

Programme de 4^{ème} en mathématiques

1. THEOREME DE PYTHAGORE	3
I. Vocabulaire	3
II. Le théorème (direct) de Pythagore	4
III. Application : comment on rédige les exercices	4
IV. Réciproque du théorème de Pythagore	5
2. PUISSANCE D'UN NOMBRE POSITIF	7
I. Vocabulaire et définition	7
Règles sur les puissances	7
II. Puissances de 10	8
III. Ecriture scientifique d'un nombre	9
3. TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT	11
I. Rappels	11
IV. Cercle circonscrit à un triangle rectangle : propriétés directes	12
V. Cercle circonscrit à un triangle rectangle : propriétés réciproques	12
4. HAUTEURS ET ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE	14
I. Hauteurs d'un triangle	14
VI. Orthocentre	15
5. OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS	16
I. Addition, soustraction, somme algébrique (rappels)	16
II. Multiplication de nombres relatifs	17
III. Division de 2 nombres relatifs	17
6. DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE ; TANGENTE A UN CERCLE	18
I. Distance d'un point à une droite	18
II. Tangente à un cercle	19
7. PYRAMIDES ET CONES	20
I. Rappels (solides vus en 5ème)	20
II. Pyramides	21
III. Cônes de révolution	22
8. OPERATIONS AVEC LES FRACTIONS	24
I. Quotients égaux ; valeur approchée d'un quotient	24
II. Additions ; soustractions	24
III. Multiplications de fractions	25
IV. Divisions de fractions	26
1. Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire	26
2. division de fractions	26
9. DROITE DES MILIEUX	28
I. Propriété de la droite des milieux	28
Propriété 1 a « <i>propriété dite de la droite des milieux</i> »	28
II. Réciproque	29

10. MEDIANES D'UN TRIANGLE 30

- | | | |
|-----|---------------------------------|----|
| I. | Médianes d'un triangle | 30 |
| II. | Centre de gravité d'un triangle | 30 |

11. CALCUL LITTERAL 32

- | | | |
|------|--------------------------|----|
| I. | La distributivité | 32 |
| VII. | La double distributivité | 34 |

12. EQUATIONS A UNE INCONNUE 36

- | | | |
|------|---------------------------------------|----|
| I. | Qu'est ce qu'une équation ? | 36 |
| II. | Techniques pour résoudre une équation | 36 |
| III. | Résolution de problèmes | 37 |

13. THEOREME DE THALES 39

- | | | |
|------|----------------------|----|
| I. | Fraction de longueur | 39 |
| II. | Proportion | 39 |
| III. | Théorème de Thalès | 39 |

14. COSINUS D'UN ANGLE AIGU 41

- | | | |
|------|----------------------|----|
| I. | Définition | 41 |
| II. | Calculs de longueurs | 42 |
| III. | Calculs d'angles | 42 |

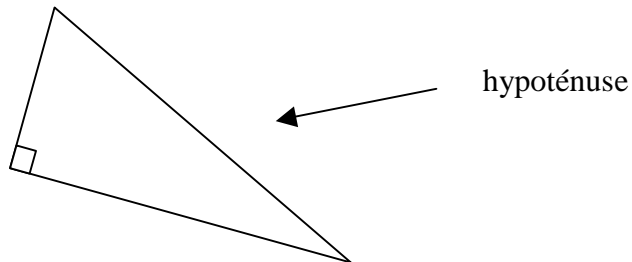
Théorème de Pythagore

On fait des révisions
sur nombres relatifs
(sommes/différences)

On distribue la fiche sur le plg

I. Vocabulaire

- Dans un triangle rectangle, l'**HYPOTENUSE** est le côté le plus long (côté opposé à l'angle droit)



- Soit a un nombre quelconque
On appelle « **a au carré** » le nombre $a \times a$

On note : $a^2 = a \times a$

Ex :

$$3^2 =$$

$$5^2 =$$

$$2,8^2 =$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

Géométriquement, si a est un nombre positif, a^2 représente l'aire d'un carré de côté a .

Ex 1 : Soit ABCD un carré de côté $AB = 7$ cm.

Quelle est l'aire de ce carré ?

Ex 2 : Soit ABCD un carré d'aire 40 cm^2 .

Quelle est la longueur AB ?

- Si a est un nombre positif, on appelle « **racine carrée de a** » le nombre positif dont le carré vaut a .

Ex :

$$\sqrt{9} =$$

$$\sqrt{25} =$$

$$\sqrt{36} =$$

$$\sqrt{50} =$$

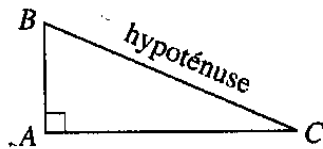
II. Le théorème (direct) de Pythagore

Activité

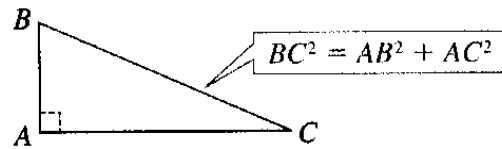
Synthèse :

Si un triangle est rectangle, alors l'hypoténuse au carré est égale à la somme des carrés des 2 autres côtés .

Donnée (ou hypothèse)



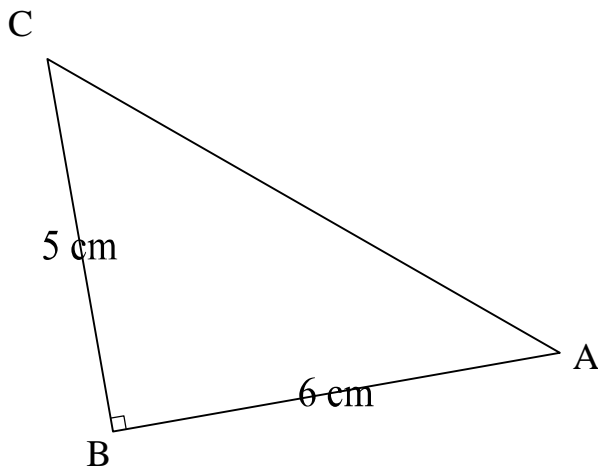
Résultat (ou conclusion)



A quoi ça sert ? : A calculer la longueur d'un des 3 côtés quand on connaît les deux autres.

III. Application : comment on rédige les exercices

Cas où on cherche l'hypoténuse



Modèle de
rédaction

Calculer AC.

Le triangle ABC est rectangle en B
donc d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 5^2$$

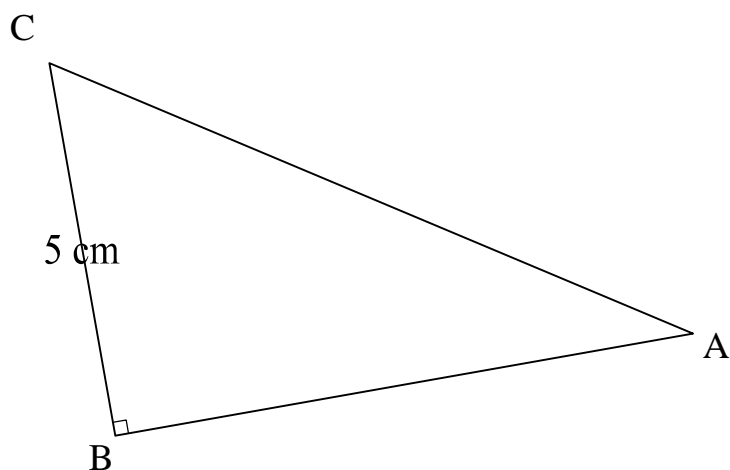
$$AC^2 = 36 + 25$$

$$AC^2 = 61$$

$$\boxed{AC = \sqrt{61} \text{ cm}} \quad (\text{valeur exacte})$$

$$AC \approx 7,8 \text{ cm} \quad (\text{arrondi au dixième, ou au millimètre})$$

Cas où on cherche un des deux autres côtés



Modèle de
rédaction



Calculer AB.

Le triangle ABC est rectangle en B
donc d'après la propriété de Pythagore, on

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{a :}$$

$$11^2 = AB^2 + 5^2$$

$$AB^2 = 11^2 - 5^2$$

$$AB^2 = 121 - 25$$

$$AB^2 = 96$$

$$AB = \sqrt{96} \text{ cm} \quad (\text{valeur exacte})$$

$$AC \approx 9,8 \text{ cm} \quad (\text{arrondi au dixième, ou au millimètre})$$

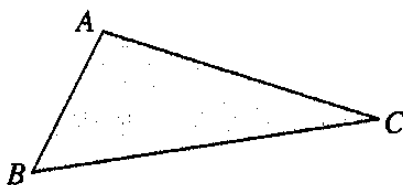
IV. Réciproque du théorème de Pythagore

Activité

Synthèse :

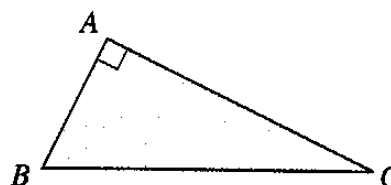
Si dans un triangle le plus grand côté au carré est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle ... et son hypoténuse est le plus grand côté.

Les données (ou hypothèses)



$$\bullet \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Le résultat (ou conclusion)

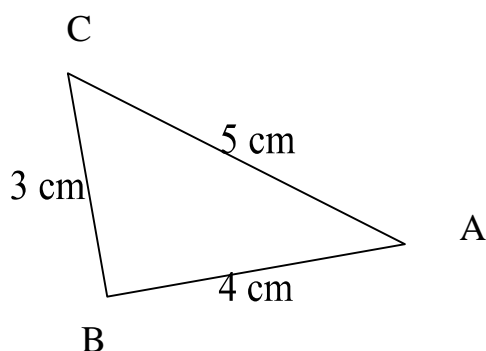


• Le triangle ABC est rectangle en A.

A quoi ça sert ? : A prouver qu'un triangle est rectangle quand on connaît les longueurs des 3 côtés

Application : comment on rédige les exercices

Cas où on a égalité



Modèle de
rédaction

Le triangle ABC est-il rectangle ?

Le plus grand côté est [AC].

Calculons d'une part :

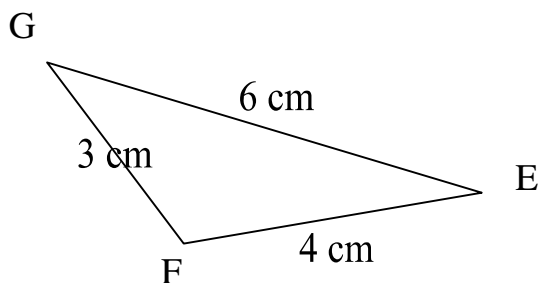
$$AC^2 = 5^2 = 25$$

Calculons d'autre part :

$$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Dans le triangle ABC on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

Cas où on n'a pas égalité



Modèle de
rédaction

Le triangle EFG est-il rectangle ?

Le plus grand côté est [EG].

Calculons d'une part :

$$EG^2 = 6^2 = 36$$

Calculons d'autre part :

$$EF^2 + FG^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Dans le triangle EFG on a $EG^2 \neq EF^2 + FG^2$, donc le triangle EFG n'est pas rectangle.
(car s'il était rectangle, on aurait égalité)



Puissance d'un nombre positif

On fait des révisions
sur nombres relatifs
(sommes/différences)

On distribue la fiche sur le rectangle

I. Vocabulaire et définition

Activité 1 (bactérie)

Définition : soit a un nombre positif et n un entier naturel (positif), alors

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On lit “ a puissance n ” ou
“ a exposant n ”

a^2 se lit « a au carré »

a^3 se lit « a au cube »

Le nombre n s'appelle l'**exposant**.

CAS PARTICULIER : si $n = 1$:

$$a^1 = a$$

Exemples :

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$0,5^4 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,0625$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Sur la calculatrice, la touche puissance est

On tape

Règles sur les puissances

Activité 2

Soient a et b deux nombres positifs
 Soient n et m deux entiers naturels (positifs)

Alors : $a^n \times a^m = a^{n+m}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemples :

$$5^7 \times 5^3 = 5^{10}$$

$$\frac{3^{11}}{3^5} = 3^{11-5} = 3^6$$

$$(10^3)^5 = 10^{3 \times 5} = 10^{15}$$

$$(7 \times 5)^3 = 7^3 \times 5^3$$

Questions :

1. A quoi est égal 5^0 ? et 11^0 ? et $2,7^0$?
2. Fais une conjecture.
3. Prouvons que $a^0 = 1$ quel que soit le nombre a non nul (positif ici) :
 $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$
 soit : $a^n \times a^0 = a^n$
 On en déduit que $a^0 = 1$

On retiendra que pour tout nombre a non nul : $a^0 = 1$

II. Puissances de 10

Activités 3 et 4

Si n désigne un nombre **entier positif** non nul.

→ On note 10^n le produit de n facteurs tous égaux à 10.

$$10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

Exemples

·
 $10^5 =$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000 \text{ (« 1 » puis « 5 zéros »)}$$

$$10^9 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000\,000 \text{ (« 1 » et « 9 zéros »)}$$

$$10^1 = 10$$

$$\boxed{10^0 = 1}$$

On note 10^{-n} l'inverse de 10^n .

$$10^{-n} = \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \dots \times \frac{1}{10}}_{n \text{ facteurs}} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 \underbrace{0\dots0}_{n \text{ zéros}}} = 0, \underbrace{0\dots01}_{n \text{ décimales}}$$

Exemples :

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0,000\,01$$

$$10^{-9} = \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0,000\,000\,001$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

On retrouve les règles de calcul vue précédemment :
Si n et m sont deux nombres **entiers positifs** non nuls.

PRODUIT	QUOTIENT	PUISSANCE DE PUISSANCE
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$(10^m)^n = 10^{m \times n}$
Exemple : $10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$	Exemple : $\frac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$	Exemple : $(10^5)^2 = 10^{5 \times 2} = 10^{10}$

III. Ecriture scientifique d'un nombre

Activité 5

On dit qu'un nombre est **en notation scientifique** lorsqu'il est écrit sous la forme :

$$\text{« } a \times 10^n \text{ »}$$

où a est un nombre décimal avec un seul chiffre avant la virgule autre que 0,
et n est un entier positif ou négatif.

Soit :

$$\text{« } \diamond \diamond \diamond \diamond \dots \times 10^n \text{ »}$$

Sauf 0

Exemples :

nombre	notation scientifique
0,000 981	$9,81 \times 10^{-4}$
0,001 732	$1,732 \times 10^{-3}$
602	$6,02 \times 10^2$
2,785	2,785

Tout nombre strictement positif est compris entre 2 puissances de 10 consécutives.

Exemple :

Soit $a = 3,14 \times 10^5$ alors $10^5 < a < 10^6$

Soit $b = 7,07 \times 10^{-2}$ alors $10^{-2} < b < 10^{-1}$

L'écriture scientifique permet de donner un ordre de grandeur du nombre

Exemple :

Soit $a = 3,14 \times 10^5$ alors $a \approx 3 \times 10^5$ (soit 300 mille)

Soit $b = 7,07 \times 10^{-2}$ alors $b \approx 7 \times 10^{-2}$ (soit 7 centièmes)

JE DOIS SAVOIR :

❑ Passer d'une écriture scientifique à une écriture décimale

Exemples :

$$5,425 \times 10^5 = 54250$$

$$5,425 \times 10^{-5} = 0,00005425$$

❑ Passer d'une écriture décimale à une écriture scientifique

Exemples :

$$358,42 = 3,5842 \times 10^2$$

$$0,0025 = 2,5 \times 10^{-3}$$

❑ Passer d'une écriture en puissance de 10 à une écriture scientifique

Exemples :

Triangle rectangle et cercle circonscrit

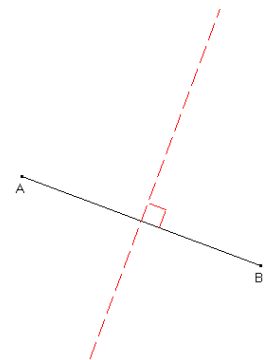
I. Rappels Activités 1 et 2

On distribue la fiche sur le losange

Définition (vue en 6^{ème}) :

La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui passe par son milieu.

Cette définition s'utilise de deux façons :



Si une droite est la médiatrice d'un segment
alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.

Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu
alors c'est la médiatrice de ce segment.

Propriétés

Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment alors ce point est à égale distance des extrémités de ce segment.

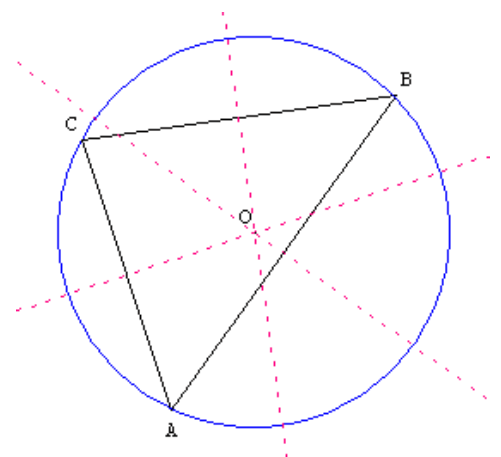
Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment alors ce point est sur la médiatrice d'un segment.

Propriété (vue en 5^{ème}) :

Les 3 médiatrices des cotés d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

On dit que le cercle est **circonscrit** au triangle ABC

On dit aussi que le triangle ABC est **inscrit** dans le cercle



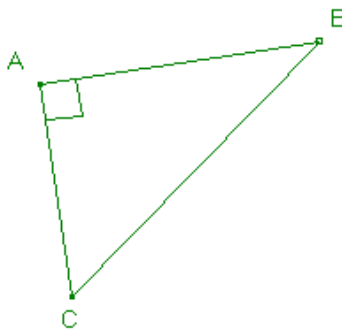
IV. Cercle circonscrit à un triangle rectangle : propriétés directes

Activité 3

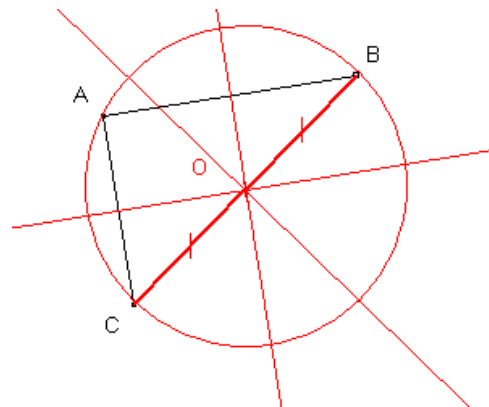
Propriété :

Si un triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

données



conclusion



Autrement dit (formulation à connaître aussi) :

Si un triangle est rectangle alors le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des 3 sommets du triangle.

V. Cercle circonscrit à un triangle rectangle : propriétés réciproques

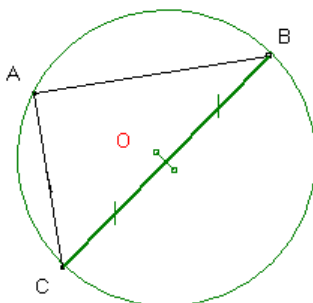
Expérimentation à l'ordinateur + Activité 7 p 147 (à partir de « une preuve »)

Propriété :

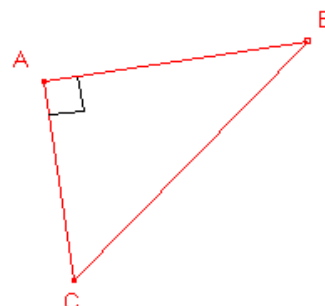
Si un triangle est inscrit dans un cercle avec un côté qui est un diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle.

De plus ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

données



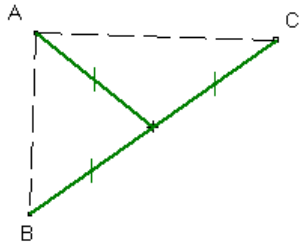
conclusion



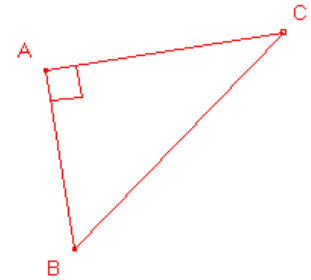
Autrement dit (formulation à connaître aussi) :

Si dans un triangle, le milieu d'un côté est équidistant des 3 sommets, alors ce triangle est rectangle.

données



conclusion



Hauteurs et orthocentre d'un triangle

On distribue la fiche sur le carré

I. Hauteurs d'un triangle

Activité à coller

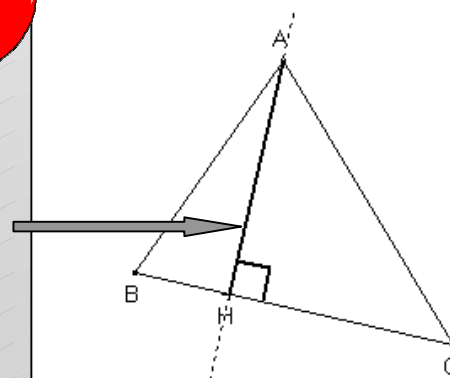
Définition / vocabulaire

Dans un triangle, une **HAUTEUR** est une droite qui passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé

Ici, on a tracé la hauteur **issue** de A.

On dit aussi : la hauteur **relative** au côté [BC].

Le point H s'appelle le **pied** de la hauteur.



Attention : le mot hauteur désigne à la fois la **droite (AH)** et aussi la **longueur AH**

La définition s'utilise de deux façons :

Si une droite est une hauteur d'un triangle
alors elle passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.

Si une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé
alors c'est une hauteur du triangle.

VI. Orthocentre

Activités 3 et 4 p 243 + photocopie

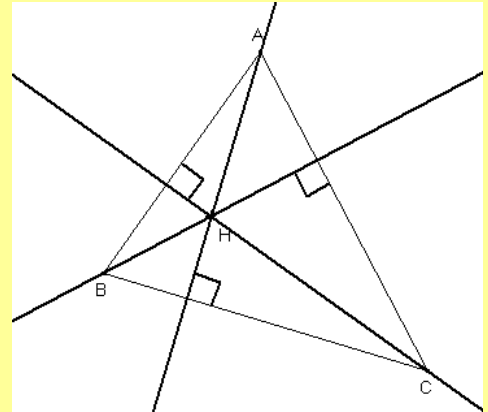
Propriété :

Les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Le point de concours s'appelle l'ORTHOCENTRE triangle.

Cas particulier : si le triangle est rectangle, son orthocentre est confondu avec le sommet de l'angle droit.

Si le triangle a un angle obtus, l'orthocentre se situe en dehors du triangle.

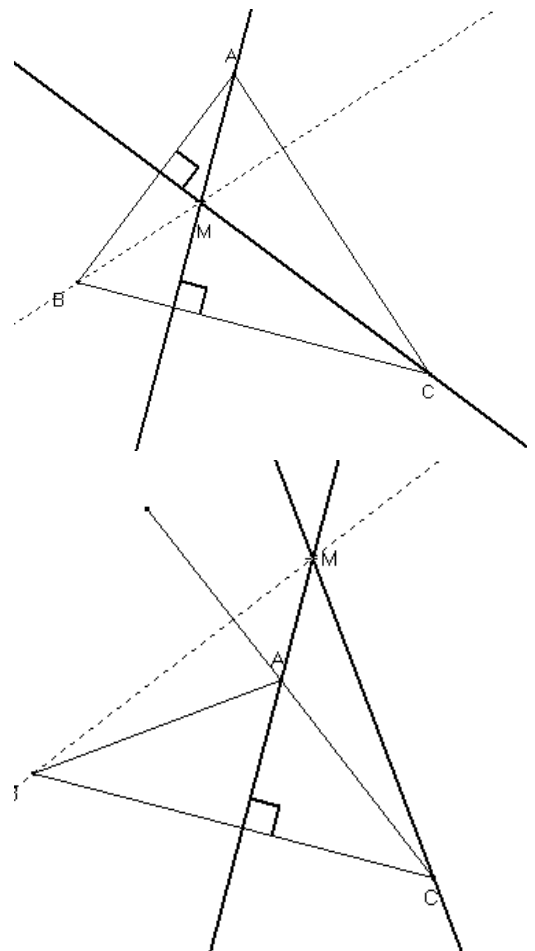


Remarques :

- Il suffit de construire 2 hauteurs pour obtenir l'orthocentre.
- **Méthode utile pour les exercices : Comment prouver que 2 droites sont perpendiculaires ?**

Si dans un triangle ABC, on sait qu'un point M appartient à 2 hauteurs, on peut affirmer que ce point est l'orthocentre du triangle.

On peut en déduire que la droite (BM) est la 3^{ème} hauteur (puisqu'elle passe par un sommet et l'orthocentre), donc que (BM) est perpendiculaire à (AC)



Opérations sur les nombres relatifs

I. Addition, soustraction, somme algébrique (rappels)

Les activités ont été amorcées dès le début de l'année

- Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :
On additionne les distances à 0 des 2 nombres
On met le signe commun aux deux nombres.
- Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :
On soustrait les distances à 0 des 2 nombres
On met le signe du nombre qui a la plus grande distance à 0.
- Pour soustraire un nombre relatif, on additionne son opposé.

Définition : une SOMME ALGEBRIQUE est une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs

Simplification d'écriture :

Dans une somme algébrique, on peut simplifier l'écriture en n'écrivant un seul signe (+ ou -) entre deux nombres.

Exemple :

$$A = (-5) + (-3) - (+5) - (-2,5)$$

$$A = (-5) + (-3) + (-5) + (+2,5)$$

$$A = -5 - 3 - 5 + 2,5$$

$$A = -13 + 2,5$$

$$A = -10,5$$

On transforme les additions en soustractions

On simplifie l'écriture

On calcule

Voir les exercices corrigés dans le livre page 17

II. Multiplication de nombres relatifs

Activité photocopiée

règle 1 : Le produit d'un nombre a par (-1) est égal à son opposé $-a$

règle 2 : L'opposé d'un nombre a peut s'écrire sous la forme du produit : $(-1) \times a$

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à 0 et on met le signe en appliquant les règles suivantes :

règle 3 : Le produit de deux nombres de signes contraires est toujours négatif.

règle 4 : Le produit de deux nombres de même signe est toujours positif.

Exemples :

- 2 facteurs de mêmes signes

$$14 \times 3 = 42$$

$$-14 \times (-3) = 42 \quad \text{parenthèses obligatoires ?}$$

$$-5 \times (-6,2) = 31$$

- 2 facteurs de signes contraires

$$-7 \times 6 = -42$$

$$5 \times (-12,3) = -61,5$$

Le signe d'un produit dépend du nombre de facteurs :

- ❑ Si le nombre de facteurs est pair : le produit est positif
- ❑ Si le nombre de facteurs est impair : le produit est négatif

Exemple :

$$A = -17 \times 2 \times (-5) \times (-6,5) \times 4$$

il y a 3 facteurs négatifs (nombre impair)

$$A = -17 \times 2 \times 5 \times 6,5 \times 4$$

le produit est donc négatif

$$A = -4420$$

III. Division de 2 nombres relatifs

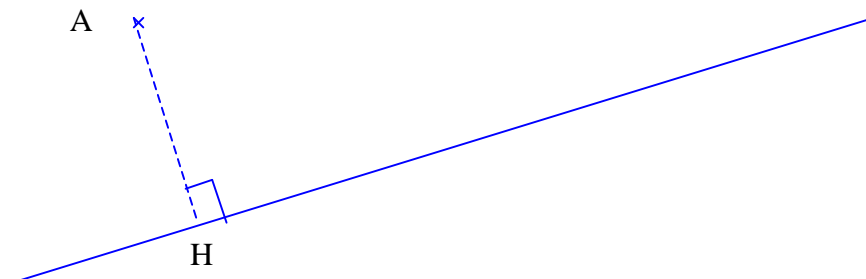
Activité 7 page 15

Pour diviser deux nombres relatifs, on divise leurs distances à 0 et on met le signe en appliquant les mêmes règles que pour la multiplication:

Distance d'un point à une droite ; tangente à un cercle

I. Distance d'un point à une droite

Activité au choix



Preuve : Soit M un point quelconque sur la droite d .

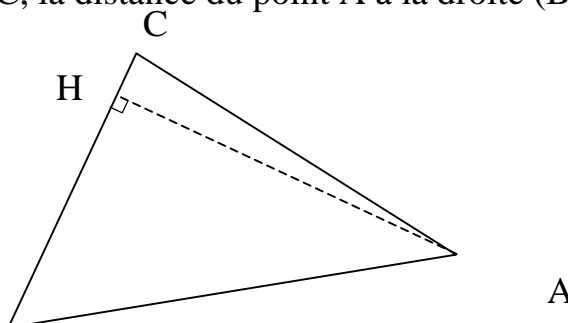
Le triangle AHM est rectangle en H ; j'applique le théorème de Pythagore :
 $AH^2 + HM^2 = AM^2$

Donc comme HM^2 est un nombre positif ou nul, on a : $AH^2 \leq AM^2$

Donc $AH \leq AM$ quel que soit le point M sur la droite d .

H est bien le point qui rend la distance minimale.

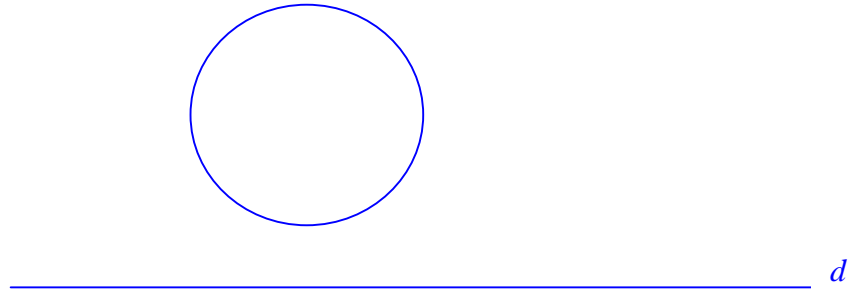
Remarque : Dans un triangle ABC, la distance du point A à la droite (BC) est donc la HAUTEUR issue de A



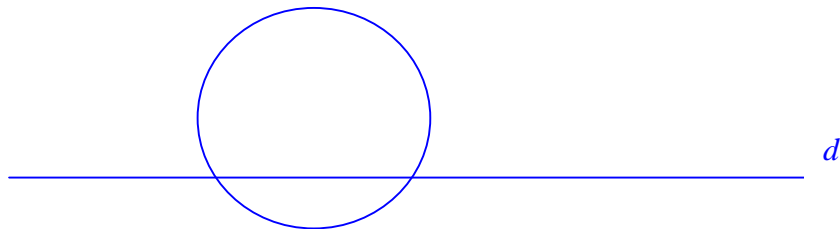
II. Tangente à un cercle

Quelles sont les positions relatives possibles d'une droite et d'un cercle ?
Activité avec atelier de géométrie par exemple :

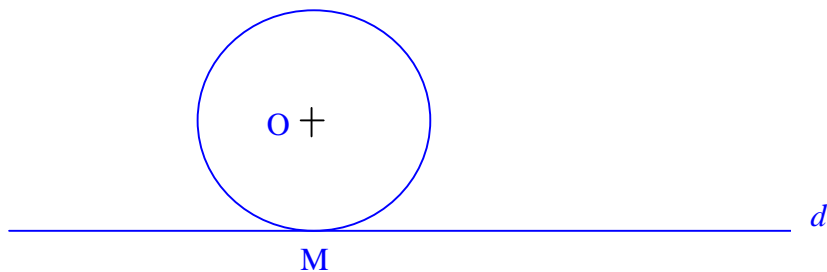
1er cas : la droite ne coupe pas le cercle



2ème cas : la droite coupe le cercle en 2 points



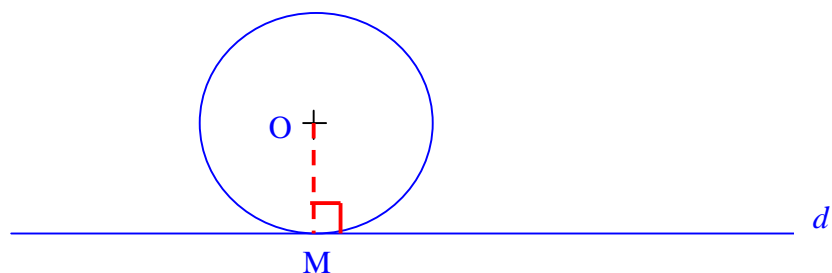
3ème cas : la droite coupe le cercle en 1 seul point



Dans ce cas, on dit que la droite d est **tangente au cercle** au point M .

Propriété :

La tangente au cercle en M est **perpendiculaire** au rayon $[OM]$.



Pyramides et cônes

I. Rappels (solides vus en 5eme)

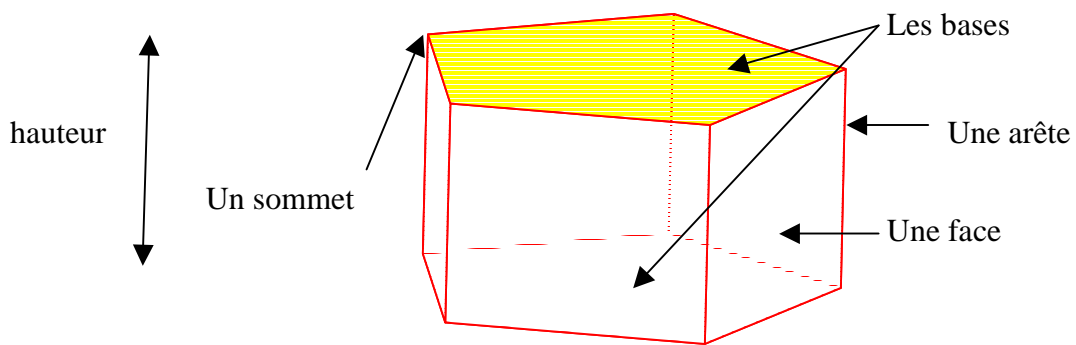
Activité 7 p 263 : photocopier les solides

On donne les noms des solides rencontrés dans cette activité.

Rappels à photocopier :

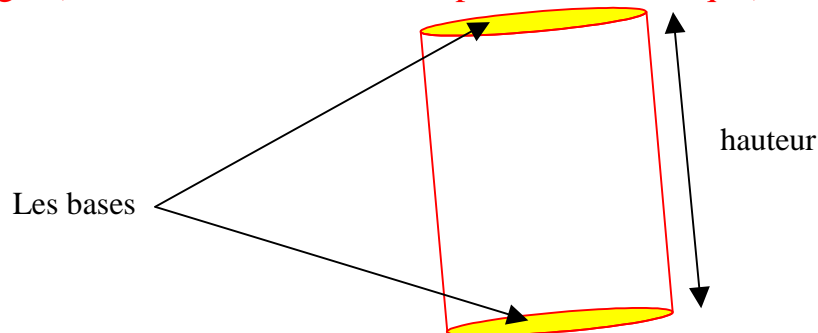
Un **prisme droit** est un solide qui a :

- 2 faces polygonales superposables (les bases). Elles sont parallèles.
- Les autres faces qui sont des rectangles



Un **cylindre de révolution** est constitué de :

- 2 disques superposables parallèles (les bases)
- un rectangle (dont une dimension est le périmètre du disque)



Volume du prisme et du cylindre : c'est la même formule :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Remarque : pour le cylindre, l'aire de la base est l'aire d'un disque. On calcule cette aire par $\pi \times R^2$

II. Pyramides

Activités 2 p 260 (sauf 4°) et 3 p 260

Dans une pyramide :

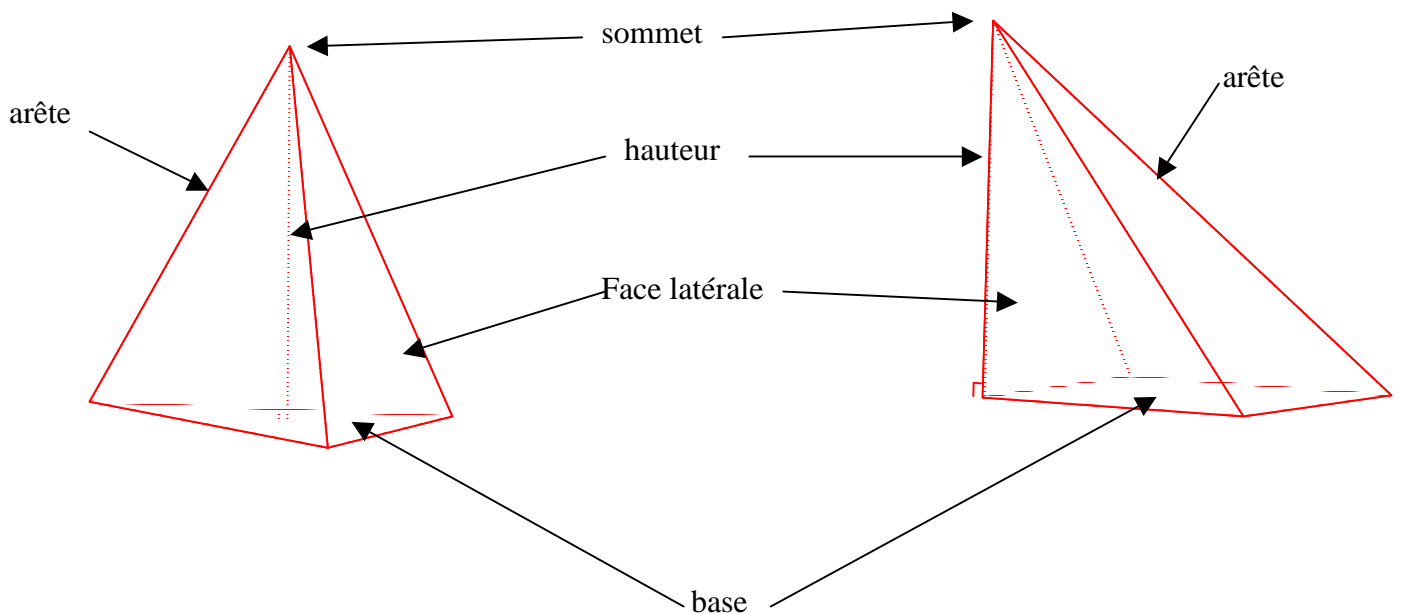
- La base est un **polygone**
- Les faces latérales sont **des triangles ayant un sommet commun**, appelé **sommet** de la pyramide.

La hauteur de la pyramide est la distance du sommet à la base.

Exemples :

Pyramide à base triangulaire
(ou tétraèdre)

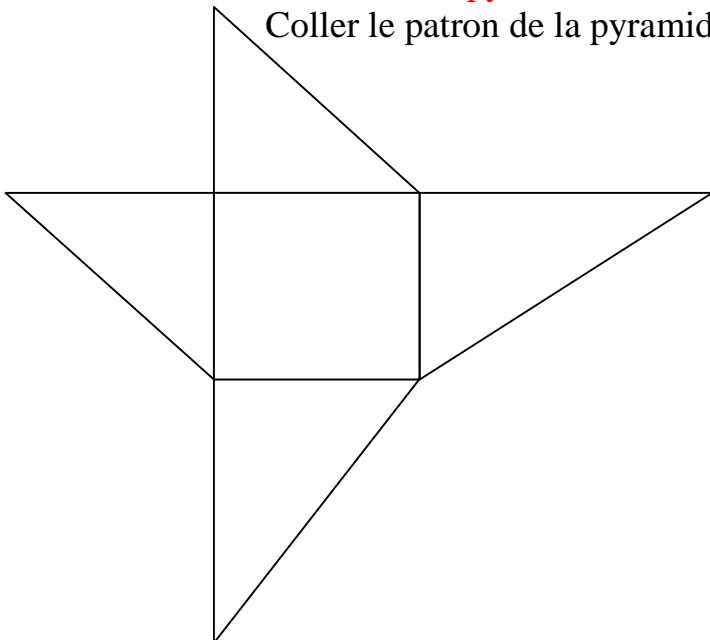
pyramide dont une arête est la hauteur



Activité 4 p261 + rappels sur les volumes (utiliser puissances de 10)

Patron d'une pyramide

Coller le patron de la pyramide AEFGH et le patron de l'exercice 10 p 267



Volume de la pyramide :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Remarque : une pyramide a donc un volume 3 fois moins grand qu'un prisme de même base et de même hauteur

RAPPEL : 1 litre = 1 dm³

Tableau de conversion :

m ³			dm ³			cm ³			mm ³		
					L						

Activité 6 p 262 (pyr rég)

INFO :

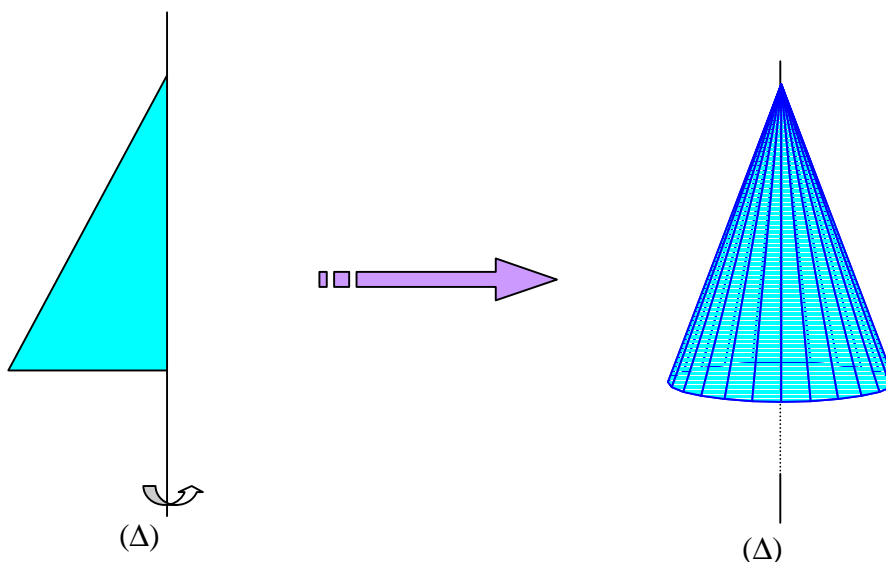
On dit qu'une **pyramide est régulière** si :

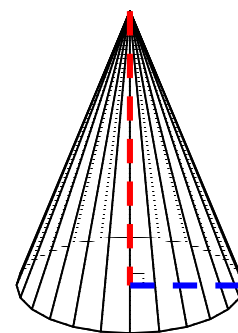
- sa base est un polygone régulier *
- et le pied de la hauteur est le centre de ce polygone

** polygone régulier : polygone qui est inscrit dans un cercle ET qui a tous ses côtés de même longueur (ex : triangle équilatéral, carré, pentagone régulier ...)*

III. Cônes de révolution

Activité équerre qui tourne





On garde le patron pour le chapitre proportionnalité

Volume : montrer avec eau et solides de la mallette

Volume du cône : même formule que pour la pyramide

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

Remarque : un cône a donc un volume 3 fois moins grand qu'un cylindre de même base et de même hauteur

Opérations avec les fractions

I. Quotients égaux ; valeur approchée d'un quotient

Activité 1 p 30

- Le quotient de deux nombres entiers relatifs s'appelle une **FRACTION**. (il peut donc y avoir des nombres négatifs)
Une fraction est un nombre.

Exemples : $\frac{35}{8}$; $\frac{-3}{7}$; $\frac{-9}{-17}$

Certaines fractions ont une écriture décimale

$$\text{Ex : } \frac{3}{4} = 0,75 \qquad \frac{-11}{5} = -2,2$$

D'autres fractions n'ont pas d'écriture décimale.

$$\text{Ex : } \frac{11}{7} ; \frac{8}{3}$$

Pour celles-ci, on peut donner une valeur approchée.
Troncatures, arrondis : exemples.

- Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale.

$$\text{Exemples : } \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \qquad \frac{11}{4} = \frac{33}{12} \qquad \frac{-5}{2} = \frac{-15}{6} \qquad \frac{2}{-7} = \frac{-20}{70}$$

En particulier si on multiplie numérateur et dénominateur par -1 :

$$\frac{-3}{7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

II. Additions ; soustractions

Activité 3 p 31

Pour additionner ou soustraire des nombres en écriture fractionnaire **DE MEME DENOMINATEUR**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on laisse le même dénominateur.

$$\text{Exemples : } \frac{35}{8} + \frac{3}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

$$\frac{-2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut les transformer en fractions de même dénominateurs

Exemples :

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

$$-2,5 - \frac{1}{3} = -\frac{25}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{75}{30} - \frac{10}{30} = -\frac{85}{30} = -\frac{17}{6}$$

multiples de 6 : 6 ; 12 ; 18 ;

multiples de 4 : 4 ; 8 ; 12 ;

12 est un multiple commun, le plus petit.

L'OPPOSE de $\frac{11}{3}$ est $-\frac{11}{3}$ (ou encore $\frac{-11}{3}$ ou $\frac{11}{-3}$)

L'OPPOSE de $-\frac{11}{3}$ est $\frac{11}{3}$

La somme de deux nombres opposés est égale à 0

Ex : $\frac{11}{3} + \frac{-11}{3} = 0$

III. Multiplications de fractions

Activités 5 et 6 p32

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples : $\frac{-5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{-5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{-15}{28} = -\frac{15}{28}$

Penser au signe du produit avant.

Si possible, penser à simplifier avant d'effectuer les produits

$$\frac{-2}{15} \times \frac{-21}{14} = \frac{2 \times 21}{15 \times 14} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times 5 \times \cancel{2} \times \cancel{7}} = \frac{1}{5}$$

$$-2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-2 \times (-5)}{7} = \frac{10}{7}$$

Rappel : prendre les $\frac{3}{4}$ **de** $\frac{2}{3}$ d'une tarte se traduit par : $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

C'est à dire $\frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{4} \times \cancel{3}} = \frac{1}{2}$ de la tarte (la moitié)

IV. Divisions de fractions

1. Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire

Activité 1 photocopiée

Définition :

Deux nombres sont **inverses** si leur produit est égal à 1

L'inverse d'un nombre a (non nul) est $\frac{1}{a}$. $a \times \frac{1}{a} = 1$

L'inverse d'un nombre a (non nul) se note aussi a^{-1} $a \times a^{-1} = 1$

Exemples : $(-2) \times (-0,5) = 1$ donc $-0,5$ et -2 sont des nombres inverses

$7 \times \frac{1}{7} = 1$ donc 7 et $\frac{1}{7}$ sont des nombres inverses

L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$, qui se note aussi 7^{-1}

Remarque : 0 n'a pas d'inverse et l'inverse de 1 est 1

L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Exemple : $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{2}) = 1$ donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{2}$ sont des nombres inverses

L'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{3}{5}$ (ou $0,6$)

L'inverse de $-\frac{5}{3}$ est $-\frac{3}{5}$ (ou $-0,6$)

2. division de fractions

Activité 2 photocopiée

règle :

Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Plus utile dans la pratique :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple : $A = -\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$

$$A = -\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$$

$$A = -\frac{8}{9}$$

$$B = \frac{\frac{9}{15}}{\frac{2}{5}}$$

$$B = \frac{9}{15} \times \frac{5}{2}$$

$$B = \frac{\cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}}{\cancel{3} \times \cancel{5} \times 2}$$

$$B = \frac{3}{2}$$

Attention : ne pas confondre **INVERSE** et **OPPOSE** !!

L'opposé de 4 est -4 ; l'inverse de 4 est $\frac{1}{4}$ (ou 0,25)

L'opposé de $-\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3}$; l'inverse de $-\frac{2}{3}$ est $-\frac{3}{2}$

Attention : La place du trait de fraction est très importante !!

$A = \frac{6}{\frac{5}{3}}$ est le quotient de $\frac{6}{5}$ par 3.

$B = \frac{\frac{6}{5}}{3}$ est le quotient de 6 par $\frac{5}{3}$

Calculer A et B et comparer !

Droite des milieux

I. Propriété de la droite des milieux

Activité 1 p 204 (ou activité photocopiée)

+ démonstration (photocopie déductogramme ou/et activ 2 p 204)

Propriété 1 a « *propriété dite de la droite des milieux* »

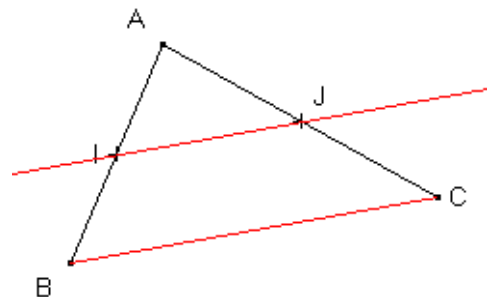
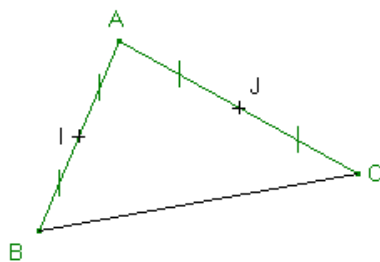
Hypothèses

Si I est le milieu de [AB]

J est le milieu de [AC]

Conclusion

alors $(IJ) \parallel (BC)$



Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors cette droite est parallèle au troisième côté.

Propriété 1b

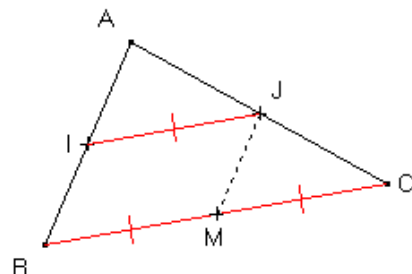
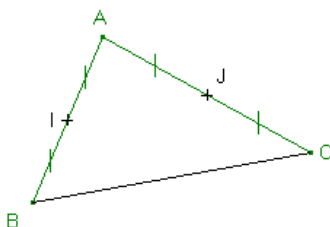
Hypothèses

Si I est le milieu de [AB]

J est le milieu de [AC]

Conclusion

alors $IJ = \frac{BC}{2}$



Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors la longueur du segment joignant les milieux des deux côtés mesure la moitié de la longueur du troisième côté.

Exercice : prouver que lorsqu'on relie les milieux des côtés d'un quadrilatère (quelconque), on obtient un parallélogramme.

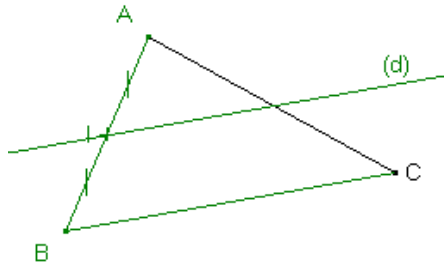
II. Réciproque

Activité 3 p 205

Propriété 2

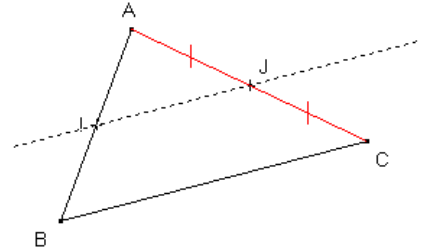
Hypothèses

Si I est le milieu de [AB]
(d) // (BC)



Conclusion

alors J est le milieu de [AC]



Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et si elle est parallèle à un autre côté **alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.**

Médianes d'un triangle

I. Médianes d'un triangle

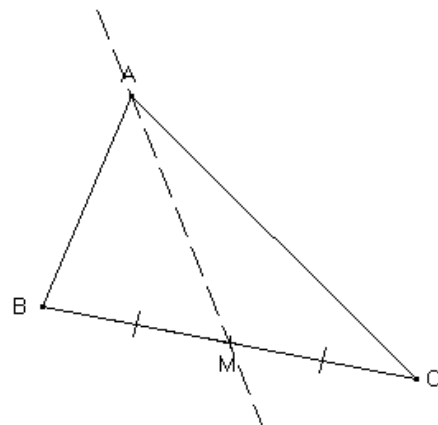
Activité à coller

Définition / vocabulaire

Dans un triangle, une **MEDIANE** est une droite qui **passé par un sommet et par le milieu du côté opposé**

Ici, on a tracé la médiane **issue** de A.

On dit aussi : médiane **relative** au côté [BC].



Attention : le mot médiane désigne à la fois la **droite (AM)** et aussi la **longueur AM**

La définition s'utilise de deux façons :

Si une droite est une médiane d'un triangle
alors elle passe par un sommet et
par le milieu du côté opposé.

Si une droite passe par un sommet et
par le milieu du côté opposé
alors c'est une médiane du triangle.

II. Centre de gravité d'un triangle

Activité à coller

Propriété :

Les 3 médianes d'un triangle sont **concourantes**.

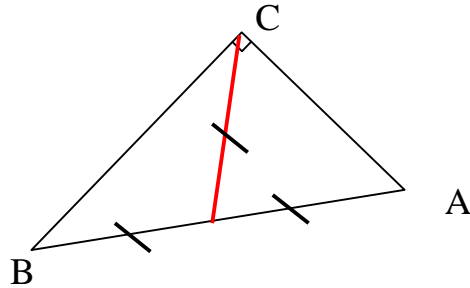
Le point de concours s'appelle LE CENTRE DE GRAVITE du triangle.

Le centre de gravité est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.

Démonstration (fiche photocopiée)

Cas particulier du triangle rectangle :

Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse (considérée comme segment) mesure la moitié de l'hypoténuse.



Réciproque:

Si dans un triangle, la médiane relative au plus grand des côtés mesure la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle.

Calcul littéral

Une expression littérale (ou expression algébrique) est une expression qui contient une ou plusieurs lettres.

Exemple :

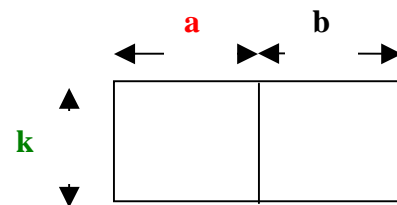
$$A = 3x + 5y^2 + 4xy - 8$$

I. La distributivité

Activité photocopiée (périmètre et aire)

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$



Ces relations sont vraies quels que soient les nombres k , a et b

Développer (ou distribuer) une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme.

Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme en un produit.

$$\begin{array}{ccc} \text{--- Développement ---} & \rightarrow & \\ k(a + b) & = & ka + kb \\ \text{--- Factorisation ---} & \leftarrow & \end{array}$$

$k(a + b)$ est une forme factorisée

$ka + kb$ est une forme développée

Applications de la distributivité :

1) savoir factoriser et réduire

Activité 1 page 70 (partie B seulement)

Activité 2

Réduire une expression littérale, c'est rassembler les termes de même nature (mêmes lettres et mêmes exposants) et simplifier les écriture en factorisant.

Exemples : Réduis

$$A = 7a - 4a$$

$$A = (7 - 4)a$$

$$A = 3a$$

Rappel $1a = a$

$$B = 4a^2 + 3a + 1 + 4b + 2a - 7b + 4 - a^2$$

$$B = (4 - 1) 3a^2 + (3 + 2)a + (4 - 7)b + 5$$

$$B = 3a^2 + 5a - 3b + 5$$

2) savoir développer et réduire

Exemples : Développe et réduis :

$$C = 3(x - 4)$$

$$C = 3 \times x - 3 \times 4$$

$$C = 3x - 12$$

$$D = x(x - 2)$$

$$D = x \times x - x \times 2$$

$$D = x^2 - 2x$$

$$E = -5(x - 4)$$

$$E = -5 \times x + 5 \times 4$$

$$E = -5x + 20$$

$$F = 3(3x - 1) - (x - 2)$$

$$F = 3(3x - 1) - 1 \times (x - 2)$$

$$F = 3 \times 3x - 3 \times 1 - 1 \times x + 1 \times 2$$

$$F = 9x - 3 - x + 2$$

$$F = 8x - 1$$

$$G = x(2x + 3) - 3(2 - 5x)$$

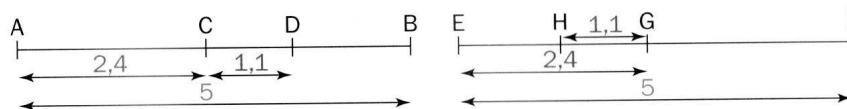
$$H = 6x^2(x + 5) + 3x(2x^2 - 6x + 2)$$

Etc...

3) savoir supprimer une parenthèse précédée d'un + ou d'un -

Activité photocopiée :

a. Les longueurs portées sur les figures ci-dessous sont exprimées en cm.



Parmi les expressions ci-dessous,

① $5 - (2,4 + 1,1)$

③ $5 - 2,4 + 1,1$

② $5 - (2,4 - 1,1)$

④ $5 - 2,4 - 1,1$

- lesquelles permettent de calculer la longueur DB ?
- lesquelles permettent de calculer la longueur HF ?

b. Écrire les expressions sans parenthèses égales aux expressions ① et ② :

$$5 - (2,4 + 1,1) = \dots\dots$$

$$5 - (2,4 - 1,1) = \dots\dots$$

Synthèse

parenthèses précédées d'un signe +

On peut supprimer des parenthèses précédées du signe + (ainsi que ce signe +) sans changer l'expression entre parenthèses

exemples

$$A = a + (b + c)$$

$$A = a + b + c$$

b s'écrit + b

$$B = a + (b - c)$$

$$B = a + b - c$$

$$C = a + (-b - c)$$

$$C = a - b - c$$

L'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés .

parenthèses précédées d'un signe -

On peut supprimer des parenthèses précédées du signe - (ainsi que ce signe -) en **changeant tous les signes dans les parenthèses CAR** l'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés .

$$D = a - (b + c)$$

$$D = a - b - c$$

$$E = a - (-b - c)$$

$$E = a + b + c$$

Autre point de vue : cela revient à distribuer - 1

$$D = a - (b + c)$$

$$D = a - 1(b + c)$$

$$D = a - b - c$$

→ L'activité 4 p 71 peut venir en complément.

Application : développe et réduis

$$A = 2x - 3 - (x^2 + 5x - 2) - (3x^2 - x + 4)$$

→ Activités 6 et 7 page 72 en exercice

Utilisation du calcul littéral pour prouver :

Soit un parallélogramme ABCD et un point M quelconque à l'intérieur.

Quelle conjecture peut on faire sur l'aire du « papillon » ABM – MCD quand le point M varie ? (utiliser logiciel géométrie)

Prouve la.

VII. La double distributivité

Activités 8 et 9 page 73

Synthèse :

Quels que soient les nombres a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

finalement :

$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Applications : développe et réduis

$$A = (x - 3)(2x + 5)$$

$$B = (3x - 5)(2x - 1)$$

$$C = (2x + 5)^2$$

$$D = (4x - 3)(2x + 5) + (5x - 1)(3x - 2)$$

Equations à une inconnue

I. Qu'est ce qu'une équation ?

Activité 1

Une EGALITE peut être vraie ou fausse.

Ex : $2 + 6,2 = 5,1 + 3,1$ est une égalité VRAIE

$-5 \times 2 = 3 - 8 \times 2$ est une égalité FAUSSE

Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle un nombre inconnu est remplacé par une lettre.

Ex : $x + 3 = -8$

$-2a = 7,2$

Résoudre une **équation à une inconnue x** , c'est trouver toutes les valeurs numériques que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie.

(L'équation est **du premier degré** lorsque l'exposant de x est 1).

Je dois savoir tester si un nombre est solution d'une équation :

Les nombres 2, -5 et 3,1 sont ils solution de l'équation : ? $3x + 1 = x - 7$

Les nombres -2 et 3et sont ils solution de l'équation : $x^2 + 1 = 2x + 4$?

II. Techniques pour résoudre une équation

Activité 5 p 88

Une égalité possède toujours deux membres

- l'un situé à gauche du signe égal ;
- l'autre situé à droite du signe égal.

Pour résoudre une équation, on applique la règle suivante :

Une égalité reste vraie quand :

- On ajoute (ou on retranche) un même nombre aux deux membres de l'égalité.
- On multiplie (ou on divise) par un même nombre NON NUL, les deux membres de l'égalité

Exemples à donner sur des égalités de nombres...

Activité photocopiée n° 3

Résoudre les équations :

$$x - 2 = -7$$

$$3x = -7$$

$$\frac{x}{3} = 7$$

$$2x + 1 = 11$$

$$-5x - 3 = 7$$

$$4x + 5 = -x + 2$$

$$3(2x - 1) - (x + 2) = 5$$

III. Résolution de problèmes

Exemple :

**Dans son porte-monnaie, Chloé a 33 € en pièces de 2€ et de 50 centimes.
Elle a en tout 24 pièces.**

1) Choix de l'inconnue :

On appelle x le nombre de pièces de 2 €.

2) Mise en équation :

On traduit l'énoncé :

$24 - x$ représente le nombre de pièces de 0,50 €.

$2 \times x$ somme d'argent correspondant aux x pièces de 2 €.

$(24 - x) \times 0,50$ somme d'argent correspondant aux pièces de 0,50 €.

On a donc :

$$2 \times x + (24 - x) \times 0,50 = 33$$

3) Résolution de l'équation :

$$2x + 12 - 0,5x = 33$$

$$1,5x + 12 = 33$$

$$1,5x = 33 - 12$$

$$1,5x = 21$$

$$x = \frac{21}{1,5}$$

$$x = 14$$

4) Vérification :

On remplace x par la valeur trouvée et si on n'obtient pas le même résultat alors il y a une erreur dans la résolution.

$2 \times 14 = 28$; 28€ somme d'argent correspondant aux 14 pièces de 2 €.

$(24 - 14) \times 0,50 = 5$; 5€ somme d'argent correspondant aux 10 pièces de 0,50 €.

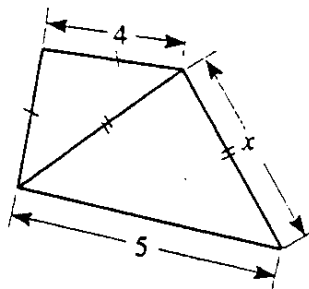
$$28\text{€} + 5\text{€} = 33\text{€}$$

5) Conclusion :

Chloé possède 14 pièces de 2 € et 10 pièces de 0,50€.

Activité 4 : Autre exercice rédigé

Quelle équation faut-il écrire pour trouver la longueur x de façon que les périmètres des deux triangles soient égaux ?



Equation :

Trouve x en résolvant l'équation précédente.

Théorème de Thalès

I. Fraction de longueur

Activité 5 page 206

II. Proportion

Activité 6 page 206 (en substance, l'idée, chacun le fait à sa façon)

CONCLUSION : Si deux quotients sont égaux, alors les produits en croix sont égaux :

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } a \times d = b \times c$$

$$\text{Donc : } a = \frac{bc}{d} \quad b = \dots \quad \text{etc..}$$

- Exemple d'application : déterminer le nombre x vérifiant chaque égalité :

a) $\frac{x}{3} = \frac{35}{21}$

b) $\frac{4}{5} = \frac{3}{x}$

III. Théorème de Thalès

Activité 7 p 207 (cas particulier des milieux)

Activité géoplan (coupe d'un canal)

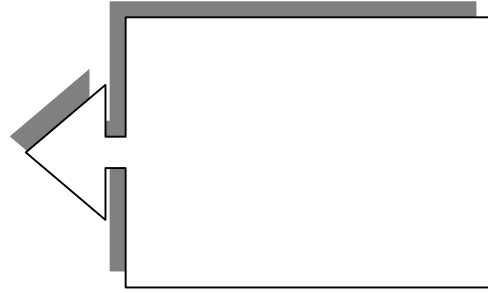
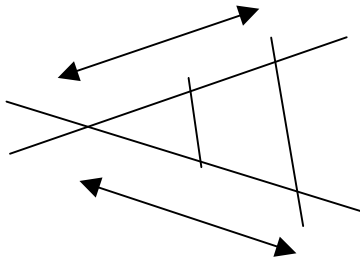
Synthèse : théorème de Thalès

Si dans un triangle ABC , M appartient au segment $[AB]$
 N appartient au segment $[AC]$
 et si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC)

$$\text{alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Je dois savoir rédiger un exercice :

Exemple : → on me demande de **calculer** une (ou plusieurs) longueur(s)



On sait que : dans le triangle ASE

le point I appartient au segment [AS]

le point D appartient au segment [AE]

les droites (ID) et (SE) sont parallèles. On applique le

théorème (direct) de Thalès :

$$\frac{AI}{AS} = \frac{AD}{AE} = \frac{ID}{SE} \quad \frac{8}{12} = \frac{6,4}{AE} \quad 8 \times AE = 12 \times 6,4 \quad 8 \times AE = 76,8$$

$$\boxed{AE = 9,6\text{cm}}$$

Remarque :

On donne toujours en priorité la valeur exacte (symbole =).

Si demandé, on donne aussi une valeur approchée (symbole ≈)

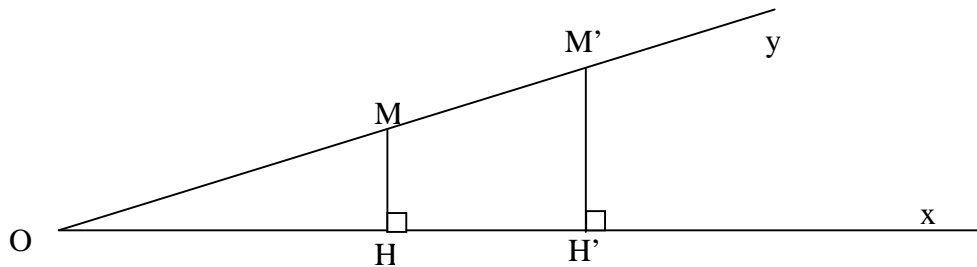
Cosinus d'un angle aigu

I. Définition

Activité géoplan trigocos.g2w

Trace écrite :

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites. H et H' sont deux points de $[Ox)$; M et M' deux points de $[Oy)$ tels que (MH) et $(M'H')$ sont perpendiculaires à $[Ox)$



- Une conjecture :

L'ordinateur calcule les rapports $\frac{OH}{OM}$ et $\frac{OH'}{OM'}$.

il semble que ces rapports sont égaux.

- La preuve :

Dans le triangle $OH'M'$

- $H \in [OH']$
- $M \in [OM']$
- $(MH) \parallel (M'H')$ car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (Ox)

Donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{OH}{OH'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{MH}{M'H'}$

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{OM}{OM'}$$

$$OH \times OM' = OM \times OH'$$

$$\boxed{\frac{OH}{OM} = \frac{OH'}{OM'}}$$

Produits en croix

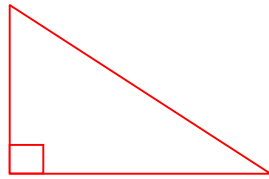
Je divise les 2 membres par $OM' \times OM$

Synthèse :

Soient des triangles rectangles ayant le même angle aigu \hat{O} . Alors le rapport $\frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ ne dépend pas de ces triangles rectangles.

On l'appelle le COSINUS de l'angle \hat{A} .

En résumé :



$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$

A quoi ça sert ?

Cela permet, dans un triangle rectangle, de calculer des longueurs ou des mesures d'angles (voir la suite)

II. Calculs de longueurs

III. Calculs d'angles

