

京都大学大学院情報学研究科
通信情報システム専攻 修士課程入学選抜試験問題
(2020 年度 10 月期入学・2021 年度 4 月期入学)

Admissions for October 2020 and for April 2021

Entrance Examination for Master's Program

Department of Communications and Computer Engineering

Graduate School of Informatics, Kyoto University

2020年8月2日 9:00－12:00

August 2, 2020 9:00 a.m. - 12:00 noon

専門基礎B
Problem Set B

注意 (NOTES)

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
 2. これは「**専門基礎B**」の問題用紙で、表紙共に 16 枚 がある。解答開始の合図があった後、枚数を確認、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
 3. 問題は8問(B-1, B-2, B-3, B-4, B-5, B-6, B-7, B-8)ある。**4問を選択して解答すること。** 答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
 4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
 5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
 6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
 7. 解答は日本語または英語で行うこと。
-
1. Do not open the pages before a call for starting.
 2. This is the “**Problem Set B**” in 16 pages including this front cover.
After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
 3. **Answer 4 of the following 8 questions;** B-1, B-2, B-3, B-4, B-5, B-6, B-7, and B-8. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
 4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating “Over” at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
 5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
 6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
 7. Answer the questions either in Japanese or English.

専門基礎B

B-1, **B-2**, **B-3**, **B-4**, **B-5**, **B-6**, **B-7**, **B-8**の8問から4問を選択して解答せよ。

Problem Set B

Choose and answer 4 questions out of **B-1**, **B-2**, **B-3**, **B-4**, **B-5**, **B-6**, **B-7**, and **B-8**.

B-1

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) 下記のデジタル伝送技術に関する問に答えよ。

- (a) 最高周波数が 20 kHz のオーディオ信号を、16 ビット量子化により PCM (Pulse Code Modulation) 伝送する。必要なビット速度を求めよ。
- (b) 問 (a) のビット列を、1024QAM (Quadrature Amplitude Modulation) で伝送する場合に必要なシンボル速度を求めよ。
- (c) 遅延時間差が 20 μ s である 2 波を持つ伝搬路の周波数伝達関数を示せ。
- (d) 問 (a) のビット列を、サブキャリアの変調方式が 1024QAM である OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 信号として、問 (c) の伝搬路で伝送する。ガードインターバル長を OFDM シンボル長の 20% 以下とするために必要な最低限のサブキャリア数を求めよ。なお、OFDM シンボルは、ガードインターバルと有効シンボルで構成される。

(2) 通信ネットワークに関する以下の問に答えよ。

- (a) 単位時間当たりの平均到着数を λ とする呼がポアソン過程に従って到着するとき、時間 t の間に k 個の呼が到着する確率 $P(k, t)$ は、次式で与えられる。

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} k P(k, t)$ を求めよ。

- (b) 問 (a) において、続いて到着する 2 つの呼の到着間隔が t より大きくなる確率を求めよ。
- (c) 問 (a) において、続いて到着する 2 つの呼の到着間隔の確率密度関数を問 (b) の結果から求めよ。
- (d) グループ 1 とグループ 2 において、それぞれ、単位時間当たりの平均到着数を λ_1 と λ_2 とする呼がポアソン過程に従って到着する。グループ 1 とグループ 2 の呼の到着過程は互いに独立であると仮定する。時間 t の間にグループ 1 とグループ 2 で合わせて k' 個の呼が到着する確率を与える式を求め、その導出した式を説明せよ。

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions related to digital transmission techniques.

- (a) Find the required bit rate of Pulse Code Modulation (PCM) transmissions using 16-bit quantization to transmit an audio signal with frequency up to 20 kHz.
- (b) Find the required symbol rate to transmit the bit stream of Question (a) by 1024QAM (Quadrature Amplitude Modulation).
- (c) Find the frequency transfer function of the channel with two paths of $20\mu\text{s}$ delay time difference.
- (d) Suppose Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) transmissions with 1024QAM subcarrier modulation of the bit stream in Question (a) over the channel in Question (c). Find the minimum number of subcarriers in order for the guard interval to be less than or equal to 20% of the OFDM symbol. Note that an OFDM symbol consists of guard interval and effective symbols.

(2) Answer the following questions related to communication networks.

- (a) Consider that calls arrive following a Poisson process with the average number of calls per unit time, λ . The probability, $P(k, t)$, that k calls arrive during a period of time t is given by:

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Find $\sum_{k=0}^{\infty} kP(k, t)$.

- (b) In Question (a), find the probability that the inter-arrival time of two consecutive calls is larger than t .
- (c) In Question (a), find the probability density function of the inter-arrival time of two consecutive calls from the result of Question (b).
- (d) In groups 1 and 2, calls arrive following a Poisson process with the average number of calls per unit time, λ_1 and λ_2 , respectively. We assume that the call arrival processes in groups 1 and 2 are independent each other. Find the formula that gives the probability that k' calls aggregated in groups 1 and 2 arrive during a period of time t , and explain the formula.

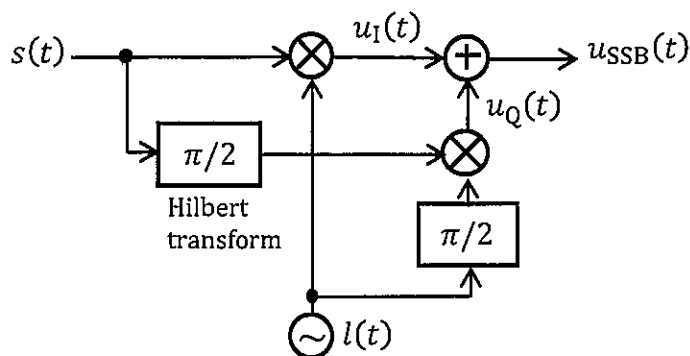
B-2

下記のすべての問に答えよ. (English translation is given on the next page.)

(1) 単側波帯(SSB)変調方式について以下の問に答えよ.

単側波帯変調器を図(a)に示す. ただし, $s(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi f_m t + \cos 2\pi f_n t$,

$l(t) = A_t \cos 2\pi f_c t$ であり, $0 < f_m < f_n \ll f_c$ である.



図(a)

(a) 図(a)の $u_I(t)$ と $u_Q(t)$ を導出せよ.

(b) 図(a)の $u_{SSB}(t)$ を導出し, $u_{SSB}(t)$ のフーリエ変換 $U_{SSB}(f)$ を導出せよ.

(c) $u_{SSB}(t)$ を受信する場合の同期検波器の構成を図示し, 動作について述べよ.

(d) 同期検波器の局部発振器信号 $g(t)$ が次式で与えられるとき,

$$g(t) = A_r \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

復調信号 $r(t)$ を導出せよ.

(2) デジタル通信技術に関する以下の問に答えよ.

(a) シンボル間隔 T のベースバンドデジタル信号を考える. この信号に適用するロールオフファクタ α のレイズドコサインフィルタの周波数伝達関数を示せ.

(b) 問(a)のフィルタはナイキストフィルタと呼ばれ, デジタル通信においてシンボル間干渉を生じない条件を満たす. その理由を説明せよ.

(c) グレイ符号について述べ, 8PSK 変調についてそのマッピング例を示せ.

Answer all the following questions.

- (1) Answer the following questions related to the single sideband(SSB) modulation scheme.

A single sideband modulator is shown in Figure (a),

where $s(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi f_m t + \cos 2\pi f_n t$, $l(t) = A_t \cos 2\pi f_c t$,

and $0 < f_m < f_n \ll f_c$.

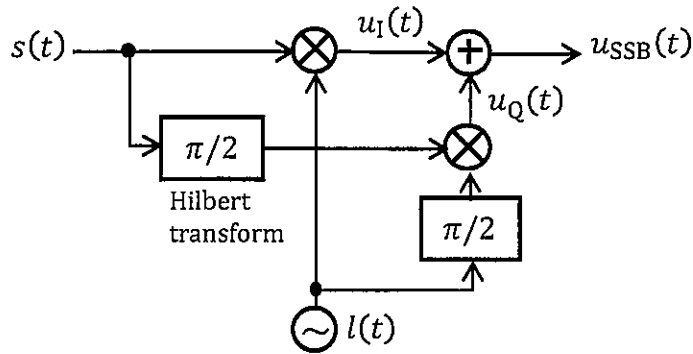


Figure (a)

- Find the signals $u_I(t)$ and $u_Q(t)$ in Figure (a).
- Find the signal $u_{SSB}(t)$ in Figure (a), and find the Fourier transform $U_{SSB}(f)$ of $u_{SSB}(t)$.
- Draw a diagram of a coherent detection scheme for $u_{SSB}(t)$ signal, and explain its operation.
- Find the detected signal $r(t)$, when the local oscillator signal $g(t)$ of the coherent detection scheme is given by the following equation:
 $g(t) = A_r \cos(2\pi f_c t + \phi)$.

(2) Answer the following questions related to digital communication techniques.

- (a) Consider a digital modulated basedband signal with the symbol duration T . Find the frequency transfer function of a raised cosine filter with the roll-off factor α for the signal.
- (b) The filter in Question (a) is called Nyquist filter, and satisfies the zero intersymbol interference condition in digital communications. Explain the reason.
- (c) Explain Gray code, and show a Gray code mapping for 8PSK.

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given below.)

- (1) x - y 平面を境界として、誘電率 $4\epsilon_0$ ($z < 0$) と $9\epsilon_0$ ($z \geq 0$) の 2 種類の媒質が接しているとする。両媒質の透磁率はともに μ_0 、導電率はともに 0 とする。 z 軸の負方向から、単色平面電磁波が入射する場合を考える。その電界は x 成分のみを持ち、次式で与えられるものとする。

$$E_x(t, z) = E_1 \exp(j(\omega t - k_1 z)) \quad (z < 0)$$

ただし、 ω は角周波数、 k_1 は波数を表す。このとき以下の問に答えよ。

- この入射波の磁界を与える式を示せ。
 - $z = 0$ における境界条件を述べ、電界の反射係数と透過係数を求めよ。
 - 領域 $z > 0$ および $z < 0$ における全電界および全磁界を与える式を示せ。
 - 領域 $z > 0$ および $z < 0$ におけるポインティングベクトルの大きさと方向を求めよ。
- (2) アンテナに関する次の用語を説明せよ。
- 微小ダイポール
 - 複素ポインティングベクトル
 - エンドファイアアレイ

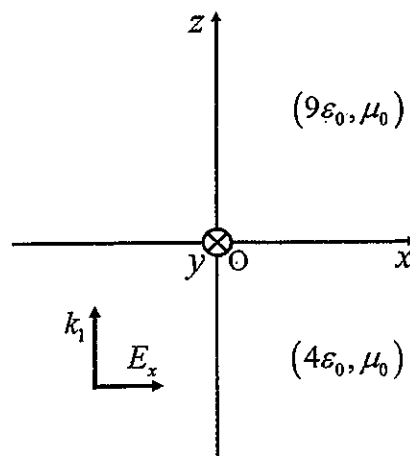
Answer all the following questions.

- (1) Consider that two materials with permittivity $4\epsilon_0$ ($z < 0$) and $9\epsilon_0$ ($z \geq 0$) are placed with x - y plane as the boundary. The permeability and conductivity of both materials are μ_0 and 0, respectively. Let a plane monochromatic electromagnetic wave enter from negative z direction. Its electric field has only the x component, and is given by

$$E_x(t, z) = E_1 \exp(j(\omega t - k_1 z)) \quad (z < 0),$$

where ω is the angular frequency and k_1 is the wave number. Answer the following questions.

- Find the formula that gives the magnetic field of the incident wave.
 - State the boundary condition of the $z = 0$ plane, and find the reflection and transmission coefficients of the electric field.
 - Find formulas that give the total electric and magnetic fields in the region $z > 0$ and $z < 0$.
 - Find the magnitude and direction of the Poynting vector in the region $z > 0$ and $z < 0$.
- (2) Explain the meanings of the following terms related to the antenna.
- Infinitesimal dipole
 - Complex Poynting vector
 - End-fire array



図(a)
Figure (a)

B-4

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) 2組の2ビット入力 (a_1, a_0) と (b_1, b_0) により表現される2桁の2進整数 $A = (a_1 a_0)_2$ と $B = (b_1 b_0)_2$ を比較し、 $A > B$ のときには1を、 $A \leq B$ のときには0を出力する比較回路を設計する。出力の論理変数を x として、以下の問に答えよ。

Suppose that we design a circuit that compares two 2-digit binary integers $A = (a_1 a_0)_2$ and $B = (b_1 b_0)_2$ represented by two 2-bit inputs (a_1, a_0) and (b_1, b_0) . It outputs 1 in the case of $A > B$, and outputs 0 in the case of $A \leq B$. Answer the following questions.

- (a) 出力 x を表す論理式の最小積和形表現を求めよ。

Give a minimal sum-of-products expression of output x .

- (b) 出力 x を表す論理式の最小和積形表現を求めよ。

Give a minimal product-of-sums expression of output x .

- (c) 3入力 NAND ゲートのみを用いて、出力 x を求めるゲート数最小の論理回路を示せ。なお、入力として、 a_1, a_0, b_1, b_0 およびそれらの否定 $\overline{a_1}, \overline{a_0}, \overline{b_1}, \overline{b_0}$ と論理値1、論理値0が与えられるものとする。

Derive a logic circuit that realizes x with the minimum number of 3-input NAND gates only. Assume a_1, a_0, b_1, b_0 and their complements $\overline{a_1}, \overline{a_0}, \overline{b_1}, \overline{b_0}$ together with logic values 0 and 1 are available as inputs.

- (2) 1ビットの信号 x を入力とし、1ビットの信号 y を出力する Mealy 型同期式順序回路を設計する。この回路は、現在の入力値が1クロック前の入力値と異なっている場合には1を出力し、現在の入力値が1クロック前の入力値と同じ場合には0を出力する。動作開始時には、1クロック前の入力値は0であったと仮定する。例えば、010110が入力された場合の出力は011101となる。以下の問に答えよ。

Suppose that we design a Mealy-type synchronous sequential circuit that has a 1-bit input x and a 1-bit output y . The circuit outputs 1 when the value of the current input is different from the value at one clock earlier. It outputs 0 when the value of the current input is the same as the value at one clock earlier. At the time the circuit starts operating, it is assumed that the value of the input at one clock earlier is 0. For example, when 010110 is fed to the circuit, it produces 011101. Answer the following questions.

- (a) この回路の状態遷移図を示せ。

Derive a state transition diagram of the circuit.

- (b) 状態数を最小化した状態遷移表と出力表を求めよ。状態数が最小であることをどのようにして確認したかを説明せよ。

continued on next page			
次	頁	へ	続

Show the state transition table and the output table with the minimum number of states. Explain how you verified that the number of states is minimal.

- (c) この回路を最少数の D フリップフロップを用いて実現する。フリップフロップの入力を与える論理関数の最小積和形表現を求めよ。なお、D フリップフロップの初期値は 0 であり、入力と出力を表す論理変数をそれぞれ d と q とせよ。複数のフリップフロップを用いる場合は添字で区別せよ。

We would like to implement the circuit with the minimum number of D flip-flops. Derive the excitation function(s) of D flip-flop(s) in a minimal sum-of-products form. Here, the initial value of a D flip-flop is 0, and logic variables of the input and the output of a D flip-flop are d and q , respectively. If multiple flip-flops are used, distinguish them by subscripts.

- (d) 出力 y の最小積和形表現を求めよ。

Derive the output y in a minimal sum-of-products form.

- (3) 問 (2) の順序回路の出力 y より、元の信号 x を復元する Mealy 型同期式順序回路を設計する。以下の問に答えよ。

Suppose that we design a Mealy-type synchronous sequential circuit that restores the input x from the output y of the sequential circuit in Question (2). Answer the following questions.

- (a) この回路の状態遷移図を示せ。

Derive a state transition diagram of the circuit.

- (b) 状態数を最小化した状態遷移表と出力表を求めよ。011101 の入力に対する状態遷移と出力の様子を説明せよ。

Show the state transition table and the output table with the minimum number of states. Explain the state transition and the output sequence for the input sequence of 011101.

B-5

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

(1) プロセッサがデータ・キャッシュを介して図 (a) に示す主記憶のアドレス (16 進数表記) へ上から順にアクセスする。このキャッシュはブロックサイズが1語で総容量が32語の2ウェイ・セット・アソシアティブ・キャッシュである。このキャッシュはライト・バック・キャッシュである。データ・アクセスはloadとstoreの2種類があり、いずれも語 (1語は4バイト) 単位で行われる。図 (a) に示す “Data to be stored” 列は、キャッシュに書き込まれるデータ (16 進数表記) を意味する。キャッシュは当初は空であり、主記憶に格納されているすべてのデータは当初はゼロであるとする。

以下の問に答えよ。

A processor accesses a main memory through a data cache according to the memory addresses (in hexadecimal) shown in Figure (a) from the top to the bottom. The cache is a 2-way set associative cache whose block size is 1 word and the total capacity is 32 words. The cache is a write-back cache. Each access is either a load or a store in unit of word (1-word = 4-byte). The column “Data to be stored” shown in Figure (a) represents data (in hexadecimal) to be written to the cache. The cache is initially empty and all data contents of the main memory are initially zero.

Answer the following questions.

- (a) キャッシュの置き換えアルゴリズムがFIFO (First In First Out) であるとき、図 (a) に示す全てのアクセスが完了した後の主記憶アドレス 0x0000, 0x0004, 0x0008 に格納されているデータの値を、それぞれの理由と合わせて示せ。

Assume the cache replacement policy is FIFO (First In First Out). Show values of data stored in addresses 0x0000, 0x0004, and 0x0008 of the main memory when the processor has completed accessing all the addresses shown in Figure (a). Also explain the reason of your answer.

- (b) キャッシュの置き換えアルゴリズムがLRU (Least Recently Used) であるとき、主記憶に追い出されるアドレスとデータを、その理由と合わせて全て示せ。

Assume the cache replacement policy is LRU (Least Recently Used). Show all the addresses and data that are evicted to the main memory. Also explain the reason of your answer.

- (c) キャッシュの置き換えアルゴリズムの実装におけるウェイ数と回路コストの関係を、FIFO と LRU についてそれぞれ示せ。

Show the relationship between the number of ways and circuit cost when cache replacement algorithms are implemented for the following two cases: FIFO and LRU.

continued on next page
次 頁 へ 続 く

Access	Address	Access type	Data to be stored
1	0x0000	store	0x0001
2	0x0004	store	0x0002
3	0x0008	store	0x0003
4	0x0020	load	—
5	0x0000	store	0x0004
6	0x0104	load	—
7	0x0100	load	—
8	0x0024	store	0x0005
9	0x0000	store	0x0006
10	0x0020	store	0x0007

図 (a): メモリアクセス系列
Figure (a) Sequence of memory accesses.

(2) 計算機に関する以下の問に答えよ。

Answer the following questions related to computers.

- (a) VLIW アーキテクチャとはどのようなものか、また、VLIW アーキテクチャにより性能が向上できる理由を説明せよ。

Provide a brief explanation of VLIW architecture. Explain why VLIW architectures can improve performance.

- (b) パイプラインプロセッサにおける制御ハザードによる性能低下を防止する、ソフトウェアによる対策とハードウェアによる対策を一つずつ挙げ、これらが性能低下防止に効果的である理由を説明せよ。

Provide a software-based and a hardware-based measures that mitigate performance degradation of control hazards in pipeline processors. Explain why those measures are effective to mitigate performance degradation.

- (c) 仮想記憶における仮想アドレスと物理アドレスの変換動作について説明せよ。説明中では以下のすべての用語を用いること: ページ表、TLB、ページ・フォールト。

Explain how a virtual address is translated into a physical address. In the explanation, use all the following terms: page table, TLB, and page fault.

B-6

以下のすべての問に答えよ。
Answer all the following questions.

- (1) L_1 を $\{0,1\}$ 上の文字列のうち、文字列長が偶数であるか、または最後 2 文字が 00 で終わるような文字列からなる言語とする (例えば 1010 や 11000 は L_1 の要素であるが、110 は要素ではない.)。 L_1 を認識する非決定性有限オートマトンの状態遷移図 (ϵ 遷移を使っても良い) を示せ。さらに L_1 を認識する 6 状態の決定性有限オートマトンの状態遷移図を示せ。

Let L_1 be the language consisting of all the strings over $\{0,1\}$ such that the length is an even number, or ending with 00 in the rightmost position (for example, the strings 1010 and 11000 are in L_1 but 110 is not). Show the state transition diagram of a non-deterministic finite automaton that recognizes L_1 . (You may use ϵ transition.) Then, also show the state transition diagram of deterministic finite automaton for L_1 which consists of six states.

- (2) $\{0,1\}$ 上の文字列のうち、以下の文法で生成される全ての文字列からなる言語を L_2 とする。以下の問に答えよ。

Let L_2 be the language consisting of all strings over $\{0,1\}$ generated by the following grammar. Answer the following questions.

$$\begin{cases} S \rightarrow 0, \\ S \rightarrow 1, \\ S \rightarrow 0S0, \\ S \rightarrow 1S1. \end{cases}$$

- (a) L_2 が含む文字列の性質を簡潔に説明せよ。

Briefly explain the property of the strings included in L_2 .

- (b) L_2 が正規言語に属するか否かを答え、それを証明せよ。

Prove or disprove that L_2 is a regular language.

- (c) L_2 が文脈自由言語に属するか否かを答え、その理由を述べよ。

Answer whether L_2 is a context free language or not, with the reason why.

- (3) 計算量のクラスに関して、 $P \subseteq PSPACE$ が成り立つか否かを答え、それを証明せよ。

On the computational complexity classes, prove or disprove: $P \subseteq PSPACE$.

B-7

以下のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

文脈自由文法 G は終端記号の集合 $\mathcal{T} := \{x, +, *, (,)\}$, 非終端記号の集合 $\mathcal{N} := \{E\}$, 開始記号 E と, 以下の導出規則からなる.

$$\begin{aligned}E &\rightarrow x \\E &\rightarrow (E) \\E &\rightarrow E + E \\E &\rightarrow E * E\end{aligned}$$

- (1) 文法 G の言語に属する終端記号列で導出木を複数持つものを 1 つ答えよ. その終端記号列が持つ複数の導出木も書け.
- (2) 以下の条件をすべて満たす文脈自由文法 L は存在するか. 存在するならばその文法を与え, 存在しないならばその理由を答えよ.
 - 文法 L の生成する言語と文法 G の生成する言語は同じである.
 - 文法 L は曖昧ではない.
 - 文法 L においては演算子 $*$ の優先順位は $+$ より高く, 演算子 $*$ と $+$ とはいずれも左結合である.
- (3) (2) であなたが与えた文法 L に LL(1) 構文解析アルゴリズムを適用することは可能か. 理由とともに答えよ. ただし, L が存在しないならば「存在しない」と答えよ.
- (4) (2) であなたが与えた文法 L は LR(0) 文法か. 理由とともに答えよ. ただし, L が存在しないならば「存在しない」と答えよ.
- (5) オペレーティングシステムに関する以下の用語について説明せよ. 図を用いてもよい.
 1. ラウンドロビンスケジューリング
 2. クリティカルセクション
 3. 軽量プロセス
 4. 割込みベクタ

Answer all the following questions.

A context-free grammar G is equipped with the set \mathcal{T} of terminal symbols $\{x, +, *, (,)\}$, the set \mathcal{N} of non-terminal symbols $\{E\}$ where the initial symbol is E , and the following rewriting rules:

$$\begin{aligned}E &\rightarrow x \\E &\rightarrow (E) \\E &\rightarrow E + E \\E &\rightarrow E * E\end{aligned}$$

- (1) Give a sequence of the terminal symbols that belongs to G and has different derivation trees. You must also write its derivation trees.
- (2) Does a context-free grammar L that satisfies all of the following conditions exist? If there exists, define the grammar. If no such grammar exists, explain why.
 - The language generated by L is the same as that of G .
 - The grammar L is not ambiguous.
 - In the grammar L , the precedence of the operator $*$ is higher than $+$, and both $*$ and $+$ are left-associative.
- (3) Can the LL(1) parsing algorithm be applied to the grammar L that you answered in (2)? Answer with an explanation. If you answered that the grammar L that satisfies the conditions in (2) does not exist, answer " L does not exist".
- (4) Is the grammar L that you answered in (2) an LR(0) grammar? Answer with an explanation. If you answered that the grammar L that satisfies the conditions in (2) does not exist, answer " L does not exist".
- (5) Explain the following terms related to operating systems. You may use figures.
 1. Round-robin scheduling
 2. Critical section
 3. Light-weight process
 4. Interrupt vector

B-8

以下の全ての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) ブール値を持つ型付λ計算を下に示す構文, 簡約規則, 型付け規則によって定義する. ただし, $[x := N]$ は変数 x へ N を代入する操作, 簡約関係 $M \rightarrow M'$ は簡約規則で閉じた最小の関係, 関係 $M \rightarrow^* M'$ はその反射的推移的閉包とする. 型付け関係 $\Gamma \vdash M : \tau$ は型付け規則で閉じた最小の関係, 型環境 Γ は, 変数と型の組 $x : \tau$ の有限列で変数に重複がないものである. 空列は \bullet で表記する.

構文:

項 $M, N, P ::= x \mid \lambda x. M \mid M M \mid \text{true} \mid \text{false} \mid M?M:P$
 型 $\tau ::= \text{bool} \mid \tau \rightarrow \tau$

簡約規則:

$(\lambda x. M) N \rightarrow M[x := N]$
 $\text{true}?M:N \rightarrow M$
 $\text{false}?M:N \rightarrow N$
 $\frac{M \rightarrow M'}{M N \rightarrow M' N} \quad \frac{M \rightarrow M'}{M?N:P \rightarrow M'?N:P}$

型付け規則:

$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \quad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau_1 \rightarrow \tau_2}$
 $\frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1}{\Gamma \vdash M N : \tau_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash (M?N:P) : \tau}$

(a) $(\lambda x. (x?x:\text{false})) ((\lambda y. y) \text{true}) \rightarrow^* N$ を満たす N を全て挙げよ.

(b) 型付け関係 $\bullet \vdash M_2 : \text{bool} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{bool})$ が成立し, かつ, 任意の $P_1, P_2 \in \{\text{true}, \text{false}\}$ に対し

$$(M_2 P_1) P_2 \rightarrow^* \begin{cases} \text{false} & (\text{if } P_1 = P_2 = \text{true}) \\ \text{true} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たす M_2 を与え, $\bullet \vdash M_2 : \text{bool} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{bool})$ の導出を示せ.

(c) この型付λ計算における subject reduction 性とはどういう性質か. 性質の文言を与え, その意義を述べよ.

(2) 論理式 A, B を BNF $A, B ::= p \mid \perp \mid A \supset B$ で定義する. ここで p は命題変数を表す. 論理体系 ND を以下の推論規則で定義する. ここで, Γ は論理式の有限集合を表すとする.

$$\frac{}{\Gamma \cup \{A\} \vdash A} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \cup \{A \supset \perp\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \quad \frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

以下の判断 (a)~(d) の ND における導出を与えよ.

(a) $\{A \supset (B \supset C)\} \vdash B \supset (A \supset C)$

(c) $\emptyset \vdash A \supset ((A \supset \perp) \supset B)$

(b) $\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$

(d) $\emptyset \vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$

Answer all the following questions.

(1) A typed λ -calculus with Boolean values is defined by the following syntax, reduction rules, and typing rules. Here, $[x := N]$ denotes substitution of N for x , the reduction relation $M \rightarrow M'$ is the least relation closed by the reduction rules, and the relation $M \rightarrow^* M'$ is its reflexive and transitive closure. The typing relation $\Gamma \vdash M : \tau$ is the least relation closed by the typing rules. A type environment Γ is a finite sequence of pairs $x : \tau$ of a variable and a type, where all the variables are distinct. The empty sequence is denoted by \bullet .

Syntax:	
<i>Terms</i>	$M, N, P ::= x \mid \lambda x. M \mid M M \mid \text{true} \mid \text{false} \mid M?M:M$
<i>Types</i>	$\tau ::= \text{bool} \mid \tau \rightarrow \tau$
Reduction Rules:	
$(\lambda x. M) N \rightarrow M[x := N]$	
$\text{true}?M:N \rightarrow M$	$\frac{M \rightarrow M'}{M N \rightarrow M' N} \quad \frac{M \rightarrow M'}{M?N:P \rightarrow M'?N:P}$
$\text{false}?M:N \rightarrow N$	
Typing Rules:	
$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$	$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \quad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash M : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau_1 \rightarrow \tau_2}$
$\frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1}{\Gamma \vdash M N : \tau_2}$	$\frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash (M?N:P) : \tau}$

- (a) Enumerate all the terms N that satisfy $(\lambda x. (x?x:\text{false})) ((\lambda y. y) \text{true}) \rightarrow^* N$.
- (b) Give a term M_2 such that the typing relation $\bullet \vdash M_2 : \text{bool} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{bool})$ holds and, for any $P_1, P_2 \in \{\text{true}, \text{false}\}$,

$$(M_2 P_1) P_2 \rightarrow^* \begin{cases} \text{false} & (\text{if } P_1 = P_2 = \text{true}) \\ \text{true} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Show a derivation of $\bullet \vdash M_2 : \text{bool} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{bool})$.

- (c) What is the subject reduction property of this typed λ -calculus? Give a statement of the property and explain its significance.

(2) Logical formulas A and B are defined by the following BNF: $A, B ::= p \mid \perp \mid A \supset B$. Here, p stands for a propositional variable. The proof system ND is defined by the following inference rules. Γ stands for a finite set of logical formulas.

$$\frac{}{\Gamma \cup \{A\} \vdash A} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \perp} \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \cup \{A \supset \perp\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \quad \frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Give a derivation of each judgment (a)–(d) below in ND.

- (a) $\{A \supset (B \supset C)\} \vdash B \supset (A \supset C)$ (c) $\emptyset \vdash A \supset ((A \supset \perp) \supset B)$
- (b) $\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$ (d) $\emptyset \vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$