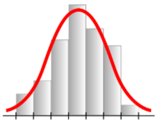
Techniques d'estimation pour l'ingénieur **2019/2020** 	**TD** **Estimation ponctuelle** **Estimation par intervalle de confiance**	esprit Se former autrement

Exercice1 :

Soit le réel $\theta > 1$. On considère la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta - 1} & si \quad 1 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une fonction de densité de probabilité d'une v.a. X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. S'agit-t-il d'une loi usuelle? Si oui, laquelle?
4. On suppose que le paramètre θ est inconnu. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
   a. Trouver, en utilisant la méthode des moments, un estimateur $\hat{\theta}$ pour θ.
   b. Etudier le biais et la convergence de $\hat{\theta}$.

Exercice 2:

Un matériel informatique a une durée de vie modélisée par une variable aléatoire X de fonction de densité $f(x)$. Un ingénieur en informatique sait qu'il devra l'utiliser pendant une durée de temps x_0. Il souhaite naturellement qu'il n'y ait pas de panne durant cette période. Cet ingénieur cherche en premier lieu à estimer les paramètres de la loi de cette durée de vie. Il a alors l'idée de faire fonctionner, sur un banc d'essai, n machines identiques à celle qu'il utilisera dans l'avenir. Il note $x_1, \dots, x_n$ les n durées de panne observées. D'après ces essais, il a montré que la densité de probabilité de cette durée de vie X, en années, de ce matériel s'écrit comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif. On suppose que θ est inconnu.

1. Calculer $E(X)$.
2. En déduire un estimateur de θ par la méthode des moments d'un échantillon de taille n issu de X.
3. Déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance de θ d'un échantillon de taille n issu de X.
4. Les estimateurs trouvés sont-ils sans biais? Sont-ils convergents?

Exercice 3:

Dans une ferme d'agrumes située au Cap bon, des données recueillies auprés du Groupement interprofessionnel des fruits (GIF) ont montré que la teneur en vitamine C (en mg/100 g), d'une clémentine choisie au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale X, de moyenne m et de variance σ^2. On admet que les teneurs en vitamine C des clémentines sont indépendantes les unes des autres et on les note par $X_1, X_2, \dots, X_n$. On prend un échantillon de *4* clémentines que l'on mesure la teneur. Les mesures ont donné : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (48, 39, 58, 36)$.

1. a) Donner un estimateur de la moyenne m par la méthode des moments.
   b) L'estimateur de la moyenne est-il sans biais ? est-il convergent ?
2. Donner un estimateur sans biais de la variance σ^2, puis vérifier que son estimation vaut *98, 25*.
3. Donner un intervalle de confiance pour la moyenne m avec un risque de *5%*.
4. Si on suppose que la valeur de la variance des teneurs est donnée, la réponse à la question précédente aurait-elle été différente ?
5. Déterminer un intervalle de confiance pour la variance σ^2 avec un risque de *5%*.

Exercice 4:

Dans le cadre d'une étude sur la santé au travail, on a interrogé au hasard 500 salariés de différents secteurs et de différentes régions de Tunis. 145 d'entre eux déclarent avoir déjà subi un harcèlement moral au travail.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion de salariés ayant déjà subi un harcèlement moral au travail.
2. Donner une estimation de cette proportion par un intervalle de confiance à 90%.

Si avec les mêmes données on calculait un intervalle de confiance à 95%, serait-il plus grand ou plus petit que celui trouvé à la question précédente ? (justifier sans calcul)