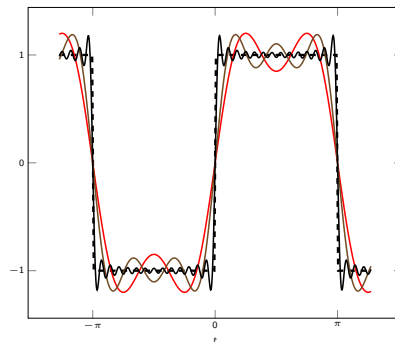


III - Bases hilbertiennes et séries de Fourier

HMMA105

Université de Montpellier



Sommaire

1. Bases hilbertiennes
 - 1.1. Familles orthogonales et séries de Fourier
 - 1.2. Bases Hilbertiennes
2. Séries de Fourier « classiques »
 - 2.1. Le cadre L^2
 - 2.2. Le cadre L^1 : représentation ponctuelle
3. Transformée de Fourier Discrète (DFT)
 - 3.1. Définition
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Nous avons vu au chapitre précédent que si V est un sous-espace de dimension finie de H engendré par une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ orthogonale, la projection orthogonale de $f \in H$ sur V est

$$f^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i,$$

avec $\lambda_i = \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}$.

Definition 1

Si $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale (où $\varphi_n \neq 0$, pour tout n), les nombres

$$c_n(f) = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$$

sont les coefficients de Fourier de f relativement à la famille \mathcal{B} . La série $\sum_n c_n(f) \varphi_n$ est la série de Fourier de f relativement à \mathcal{B} .

Remarque : d'après l'inégalité de Bessel, si la famille \mathcal{B} est orthonormée, on a alors, pour tout f de H , $\sum_n |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$.

1/25

Proposition 1

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. La série $\sum_n \alpha_n \varphi_n$ est convergente dans H si et seulement si $\sum_n (|\alpha_n| \|\varphi_n\|)^2$ est convergente.

Theorem 2

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. Pour tout f dans H , la série de Fourier $\sum_n c_n(f) \varphi_n$ est convergente dans H . On note $S(f)$ la somme de cette série.

Proof.

□

Exemple : séries de Fourier classiques

Polynômes trigonométriques : Soit $H = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ de période } a, \int_0^a f^2(t) dt < +\infty\} = L_p^2(0, a)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(t) \overline{g(t)} dt$. On note \mathcal{T}_N l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N . Le sev \mathcal{T}_N de $L_p^2(0, a)$ est engendré par $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ où :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e_n : t \mapsto \exp\left(2\pi i n \frac{t}{a}\right).$$

C'est une famille orthogonale $\langle e_k, e_k \rangle = a$.

Polynôme de meilleure approximation : Soit $f \in L_p^2(0, a)$ le projeté de f sur \mathcal{T}_N est :

$$f_N = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e_k \text{ où } c_k = \frac{\langle f_N, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}. \text{ On a donc pour tout } k = -N, \dots, N :$$

$$c_k(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp\left(-2\pi i k \frac{t}{a}\right) dt.$$

L'inégalité de Bessel devient : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt$.

3/25

1.2. Bases hilbertiennes : Bases Hilbertiennes

Il reste maintenant à préciser les conditions (sur \mathcal{B}) pour que $f = S(f)$ (f est « égale » à sa série de Fourier).

Définition 1

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. On dit que \mathcal{B} est une base hilbertienne si

$$\forall f \in H, f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \varphi_k$$

c'est à dire si $\forall f \in H, \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^N c_k(f) \varphi_k \right\|_H = 0$.

Définition 2

Si H possède une base hilbertienne, il est dit séparable.

4/25

Theorem 3

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$ (on dit que \mathcal{B} est totale)
2. $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \{\text{combinaisons linéaires finies d'éléments de } \mathcal{B}\}$ est dense dans H
3. \mathcal{B} est une base Hilbertienne.
4. Pour tout $f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \|\varphi_k\|^2$. (Identité de Parseval)

Sommaire

1. Bases hilbertiennes
 - 1.1. Familles orthogonales et séries de Fourier
 - 1.2. Bases Hilbertiennes
2. Séries de Fourier « classiques »
 - 2.1. Le cadre L^2
 - 2.2. Le cadre L^1 : représentation ponctuelle
3. Transformée de Fourier Discrète (DFT)
 - 3.1. Définition
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Dimension infinie

Dans \mathbb{R}^N une suite bornée admet au moins une sous suite convergente. Ce n'est plus le cas en dimension infinie :

6/25

2.1. Séries de Fourier « classiques » : Le cadre L^2

Theorem 4

Si $f \in L_p^2(0, a)$ et f_N est le polynôme de meilleure approximation de f dans \mathcal{T}_N c'est-à-dire

$$f_N = \sum_{k=-N}^N c_k e_k,$$

alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N\|^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la suite f_N converge vers f dans $L_p^2(0, a)$.

Theorem 5

Soient $f, g \in L_p^2(0, a)$. On a $f = g$ presque partout ssi $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Corrolaire 2.1

1. La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_p^2(0, a)$.
2. L'application $\mathcal{T} : f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie de l'espace $L_p^2(0, a)$ dans ℓ_a^2 l'ensemble des suites complexes telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ muni de la norme $\|(c_n)_n\|^2 = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$.

7/25

Théorème de Riemann-Lebesgue

Coefficients de Fourier : ils sont également définis pour des fonctions de $L_p^1(0, a) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ de période } a, \int_0^a |f(t)| dt < +\infty\}$. On peut aussi définir une série de Fourier pour $f \in L_p^1(0, a)$ par $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \exp(2\pi i k \frac{t}{a})$.

Convergence des séries de Fourier : si $f \in L_p^2(0, a)$ sa série de Fourier converge dans $L_p^2(0, a)$ vers f . La question se pose de savoir si on peut étendre ce résultat aux fonctions de $L_p^1(0, a)$. La réponse est (partiellement) donnée par le théorème suivant.

Theorem 6

Soit (a, b) un intervalle borné de \mathbb{R} et $f \in L^1(a, b)$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \exp(2\pi i n x) dx = 0$$

8/25

Théorème de Dirichlet

Une conséquence de ce qui précède est le théorème suivant qui fournit un résultat de convergence ponctuelle pour les séries de Fourier. Dans ce qui suit on note $f(t_0^+)$ (resp. $f(t_0^-)$), la limite $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ (resp. $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$).

Theorem 7 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f \in L_p^1(0, a)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0^+)$, $f(t_0^-)$, $f'(t_0^+)$ et $f'(t_0^-)$ existent. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k \exp\left(2\pi i k \frac{t}{a}\right) = \frac{1}{2} (f(t_0^+) + f(t_0^-)).$$

Corrolaire 2.2

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ périodiques. Alors : $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ssi $f = g$.

9/25

Sommaire

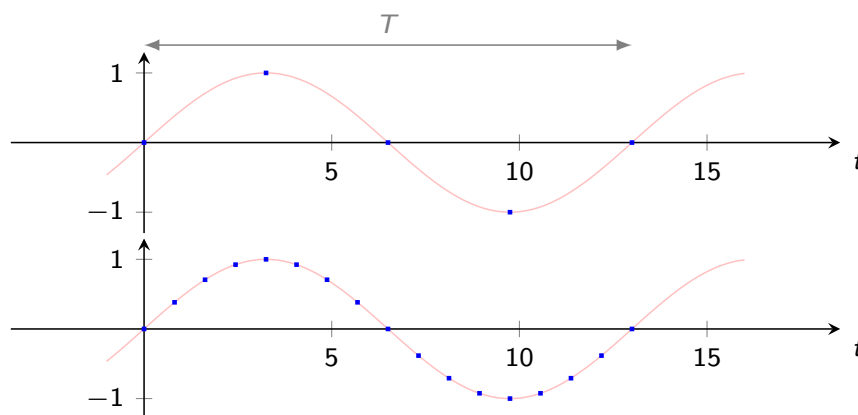
1. Bases hilbertiennes
 - 1.1. Familles orthogonales et séries de Fourier
 - 1.2. Bases Hilbertiennes
2. Séries de Fourier « classiques »
 - 2.1. Le cadre L^2
 - 2.2. Le cadre L^1 : représentation ponctuelle
3. Transformée de Fourier Discrète (DFT)
 - 3.1. Définition
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Transformée de Fourier Rapide (FFT)

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition

Échantillonnage

Hypothèses : Soit f une fonction T -périodique. On suppose que la série de Fourier de f converge vers f ponctuellement (cf Théorème 7 de Dirichlet).

Échantillonnage : On ne connaît pas la fonction f , on observe ses valeurs en un nombre fini de points. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ *paire*, on pose $t_k = \frac{k}{N} T$ (grille régulière). L'échantillonnage de f est la donnée du vecteur $y = (f(t_k))_{0 \leq k \leq N-1}$. Le pas de l'échantillonnage est donc $\frac{T}{N}$.



Remarque : échantillonner un signal à une fréquence F revient à discrétiser sur des intervalles de temps de longueur $1/F$. Un signal échantillonné à 1000Hz revient à mesurer le signal tous les 10^{-3}s .

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition

Calcul approché des coefficients de Fourier

On va calculer une valeur approchée des coefficients de Fourier $c_n(f) = \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} \frac{dt}{T}$.

Formule de quadrature : méthode composée (formule des rectangles) : pour tout $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k}{N}T}^{\frac{(k+1)}{N}T} f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} dt$$

$$\simeq \tilde{c}_{N,n} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{N} f\left(\frac{k}{N}T\right) e^{-2\pi i n \frac{kT}{TN}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}$$

où on a posé $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ la N -ième racine de l'unité.

Coefficients discrets : On réordonne ces coefficients de Fourier approchés en posant

$$\tilde{c}_{N,n} = \begin{cases} \frac{1}{N} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ \frac{1}{N} Y_{n+N} & \text{si } -N/2 \leq n < 0 \end{cases} . \text{ Autrement dit, le vecteur } Y = (Y_p) \in \mathbb{R}^N$$

tel que

$$Y_p = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-pk} \text{ pour tout } p = 0, \dots, N-1$$

contient la liste des coefficients de Fourier approchés “non normalisés” avec “les basses fréquences aux extrémités”.

11/25

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition

Interpolation

Polynôme trigonométrique : Soit le polynôme trigonométrique

$$P_N(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \tilde{c}_{N,n} e^{2\pi i n \frac{t}{T}}$$

$$\text{où } \tilde{c}_{N,n} = \begin{cases} \frac{1}{N} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ \frac{1}{N} Y_{n+N} & \text{si } -N/2 \leq n < 0 \end{cases} . \text{ La fonction } P_N \text{ interpole les } y_k = f(t_k).$$

On a pour tout $k = 0, \dots, N-1$

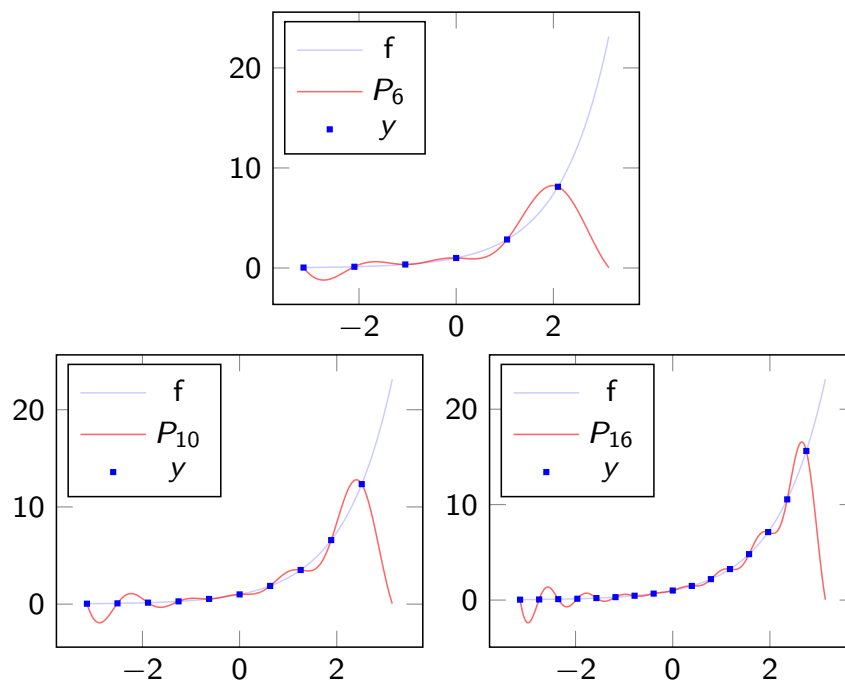
$$P_N(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \tilde{c}_{N,n} e^{2\pi i n \frac{kT}{NT}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Y_p \omega_N^{pk} = y_k$$

remarque : on a utilisé le fait que $\sum_{p=0}^{N-1} \omega_N^{(k-k')p} = \begin{cases} N & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

12/25

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition



On a ici $f(t) = \exp(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$.

13/25

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition

Définition

Définition 3 (Discrete Fourier Transform)

On pose $y = (y_k)_{1 \leq k \leq N}$ et $Y = (Y_p)_{1 \leq p \leq N}$ deux vecteurs de \mathbb{C}^N . Les formules suivantes avec $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$,

$$Y_p = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-pk} \text{ pour tout } p = 0, \dots, N-1$$

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Y_p \omega_N^{pk} \text{ pour tout } k = 0, \dots, N-1$$

définissent un opérateur $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ tel que $\mathcal{F}(y) = Y$ appelé transformée de Fourier discrète d'ordre N .

14/25

3.1. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Définition

Écriture matricielle

Les transformations définies par la DFT sont linéaires et inversibles. Soit $\omega_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ et

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

La matrice de l'application $\mathcal{F}_N : y \mapsto Y$ est alors

$$F_N = \overline{\Omega_N}$$

où \overline{A} est le conjugué complexe d'une matrice $A \in \mathbb{C}^n$. Ainsi $F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N} = \frac{1}{N} \Omega_N$ est la matrice de l'application \mathcal{F}_N^{-1} .

15/25

3.2. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Propriétés

Pour simplifier les notations on prolonge les signaux N dimensionnels en série périodiques : on note y une suite N -périodique telle que $y_k = f(t_k)$ pour $k = 0, \dots, N-1$. Toutes les suites considérées sont complexes et N -périodiques.

Theorem 8 (Parseval discret)

Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite N -périodique. Si $\mathcal{F}_N(y) = Y$ alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} |Y_p|^2.$$

Proposition 2 (Translation temporelle)

Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ l'image d'une suite $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ par la DFT \mathcal{F}_N . Soit $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite «retardée» définie par $y_k = x_{k-N_0}$ où N_0 est un entier fixé. Soit $Y = \mathcal{F}_N(y)$ alors

$$\forall p \in \mathbb{Z}, Y_p = e^{-2\pi i p \frac{N_0}{N}} X_p.$$

16/25

Symétries

Définition 4

On dit que $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est paire si $y_k = y_{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On dit que $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est impaire si $y_k = -y_{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3

Soit \mathcal{F}_N la DFT qui à $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ associe $Y = (Y_p)_{p \in \mathbb{Z}}$. Alors :

1. \mathcal{F}_N associe $(Y_{-p})_{p \in \mathbb{Z}}$ à $(y_{-k})_{k \in \mathbb{Z}}$.
2. \mathcal{F}_N associe $(\overline{Y_{-p}})_{p \in \mathbb{Z}}$ à $(\overline{y_k})_{k \in \mathbb{Z}}$.
3. \mathcal{F}_N associe $(\overline{Y_p})_{p \in \mathbb{Z}}$ à $(\overline{y_{-k}})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Exemple :

$$(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, u_{-5}, u_{-4}, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, \boxed{u_0, u_1, u_2, u_3}, u_4, u_5, \dots)$$

$$(u_{-k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, u_{-5}, u_{-4}, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, \boxed{u_0, u_1, u_2, u_3}, u_4, u_5, \dots)$$

17/25

DFT et convolution

Définition 5

Soient deux suites complexes $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de période N . On appelle convolution circulaire discrète l'application définissant $z = x * y$ par

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Theorem 9

Soient deux suites complexes $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de période N . On note $z = x * y$ et $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$ et $Z = \mathcal{F}_N(z)$. Alors

1. On a $Z_p = X_p Y_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et on note $\mathcal{F}_N(x * y) = \mathcal{F}_N(x) \cdot \mathcal{F}_N(y)$.
2. La suite $xy = (x_k y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a pour transformée de Fourier discrète la suite W définie par $W_p = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{p-q}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On note $N\mathcal{F}_N(x \cdot y) = \mathcal{F}_N(x) * \mathcal{F}_N(y)$

18/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Algorithme de Cooley et Tuckey

Un calcul de transformée de Fourier discrète revient à calculer le produit d'une matrice $N \times N$ et d'un vecteur $N \times 1$:

$$X(k) = \sum_{t=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{kt}{N}} x(t).$$

Complexité : $O(N^2)$ opérations (N multiplications pour chaque $k = 0, \dots, N-1$)

Exemple : Avec une machine traitant 10^9 opérations par seconde. Calculer la DFT d'une image 1000×1000 donne $N = 10^6$ et nécessite 10^{12} opérations calculées en 16min. Traiter une IRM 256^3 nécessite alors 80 heures de calculs...

Principe : la FFT va baisser la complexité à $O(N \log N)$

Exemple : Le nombre d'opérations baisse alors à $3 \cdot 10^3$ (soit $3 \cdot 10^{-6}s$) et $2.8 \cdot 10^8$ (soit 0.3s) respectivement...

19/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Principe : Une DFT d'un vecteur de taille $N = 2m$ se ramène au calcul de 2 DFT de taille $N/2 = m$ suivi de $N/2 = m$ multiplications. En appliquant ce principe récursivement on peut réutiliser une bonne partie des calculs faits aux itérations précédentes et baisser la complexité du calcul total. On met en indice la taille des vecteurs ($X = X_{2m}$ et $x = x_{2m}$)

$$\begin{aligned} X_{2m}(k) &= \sum_{t=0}^{2m-1} e^{-i\pi \frac{kt}{m}} x_{2m}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} e^{-i\pi \frac{k2n}{m}} x_{2m}(2n) + \sum_{n=0}^{m-1} e^{-i\pi \frac{k(2n+1)}{m}} x_{2m}(2n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} e^{-2i\pi \frac{kn}{m}} x_{2m}(2n) + e^{-i\pi \frac{k}{m}} \sum_{n=0}^{m-1} e^{-2i\pi \frac{kn}{m}} x_{2m}(2n+1) \end{aligned}$$

On note $x_m^{pair} = (x_{2m}(0), x_{2m}(2), \dots, x_{2m}(N-2))$ et $x_m^{impair} = (x_{2m}(1), x_{2m}(3), \dots, x_{2m}(N-1))$.

20/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

- Si $k = 1, \dots, m$ on a

$$X_{2m}(k) = X_m^{paire}(k) + e^{-i\pi \frac{k}{m}} X_m^{impaire}(k)$$

où X_m^{paire} est la DFT du vecteur x_m^{pair} et $X_m^{impaire}$ celle de $x_m^{impaire}$.

- Si $k = m, \dots, 2m - 1$ on peut écrire $k = m + \ell$ où $0 \leq \ell < m$ et on a

$$e^{-i\pi \frac{k}{m}} = -e^{-i\pi \frac{\ell}{m}} \text{ et } e^{-i\pi \frac{(\ell+m)n}{m}} = e^{-i\pi \frac{\ell n}{m}}$$

i.e. on résonne modulo m de par la périodicité des polynômes trigonométriques.
On peut donc réorganiser les calculs :

$$X_{2m}(k) = X_{2m}(m + \ell) = X_m^{pair}(\ell) - e^{-2i\pi \frac{\ell}{m}} X_m^{impaire}(\ell), \ell = 0, \dots, m - 1$$

21/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Implémentation

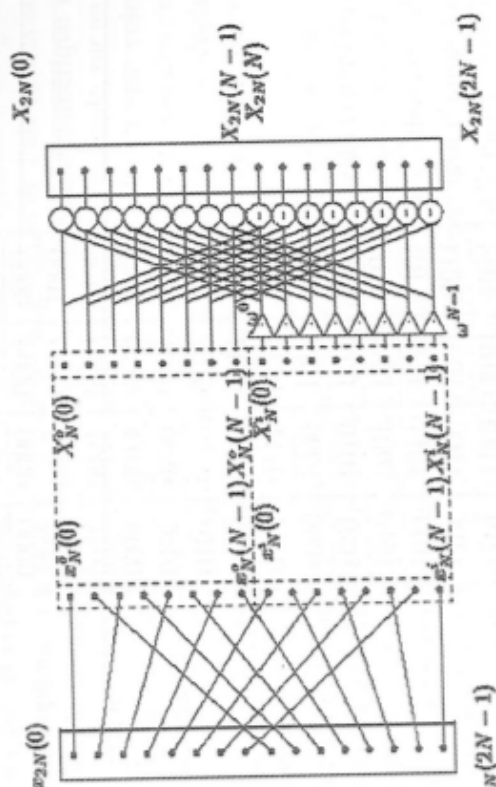


Figure 2.4 Enchaînement des calculs de la Transformée de Fourier Rapide (1)

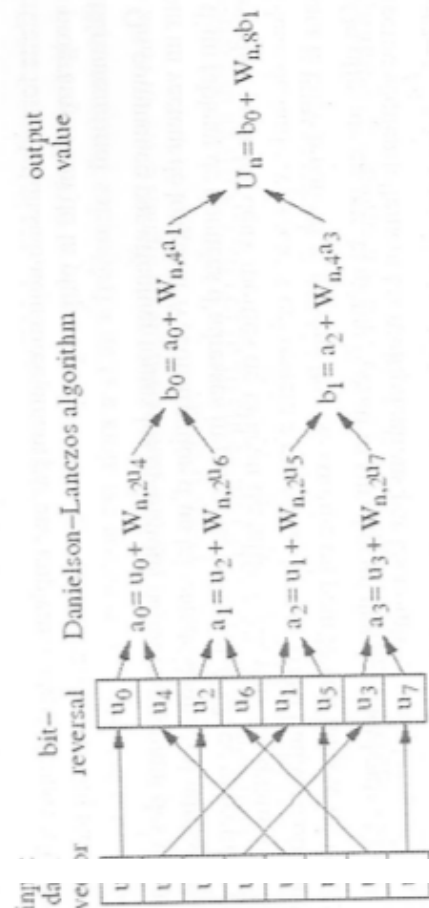


Figure 2.5 Enchaînement des calculs de la Transformée de Fourier Rapide (2)

22/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

abcd	bcda	cdab	dcba
0000	0000	0000	0000
0001	0010	0100	1000
0010	0100	1000	0100
0011	0110	1100	1100
0100	1000	0010	0010
0101	1010	0110	1010
0110	1100	1010	0110
0111	1110	1110	1110
1000	0001	0001	0001
1001	0011	0101	1001
1010	0101	1001	0101
1011	0111	1101	1101
1100	1001	0011	0011
1101	1011	0111	1011
1110	1101	1011	0111
1111	1111	1111	1111

Tableau 2.1 Réordonnement des données préalable dans le calcul de la Transformée de Fourier rapide abcd

Cette formulation se traduit directement par une implémentation récursive. Toutefois la programmation de la plupart des processeurs est fondée sur une implémentation différente.

On commence par effectuer toutes les opérations de réarrangement des données : pour un vecteur de longueur N , construction d'un tableau de données d'adresses paires et d'un tableau de données d'adresses impaires de longueur $N/2$, ce réarrangement étant reproduit pour les deux moitiés de tableau de taille $N/2$, puis les quatre quarts de tableau de taille $N/4$, etc. Ceci revient à ranger la donnée $x(t)$ à l'adresse obtenue en lisant le code binaire de t en sens inverse comme on peut le voir dans le tableau 2.1.

On effectue ensuite la même opération sur chacun des deux tableaux. Ensuite on effectue séquentiellement les multiplications par les nombres complexes de la forme $\exp(2\pi i \frac{kn}{N})$ pour calculer les $N/2$ transformées de Fourier de taille 2, puis les $N/4$ transformées de taille 4, et ainsi de suite jusqu'à obtenir les 2 transformées de Fourier de taille $N/2$ et finalement la transformée de Fourier de taille N .

b) Applications de la FFT

Le type le plus courant d'enregistrement audio numérique est appelé modulation par impulsions codées (pulse code modulation, PCM). C'est la technique utilisée par les

23/25

3.3. Transformée de Fourier Discrète (DFT) : Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Bonnes pratiques

D'après l'aide de MATLAB

- The execution time for fft depends on the length of the transform. The time is fastest for powers of two and almost as fast for lengths that have only small prime factors. The time is typically several times slower for lengths that are prime, or which have large prime factors.
- For most values of n , real-input DFTs require roughly half the computation time of complex-input DFTs. However, when n has large prime factors, there is little or no speed difference.

24/25

Utilisation de la FFT

Attention ! Si on calcule la DFT de $y = (y(k))_{k=0}^{N-1} = (f(t_k))_{k=0}^{N-1}$ on a

- ▶ dans MATLAB (via `fft` qui utilise la FFTW),

$$Y(p) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-2i\pi \frac{kp}{N}}, p = 0, \dots, N-1$$

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Y(p) e^{2i\pi \frac{kp}{N}}, p = 0, \dots, N-1$$

- ▶ dans R (via `stats::fft` "a C translation of Fortran code in Singleton (1979)") :

$$Y(p) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-2i\pi \frac{kp}{N}}, p = 0, \dots, N-1$$

$$y(k) = \sum_{p=0}^{N-1} Y(p) e^{2i\pi \frac{kp}{N}}, p = 0, \dots, N-1$$