理论题 1

- 证明：双因子方差分析模型中的偏差平方和分解公式，即

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E.$$

证明：$SS_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk}-\bar{y}_{\cdots})^2$

$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}\left((\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})+(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})+(y_{ij\cdot}-y_{i\cdot\cdot}-y_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})\right)^2$

$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ij\cdot}-y_{i\cdot\cdot}-y_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})^2$

$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}[2(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})+2(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})$

$+2(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})+2(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})+2(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})$

$+2(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})]$

$=SS_A+SS_B+SS_{AB}+SS_E$. 即证平方和展开式中六个交叉项为0.

① $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})=m\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})=m\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(b\bar{y}_{\cdots}-b\bar{y}_{\cdots})=0.$

② $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})=m\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})$

$=m\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(b\bar{y}_{i\cdot\cdot}-b\bar{y}_{i\cdot\cdot}-b\bar{y}_{\cdots}+b\bar{y}_{\cdots})$

$=0.$

③ $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})=\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})=\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{j=1}^{b}(m\bar{y}_{ij\cdot}-m\bar{y}_{ij\cdot})=0.$

④ $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})=m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})$

$=m\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})$

$=m\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(a\bar{y}_{\cdot j\cdot}-a\bar{y}_{\cdots}-a\bar{y}_{\cdot j\cdot}+a\bar{y}_{\cdots})$

$=0.$

⑤ $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})(m\bar{y}_{ij\cdot}-m\bar{y}_{ij\cdot})=0.$

⑥ $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})$

$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})(m\bar{y}_{ij\cdot}-m\bar{y}_{ij\cdot})$

$=0.$

$\therefore SS_T=SS_A+SS_B+SS_{AB}+SS_E.$

理论题 2

- 证明：均方的期望如下：

$$E(MS_A) = \sigma^2 + \frac{bm\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + \frac{am\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + \frac{m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

证明：令 $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$，其中 $\varepsilon_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$\therefore E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$

$Var(y_{ijk}) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}\therefore E(\bar{y}_{i\cdot\cdot}) &= \frac{1}{bm}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}E(y_{ijk}) \\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}) \\ &= \frac{1}{b}(b\mu + b\alpha_i + 0 + 0) \\ &= \mu + \alpha_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\bar{y}_{i\cdot\cdot}) &= \frac{1}{b^2m^2}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}Var(y_{ijk}) \\ &= \frac{1}{bm}\sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(MS_A) &= E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) \\ &= \frac{1}{a-1}E\left(bm\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2\right) \\ &= \frac{bm}{a-1}\sum_{i=1}^{a}E[(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2] \\ &= \frac{bm}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\left[(\mu + \alpha_i - \mu)^2 + \frac{a-1}{a}\cdot\frac{1}{bm}\sigma^2\right] \\ &= \frac{bm}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + \sigma^2\end{aligned}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right)$$

$$= \frac{1}{b-1} E\left(am \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{\cdot j \cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2\right)$$

$$= \frac{am}{b-1} \sum_{j=1}^{b} E\left[(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2\right]$$

$$= \frac{am}{b-1} \sum_{j=1}^{b} \left[(\mu + \beta_j - \mu)^2 + \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1}{am} \sigma^2\right]$$

$$= \frac{am}{b-1} \sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 + \sigma^2$$

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{ab(m-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{ab(m-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{m} E\left[(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2\right]$$

$$= \frac{1}{ab(m-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{m} \left[(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2 + \frac{m-1}{m} \sigma^2\right]$$

$$= \sigma^2 .$$

$$\because E(SS_T) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{m} E\left[(y_{ijk} - \bar{y}_{\cdots})^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{m} \left[(\alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij})^2 + \frac{abm-1}{abm} \sigma^2\right]$$

$$= bm \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 + am \sum_{j=1}^{b} \beta_i^2 + m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + (abm-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(SS_{AB}) = E(SS_T - SS_A - SS_B - SS_E)$$

$$= bm \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 + am \sum_{j=1}^{b} \beta_i^2 + m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + (abm-1)\sigma^2$$

$$- bm \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 - (a-1)\sigma^2 - am \sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 - (b-1)\sigma^2 - ab(m-1)\sigma^2$$

$$= m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)} \left[m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2\right]$$

$$= \frac{m}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + \sigma^2$$