}+\frac{C_2}{R^2}+\frac{C_1}{R}+C_0=RK_0.$$

この調子で逐次代入を続け $\lim_{t\to\infty} K_t/R^t=0$ を課せば

$$C_0+\frac{C_1}{R}+\frac{C_2}{R^2}+\cdots=RK_0.$$

が導かれ， $p_t=1/R^t$であることが分かる.

（２） a-b

方法１：予算制約を目的関数に代入

生涯予算制約式より $C_0=RK_0-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C_t}{R^t}$ であるから，これを目的関数に代入

して C_0 を消去すれば

$$u\left(RK_0-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C_t}{R^t}\right)+\beta u(C_1)+\beta^2u(C_2)+\beta^3u(C_3)+\cdots$$

となる. 一階条件はこれを C_t, $t\geq 1$ で微分して０とおくことによって導かれ,

$$0=u'(C_0^*)\left(-\frac{1}{R^t}\right)+\beta^t u'(C_t^*),$$

すなわち

$$\frac{u'(C_0^*)}{(\beta R)^t} = u'(C_t^*).$$

この式は t および $t+1$で成立するから

$$\frac{u'(C_{t+1}^*)}{u'(C_t^*)} = \frac{1}{\beta R}, t \geq 0.$$

ここで $u'(C) = C^{-\gamma}$ より，

$$\left(\frac{C_{t+1}^*}{C_t^*}\right)^{-\gamma} = \frac{1}{\beta R},$$

すなわち

$$\frac{C_{t+1}^*}{C_t^*} = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}, t \geq 0.$$

方法２：ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ関数を以下のように定義する：

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) + \lambda\left(RK_0 - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{R^t}\right).$$

これを C_t，$t \geq 0$で微分して０とおけば

$$\beta^t u'(C_t^*) - \frac{\lambda}{R^t} = 0, t \geq 0.$$

これが一階条件である．この式は t および $t+1$ で成立するので

$$\frac{u'(C_{t+1}^*)}{u'(C_t^*)} = \frac{1}{\beta R}.$$

あとは方法１と同様である．

（３）

前問より $C_t^* = g^t C_0^*$ であるから，これを生涯予算制約式に代入すれば

$$RK_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t^*}{R^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g^t C_0^*}{R^t} = C_0^* \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{g}{R}\right)^t = \frac{C_0^*}{1-g/R}.$$

したがって $C_0^* = RK_0\left(1-\frac{g}{R}\right) = K_0(R-g).$

（４）

第０時点での資源制約より

$$K_1 = RK_0 - C_0^* = RK_0 - K_0(R-g) = gK_0$$

が整理するから $K_{t+1} = gK_t$ は $t = 0$ においては成立する．数学的帰納法のため $K_{t+1} = gK_t$ が $t = \tau$ で成立すると仮定すると

$$K_{\tau+2} = RK_{\tau+1} - C_{\tau+1}^* = R(gK_\tau) - gC_\tau^* = g(RK_\tau - C_\tau^*) = gK_{\tau+1}$$

である．ここで１つ目と４つ目の等号は各期の資源制約に因るものであり，２つ目の等号は，帰納法の仮定と前問の消費成長の結果に因る．これにより $K_{t+1} = gK_t$ は $t = \tau + 1$ でも成立するので, すべての $t \geq 0$ で成立することが示された.

（５）

問１より Harrod-Domar モデルでの資本ストックの成長率は $sA + 1 - \delta$ であり，一方で効用最大化に基づいたモデルでは資本ストックの成長率は $g = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}$ であったから，両者を等号で結べば $sA + 1 - \delta = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}$ ，すなわち

$$s = \frac{[\beta(A+1-\delta)]^{\frac{1}{\gamma}} - (1-\delta)}{A}.$$

The Solutions and Goals.

Ⅰ

The problems test the knowledge of basic microeconomics through: (1) a utility maximization problem of a consumer, and (2) a derivation of monopsonistic equilibrium. In the second problem, we also assess the understanding on economic efficiency and welfare.

1．（1） $x_i = \alpha I / p_i$ (Maximization of Cobb-Douglas Utility function. It can be solved by using the Lagrange's method, for instance.

（From the Lagrangian function $L = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$, obtain the first order necessary conditions $\partial L / \partial x_i = 0, i = 1,2$. And then solve for the optimal level of consumption using the first order conditions and the budget constraint.)

（2）－1　(From (1), we have $\ln x_i = \ln(\alpha I) - \ln(p_i)$, therefore $\Delta \ln x_i = -\Delta \ln(p_i)$. Then it follows that $\Delta \ln(x_i) / \Delta \ln(p_i) = -1$.)

2．（1） By rewriting the labor supply function, we have

$$w = L/2 + 4$$

From this, we have the expenditure (the value of the wage bill) as $X = L(L/2+4)$.

（2） From (1), we have $\partial X / \partial L = L + 4$, and this is the marginal expenditure(marginal cost). The level of L at which marginal expenditure equals $VMPL$ is $L = 3$.

（3） The level of L at which $10 - L = L/2 + 4$ holds is $L = 4$. L under the monopsony equilibrium is less than that under the perfectly competitive equilibrium. A monopsonist reduces the employment level and thus lower the hourly wage rate, in order to maximize its profit. Because of this incentive of the monopsonist, the employment level is lower than that of the efficient level (the level under the competitive equilibrium). [The answer could include discussions of relative surplus under the two equilibria.]

II

The problem tests candidates' ability to read and interpret economic models carefully. It is expected that most candidates have never heard of "Harrod-Domar model". Nonetheless, carefully reading the question will allow them to realize that the model is merely an easier version of the Solowian growth model. The problem is designed so that even if a candidate could not answer question (2), he/she could still answer (3) and (5). Through this question, candidates are tested on their mathematical skills such as constrained optimization with a single equality constraint, iterated substitution, the sum of geometric sequence, and mathematical induction. Finally, if a candidate has heard of "micro-founded macroeconomics," he/she would have small advantage though that is not necessary.

Solutions

1. Because $I_t = S_t = sY_t = sAK_t$, the capital accumulation equation implies

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ &= sAK_t + (1-\delta)K_t \\ &= (sA + 1 - \delta)K_t. \end{aligned}$$

It follows that

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = sA + 1 - \delta.$$

Also,

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{AK_{t+1}}{AK_t} = sA + 1 - \delta.$$

2.

(1) We have

$$K_1 + C_0 = RK_0,$$

and

$$\frac{K_2}{R}+\frac{C_1}{R}=K_1.$$

Substituting for K_1 from the latter equation into the former, we have

$$\frac{K_2}{R}+\frac{C_1}{R}+C_0=RK_0.$$

Likewise, we have

$$\frac{K_3}{R}+\frac{C_2}{R}=K_2.$$

Substituting for K_2 from this equation into the last equation, we have

$$\frac{K_3}{R^2}+\frac{C_2}{R^2}+\frac{C_1}{R}+C_0=RK_0.$$

By iterating this process of substitution and by imposing $\lim_{t\to\infty} K_t/R^t=0$, we have

$$C_0+\frac{C_1}{R}+\frac{C_2}{R^2}+\cdots=RK_0.$$

Thus, we have $p_t=1/R^t$.

(2)-(a) and (b)

Method 1: Substituting out the budget constraint

The lifetime budget constraint implies $C_0=RK_0-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C_t}{R^t}$. Substituting for C_0 from the budget constraint into the objective function, we have

$$u\left(RK_0-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C_t}{R^t}\right)+\beta u(C_1)+\beta^2u(C_2)+\beta^3u(C_3)+\cdots.$$

The first-order conditions are obtained by differentiating it with respect to $C_t,\ t\geq 1$ and equating to zero, that is,

$$0 = u'(C_0^*)\left(-\frac{1}{R^t}\right) + \beta^t u'(C_t^*),$$

or

$$\frac{u'(C_0^*)}{(\beta R)^t} = u'(C_t^*).$$

Because the last equation holds for both t and $t+1$, we have

$$\frac{u'(C_{t+1}^*)}{u'(C_t^*)} = \frac{1}{\beta R}, t \geq 0.$$

Because $u'(C) = C^{-\gamma}$, we have

$$\left(\frac{C_{t+1}^*}{C_t^*}\right)^{-\gamma} = \frac{1}{\beta R},$$

or

$$\frac{C_{t+1}^*}{C_t^*} = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}, t \geq 0.$$

Method 2: The Lagrangian method

Define the Lagrangian by

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) + \lambda\left(RK_0 - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{R^t}\right).$$

By differentiating it with respect to C_t, $t \geq 0$ and equating to zero, we have

$$\beta^t u'(C_t^*) - \frac{\lambda}{R^t} = 0, t \geq 0.$$

This is the first-order condition. Because this equality holds for both t and $t+1$, we have

$$\frac{u'(C_{t+1}^*)}{u'(C_t^*)} = \frac{1}{\beta R}.$$

The remaining process will be the same as in Method 1.

(3)

The last question implies $C_t^* = g^t C_0^*$. By substituting from this equality for C_t^* into the lifetime budget constraint, we obtain

$$RK_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t^*}{R^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g^t C_0^*}{R^t} = C_0^* \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{g}{R}\right)^t = \frac{C_0^*}{1 - g/R}.$$

Therefore $C_0^* = RK_0\left(1 - \frac{g}{R}\right) = K_0(R - g)$.

(4)

The date-0 resource constraint implies

$$K_1 = RK_0 - C_0^* = RK_0 - K_0(R - g) = gK_0.$$

Therefore, $K_{t+1} = gK_t$ holds for $t = 0$. Suppose by way of mathematical induction that $K_{t+1} = gK_t$ holds for $t = \tau$. Then, we have

$$K_{\tau+2} = RK_{\tau+1} - C_{\tau+1}^* = R(gK_\tau) - gC_\tau^* = g(RK_\tau - C_\tau^*) = gK_{\tau+1},$$

where the first and the fourth equalities follow from the resource constraint, and the second equality follows from the induction assumption and the optimal consumption growth. Hence $K_{t+1} = gK_t$ holds for $t = \tau + 1$. Thus, it holds for all $t \geq 0$.

(5)

In the Harrod-Domar model, the growth rate of capital is $sA + 1 - \delta$. In the micro-founded version, the growth rate of capital is $g = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Therefore, we have $sA + 1 - \delta = (\beta R)^{\frac{1}{\gamma}}$, or

$$s = \frac{[\beta(A + 1 - \delta)]^{\frac{1}{\gamma}} - (1 - \delta)}{A}.$$

経済思想
出題の趣旨・解答例

問題 I

経済思想史に関する基本的な知識を問う問題である．重商主義は近代の経済思想の出発点に位置するものであり，その後の経済思想にも大きな影響を与えた．重商主義には多様な考え方が含まれており，何に注目するかによって，その解釈が異なっている．重商主義概念の原型を創ったアダム・スミスは，外国貿易によって貨幣を獲得しようとする学説と定義する．これに対して，フリードリッヒ・リストは，工業保護政策に注目し，グスタフ・フォン・シュモラーは，重商主義の政治的側面を強調する．また，ジョン・メイナード・ケインズは，重商主義者が根底にある理論的基礎にあまり気づかずに，実際的叡知を含んだ格率に到達していたと評価した．誰を重商主義の代表者と考えるかということについても，さまざまな解釈がある．本設問においては，こうした多様な解釈が成り立つ重商主義について，基本的な知識をもっているかどうかが問われている．

This is a question about fundamental knowledge in the history of economic thought. Mercantilism is located at the starting point of the modern economic thought. It has given great influence on the following economic thought. Mercantilism contains manifold notions. There are various interpretations on it because of different viewpoints. Adam Smith, who created the prototype of the concept, defines it as the doctrine to support the acquisition of money by foreign trade. On the contrary, Friedrich List gives attention to protection of industry and Gustav von Schmoller stresses political aspects of mercantilism. Furthermore, John Maynard Keynes approves that mercantilists may have hit upon their practical wisdom without having had much cognizance of the underlying theoretical grounds. We have varied interpretations of the representative in the stream. This question examines whether applicants have basic knowledge about mercantilism that accompanies such different interpretations.

問題Ⅱ

　現代の経済思想に関する基本的な問いである。Ａ．センは、経済理論において貢献しただけでなく、経済思想や哲学においても一定の貢献をしている。彼のケイパビリティ・アプローチは、その基礎において、従来のウェルフェア（厚生）概念を超える哲学的含意を持っている。また、ケイパビリティ・アプローチから、国連における人間開発指標の作成が生まれ、最近ではフランスにおいて、新しいウェルビイングの指標が提案されるに至った。このような広範な影響のなかで、ケイパビリティの概念を明確に理解し、その意義を評価することは重要である。その際、関連して、センの自由概念が、貧困問題や経済開発問題に対して持つ意義を理解することも、重要である。センの経済思想がもつ意義について一定の理解と見識を持つことが、この問題において問われている。

This is a basic question on modern economic thought. A. Sen contributed not only in economic theory but also in economic thought and philosophy. On its foundation, his capability approach has important philosophical implications beyond traditional conceptions of the idea of welfare. In addition, from his capability approach, the index of human development in the United Nations was created. Recently in France, new index of well-being have been proposed partly based on his idea. Under such broad influence, it is important to understand the concept of capability and evaluate its significance. At the same time, it is also important to understand the significance of Sen's concept of freedom in terms of poverty issues and economic development problems. It is requested to have a certain understanding and insight on the significance of Sen's economic thought in this question.

経済史

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ.

1. 15-16 世紀以降のヨーロッパとアジアの直接交易やヨーロッパによる海外進出・植民地制服が生じた。ポルトガル人のインド洋進出は、香辛料貿易を地中海から奪い、遠隔地貿易を東南アジアや日本まで広げた。スペイン人のアメリカ征服は、金銀のヨーロッパへの流入を招き、インフレーション(価格革命)をもたらした。アメリカでの植民地経営は、アフリカからの奴隷貿易を伴った。東インド会社が設立され、イギリスやオランダの拡大を導いた。

The maritime discoveries led the establishment of direct commerce between Europe and Asia and the conquest and settlement of the New World by Europeans. Portuguese expansion to the Indian Ocean has shifts the spice trade from the Mediterranean Sea and extend the long – distance trade to South-East Asia and Japan. Spanish conquest of America leads an influx of gold and silver to Europe and causes an inflation. The colonial economy in America causes a slave trade from Africa. East Indian Companies led expansion of British and Dutch trades.

問題Ⅱ.

後発工業国家は、「最初の工業国家」のイギリス以外の事例を挙げる。政府の経済政策を筆頭に、株式会社や財閥等の大企業組織、海外技術移転、銀行等の金融制度整備、天然資源調達等を特徴とする。ドイツ、日本等をはじめ、アジアのキャッチアップ型工業化や輸入代替工業化、輸出志向工業化、社会主義国の計画経済や市場経済化を選んでも良い。

Late industrialized countries could be any industrializers except for “the first industrial nation”, Britain. Their characteristics could be economic policies of the government, the financial institutionalization such as banks, the arrangement of natural resources. Not only German and Japanese industrializations, but also Asian (catch-up industrialization or import substituting industrialization) and socialist ones (planned economy or market-oriented economic reform) could be included.

問題Ⅲ.

第一次世界大戦後のヨーロッパ経済の後退は、アメリカ経済の繁栄（パクス・アメリカーナ）をもたらした。しかし好況下での生産過剰は 1929 年の世界恐慌を引き起こし、第二次世界大戦の一因となった。アジアではヨーロッパ製品の不在を日本製品が補い、その結果、日本経済のアジアにおける影響力が強まった。日本はこの勢いによってアジア諸国への進出をすすめた。ドイツでは敗戦にともなって多額の賠償金が発生した。そのためドイツ経済は落ち込み、ナチスの台頭をうながした。ロシアではロシア革命が勃発し、社会主義と計画経済の時代が開始した。

After World War I, the retreat of European economy brought the economic prosperity of America (Pax Americana). However, the overproduction under American prosperous conditions caused the Great Depression in 1929, which became one factor of World War II. In Asia, the influence of the Japanese economy was strengthened, because Japanese products made up for the absence of European products in Asia. And Japan started aggression to Asian countries. Germany, because of the defeat, had to pay a large amount of compensation, which made its economy fall into recession and led the rise of Nazism. In Russia, the Russian Revolution broke out and the age of socialism and the planned economy started.

問題Ⅳ.

金融史に関する基本的知識を問う問題である。回答には以下のキーワードが含まれるはずである。貨幣、改鋳、為替、両替商、銀行、シルバー・ラッシュ（ポトシ銀山、石見銀山）、中央銀行、証券、ゴールド・ラッシュ（カリフォルニア、豪ビクトリア州）、金本位制、銀本位制、兌換紙幣、多角的国際決済、世界恐慌、管理通貨制度、不換紙幣、ブレトン・ウッズ体制、固定相場制、IMF（国際通

貨基金)、世界銀行、ニクソン・ショック、変動相場制

This is a question about fundamental knowledge of the financial history. It should include the following keywords: money, reminting, currency exchange, money changer, bank, silver rush (Potosi silver mine and Iwami silver mine), central bank, bill, gold rush (California, Victoria in Australia), gold standard system, silver standard system, convertible paper currency, multilateral international settlement, Great Depression, managed currency system, inconvertible paper currency, Bretton Woods system, fixed exchange rate system, IMF (International Monetary Fund), World Bank, Nixon shock, floating exchange rate system.

Statistics (solutions).

Question I.

1. We can see that f is nonnegative and satisfies

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dx \quad (\text{let } \log x = t, \text{ i.e., } x=e^t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt}=e^t)$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dt = 1,$$

noting that $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}$ is the density of $N(\mu,\sigma^2)$.

2.(1) $$E[X^k] = \int_0^\infty x^k f(x)dx$$
$$= \int_0^\infty x^k \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dx \quad (\text{let } \log x = t, \text{ i.e., } x=e^t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt}=e^t)$$
$$= \int_{-\infty}^\infty e^{kt}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dt$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{t^2-2(\mu+k\sigma^2)t+\mu^2}{2\sigma^2}\Big\}dt$$
$$= \exp\Big(k\mu+\frac{k^2}{2}\sigma^2\Big)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big[-\frac{\{t-(\mu+k\sigma^2)\}^2}{2\sigma^2}\Big]dt$$
$$= \underline{\underline{\exp\Big(k\mu+\frac{k^2}{2}\sigma^2\Big)}}$$

(2) Using $E[X^k]=m^k\omega^{\frac{k^2}{2}}$, we have $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2 = m^2\omega^2-(m\omega^{\frac{1}{2}})^2 = \underline{\underline{m^2\omega(\omega-1)}}$

(3) Using $$\frac{1}{2} = \Pr[X \le Me]$$
$$= \int_0^{ME} f(x)dx$$
$$= \int_0^{ME} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dx \quad (\text{let } \log x = t, \text{ i.e., } x=e^t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt}=e^t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\log(ME)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}dt,$$

we must have $\log(ME)=\mu$, i.e., $ME = \underline{\underline{e^\mu}}$

3.(1) $\ell(\mu,\sigma^2)=\sum_{i=1}^n \log f(X_i) = \underline{\underline{-\sum_{i=1}^n \log(X_i\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \sum_{i=1}^n \frac{(\log X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$

(2) Note that

$$\frac{\partial \ell(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{\log X_i-\mu}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial \ell(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^n\frac{(\log X_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2}.$$

Then, solving $\frac{\partial\ell(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{\partial\ell(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0$, we have

$$\underline{\underline{\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i}}, \quad \widehat{\sigma^2} = \underline{\underline{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\log X_i-\widehat{\mu})^2}}$$

問題 II.

1. $x' = x-1$，$n' = n-1$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= n\theta\sum_{x'=0}^{n'}\frac{n'!}{x'!(n'-x')!}\theta^{x'}(1-\theta)^{n'-x'} = n\theta\end{aligned}$$

となる．$x'' = x-2$，$n'' = n-2$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= n(n-1)\theta^2\sum_{x''=0}^{n''}\frac{n''!}{x''!(n''-x'')!}\theta^{x''}(1-\theta)^{n''-x''} = n(n-1)\theta^2\end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \mathrm{E}[X(X-1)] + \mathrm{E}(X) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 \\ &= n(n-1)\theta^2 + n\theta - (n\theta)^2 = n\theta(1-\theta)\end{aligned}$$

2.

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)f(x|\theta)}{\int_0^1 p(\theta)f(x|\theta)d\theta}$$

3. (a)

$$p(\theta|x) \propto p(\theta)f(x|\theta) = f(x|\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x} = \theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}$$

$$\int_0^1 \theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}d\theta = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)}$$

となることより，

$$p(\theta|x) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}$$

となる．

(b) ベータ分布 $\mathrm{Beta}(x+1, n-x+1)$．

(c)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\theta|x) &= \int_0^1 \theta\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\int_0^1 \theta^{(x+2)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1} \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+3)} = \frac{x+1}{n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\theta^2|x) &= \int_0^1 \theta^2\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\int_0^1 \theta^{(x+3)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1} \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\frac{\Gamma(x+3)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+4)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\theta|x) = \mathrm{E}(\theta^2|x) - \{\mathrm{E}(\theta|x)\}^2 &= \frac{(x+1)(x+2)}{(n+2)(n+3)} - \left(\frac{x+1}{n+2}\right)^2 \\ &= \frac{(x+1)(n-x+1)}{(n+2)^2(n+3)}\end{aligned}$$

Question III.

1.(1) We can see that f is nonnegative and satisfies

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{x^{m/2-1}\exp(-\frac{x}{2})}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}dx \quad (\text{let } x = 2t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt} = 2)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(m/2)}\int_{-\infty}^\infty t^{m/2-1}\exp(-t)dt = 1.$$

(2) $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty y^t \exp(-t)dy = \Big[-y^t\exp(-t)\Big]_{y=0}^{y=\infty} + \int_0^\infty ty^{t-1}\exp(-t)dy = t\Gamma(t)$

(3)
$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty xf(x)dx \\
&= \frac{x^{m/2}\exp(-\frac{x}{2})}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}dx \quad (\text{let } x = 2t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt} = 2) \\
&= \frac{2}{\Gamma(m/2)}\int_{-\infty}^\infty t^{m/2}\exp(-t)dt = \frac{2\Gamma(m/2+1)}{\Gamma(m/2)} = \underline{\underline{m}}, \\
E[X^2] &= \int_0^\infty xf(x)dx \\
&= \frac{x^{m/2+1}\exp(-\frac{x}{2})}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}dx \quad (\text{let } x = 2t; \text{ in this case } \tfrac{dx}{dt} = 2) \\
&= \frac{2^2}{\Gamma(m/2)}\int_{-\infty}^\infty t^{m/2+1}\exp(-t)dt = \frac{2^2\Gamma(m/2+2)}{\Gamma(m/2)} = m(m+2),
\end{aligned}$$

hence, $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \underline{\underline{2m}}$.

2.
$$\begin{aligned}
E[(W-\theta)^2] &= E[\{Bias[W] + (W - E[W])\}^2] \\
&= (Bias[W])^2 + 2Bias[W]E[W - E[W]] + E[(W - E[W])^2] \\
&= (Bias[W])^2 + E[(W - E[W])^2] \quad (\text{note that } E[W - E[W]] = 0)
\end{aligned}$$

3.(1) $\underline{\underline{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}}$ (2) Using 1(3) and 3(1), we immediately have

$$Bias[W] = \frac{a\sigma^2}{n-1}E\Big[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big] - \sigma^2 = a\sigma^2 - \sigma^2, \quad V[W] = \frac{a^2\sigma^4}{(n-1)^2}V\Big[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big] = \frac{2a^2\sigma^4}{n-1}$$

(3) Using 2 and 3(2), it is easy to see that

$$E[(W-\sigma^2)] = (Bias[W])^2 + V[W] = \sigma^4\Big[(a-1)^2 + \frac{2a^2}{n-1}\Big] \equiv \sigma^4 g(a).$$

Solving $0 = g'(a) = 2(a-1) + \frac{4a}{n-1}$, we have $\underline{\underline{a = \frac{n-1}{n+1}}}$

問題 **IV.**

1.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2\\ \hat{\beta}_1 &= \frac{S_{22}S_{1y} - S_{12}S_{2y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}\\ \hat{\beta}_2 &= \frac{S_{11}S_{2y} - S_{12}S_{1y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}S_{12} &= \sum(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2)\\ S_{jj} &= \sum(x_{ij} - \bar{x}_j)^2,\ S_{jy} = \sum(x_{ij} - \bar{x}_j)(y_i - \bar{y}),\ j = 1, 2\end{aligned}$$

である．

2.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1\\ \tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum(x_{i1} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y})}{\sum(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{S_{1y}}{S_{11}}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum \tilde{u}_i^2 &= S_{yy} - \frac{S_{1y}^2}{S_{11}}\\ \sum \hat{u}_i^2 &= S_{yy} - \frac{1}{D}\left(S_{22}S_{1y}^2 + S_{11}S_{2y}^2 - 2S_{12}S_{1y}S_{2y}\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$D = S_{11}S_{22} - S_{12}^2$ である．

$$\frac{1}{D}\left(S_{22}S_{1y}^2 + S_{11}S_{2y}^2 - 2S_{12}S_{1y}S_{2y}\right) - \frac{S_{1y}^2}{S_{11}} = \frac{1}{S_{11}D}\left(S_{11}S_{2y} - S_{12}S_{1y}\right)^2 \geq 0$$

より，

$$\sum \tilde{u}_i^2 \geq \sum \hat{u}_i^2$$

となる．

4. $R^2 = 1 - \dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$

5. 説明変数を増やすと必ず決定係数が増加 (非減少) する．決定係数を自由度で調整した

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2/(n-k-1)}{\sum(y_i - \bar{y})^2/(n-1)}$$

を用いる．ここで，k は説明変数の数である．

経営学

Management and Business Administration

出題の趣旨・解答例

問題Ｉ

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

出題の目的は，本問題を通して事業戦略に関連する基礎知識と論理的なスキルを確認することである。その内容は，競争戦略のコストリーダーシップ，差別化に焦点を当てている。

設問１と設問２は，コストリーダーシップと差別化について説明することを求めている。コストリーダーシップと差別化が，どのような条件によって最適な戦略となるのかを説明することが求められている。設問３は，諸条件における矛盾から，２つの戦略が両立できないことを説明することが求められている。設問４は，ある前提条件が変わることによって，２つの戦略を両立できる可能性を説明することが求められている。

These questions aim to examine the necessary knowledge and logical skills about business strategy. The focus of these questions is the cost leadership and differentiation in competitive strategy.

In the question 1 and 2, we ask the definition and logic of cost leadership and differentiation. In the question 3, we ask for the explanation about the trade-off between cost leadership and differentiation. Finally, in the question 4, we ask the explanation about the compatibility between cost leadership and differentiation.

問題Ⅱ

出題の趣旨は，本問題を通して経営学において必要とされる基礎知識と論理的なスキルを確認することである．機能別組織構造と事業別組織構造は組織を設計するアプローチとして一般的な 2 つの方法である．解答では，(1)機能別組織と事業部制組織の定義，(2)両組織が有効となる状況，(3)長所・短所を説明する必要がある．機能別組織では，共通の機能別に活動がまとめられる．各機能において，規模の経済が高められ，知識や技能を深めることが可能となる．他方，部門間の調整が必要となる環境変化への対応は難しくなる．事業部制組織では，個々の製品やサービスに従って活動がまとめられ，組織のアウトプットをもとに編成されている．意思決定が分権化されているため，不安定な環境の素早い変化に対応できる．他方，製品ライン間の調整が難しくなるという弱点がある．

This question examines applicants' basic knowledge and logical skills required in management. Functional organizational structure and divisional organizational structure are the most common approaches to structural design. Applicant need to explain (1)definitions, (2)contingencies , (3)strengths and weaknesses of functional organizational structure and divisional organizational structure. In a functional organizational structure, activities are grouped together by common function. Functional organizational structure allows economies of scale within functional departments, and enables in-depth knowledge and skill development. The weakness of the functional structure is a slow response to environmental changes that require coordination across functional departments. In a divisional organizational structure, activities are grouped together by individual products or services. Divisional organizational structure are suited to fast change in unstable environment because of decentralized decision making. The weakness of the divisional structure is product lines become separate from each other, and coordination across product lines can be difficult.

会計学

出題の趣旨・解答例

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

問題Ⅰ

本問は，財務会計で必ず学ぶ減価償却についての理解を問うことで，財務会計の基本的な知識の習得を確認することを意図している。

減価償却の目的としては､費用の期間配分として説明されている｡そもそも，なぜ費用の期間配分が必要なのか，それが損益にどのような影響を及ぼすのかの理解が問われる。１．は，そのような減価償却の基本的な理解を問うたものである。

２．は応用的な問題であって，減価償却と資金調達の関係を問うている。すなわち，減価償却によって資金の支出はない。しかし，費用が計上されるため利益は減少する。結果的に、資金が企業内に留保されることになる。この関係の理解を問うた問題であるが, 資金調達機能自体は, 減価償却の目的ではない。

This question is intended to confirm mastery of basic knowledge of financial accounting by questioning understanding about depreciation learned in basic financial accounting classes.

For purposes of depreciation, it is explained as a periodical allocation of expenses. Why the period allocation of expenses is necessary, and how it affects profit? Question 1. is related to these problems so it is aimed to ask a basic understanding of depreciation.

Question 2. is an applicable problem which asks the relationship between depreciation and financing. In other words, depreciation needs no cash outflow. However, profits would be decreased as expenses would be increased. As a result, cash will be retained within the corporation. This question aims to ask the understanding of this relationship, but the financing function itself is not the purpose of depreciation.

問題Ⅱ

本問は，予算の機能と課題に関する基本的な知識を確認することを意図したものである.

一般的に，予算には計画と統制の機能が期待されている．計画機能においては，組織の諸活動に関連する収益とコストの計画値の事前設定が行われ，その情報は関連する組織内のメンバーに共有される．それに加えて，計画のプロセスを通じた組織内でのあらゆる階層のメンバー間のコミュニケーションが促進され，部門間の調整も図られる．

また，予算は，予算上の計画値と実績値を比較する業績評価システムとしての役割も担っており，これを予算統制という．

しかし，予算にもいくつかの課題がある．一つだけ具体例を挙げると，予算上の会計数値を目標値として用いて業績評価をおこなうため，計画時に予算スラックなどが織り込まれる可能性があるという問題点がある．

本問においては，基本的な予算の機能を説明した後，いくつかの予算に関する課題について適切に解答してくれることを期待している．

Through this question, we would like to confirm basic knowledge about functions and problems of budgets.

Budgets are useful in the planning process and control process. In the planning process, budgets preset a lot of planned targets on revenues and costs related to the organization’s activities and they are shared in related members in the organization. In addition, they facilitate communication between members at all levels and enhance coordination between departments in the organization.

Budgets play an important role as performance evaluation system by comparing actual performance with planned targets in budgets. We call it budgetary control.

There are actually some problems in budget system. For example, it is possible to create budget slack to make the target easier because the planned accounting numbers in budgets are used as performance evaluation system.

We expect that basic functions and problems about budgets are explained relevantly through the answer to this question.