数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２７年８月２５日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注 意 事 項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

n を正の整数とする．行列として実行列のみを考えるものとする．正方行列 M に対して，対角成分の和を $\mathrm{tr}\, M$ と書き，転置行列を $M^\top$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) n 次の正定値対称行列 A に対して，$R^2 = A$ を満たす正定値対称行列 R が唯一つ存在することを示せ．以下では，この R を $\sqrt{A}$ と書く．

(2) n 次の正則行列 B に対して，$f(Q) = \mathrm{tr}(QB)$ を最大にする直交行列 Q は，

$$Q = \sqrt{B^\top B}^{-1} B^\top = B^\top \sqrt{BB^\top}^{-1}$$

を満たすことを示せ．

(3) n 次の正定値対称行列 G, H に対して，$LGL^\top = H$ となるような n 次の正方行列 L のうち，

$$g(L) = \mathrm{tr}\{(I - L)G(I - L)^\top\}$$

が最小となるものを求めよ．ここで I は n 次単位行列を表す．

第2問

N を非負の整数とする．$2N+1$ 個の確率変数 $X_1, \dots, X_{2N+1}$ は，未知のパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$ を含む確率密度関数

$$f(x;\mu) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\mu|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

に従って独立に分布する．この分布の分布関数を $F(x;\mu)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) サンプル平均 $\displaystyle\frac{1}{2N+1}\sum_{i=1}^{2N+1} X_i$ の期待値と分散を求めよ．

(2) $X_1, \dots, X_{2N+1}$ に基づく μ の最尤推定量 $\widehat{\mu}$ を求めよ．

(3) 最尤推定量 $\widehat{\mu}$ の従う確率分布の確率密度関数 $h(x;\mu)$ は，

$$h(x;\mu) = (2N+1)\binom{2N}{N} f(x;\mu)\{F(x;\mu)\}^N\{1-F(x;\mu)\}^N \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となることを示せ．

(4) 最尤推定量 $\widehat{\mu}$ の分散を V_{2N+1} とおく．V_{2N+1} は μ には依存しない．$\sqrt{2N+1}(\widehat{\mu}-\mu)$ の漸近分散

$$\lim_{N\to\infty}(2N+1)V_{2N+1}$$

を求めよ．

(5) パラメータ μ を推定するのに，サンプル平均を用いるのと最尤推定量を用いるのでは，どちらが良いと考えられるか．

第3問

ある領域内における個体の集団を考える．各個体はS, I, Rのいずれかの状態をとるものとする．時刻$t \geq 0$において状態S, I, Rを取る個体の密度をそれぞれ非負の実数$S(t)$, $I(t)$, $R(t)$で表わし，その時間変化は微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} &= \mu(I(t)+R(t)) - \beta S(t)I(t), \\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t), \\
\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma I(t) - \mu R(t)
\end{aligned}$$

に従うとする．ただし，μ, β, γは正のパラメータである．このとき，非負の初期値に対する解は，$t \geq 0$において非負性を保つ．以下の設問に答えよ．

(1) すべての個体の密度$S(t)+I(t)+R(t)$は時間によらない不変量であることを示せ．

以下，この不変量をKとし，$R(t)$を消去した微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} &= \mu K - \mu S(t) - \beta S(t)I(t), \\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t)
\end{aligned}$$

について考える．

(2) パラメータμ, β, γの値によらない定常解$(S(t), I(t)) = (S^\circ, I^\circ)$を求めよ．

(3) $S^* > 0$, $I^* > 0$となる定常解$(S(t), I(t)) = (S^*, I^*)$が唯一つ存在するパラメータ$\mu, \beta, \gamma$の条件を示し，その定常解$(S^*, I^*)$を求めよ．

以下では，この条件が満たされるものとする．

(4) 領域$D = \{(S, I) \mid S > 0, I > 0\}$上の関数

$$V(S,I) = S^*\left(\frac{S}{S^*} - 1 - \log\frac{S}{S^*}\right) + I^*\left(\frac{I}{I^*} - 1 - \log\frac{I}{I^*}\right)$$

が$(S, I) = (S^*, I^*)$で最小値を取ることを示せ．

(5) 解$(S(t), I(t))$は，$S(\tau) > 0$, $I(\tau) > 0$となる$\tau \geq 0$に対して

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(S(t), I(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau} \leq 0$$

を満たすことを示せ．

(6) 任意の初期値$S(0) > 0$, $I(0) > 0$に対して，$(S(t), I(t))$が$t \to \infty$で(S^*, I^*)に収束することを示せ．

第 4 問

自分と同じ種類の新しい粒子を生成し得る粒子の集団を考える．この集団の第 t 世代の粒子の集合を $S(t)$ とし，粒子数を $X(t)$ とする．各世代において，粒子 $i \in S(t)$ は ξ_i 個の粒子を生成して消滅する．その結果，第 $t+1$ 世代の粒子数は

$$X(t+1) = \sum_{i \in S(t)} \xi_i$$

となる．ただし，ξ_i は互いに独立に幾何分布 $\mathrm{Ge}(q)$ に従う確率変数である $(0 < q < 1)$．また，ξ_i は過去の履歴 $X(0), X(1), \ldots, X(t)$ とも独立であるとする．このとき，$X(0) = 1$ として，以下の設問に答えよ．

(1) 幾何分布 $\mathrm{Ge}(q)$ に従う確率変数 ξ が値 k を取る確率は

$$\Pr(\xi = k) = q(1-q)^k \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

で与えられる．期待値 $\mathrm{E}[\xi]$ と確率母関数 $G(z) = \mathrm{E}[z^{\xi}]$ を求めよ．

(2) 確率変数 $X(t)$ の期待値 $\mu(t) = \mathrm{E}[X(t)]$ を求めよ．

(3) 条件付き確率母関数 $H_t(z) = \mathrm{E}[z^{X(t)} \mid X(t-1)]$ を $G(z)$ の関数として表せ．

(4) $X(t)$ の確率母関数 $F_t(z) = \mathrm{E}[z^{X(t)}]$ を G を用いて表せ．

(5) 第 t 世代において集団が絶滅している確率 $\Pr(X(t) = 0)$ を $p(t)$ とする．このとき，$p(t+1)$ を $p(t)$ の関数として表せ．

(6) 集団が絶滅する確率 $P_{\mathrm{E}} = \lim_{t \to \infty} p(t)$ を求めよ．

第 5 問

実数を要素とする長さ n の配列 A に対し，

$$f(s,t)=\prod_{i=s}^{t}A[i] \qquad (1\le s\le t\le n)$$

と定義する．ただし，一つの実数は単位領域に格納できるものとする．以下の設問に答えよ．

(1) 配列 P を $P[i]=f(1,i)$ と定義する $(1\le i\le n)$． 配列 A が 0 を要素として含まないとき，配列 P を用いて，任意の s,t に対して $f(s,t)$ を $O(1)$ 時間で計算するアルゴリズムを与えよ．

(2) 配列 A の各要素が 0 または 1 のとき，任意の s,t に対して $f(s,t)$ を $O(1)$ 時間で計算できる $O(n)$ 領域のデータ構造を与えよ．

(3) 任意の s,t に対して $f(s,t)$ を $O(1)$ 時間で計算できる $O(n)$ 領域のデータ構造を与えよ．

(4) 以下の仕様を全て満たすデータ構造を与え，(b) と (c) のアルゴリズムを説明せよ．

  (a) 使用する領域は $O(n)$ である．

  (b) 任意の s,t に対して $f(s,t)$ を $O(\log n)$ 時間で計算できる．

  (c) 配列 A の一つの要素が変化したときに，$O(\log n)$ 時間で更新できる．