基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ．

(i) 2 項係数を ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ とかく．2 項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_nb^n$$

を用いて，$x > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

であることを示せ．

さらに，$0 < x < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

であることを示せ．

(ii) $x_0 \neq 0$ とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が点 $x = x_0$ で収束すれば，$|x| < |x_0|$ なるすべての実数 x についてこの級数は収束することを示せ．

さらに，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

が収束するような実数 x の範囲を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Answer the following questions.

(i) Let ${}_mC_n$ be the binomial coefficients ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$. Using the binomial theorem

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n,$$

show that

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

for $x > 1$.

Next show that

$$\lim_{n\to\infty} n x^n = 0$$

for $0 < x < 1$.

(ii) Let $x_0 \neq 0$. Show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converges for any real number x such that $|x| < |x_0|$, if the power series converges at the point $x = x_0$.

Next find the domain of the real number x such that the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

converges.

アルゴリズム基礎

2

$G=(V,E)$ を $n \geqq 2$ 個の節点の集合 V，枝集合 E から成る連結単純無向グラフとし，$T=(V,F)$ を節点 $s \in V$ を根とする G の全域木，$\ell : V \to \{1,2,\ldots,n\}$ を節点の番号付けとし，以下の条件 (a), (b) が成り立っていると仮定する．

(a) 各枝 $uv \in E$ に対し，節点 u は，節点 v の T における先祖，あるいは子孫である，

(b) 各節点 $v \in V \setminus \{s\}$ と T における v の親 u に対し，$\ell(u) < \ell(v)$.

L を T の葉節点の集合とし，各節点 $v \in V$ に対し，$N(v)$ を v の G における隣接点の集合，$D(v)$ を v および v の T における子孫から成る集合と定める．関数 $\mathrm{lowpt} : V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1,2,\ldots,n\}$ を

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \quad v \in V \setminus (L \cup \{s\})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) どの葉節点 $u \in L$ も G の関節点ではないことを証明せよ．

(ii) 根 s が G の関節点である必要十分条件は，T における s の子が 2 個以上であることを証明せよ．

(iii) 節点 $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ が G の関節点である必要十分条件は，u が $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$ を満たす子 v を持つことであることを証明せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a connected simple undirected graph with a set V of $n \geqq 2$ vertices and a set E of edges, let $T = (V, F)$ be a spanning tree of G rooted at a vertex $s \in V$, and let $\ell : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ be a numbering on V, where we assume that the following conditions (a) and (b) hold.

(a) For each edge $uv \in E$, vertex u is either an ancestor or a descendant of v in T,

(b) For each vertex $v \in V \setminus \{s\}$ and the parent u of v in T, $\ell(u) < \ell(v)$.

Let L denote the set of leaves in T. For each vertex $v \in V$, let $N(v)$ denote the set of neighbors of v in G, and let $D(v)$ denote the set consisting of vertex v and the descendants of v in T. Define a function lowpt : $V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ such that

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \qquad v \in V \setminus (L \cup \{s\}).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that no leaf $u \in L$ is a cut-vertex in G.

(ii) Prove that a necessary and sufficient condition for the root s to be a cut-vertex in G is that s has at least two children in T.

(iii) Prove that a necessary and sufficient condition for a vertex $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ to be a cut-vertex in G is that u has a child v in T such that $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$.

線形計画

3

$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトルとする．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ をみたす n 次元ベクトル $\boldsymbol{z}$ が存在するとする．このとき，次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & y_i \geqq x_i \ \ (i = 1, \ldots, n) \\
& & y_i \geqq -x_i \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

ただし，決定変数は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (P) の双対問題を書け．

(ii) 問題 (P) が最適解を持つことを示せ．

(iii) $m = 2, n = 3$ とし，

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

とする．このとき，問題 (P) の最適解を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ be an $m \times n$ matrix, and let $\boldsymbol{b}$ be an m dimensional vector. Suppose that there exists an n dimensional vector $\boldsymbol{z}$ such that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

Consider the following linear programming problem (P):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & & y_i \geqq x_i \ \ (i = 1, \ldots, n) \\
 & & y_i \geqq -x_i \ \ (i = 1, \ldots, n),
\end{array}
$$

where the decision variables are $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem (P).

(ii) Show that problem (P) has an optimal solution.

(iii) Let $m = 2$, $n = 3$,

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.
$$

Obtain an optimal solution of problem (P).

線形制御理論

4

図１で示されるフィードバックシステムを考える．ここで $P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は補償器，y は出力，u は入力，u_c は制御指令値，e は偏差，d は外乱，r は参照入力である．以下の問いに答えよ．

(i) このフィードバック系が安定であることの定義を述べよ．

以下では，補償器 $C(s)$ は図２の構造をしているとする．ただし $G(s)$，$K(s)$ は適当な伝達関数であり，ここでは $G(s) = P(s)$ とおくものとする．

(ii) r から e，r から u，d から u，d から e への伝達関数をそれぞれ求めよ．

(iii) $P(s)$ は安定であるとする．図１のフィードバックシステムが安定となるためには，$K(s)$ が安定であることが必要十分であることを示せ．

(iv) 伝達関数 $P(s)$，$K(s)$ をそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad K(s) = \frac{b}{s+a}$$

とする．ただし a，b は実定数である．r を単位階段関数としたときに出力 y の定常値は 1，$r = \sin t$ を入力したとき，出力 y の定常振幅は $2\sqrt{5}/5$ になった．定数 a，b を求めよ．

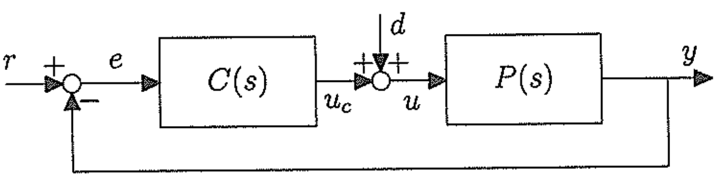

図 1: 制御系

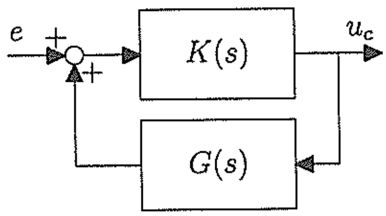

図 2: 補償器 $C(s)$ の構造

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is given by the block diagram shown in Figure 1, where $P(s)$ is a control plant, $C(s)$ is a compensator, y is an output, u is an input, u_c is a control command, e is an error, d is a disturbance, and r is a reference input. Answer the following questions.

(i) State the definition of the stability of the feedback system.

In what follows, assume that the compensator $C(s)$ has the structure shown in Figure 2. Here, $G(s)$ and $K(s)$ are transfer functions, and we assume $G(s) = P(s)$.

(ii) Calculate the transfer functions from r to e, r to u, d to u, and d to e, respectively.

(iii) Assume that $P(s)$ is stable. Show that the feedback system in Figure 1 is stable if and only if $K(s)$ is stable.

(iv) Let $P(s)$ and $K(s)$ be given as

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad K(s) = \frac{b}{s+a},$$

where a and b are real constants. When r is the unit step function, the steady state value of the output y is 1. When $r = \sin t$, the steady state amplitude of the output y is $2\sqrt{5}/5$. Calculate a and b.

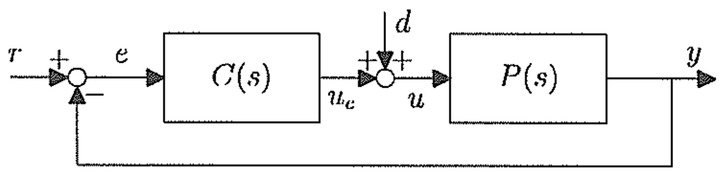

Figure 1 Feedback system.

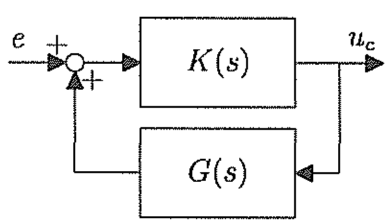

Figure 2 The structure of the conpensator $C(s)$.

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の物体が空気中を鉛直方向上むきの初速度 $v_0(>0)$, 初期高度 0 の条件で運動している．空気の抵抗力 R は速度 v の 2 乗に比例する $(R=\gamma v^2, \gamma>0)$ とし，重力加速度を g とする．以下の問いに答えよ．

(i) 物体の速度 v を時間 t の関数として求めよ．但し，$v(t) \geqq 0$ の間のみで良い．

(ii) 物体の運動の最高点の高さを求めよ．

(iii) 物体が最高点に達するまでの時間 T を v_0 の関数として求め，$v_0 \to \infty$ の時と時間 T を求めよ．

(iv) $t \to \infty$ の時の物体の速度 (終端速度)v_∞ を求めよ．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving through the air with the initial velocity being $v_0(> 0)$ in the vertically upward direction and the initial height of the particle being 0. Let the force of air resistance R be proportional to the square of the velocity v as $R = \gamma v^2, \gamma > 0$ and g be the acceleration of gravity. Answer the following questions.

(i) Obtain as a function of time t the velocity of the particle while $v(t) \geqq 0$.

(ii) Obtain the height of the highest point of the particle motion.

(iii) Obtain as a function of v_0 the time T when the particle reaches the highest point, and then obtain the limit of T when $v_0 \to \infty$.

(iv) Obtain the terminal velocity v_∞ of the particle when $t \to \infty$.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

$n \times n$ 行列 A を用い，線形写像 f を

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\, \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

によって定める．このとき，f の核を

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$$

で表し，ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ の非ゼロ要素数を

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j)$$

によって定める．ただし，記号 $^\top$ は転置を表し，$\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$ とする．

d を n 以下の正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ の次元が

$$\dim V = n - \dim N$$

で与えられることを示せ．

(ii) 行列 A の適当な $d-1$ 個の列ベクトルの組が線形従属ならば，$\sigma(\boldsymbol{x}) < d$ を満たす非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ が存在することを示せ．

(iii) 任意の非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ に対して $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ が成り立つための必要十分条件は，行列 A の任意の $d-1$ 個の列ベクトルの組が常に一次独立であることを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let f be a linear mapping defined by

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

with an $n \times n$ matrix A. The kernel of f is defined by

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\},$$

and the number of non-zero elements of a vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ by

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j),$$

where $^\top$ denotes the transposition and $\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$. Let d be a positive integer less than or equal to n. Answer the following questions.

(i) Show that the dimension of the subspace $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ of $\mathbb{R}^n$ is given by

$$\dim V = n - \dim N.$$

(ii) Show that if some $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly dependent, then there exists a non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ such that $\sigma(\boldsymbol{x}) < d$.

(iii) Show that $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ for any non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ if and only if any $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly independent.

応用数学

1

i を虚数単位 $(i^2=-1)$ として，関数

$$g(t)=\frac{1}{t^2+4i},\quad t\in\mathbb{R},$$

とそのフーリエ変換

$$\widehat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\xi t}dt,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

を考える．また，関数 f を g と $\widehat{g}$ のたたみこみにより

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)\,\widehat{g}(s)ds$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) フーリエ変換 $\widehat{g}(\xi)$ を求めよ．

(ii) $f(t)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ を求めよ．

(iii) $\widehat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級でないことを示せ．

(iv) $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であることを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Consider

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 4i}, \quad t \in \mathbb{R},$$

and its Fourier transform

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

where i represents the imaginary unit ($i^2 = -1$). Define a function f as the convolution of g and $\widehat{g}$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, \widehat{g}(s) ds.$$

Answer the following questions.

(i) Obtain the Fourier transform $\widehat{g}(\xi)$.

(ii) Obtain the Fourier transform $\widehat{f}(\xi)$ of $f(t)$,

(iii) Show that $\widehat{f}(\xi)$ is not of class C^1 on $\mathbb{R}$.

(iv) Show that $f(t)$ is of class C^∞ on $\mathbb{R}$.

グラフ理論

2

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ，$N=[G,w]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．節点 u から節点 v への有向枝は (u,v) と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．節点 u から節点 v への距離 $\mathrm{dist}(u,v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める．枝重み和が負である有向閉路を負閉路と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) 次の条件を満たす節点の実数値重み $p(v)$, $v\in V$ が存在するとき，N に負閉路が存在しないことを証明せよ．

$$w(u,v)+p(u)-p(v)\geqq 0,\quad \forall (u,v)\in E.$$

(ii) 次を満たす節点 $s\in V$ と枝 $(u,v)\in E$ の組が存在するとき，N に負閉路が存在することを証明せよ．

$$\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v)<\mathrm{dist}(s,v).$$

(iii) 各枝の重みが非負であると仮定する．ある部分集合 $S\subsetneqq V$ と節点 $s\in S$ に対して，S から $V\setminus S$ へ向かう枝 $(u,v)\in E$ の中で $\mathrm{dist}(s,u)+w(u,v)$ の値を最小とする枝を (u^*,v^*) とする．このとき，$\mathrm{dist}(s,v^*)=\mathrm{dist}(s,u^*)+w(u^*,v^*)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\mathrm{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N. A directed cycle is called a negative cycle if the sum of edge weights in the cycle is negative. Answer the following questions.

(i) Prove that N has no negative cycle if there is a set of real weights $p(v)$, $v \in V$ such that

$$w(u, v) + p(u) - p(v) \geqq 0, \quad \forall (u, v) \in E.$$

(ii) Prove that N has a negative cycle if there is a pair of a vertex $s \in V$ and an edge $(u, v) \in E$ such that

$$\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v) < \mathrm{dist}(s, v).$$

(iii) Assume that the weight of each edge is non-negative. For a subset $S \subsetneqq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges $(u, v) \in E$ directed from S to $V \setminus S$. Prove that $\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.

オペレーションズ・リサーチ

3

関数 $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．さらに，関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$g(t)=2^t,\ \ f(\boldsymbol{x})=g(h(\boldsymbol{x}))$$

ベクトル $\boldsymbol{b}^i\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,\ldots,m)$ が与えられたとき，集合 $\Delta\subseteqq\mathbb{R}^n$，$\Gamma\subseteqq\mathbb{R}^m$，$\Omega\subseteqq\mathbb{R}^n$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\boldsymbol{b}^1,\boldsymbol{b}^2,\ldots,\boldsymbol{b}^m\}\\ \Gamma &= \left\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \alpha_i=1,\ \alpha_i\geqq 0\ (i=1,\ldots,m)\right\}\\ \Omega &= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m \alpha_i\boldsymbol{b}^i,\ \boldsymbol{\alpha}\in\Gamma\right\}\end{aligned}$$

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$\begin{array}{lll}\text{(P)} & \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x})\\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in\Omega\end{array}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{\alpha}\in\Gamma$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$h\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\boldsymbol{b}^i\right)\leqq\sum_{i=1}^m \alpha_i h(\boldsymbol{b}^i)$$

(ii) 関数 g と f が凸関数であることを示せ．

(iii) 次の線形計画問題のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

$$\begin{array}{ll}\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{b}^i)\alpha_i\\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_i=1\\ & \alpha_i\geqq 0\ \ (i=1,\ldots,m)\end{array}$$

ただし，決定変数は α_i $(i=1,\ldots,m)$ である．

(iv) 問題 (P) の最適解の集合を X^* とする．このとき，$X^*\cap\Delta\neq\emptyset$ となることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a convex function. Moreover, let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined as $g(t) = 2^t$ and $f(\boldsymbol{x}) = g(h(\boldsymbol{x}))$, respectively.

For given vectors $\boldsymbol{b}^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, m)$, let sets $\Delta \subseteqq \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subseteqq \mathbb{R}^m$, and $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ be defined as

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \ldots, \boldsymbol{b}^m\right\}, \\
\Gamma &= \left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, m)\right\}, \\
\Omega &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{b}^i,\ \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma\right\},
\end{aligned}$$

respectively.

Consider the following nonlinear programming problem:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{array}$$

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for all $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma$.

$$h\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{b}^i\right) \leqq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h(\boldsymbol{b}^i).$$

(ii) Show that functions g and f are convex.

(iii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions of the following linear programming problem.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{b}^i)\alpha_i \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \\ & \alpha_i \geqq 0 \ \ (i = 1, \ldots, m), \end{array}$$

where the decision variables are α_i $(i = 1, \ldots, m)$.

(iv) Let X^* be the set of optimal solutions of problem (P). Show that $X^* \cap \Delta \neq \emptyset$.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^{\top}u(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力であり，$^{\top}$ は転置をあらわす．以下の問いに答えよ．

(i) システムの可観測性の定義を述べよ．

(ii) システムが可観測かつ A のすべての固有値の実部が負ならば

$$PA + A^{\top}P + C^{\top}C = 0$$

を満たす正定値行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在することを証明せよ．

(iii) k はある正の整数とし，$n = 2k+1$ とする．また，A の (i,j)-要素 $(A)_{ij}$ および C の i 番目の要素 $(C)_i$ は

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

で与えられるとする．このとき，システムの可観測性を判定せよ．さらに，システムの最小実現の次元数を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^\top u(t),\ y(t) = Cx(t),$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output, and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of the observability of the system.

(ii) Show that if the system is observable and the real parts of all the eigenvalues of A are negative, then there exists a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ that satisfies

$$PA + A^\top P + C^\top C = 0.$$

(iii) Let k be a positive integer, and $n = 2k+1$. The (i,j)-entry $(A)_{ij}$ of A, and the i-th entry $(C)_i$ of C are given by

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Then, determine the observability of the system. Furthermore, find the dimension of a minimal realization of the system.

物理統計学

5

X を尺度母数 $\gamma(>0)$ のコーシー分布に従う無限区間 $(-\infty,\infty)$ 上の実数値確率変数とし，その確率密度関数は $\rho_\gamma(X)=\dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$ で与えられるものとする．$X\neq 0$ で変換 $F(X)$ を $F(X)=\alpha X-\dfrac{\beta}{X}, 0<\alpha<1, \beta>0$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(i) 変換 $Y=\alpha\dfrac{1}{X}, \alpha>0$ で定義される確率変数 Y は，尺度母数 $\gamma'=\alpha\dfrac{1}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma'}(Y)$ に従うことを示せ．

(ii) 変換 $Z=F(X)$ で定義される確率変数 Z は，尺度母数 $\gamma''=\alpha\gamma+\dfrac{\beta}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma''}(Z)$ に従うことを示せ．

(iii) $p(X|Z)=\dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$ と定義する時，関係式

$$\sum_{X\in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)=1,$$

$$0\leqq p(X|Z)\leqq 1 \quad \text{for} \quad X\in F^{-1}(\{Z\}).$$

を満足することを示せ．

(iv) $\gamma=\sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$ である時，エントロピー $S(Z)=-\displaystyle\sum_{X\in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)\ln p(X|Z)$ の平均 $h=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ が，次式

$$h=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|\rho_\gamma(X)dX$$

を満足することを示せ．但し，変換 $F(X)$ があるコーシー分布の不変測度に関してエルゴード性を持つことは既知として良い．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let X be a real-valued random variable over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ obeying the Cauchy distribution with a scale parameter $\gamma(>0)$ whose density function is given by $\rho_\gamma(X) = \dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$. Define $F(X) = \alpha X - \dfrac{\beta}{X}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ for $X \neq 0$. Answer the following questions.

(i) Show that a random variable Y given by the transformation $Y = \alpha \dfrac{1}{X}, \alpha > 0$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma'}(Y)$ with the scale parameter $\gamma' = \alpha \dfrac{1}{\gamma}$.

(ii) Show that a random variable Z given by the transformation $Z = F(X)$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma''}(Z)$ with the scale parameter $\gamma'' = \alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$.

(iii) Define $p(X|Z) = \dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$. Show that $p(X|Z)$ satisfies the relations

$$\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) = 1,$$

$$0 \leqq p(X|Z) \leqq 1 \quad \text{for} \quad X \in F^{-1}(\{Z\}).$$

(iv) Show that when $\gamma = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$, the average of entropy given by $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ where $S(Z) = -\sum_{X\in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)\ln p(X|Z)$ satisfies the relation

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|\frac{dF(X)}{dX}\right| \rho_\gamma(X)dX.$$

Here, one can use the fact that the transformation $F(X)$ is ergodic with respect to a certain invariant measure given by a Cauchy distribution.

力学系数学

$\boxed{6}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を定数として次の微分方程式を考える．

$$t^2 \frac{dx}{dt} + (at + b)x = ct + d \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．ただし，$b \neq 0$ とし，自然数 n に対して最高次の次数が n の t の多項式で表される解を n 次多項式解と呼ぶ．

(i) 式 (1) が１次多項式解をもつための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表わせ．

(ii) 自然数 $n > 1$ に対して，式 (1) が n 次多項式解をもつための必要十分条件を a, b, c, d, n を用いて表わせ．

(iii) どんな自然数 n に対しても式 (1) が n 次多項式解をもたないための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表わせ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ be constants and consider the differential equation

$$t^2 \frac{dx}{dt} + (at+b)x = ct + d, \tag{1}$$

where $b \neq 0$. For a positive integer n, a solution is called an nth-order polynomial solution if it is an nth-order polynomial of t containing a nonzero nth-order term. Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have a first-order polynomial solution, and express the condition with a, b, c and d.

(ii) Let $n > 1$ be an integer. Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have an nth-order polynomial solution, and express the condition with a, b, c, d and n.

(iii) Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have no nth-order polynomial solution for any positive integer n, and express the condition with a, b, c and d.