（マクロおよびミクロ経済学）の解答例

問題Ｉ．（出題趣旨：マクロ経済学分析の基本であるＩＳ−ＬＭ分析に関する基礎的知識の確認）．
ある国のマクロ経済が
財市場の均衡条件式: $Y = C + I + G$

消費関数: $C = 4 + 0.6(Y - T)$，

投資関数: $I = 12 - 4r$，

（実質）貨幣需要関数: $L(Y, r) = Y - 2r$，

政府の予算式: $G = T$ である時、以下の問いに答えなさい.
ただし，Y :GDP，C :消費，I :投資，G :政府支出，r :利子率，T :租税.
以下の問いに答えなさい.
⑴ $G = T = 0$ 時の IS 曲線の方程式を求めなさい.
（解答） $Y = C + I + G$ に消費関数および投資関数を代入すると,

$$Y = C + I + G = 4 + 0.6(Y - T) + 12 - 4r + G$$
$$= 4 + 0.6(Y - G) + 12 - 4r + G$$
$$= 16 + 0.6Y - 0.6G - 4r + G$$
$$\therefore 0.4Y = 16 + 0.4G - 4r$$
$$4r = 16 + 0.4G - 0.4Y$$
$$\therefore r = 4 + 0.1G - 0.1Y$$

⑵ $G = T = 0$ 時および $G = T = 10$ の時の IS 曲線の方程式を求めなさい.
（解答） $G = T = 0$ 時, IS 曲線の方程式は $r = 4 - 0.1Y$，
$G = T = 10$ 時, IS曲線の方程式は,

$$r = 4 + 0.1 \times 10 - 0.1Y = 5 - 0.1Y$$

⑶ 利子率 r を固定した場合の政府支出乗数を求めなさい.
（解答） $r = 4 + 0.1G - 0.1Y$ より、rを固定して全微分すると,

$$0 = 0.1\Delta G - 0.1\Delta Y \quad \therefore \frac{\Delta Y}{\Delta G} = 1$$

⑷ 利子率 r を固定した場合の投資支出乗数を求めなさい.
（解答） $Y = C + I + G$ から,

$$\Delta Y = C'\Delta Y + \Delta I \qquad \therefore \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1 - C'} = \frac{1}{1 - 0.6} = 2.5$$

(5) 名目貨幣供給 $M=4$ と仮定して，LM 曲線を求めなさい．ただし，物価水準 $P=1$ と仮定しなさい．

(解答)貨幣市場の均衡条件は $\frac{M}{P}=L(Y,r)=Y-2r$

$4=Y-2r$ より、LM 曲線の方程式は $r=\frac{1}{2}Y-2$ となる.

(6) 問(5)で求めた LM 曲線と，問(1)で求めた IS 曲線を用いて，均衡 GDP および均衡利子率を求めなさい．ただし、$G=T=0$ と仮定します．

(解答)

$r=4-0.1Y$ および $r=\frac{1}{2}Y-2$ より，$4-0.1Y=\frac{1}{2}Y-2 \quad \therefore 6=0.6Y$

したがって，$Y=10$ および $r=4-0.1\times 10=3$

(7) 問(1)で求めた IS 曲線および問(5)で求めた LM 曲線を用いて，政府支出乗数を求めなさい．ただし、$G=T\neq 0$ と仮定します．

(解答) $r=4+0.1G-0.1Y$ および $r=\frac{1}{2}Y-2$ より，

$\therefore 4+0.1G-0.1Y=\frac{1}{2}Y-2$

全微分すると，

$0.1\Delta G-0.1\Delta Y=0.5\Delta Y \quad \therefore 0.1\Delta G=0.6\Delta Y$

$\therefore \frac{\Delta Y}{\Delta G}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}$

(8) 問(7)で求めた政府支出乗数が問(3)で求めた政府支出乗数より小さくなることはなんと呼ばれていますか．

(解答)クラウディングアウト。

(9) 物価水準 P を変数として、総需要曲線を求めなさい．ただし，$G=T=0$ と仮定します(数値が割りきれない場合は分数を使うこと)．

(解答) $\frac{M}{P}=L(Y,r)=Y-2r$ より、$Y-2r=\frac{4}{P} \therefore Y-\frac{4}{P}=2r$

LM 曲線は $r=\frac{1}{2}Y-\frac{2}{P}$ となる．一方，IS 曲線は $r=4-0.1Y$ なので，

$4-0.1Y=\frac{1}{2}Y-\frac{2}{P}$ すなわち，

$0.6Y=4+\frac{2}{P} \therefore Y=4\times\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\frac{2}{P}=\frac{20}{3}+\frac{10}{3}\frac{1}{P}$

(10) 問(9)で求めた総需要曲線および総供給曲線$Y=P/3$を用いて，均衡物価水準および均衡 GDP を求めなさい．ただし，$G=T=0$と仮定します．

(解答)財市場の均衡条件より，$Y=\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{P}=\dfrac{P}{3}$

$P^2-20P-10=0$

2次方程式の根の公式を使うと,

$$P=\frac{20\pm\sqrt{(20)^2-4(10)}}{2}=\frac{20\pm\sqrt{400-40}}{2}$$

$=\dfrac{20\pm\sqrt{360}}{2}=\dfrac{20\pm 60}{2}=40$あるいは$\dfrac{-40}{2}=-20$

$P>0$なので、P=40.

均衡 GDP は$Y=\dfrac{40}{3}$.

問題Ⅱ.

１.

(1)． $v=(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho}),u=v^{1/\rho}$ とすると， $\partial u/\partial x_i=v^{(1-\rho)/\rho}x_i{}^{\rho-1},i=1,2$ であり，予算制約下の効用最大化の 1 階条件である限界代替率＝相対価格より $(\partial u/\partial x_1)/(\partial u/\partial x_2)=p_1/p_2$ なので $(x_1/x_2)^{\rho-1}/=p_1/p_2$ となり， $x_2=x_1(p_1/p_2)^{1/(\rho-1)}$ となる．すると，予算制約式に代入して $x_1=p_1{}^{1/(\rho-1)}I/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})$ となり， $x_2=p_2{}^{1/(\rho-1)}I/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})$ となる．そして，これらを効用関数に代入して，間接効用関数を $v(p_1,p_2,I)$ とすると， $v(p_1,p_2,I)=I/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}$ となる．

(２)．ロワ恒等式は $x_i=-(\partial v/\partial p_i)/(\partial v/\partial I),i=1,2$ となっていることである．(１)で求めた $v(p_1,p_2,I)=I/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}$ より， $i=1,2$ に対して， $\partial v/\partial p_i=-p_i{}^{1/(\rho-1)}[I/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})^{(2\rho-1)/\rho}]$， $\partial v/\partial I=1/(p_1{}^{\rho/(\rho-1)}+p_2{}^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}$

なので，$-(\partial v/\partial p_i)/(\partial v/\partial I) = p_i^{1/(\rho-1)} I/(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}) = x_i$ となり，ロワ恒等式が成立している．

（３）．間接効用関数 $v(p_1, p_2, e) = u$ を e について解くと支出関数 $e(p_1, p_2, u)$ が得られ，$u = e/(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}$ より $e = u(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}$ である．そして，シェパード/マッケンジー補題より $\partial e/\partial p_i = x_i(p_1, p_2, u), i = 1,2$ であるので，$\partial e/\partial p_i = p_i^{1/(\rho-1)}(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})^{-1/\rho} u, i = 1,2$ である。

２．

（１）．企業１の需要関数を $p_1 = 40 - x_1/4 + p_2/2$，企業２の需要関数を $p_2 = 400/3 + p_1/3 - x_2/3$ と書き換えると，企業１の利潤は $\pi_1 = (40 - x_1/4 + p_2/2)x_1 - 20x_1 - 100$，企業２の利潤は $\pi_2 = (400/3 + p_1/3 - x_2/3)x_2 - 10x_2 - 200$ となる．この時、各企業は相手に企業の価格を所与として利潤を最大にするように行動すると前提にしているので，$\partial \pi_1/\partial p_1 = 20 + p_2/2 - x_1/2 = 0$ と $\partial \pi_2/\partial p_2 = 370/3 + p_1/3 - 3x_2/2 = 0$ となり，$x_1 = p_2 + 40$，$x_2 = p_1/2 + 185$ となる．これらを各企業の需要関数に代入すると，企業１の方は $p_2 + 40 = 160 - 4p_1 + 2p_2$，企業２の方は $p_1/2 + 185 = 400 + p_1 - 3p_2$ となり，企業１の反応曲線は $p_2 = 4p_1 - 120$，企業２の反応曲線が $p_2 = p_1/6 + 215/3$ となる．

(２)．均衡価格は両方の企業の反応曲線の解なので，$4p_1 - 120 = p_1/6 + 215/3$ を解いて $p_1 = 50$ となり，これを代入して $p_2 = 80$ となる．

経済思想

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ

古典派経済学を代表する人物の一人であるトーマス・ロバート・マルサスの経済思想に関する基本的な知識を問う問題である。古典派経済学という言葉を創ったマルクスも，それとは別の定義を与えたケインズも，マルサスを古典派経済学者とはみなさなかったが，経済思想史上の通説では古典派の一員とされている。このような事情もあって，古典派とは何かという問題とも関連して，マルサスは経済思想史上の重要人文であり続けている。最も有名な学説は人口論であるが，それだけではなく，価値論，地代論，有効需要論，救貧法論，方法論などにおいても，後世に与えた影響は大きい。こうした点についての知識を有することは，経済思想を学ぶ上で必須のものである。

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

問題Ⅱ

ソースティン・B・ヴェブレンは、19 世紀最後の 1899 年に『有閑階級の理論』を著し、20 世紀の経済思想に大きな影響を与えた。古典派経済学とも新古典派経済学とも異なる、いわゆる制度学派経済学の学問的流れを生み出した。ここでは、そのヴェブレンの経済思想についての基本的な知見を問うている。消費社会論において最も著名なヴェブレンであるが､そのほかにも､企業論や、経済学批判（進化論的経済学の視点を含む)、技術進歩論、などにおいて、学問的な業績を残している。ヴェブレンはまた、晩年はジャーナリストとしても活躍している。そのような多面的な活動を含めて、思想家としてのヴェブレンについて、一定の理解と視点をもつことは、経済思想の分野において必須の事柄である。

経済史問題の出題趣旨及び解答例

本年度の出題問題は，経済史に関する基礎的知識を問うため，時代，方法，地域，論点の多様性に留意した幅広いテーマから選択された．エネルギー問題，貿易問題，国際経済関係，国家の役割，社会経済の性質の転換に関連する内容は，経済史の主要なトッピクである．このように，出題問題は，受験者が経済史で求められる基本的論点を理解し，諸問題にアプローチできる考える力を有しているかを試す目的を果たすため，様々な観点に関わる問いとなっており，いずれの問題についても特定地域に偏った知識を要求しないように工夫されている．

問題Ⅰ．

問題Ⅰは経済活動を最も長期のスパーンで理解するための基本的視点を持っているかを問うものである．エネルギーは技術や生産力の根幹をなしており，その発展の流れを把握することにより，産業及び制度の発展，資源制約，資源の移動，労働の在り方，環境問題などに関連するマクロ的パースペクティブが持てる．歴史を捉える土台になるこの問題は，受験者が経済史に関わるどの研究に対しても基礎的理解力をもっているかを試すものである．

解答は，キーワードとして，狩猟の開始と火の利用，農耕の開始と人力・畜力の利用，風力・水力および薪・木炭を通じた生産活動，風力利用を通じた大型帆船と大航海時代，産業革命前のイギリスのエネルギー事情(森林資源の枯渇と石炭利用への移行)，蒸気機関と産業革命，石炭の大量消費,電力利用の普及，内燃機関と石油利用，中東戦争とオイル・ショック，資源枯渇，環境問題など，多様で広いトピックに目配りして説明することが期待される．

問題Ⅱ．

問題Ⅱはウェスタン・インパクトに表現される世界経済の秩序を理解していることを試す内容である．国際経済の在り方や変化にみるダ

イナミックな関係性を観察する思考力を問う．経済史は，一方的な影響の下で一回限りの結果に終わる事象だけではなく，連鎖的に発生する様々な出来事に注目し，多様性やダイナミズムを見逃さない．このような歴史的視点の基本を理解していることが問われる．

解答は，アジアから欧米諸国への一次産品輸出の増大（ジュート，油性種子,棉花，茶，小麦，皮革原料，錫，コメ，生糸など）,同時にアジア地域内部の貿易の急速な拡大（コメ，砂糖，棉花，綿糸，綿布，雑貨），アジア国際分業体制，アジア間競争，アジア型産品，綿業機軸体制の成立など、いくつかの事例を取り上げ，因果関係として説明することが求められる．

問題Ⅲ．

問題Ⅲは，現代にも繋がる社会全体や国家の性格を理解する上で注目されるテーマであり，経済史的関連性を問うものである．福祉国家，社会政策，社会保障は，現代社会においても使われている用語として，また歴史実態的にも各国の社会理念の違いが影響し、在り方や捉え方は多様である．その為，解答では，定義を限定して説明することも求められ，研究のための基本的方法となる概念への留意が要求される．思想，社会全体や体制変容を論点として含みこむ問題として，具体的制度の起源を説明するだけでなく，より広い視点を提供する経済史の方法を理解しているかを試す問いである．

福祉国家は多義的であるが，大きく財政金融政策，労働組合の同権化，完全雇用など広義の福祉国家の在り方，あるいは社会保障など狭義のそれに注目する捉え方がある．この定義に従って，解答の際は，対象時代と地域について，次のように限定して説明することができる．例えば，イギリスの救貧法などの起源に遡ってその性格や限界について述べても良いし，20 世紀転換期のイギリスやドイツの制度の整備，第 1 次大戦以降の成立過程，先進諸国の戦後の本格的展開，1970 年代のその行き詰まり及び変容に着眼して説明しても良い．第 1 次世界大戦や第 2 次世界大戦など戦争との関連性を中心に論じることも可能で

ある．19 世紀末のドイツの鉄鋼企業は，労使関係の安定化や優秀な労働者の確保のため，疾病年金金庫制度や社宅制度をとった．このような説明から,「福祉国家」や「社会保障制度」の思想に繋がる発想が資本主義の発展のなかでどのように生まれたか，誰によって発見・工夫されたかなど，その意義を多様な可能性から論じることができる．思想については，イギリスの自助による救済を基本にする救貧法の流れとドイツの国家が関与した保険制度による社会保障，社会体制の危機など， 背後にある考え方を比較することも可能である．その他，日本やアメリカなどの具体例に即して説明することもできる．

問題Ⅳ.

経済題Ⅳは，20 世紀前半に起きた景気循環，経済体制の転換から見える経済史及び経済学的意義を問う内容である．経済史では体制の性格や変質に注目して社会全体の在り方を観察し，長期の大きな流れを捉えるため，変化の実態，背景，意義などについて吟味する．このような関心からみて，世界大恐慌から回復までのプロセスが持つ経済史的意義の理解を問うことは基本的問題である．複雑に絡み合った影響の派生の経路を正確に理解していること，関連する経済学史，関わる政治経済問題や社会経済の変化を説明する力は，経済史の基本的知識として要求されるものである．

解答の方法としては，ヨーロッパ諸国，アメリカ，日本等，特定の国を取り上げる，あるいは比較説明ができる．以下，留意すべき点について羅列する．恐慌が発生した背景については，1920 年代に耐久消費財の製造業に支えられ繁栄を続けていたアメリカの状況及び世界経済に対して与えた影響が前提となる．1920 年代後半に生産がピークに達したものの，国際的に比較して投資の有利さからアメリカ株式市場には過剰な資金流入が継続されていた．恐慌の影響については，失業率，物価の急落，生産状況，金本位制，農産物の国際市場，貿易，景気の谷などへの言及が求められる．政策は国によって多様であり，特定の事例を取り上げ，管理通貨，有効需要創出，ニューディール政策，

軍需産業，組織化，保護主義等に関連して成果と共に論じる．このようなプロセスがもつ意義については，国家の役割や市場介入の手段を認識させたこと，政治経済や社会体制の転換となったこと，その他ケインズ政策への注目など経済学史的に論じることができる．

統計学・解答例

問題 I.

1．母平均は $\displaystyle\int_0^\theta xf(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{\theta}{2}}}$, 母分散は $\displaystyle\int_0^\theta x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \underline{\underline{\frac{\theta^2}{12}}}$.

2．$\mathrm{E}[S] = a(\theta/2) = \theta$ となるには $\underline{\underline{a = 2}}$. このとき $\mathrm{var}[S] = (4/n) * (\theta^2/12) = \underline{\underline{\theta^2/(3n)}}$.

3．$0 \le x \le \theta$ について $\Pr[\max(X_{,} \ldots, X_n) \le x] = \prod_{i=1}^n \Pr[X_i \le x] = \underline{\underline{(x/\theta)^n}}$. なお, $x < 0$ のとき, $\Pr[\max(X_1, \ldots, X_n) \le x] = 0$, $x > \theta$ のとき $\Pr[\max(X_1, \ldots, X_n) \le x] = 1$.

4．$\max(X_{,} \ldots, X_n)$ の密度関数は

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

なので $\mathrm{E}[T] = b\int_0^\theta xg(x)\,dx = nb\theta/(n+1) = \theta$ となるには $\underline{\underline{b = (n+1)/n}}$. このとき

$$\mathrm{var}[T] = \mathrm{E}[T^2] - \theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2}\int_0^\theta x^2 g(x)\,dx - \theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n}\,\frac{\theta^2}{n+2} - \theta^2 = \underline{\underline{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}}\,.$$

5．$\mathrm{var}[S] - \mathrm{var}[T] = \dfrac{\theta^2(n-1)}{3n(n+2)} \ge 0$ なので, T が有効である.

6 尤度関数 $\prod_{i=1}^n f(\theta) = 1/\theta^n$ (ただし, $X_{(n)} \le \theta$ に注意; $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ とおく) は $\theta = X_{(n)}$ で最大になる; 最尤推定量は $\underline{\underline{\text{最大値 } \max(X_1, \ldots, X_n)}}$

問題 **II.**

1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z^*) &= \int_0^\infty z^* \frac{b^a}{\Gamma(a)}(z^*)^{a-1}\exp(-bz^*)dz^* = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty (z^*)^{a+1-1}\exp(-bz^*)dz^* \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = \frac{a}{b} \\
\mathrm{E}(Z^{*2}) &= \int_0^\infty (z^*)^2 \frac{b^a}{\Gamma(a)}(z^*)^{a-1}\exp(-bz^*)dz^* = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty (z^*)^{a+2-1}\exp(-bz^*)dz^* \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{b^2} \\
\mathrm{var}(Z^*) &= \mathrm{E}(Z^{*2}) - \{\mathrm{E}(Z^*)\}^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b^2}
\end{aligned}
$$

2. $\left|\dfrac{dz^*}{dz}\right| = \dfrac{1}{z^2}$ より，

$$
p(z) = \frac{1}{z^2}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{1}{z}\right)^{a-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}z^{-a-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)
$$

となる．よって，Z は逆ガンマ分布に従う．このことを $Z \sim \mathrm{IG}(a,b)$ と書くことにする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \int_0^\infty z\frac{b^a}{\Gamma(a)}z^{-a-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)dz = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty z^{-(a-1)-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)dz \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a-1)}{b^{a-1}} = \frac{b}{a-1} \\
\mathrm{E}(Z^2) &= \int_0^\infty z^2\frac{b^a}{\Gamma(a)}z^{-a-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)dz = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty z^{-(a-2)-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)dz \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a-2)}{b^{a-2}} = \frac{b^2}{(a-1)(a-2)} \\
\mathrm{var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - \{\mathrm{E}(Z)\}^2 = \frac{b^2}{(a-1)(a-2)} - \left(\frac{b}{a-1}\right)^2 = \frac{b^2}{(a-1)^2(a-2)}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
p(x,z|y) &= \frac{p(x,y,z)}{p(y)} = \frac{p(x,z)p(y|x,z)}{p(y)} \propto p(x,z)p(y|x,z) = p(x|z)p(z)p(y|x,z) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left[-\frac{k(x-\mu)^2}{2z}\right]z^{-a-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\left[-\frac{(y-x)^2}{2z}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2z}\left\{k(x-\mu)^2 + (y-x)^2\right\}\right]z^{-a-2}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
k(x-\mu)^2 + (y-x)^2 = (k+1)\left(x - \frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2 + \frac{k(\mu-y)^2}{k+1}
$$

となる．よって，

$$
p(x,z|y) \propto \exp\left[-\frac{k+1}{2z}\left(x - \frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2 - \frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)z}\right]z^{-a-2}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)
$$

となる．以上から，

$$p(x|y,z) \propto \exp\left[-\frac{k+1}{2z}\left(x-\frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2\right]$$

となる．確率密度関数の形から $x|y,z \sim \mathrm{N}\left(\frac{k\mu+y}{k+1}, \frac{z}{k+1}\right)$ となるので，

$$p(x|y,z) = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2\pi z}}\exp\left[-\frac{k+1}{2z}\left(x-\frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2\right]$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
p(z|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,z|y)dx \\
&\propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{k+1}{2z}\left(x-\frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2 - \frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)z}\right] z^{-a-2}\exp\left(-\frac{b}{z}\right)dx \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left[-\frac{k+1}{2z}\left(x-\frac{k\mu+y}{k+1}\right)^2\right]dx\right\}\exp\left[-\frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)z}\right] z^{-a-\frac{1}{2}-1}\exp\left(-\frac{b}{z}\right) \\
&\propto z^{-a-\frac{1}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{z}\left\{b+\frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

となる．確率密度関数の形から $z|y \sim \mathrm{IG}\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)}\right)$ となるので，

$$p(z|y) = \frac{\left\{b+\frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)}\right\}^{a+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} z^{-a-\frac{1}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{z}\left\{b+\frac{k(\mu-y)^2}{2(k+1)}\right\}\right]$$

となる．

問題 III.

１．(1) $S_{xx}=\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2$, $S_{xy}=\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$, $S_{yy}=\sum_{i=1}^n(y_i-\overline{y})^2$ を定義すると

$$\begin{aligned}J(\alpha,\beta)&=\sum_{i=1}^n\{(y_i-\overline{y})+(\overline{y}-\alpha-\beta\overline{x})-\beta(x_i-\overline{x})\}^2=S_{yy}+n(\overline{y}-\alpha-\beta\overline{x})^2+\beta^2S_{xx}-2\beta S_{xy}\\&\ge S_{yy}+S_{xx}(\beta-S_{xy}/S_{xx})^2-S_{xy}^2/S_{xx}\ge S_{yy}-S_{xy}^2/S_{xx}\,.\end{aligned}$$

なお, $\underline{\underline{\widehat{\beta}=S_{xy}/S_{xx},\ \widehat{\alpha}=\overline{y}-\overline{x}S_{xy}/S_{xx}}}$. (2) $y_i-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}x_i=(y_i-\overline{y})-(x_i-\overline{x})S_{xy}/S_{xx}$ なので

$$\sum_{i=1}^n(y_i-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}x_i)=\underline{\underline{0}}\,,\quad\sum_{i=1}^n(y_i-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}x_i)x_i=\sum_{i=1}^n(y_i-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}x_i)(x_i-\overline{x})=S_{xy}-S_{xx}S_{xy}/S_{xx}=\underline{\underline{0}}\,.$$

２．(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(Y-a-bZ)^2]&=\mathrm{E}[\{(Y-\mu_Y)^2+(\mu_Y-a-b\mu_Z)-b(Z-\mu_Z)\}^2]\\&=\sigma_Y^2+(\mu_Y-a-b\mu_Z)^2+b^2\sigma_Z^2-2b\sigma_{YZ}\\&\ge\sigma_Y^2+\sigma_Z^2(b-\sigma_{YZ}/\sigma_Z^2)-\sigma_{YZ}^2/\sigma_Z^2\ge\underline{\underline{\sigma_Y^2-\sigma_{YZ}^2/\sigma_Z^2}}\,.\end{aligned}$$

なお, $\underline{\underline{\widetilde{b}=\sigma_{YZ}/\sigma_Z^2,\ \widetilde{a}=\mu_Y-\mu_Z\sigma_{YZ}/\sigma_Z^2}}$. (2) $Y-\widetilde{a}-\widetilde{b}Z=(Y-\mu_Y)-(Z-\mu_Z)\sigma_{YZ}/\sigma_Z^2$ なので

$$\mathrm{E}[Y-\widetilde{a}-\widetilde{b}Z]=\underline{\underline{0}}\,,\quad\mathrm{cov}[Y-\widetilde{a}-\widetilde{b}Z,Z]=\mathrm{cov}[Y-\widetilde{a}-\widetilde{b}Z,Z-\mu_Z]=\sigma_{YZ}-\sigma_Z^2\sigma_{YZ}/\sigma_Z^2=\underline{\underline{0}}\,.$$

３．(1) 同時密度関数の exp の肩を変形する;

$$(x_1-\mu_1)^2-2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)+(x_2-\mu_2)^2=\{(x_1-\mu_1)-\rho(x_2-\mu_2)\}^2+(1-\rho^2)(x_2-\mu_2)^2\,.$$

よって

$$\begin{aligned}f(x_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\,dx_1\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\Big[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2}\Big]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\,\{x_1-\mu_1-\rho(x_2-\mu_2)\}^2\Big]\,dx_1\\&=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\Big[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2}\Big]}}\end{aligned}$$

これは $\underline{\underline{\text{正規分布 N}(\mu_2,1)}}$.

(2)

$$\frac{f(x_1,x_2)}{f(x_2)}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\,\{x_1-\mu_1-\rho(x_2-\mu_2)\}^2\Big]}}$$

これは $\underline{\underline{\text{正規分布 N}(\mu_1+\rho(x_2-\mu_2),1-\rho^2)}}$.

問題 **IV.**

1.

$$\begin{aligned}
&\Pr(y=1|\boldsymbol{x}) = \Pr(y^* > 0|\boldsymbol{x}) = \Pr(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta} + u > 0|\boldsymbol{x}) = \Pr(u > -\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{x}) \\
&\quad = 1 - \Pr(u < -\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{x}) = 1 - \Phi(-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}) \\
&\quad = \Phi(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k)
\end{aligned}$$

2. 標準正規分布の確率密度関数を $\phi(\cdot)$ とすると，

$$\frac{\partial \widehat{\Pr}(y=1|\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \phi(\boldsymbol{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\beta}_j$$

となる．

3.

$$\begin{aligned}
&\Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1}x_{k-1} + \hat{\beta}_k(c_k+1)) \\
&\quad -\Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_{k-1}x_{k-1} + \hat{\beta}_k c_k)
\end{aligned}$$

4. (a)

$$\frac{\partial \widehat{\Pr}(y=1|\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 + \cdots + \hat{\beta}_k \bar{x}_k)\hat{\beta}_j$$

(b) There are at least two potential problems with using PEAs to summarize the partial effects of the explanatory variables. First, if some of the explanatory variables are discrete, the averages of them represent no one in the sample (or population, for that matter). For example, if $x_1 = female$ and 47.5% of the sample is female, what sense does it make to plug in $\bar{x}_1 = .475$ to represent the "average" person? Second, if a continuous explanatory variable appears as a nonlinear function—say, as a natural log or in a quadratic—it is not clear whether we want to average the nonlinear function or plug the average into the nonlinear function. For example, should we use $\overline{\log(sales)}$ or $\log(\overline{sales})$ to represent average firm size? (Wooldridge, 2016, pp.531–532)

Wooldridge, J.M. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach* 6th ed., Boston: Centage Learning.

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big\{&\Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{\beta}_{k-1}x_{i,k-1} + \hat{\beta}_k(c_k+1)) \\
&-\Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{\beta}_{k-1}x_{i,k-1} + \hat{\beta}_k c_k)\Big\}
\end{aligned}$$

経営学

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ

本設問は、経営組織論におけるパワー理論に関する知識の習得度を確認することを目的としている。解答に際しては、①強制力（苦痛・制裁・欲求の制限等の恐怖心に基づくパワー)、②報酬力（プラスのメリットや価値のある報酬に基づくパワー)、③正当権力（組織の公式的な地位や権限に基づくパワー)、④専門力（専門的な技術・知識・スキルに基づくパワー)、⑤同一視力（好ましい資質や個性を備えた人物との同一化に基づくパワー）について、適切に説明することが求められる。本設問への答案により，経営学分野の基本概念を正確に理解しているかどうか、また、修士課程での学修に求められる知識を運用する力量があるかどうかを評価することができる。

問題Ⅱ.

本設問は経営管理論分野の基礎的な知識の修得度を確認することを目的としている．解答に際しては，(1)責任センターのひとつであるプロフィットセンターの概念を確実に理解するとともに，(2)複数存在する利益の概念(売上総利益，営業利益等）と業績測定指標（各利益の絶対額，収益性等）とに注意を払い，主張の妥当性を多角的に検討する必要がある．本設問への答案により，①経営学分野の基本概念に関する理解の正確性，②修士課程での学修に求められる知識の運用力量の２点を評価可能である．

会計学
出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ　棚卸資産の会計の基本的な理解を確認している．

棚卸資産の取得原価は当期の費用と次期以降の費用に分かれる．当期の費用は売上原価等となり，次期以降の費用は貸借対照表価額となる．この計算には払出数量と単価が必要であり，単価は先入先出法，個別法，平均法等で計算される．先入先出法では，先に仕入れた棚卸資産から順に払い出されると仮定して単価が決定されるため，仕入単価が継続的に上昇する場合においては，相対的に上昇した仕入単価は貸借対照表価額に反映し，売上原価には過去の仕入単価が反映する．一方，移動平均法では，仕入ごとに残高と受入額から平均単価を求め，これが払出単価となる．すなわち，単価の変動は先入先出法では貸借対照表価額の方に，移動平均法では払出単価の方に主として影響する．これにより，仕入単価が継続的に上昇するときには，貸借対照表価額は先入先出法の方が大きくなる．一方，売上原価は移動平均法の方が大きくなるため，移動平均法の方が利益は小さくなる．

問題Ⅱ　個別原価計算と総合原価計算の特徴を問う問題である．概ね以下の特長を指摘することが望まれる．

・個別原価計算は，造船業や土木建設業等のような受注製品を生産する企業において適用される．出版業のように一定数量（ロット，バッチという）を受注する場合は，ロット別個別原価計算という．受注ごとに特定製造指図書を発行する．直接材料費・直接労務費等は特定製造指図書に対して直課し，製造間接費は適切な配賦基準によって配賦を行う．

・総合原価計算は，自動車や家電等の規格製品を大量生産する企業において適用される．規格製品は原価が同じであると考えられるので，一定期間（原価計算期間）の製造原価（完成品総合原価）を同期間の生産数量で除することによって単位原価を計算する．総合原価計算では，一般的に製造原価を直接材料費と加工費に分類して計算する．

更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= \quad\quad y \\
x_1 &= \frac{8}{3} \quad -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\
x_4 &= \frac{4}{3} \quad +\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数がすべて非負なので，現在の解は最適である．最適解は$(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (\frac{8}{3}, 0, 0, \frac{4}{3}, 0)$で，最適値は0である．最適値が0であることから，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{8}{3}, 0, 0, \frac{4}{3})$は，問題(P1)の実行可能基底解である．

3．初期実行可能基底解を$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{8}{3}, 0, 0, \frac{4}{3})$として辞書を作る．

$$
\begin{aligned}
z &= 72 \quad +12x_2 - 31x_3 \\
x_1 &= \frac{8}{3} \quad -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\
x_4 &= \frac{4}{3} \quad -\frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が正のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最大のx_2を0から2に増加させ，辞書を更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= 96 - 18x_4 - x_3 \\
x_1 &= \ 2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3 \\
x_2 &= \ 2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数がすべて非正な

ので，現在の解は最適である．最適解は$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,2,0,0)$で，最適値は96である．

オペレーションズ・リサーチ
出題の趣旨・解答例

問題 I

1. 新しい非負変数 x_4 を導入し，(P)を以下のように変換する．作成した問題を問題(P1) と記す．

問題(P1) max $27x_1 + 21x_2 - 40x_3$

subject to :

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 8 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. 問題(P1)の実行可能基底解を求めるために，新しい変数 y を導入し，次の線形計画問題(P2)を単体法を用いて解く．

問題(P2) min y

subject to :

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 \quad + y &= 8 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

初期実行可能基底解を $(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (0,0,0,4,8)$ として辞書を作る．

$$
\begin{aligned}
z &= 8 - 3x_1 - x_2 + x_3 \\
y &= 8 - 3x_1 - x_2 + x_3 \\
x_4 &= 4 - x_1 - x_2 + 2x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が負のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最小の x_1 を 0 から $\frac{8}{3}$ に増加させ，辞書を