esprit Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**EXAMEN [Correction]** Semestre : 1 ☐ 2 ☒ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Module : Mathématiques de base 4 **Enseignants :** Equipe Mathématiques de base 4

Classe : $2^{\text{ème}}$ **A/GC/EM/P** Date : 27/05/2024 Heure : $09h00$ Durée : $1h30$

Documents autorisés : OUI ☐ NON ☒ **Calculatrice autorisée :** OUI ☒ NON ☐

Exercice 1 :(8 points)

Pour tout $n \geq 2$ et $x \in [-1, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)} .$$

1. (a) **(0.5 pt)** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[-1, 1]$.

$$\forall x \in [-1, 1], \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ convergence simple vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

(b) **(0.5 pt)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[-1, 1]$.

$$\forall n \geq 2, \ \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

(c) **(0.5 pt)** Pour $x > 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Si $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln(x)}}{n(n-1)} = +\infty$ $(x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0)$.

(d) **(0.5 pt)** Déduire le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$.
D'après question 1)a) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$ et d'après question 1)c) la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas simplement sur $]1, +\infty[$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$). Donc le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ est $[-1, 1]$.

2. (a) **(1.5 pt)** Vérifier que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est une série télescopique. Détermine sa nature et calculer sa somme.
On a

$$\sum_{n\geq 2} f_n(1) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 2} (-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)}) = -\sum_{n\geq 2} a_{n+1} - a_n$$

avec $a_n = \dfrac{1}{(n-1)}$

donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est une série télescopique.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est convergente

$S_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(-\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{(k-1)}) = 1 - \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ converge vers 1

(b) **(1 pt)** La série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est-elle semi-convergente ? Justifiant votre réponse.

$\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est une série alternée car elle est de la forme $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n a_n$, avec $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} \leq a_n$. Donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante. De plus

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Alors, d'aprés le critère des séries altérnées, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est convergente.

et $\sum\limits_{n\geq 2} |f_n(-1)| = \sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ or $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est convergente d'aprés (2.(a)) donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est absolument convergente. D'où, elle n'est pas semi-convergente.

(où directement, $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est absolument convergente alors elle est convergente et donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ n'est pas semi-convergente.)

(c) **(0.5 pt)** Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(2)$ est grossièrement divergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(2) = +\infty \neq 0$ (d'aprés 1.(c)) donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(2)$ est grossièrement divergente.

3. (a) **(1 pt)** Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ sur $[-1, 1]$. On note sa somme $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.

On a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall x \in [-1,1], \ \ n \geq 2.$$

Puisque $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est une série convergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.

(b) **(1 pt)** Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$.

On a

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge normalement sur } [-1,1]$$

alors

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge uniformément sur } [-1,1]$$

et

$$\forall n \geq 2,\ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$$

Donc la somme S est continue sur $[-1,1]$ et on'a :

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$$

(c) **(1 pt)** Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

on a

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge uniformément sur } [-1,1]$$

et

$$\forall n \geq 2,\ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$$

alors

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$$

Exercice 2 :(5.5 points)

Soit la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

1. **(0.5 pt)** Montrer que F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

   En effet : on a
   $$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}, \quad x \in [0,+\infty[.$$
   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$. On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. De plus $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. D'après le critère de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est convergente. Ainsi F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

2. **(1 pt)** Étudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$.

   En effet : Notons f la fonction
   $$\begin{array}{rcl} f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{array}$$

   • Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ (car $x \mapsto e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$).

• Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ (la fraction de deux fonctions continues est continue).
De plus,
• Pour tout $(x,t) \in [0, +\infty[^2$ on a :

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ est définie, continue et positive sur $[0, +\infty[$. D'après la première question $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est convergente. D'après le théorème de continuité, la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

3. (a) **(1 pt)** Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En effet : pour $x > 0$, on a

$$0 \leq F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \left[\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

(b) **(0.5 pt)** Déduire la limite de F en $+\infty$.

En effet : on a d'après 3.(a) $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$ et comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. (a) **(1 pt)** Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

En effet : Soit a un réel strictement positif fixé.
• Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ est convergente.
• Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ (car $x \mapsto e^{-xt}$ est continue sur $[a, +\infty[$), et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t\, e^{-xt}}{1+t^2}$.
• Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus,
• Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t\, e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{t\, e^{-at}}{1+t^2} = \phi(t).$$

La fonction ϕ est définie, continue, positive et clairement intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de dérivation, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

(b) **(0.5 pt)** Donner l'expression de la dérivée de F sous forme d'une intégrale.

En effet : D'après le théorème de dérivation

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} -\frac{t\, e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

5. **(1 pt)** Sachant que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt$. Etablir une relation simple entre la fonction F et sa dérivée seconde F'' sur $]0,+\infty[$.

En effet : On a F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt$. Alors

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$F(x) + F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \left[\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

D'où $F(x) + F''(x) = \dfrac{1}{x}$, pour tout $x > 0$.

Exercice 3 :(6.5 points)

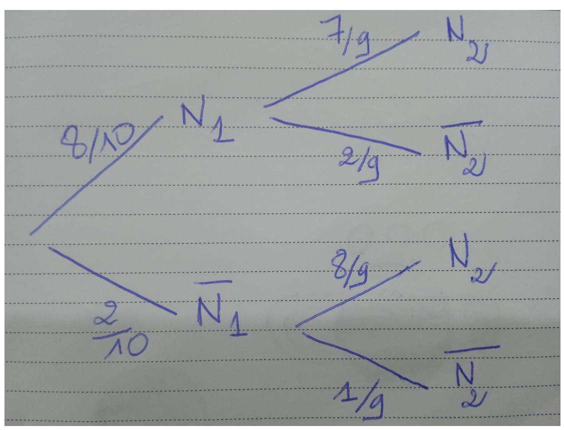
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

Partie1 :

1. Un joueur tire successivement deux boules sans remise. on considère les évènements :

N1 : "La première boule tirée est noire."
N2 : "La deuxième boule tirée est noire."

(a) **(1 pt)** Représenter la situation par un arbre pondéré.



(b) **(0.5pt)** Calculer la probabilité de n'avoir tirer aucune boule blanche pendant les deux tirages.

$$P(N_1 \cap N_2) = \frac{8}{10}.\frac{7}{9} = 0.622$$

(c) **(0.5 pt)** Calculer la probabilité d'avoir tirer une boule blanche pendant le premier tirage et une boule noire pendant le deuxième.

$$P(\overline{N}_1 \cap N_2) = \frac{2}{10}.\frac{8}{9} = 0.177$$

(d) **(0.5 pt)** Déduire la probabilté d'avoir tirer une boule noire pendant le deuxième tirage ?

$$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N}_1 \cap N_2) = 0.622 + 0.1777 = 0.799$$

(e) **(0.5 pt)** Qu'ayant tiré une boule noire pendant le deuxième tirage, qu'elle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche ?

$$P(\overline{N}_1|N_2) = \frac{P(\overline{N}_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{0.177}{0.799} = 0.221$$

Partie2 :

2. Maintenant le joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 3 dinars et pour chaque boule noire tirée, il perd 1 dinar.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le gain algébrique du joueur (celui ci peut être négatif représentant alors une perte) .

(a) **(0.5 pt)** Déterminer p la probabilité de tirer une boule blanche à chaque essai.
Le tirage se fait succecivement et avec remise, on a deux boules blanches parmi 10 dans l'urne, donc

$$p = \frac{2}{10}$$

(b) **(1 pt)** Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance et sa variance.
Il s'agit d'une épreuve de (Succès : obtenir une boule blanche, Echec : obtenir une boule noire). Cette épreuve se répète 5 fois, et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.2$.

$$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k \; p^k \; (1-p)^{5-k} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, ...5\}$$

De plus $E(X) = n * p = 5 * 0.2 = 1$ et $V(X) = n * p * (1-p) = 5 * 0.2 * 0.8 = 0.8$

(c) **(0.5 pt)** Quelle est la probabilité d'avoir tirer au moins une boule blanche.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_5^0(0,2)^0.(0.8)^5 = 1 - 0.32768 = 0.67232.$$

(d) **(0.5 pt)** Donner l'expression de Y en fonction de X.

$$Y = 3X - 1(5 - X) = 4X - 5$$

(e) **(1 pt)** Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
Puique $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ donc $Y \in \{-5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

X	0	1	2	3	4	5
Y	-5	-1	3	7	11	15
P(Y=y_i)	0.32768	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.00032

$E(Y) = 4E(X) - 5$
$V(Y) = 4^2V(X)$

Bon travail.