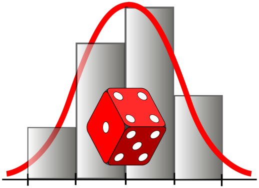
Estimation paramétrique par intervalle de confiance



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Plan

1. Introduction
2. Principe de l'estimation par intervalle de confiance
3. Construction de l'intervalle de confiance
    - Intervalle de confiance de la moyenne
    - Intervalle de confiance de a proportion
    - Intervalle de confiance de la variance

Principe de l'estimation par intervalle de confiance

Pour toute la suite du cours :

- $(X_1, \ldots, X_n)$, $n > 0$, un échantillon de taille n.
- Pour un risque α donné, on construira un intervalle de confiance I_θ dans le cas où l'inconnu θ est :
  1. La moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ d'une population
  2. La variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ d'une population
  3. la proportion p d'un caractère qualitatif relatif à une population.

Intervalle de confiance de la moyenne

Dans toute la suite, on considère les estimateurs ponctuels classiques de μ et de σ^2 respectivement la moyenne empirique et la variance empirique corrigée (ou modifiée) donnés par :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

Intervalle de confiance de la moyenne

Cas des petits échantillons ($n < 30$) :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$, $n > 0$, un n-échantillon de loi **normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où μ est la moyenne et σ^2 est la variance.

•σ^2 connue :

Théorème 1

Un intervalle de confiance de seuil (risque) α pour le paramètre μ de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ lorsque σ^2 est connue est :

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$P(\underbrace{\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times z_{\alpha/2}}_{Li} \leq \mu \leq \underbrace{\overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times z_{\alpha/2}}_{Ls}) = 1 - \alpha$$

L'écart type dans la population

La moyenne dans l'échantillon

Taille de l'échantillon

$P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$

$Z \in N(0,1)$

Démonstration

Par définition de l'intervalle de confiance, on cherche les bornes $(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2)$ tels que :

$$\mathbb{P}(\widehat{\mu}_1 < \mu < \widehat{\mu}_2) = 1 - \alpha$$

De plus, étant donné que l'échantillon est de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors:

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

et par conséquent l'idée est d'essayer de construire à partir de $\overline{X}_n$ une **variable aléatoire** $\sim \mathcal{N}(0,1)$. Posons:

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Intervalle de confiance de la moyenne

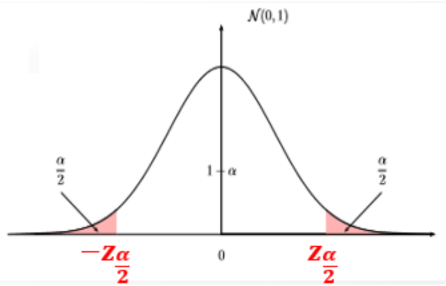
Posons $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$\mathbb{P}(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ est dit le **quantile** de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$, on le détermine à partir de la table de $\mathcal{N}(0,1)$ (lecture inverse de la table).

Par la symétrie de $\mathcal{N}(0,1)$ on a aussi:

$$\mathbb{P}(Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$



Ce qui implique que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) &= \mathbb{P}(Z > -z_{\frac{\alpha}{2}}) - \mathbb{P}(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \\
&= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}) &= 1 - \alpha \\
\mathbb{P}(-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_n - \mu < z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1 - \alpha \\
\mathbb{P}(-\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1 - \alpha \\
\mathbb{P}(\underbrace{\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\mu_1}} < \mu < \underbrace{\overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\mu_2}}) &= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Exemple

On suppose que le poids d'un nouveau né est une variable aléatoire normale d'écart-type égal à $0,5$ kg. Au mois de janvier 2004 dans l'hôpital de *Charleville-Mézières*, on observe 25 enfants nés dont le poids moyen (la moyenne empirique) $\overline{x_n} = 3,6$ kg.

1. Déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 95% pour la moyenne m du poids d'un nouveau né?
2. Quel serait le nombre d'enfants observés pour que l'intervalle de confiance soit de longueur $0,1$?

Intervalle de confiance de la moyenne

Solution

Nous sommes dans le cadre d'un petit échantillon $n = 25 < 30$.
La distribution du poids d'un nouveau né est supposée normale, de variance connue. Alors ,

$$IC(m) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

On a le niveau de confiance $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est déterminé à partir de la table normale $\mathcal{N}(0, 1)$ par une lecture inverse.

Intervalle de confiance de la moyenne

Loi normale réduite : probabilités unilatérales

Cette table donne p tel que P(Z > a) = p , où Z est la loi normale réduite

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
1,90	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	$\boxed{0,02500}$	0,02442	0,02385	0,02330
2,00	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831

Par conséquent :

$$IC(m) = [3,6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{25}}, 3,6 + 1,96\frac{0,5}{\sqrt{25}}] = [3,404; 3,796]$$

Intervalle de confiance de la moyenne

2. Quel serait le nombre d'enfants observés pour que l'intervalle de confiance soit de longueur $0,1$?.
   La longueur de l'intervalle de confiance est donnée par:

   Longueur de l'intervalle = 2 * Erreur

   Avec $E = z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$L = 0,1 = 2 * z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Par la suite :

$$n = \frac{4.z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}{(0.1)^2} \approx 384,16$$

   Alors on prends la taille n= 385.

• σ^2 inconnue :

Théorème 2

Un intervalle de confiance de seuil α pour le paramètre μ de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ lorsque σ^2 est inconnue est :

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}]$$

Démonstration

On se propose de donner un intervalle de confiance de risque α pour μ avec σ^2 est inconnue. Une idée naturelle est alors de remplacer σ^2 par son estimateur ponctuel (sans biais et convergent):

$$S_n'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

et par la suite on définit la variable aléatoire suivante:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n'^2}}$$ (attention elle **ne suit pas** $\mathcal{N}(0,1)$)

Par construction, cette variable aléatoire suit une loi de student.

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n'^2}} \sim t(n-1)$$

Grâce à la symétrie de la loi de student, on obtient le résultat suivant:

$$\mathbb{P}(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < T < t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1-\alpha$$

avec $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ désigne le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $t(n-1)$ à $n-1$ ddl, et il est déterminé à partir de la table de Student.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)}{\sqrt{S_n'^2}} < t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}(\underbrace{\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}}_{\hat{\mu_1}} < \mu < \underbrace{\overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}}_{\hat{\mu_2}}) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Exemple

Le chiffre d'affaire mensuel d'une entreprise suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Sur les 12 derniers mois, on a observé une moyenne des chiffres d'affaires égale à 10 000 euros avec un écart-type $s^{'} = 2000$ euros.

1.Donner une estimation de μ par intervalle de confiance au niveau $0,95$.

Solution

Nous sommes dans le cadre d'un petit échantillon $n = 12 < 30$.
La distribution du chiffre d'affaire mensuel est supposée normale, d'écart type inconnu mais estimé par $s^{'}$. Alors ,

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n^{'2}}{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n^{'2}}{n}}]$$

On a le niveau de confiance $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P(T > t_{\frac{\alpha}{2},12-1}) = \frac{\alpha}{2}$$

Où $t_{\frac{\alpha}{2},11}$ est déterminé à partir de la table de Student.

Intervalle de confiance de la moyenne

Distribution du t cumulée

La table 3 donne les valeurs t_α telles que $P(t \geq t_\alpha / m) = \alpha$
où m est le nombre de degrés de liberté

$m \backslash \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055

Par conséquent:

$$IC(\mu) = [10000 - 2,201\frac{2000}{\sqrt{12}}, 10000 + 2,201\frac{2000}{\sqrt{12}}] = [8729,26; 11270,74]$$

Cas des grands échantillons $(n \geq 30)$:

•σ^2 connue :

Théorème 3

• Lorsque l'échantillon **n'est pas de loi normale** mais sa taille $n \geq 30$, alors le **Théorème Central Limite** (T.C.L) permet de construire un intervalle de confiance de seuil α pour le paramètre μ, seulement lorsque σ^2 **connue** :

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Exemple

On suppose que le poids d'un nouveau né est une variable aléatoire d'écart-type égal à 0,5 kg. Le poids moyen des 49 enfants nés au mois de janvier 2004 dans hôpital de Charleville-Mézières a été de 3,6 kg.

1.Déterminer un intervalle de confiance à 90% pour le poids moyen d'un nouveau né dans cet hôpital.

Solution

Nous sommes dans le cadre d'un grand échantillon $n = 49 > 30$.
La variance dans la population est supposée connue avec $\sigma = 0,5$. Alors ,

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

On a le niveau de confiance $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est déterminé à partir de la table normale $\mathcal{N}(0,1)$ par une lecture inverse.

Intervalle de confiance de la moyenne

Loi normale réduite : probabilités unilatérales

Cette table donne p tel que P(Z > a) = p , où Z est la loi normale réduite

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	$\boxed{0,05050}$	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938

Par conséquent :

$$IC(m) = [3,6 - 1,64\frac{0,5}{\sqrt{49}}; 3,6 + 1,64\frac{0,5}{\sqrt{49}}] = [3,483; 3,717]$$

•σ^2 inconnue mais estimée par $S_n'^2$:

Théorème 4

• Pour $n \geq 30$, $t(n) \approx \mathcal{N}(0,1)$, et par la suite un intervalle de confiance de seuil α pour le paramètre μ de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ lorsque σ^2 est **inconnue** est :

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}]$$

Exemple

Dans un centre avicole, des études antérieures ont montré que la masse d'un œuf choisi au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire X, de moyenne et de variance inconnus . On admet que les masses des œufs sont indépendantes les unes des autres. On prend un échantillon de $n = 36$ œufs que l'on pèse. La moyenne empirique est égale à 55.083 et $s = 2.683$.
Déterminer L'intervalle de confiance au niveau 98% de la masse moyenne d'un oeuf.

Solution

Nous sommes dans le cadre d'un grand échantillon $n = 36 > 30$.

σ dans la population est supposé inconnu mais estimé par $s = 2.683$.

Alors ,

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}]$$

On a le niveau de confiance $1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$

$$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est déterminé à partir de la table normale $\mathcal{N}(0, 1)$ par une lecture inverse.

Intervalle de confiance de la moyenne

Loi normale réduite : probabilités unilatérales

Cette table donne p tel que P(Z > a) = p , où Z est la loi normale réduite

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
1,40	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,50	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,60	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,70	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,80	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
1,90	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
2,00	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
2,10	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
2,20	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
2,30	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,40	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639

Par conséquent:

$$IC(\mu) = [55.083 - 2.32\frac{2.683}{\sqrt{36}}; 55.083 + 2.32\frac{2.683}{\sqrt{36}}] = [54.043; 56.123]$$

Exercice

Des tests sur un échantillon de taille 10 sur la conductivité thermique d'un métal ont permis d'obtenir les données suivantes:

41.60	41.48	42.34	41.95	41.86
42.18	41.71	42.26	41.81	42.04

Soit X la conductivité thermique du métal. On suppose que X suit une loi Normale des paramètres inconnus.

1. Donner un intervalle de confiance de μ de niveau 95%.
2. Supposons que $\sigma^2 = 0.3$, déterminer la taille nécessaire de l'échantillon pour construire un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 95% et d'amplitude égale à 0.06.

Solution

Nous sommes dans le cadre d'un petit échantillon $n = 10 < 30$.
La distribution de la conductivité thermique est supposée normale, de variance inconnue. Alors ,

$$IC(\mu) = [\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}]$$

Calculons d'abord $\overline{X_n}$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 41,923$$

La variance mesurée sur l'échantillon est donnée par :

$$S_n'^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_n)^2 = 0.16$$

Intervalle de confiance de la moyenne

On a le niveau de confiance $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P(T > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = \frac{\alpha}{2}$$

Où $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ est déterminé à partir de la table Student.

$$t_{0.025,9} = 2,262$$

Par la suite :

$$\begin{aligned}
IC(\mu) &= [\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S_n'^2}{n}}] \\
&= [41,923 - 2,262\sqrt{\frac{0.16}{10}}, 41,923 + 2,262\sqrt{\frac{0.16}{10}}] \\
&= [41,63; 42,20]
\end{aligned}$$

2. Supposons que $\sigma^2 = 0.3$, déterminer la taille nécessaire de l'échantillon pour construire un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 95% et d'amplitude égale à 0.06.

On a :

$$\text{L'amplitude} = 2 * \text{E} = 2 * z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.06$$

Alors

$$(0.06)^2 = 4 z_{\frac{\alpha}{2}}^2 * \frac{\sigma^2}{n}$$

Et donc :

$$n \approx 1280, 53$$

On prends la taille n = 1281.