

误差理论与平差基础 实验报告



学 院：土木工程学院

专业班级：19 测绘 01 班

指导教师：刘文谷

小组成员：魏子继、舒家豪、
秦思然、王祥业

2021 年 6 月 14 日

一、概述

测量是工程中非常重要的成分。但由于人为等各种原因，偶然误差不可避免。为了取得最接近于真值的结果，我们需要对测量值进行平差。测量数据是庞大的，人为计算费时费力且容易出错。为此，我们需要使用计算机处理平差问题。

最常见的平差模型有两种，即条件平差和间接平差。为此，我们展开研究设计出适用于条件平差和间接平差的计算机平差计算代码。在代码编写的软件选择上，我们采用 matlab。因为 matlab 在矩阵运算上有着天然的优势，具有很多成型的计算公式，如求逆公式，使得程序的设计更加简易快捷。本次实验以最简单的水准网进行编写。我们的目标不只限于水准网，而是以此为基础，能够进行更加深入的平差程序研究。

本次实验内容包括水准网的条件平差计算、间接平差的误差方程列立和法方程解算三个模块。

二、条件平差

1、条件平差编程思想

建立条件平差模型 $Av + W = 0$. 以行为单位依次编号默认为高差编号（如：1、2、3...，如果没有观测就输入 0）、起始高程值、终止高程值（按照负数输入）、按照高程编号依次输入（如果没有观测就输入 0），做循环求出改正数方程中的 A 和 W 。求解法方程系数阵 N_{aa} 。建立法方程：

$$N_{aa} \times k + W = 0$$

求解法方程

$$k = -N_{aa} \times W$$

进而求解改正数 v ，最终求得平差值。

2、实验目的、实验时间和实验地点

- （1）实验目的：使用条件平差的方法，利用 matlab 计算，几位算水准网的高差改正数，最后求得高差平差值。
- （2）实验时间：2021 年 5 月 29 日
- （3）实验地点：计算机机房 DS1407

3、程序功能与使用说明

在了解条件平差求解水准网模型的方法，结合老师所给利用条

件平差的水准网的例子之后，小组成员发现在解算过程中，教师所给例子中 A 没有-1 值。即在测量过程中，若存在与线路相反的观测，难以求得正确的平差结果。因此，我们采用引入标志数组的方法，人为手动输入与线路相反的观测值，从而得到正确的平差值。

但在完成代码编撰后发现，在最初输入时还是要将观测值线路相反的观测值带入负号输入。即标志数组的引入仅仅方便了最后平差值的计算，在整个平差过程中的作用没有达到预期效果。

因此我们会结合 matlab 的语法特点，再次优化代码块，达到预期优化结果。

4、源代码展示 (matlab-tiaojian.m)

```
% hg 存储高差观测值
```

```
hg = input('请输入各高差观测值，以分号间隔：');
```

```
% b 为标志数组
```

```
b = input('请输入标志数组，与线路相同的为正，相反为负');
```

```
% h 存储高差观测值，已知点高程
```

```
disp('请按编号依次输入各观测值和已知高程，数据未知用 0 代替。路线相反需将观测值前代负号。已知高程线路末端也需要带负号：');
```

```
h = input('请输入：');
```

```

% S 存储水准路线距离

S = input('请输入各水准路线的距离: ');

% n 为总观测数, t 为必要观测数, r 为多余观测数

n = input('总观测数为: ');

t = input('必要观测数为: ');

r = n - t;

% A 为改正数方程系数阵

A = zeros(r, n);

for i = 1 : r

    for j = 1 : n

        if (h(i, j) ~= 0 && b(1, j) > 0)

            A(i, j) = 1;

        elseif (h(i, j) ~= 0 && b(1, j) < 0)

            A(i, j) = -1;

        else

            A(i, j) = 0;

        end

    end

end

end

```

A

% w 为改正数方程中的常数项

w = zeros(r, 1);

for i = 1 : r

 w(i, 1) = sum(h(i, :));

end

w

% c 为单位权观测高差公里数

c = input('单位权观测高差公里数为: ');

% Q 为权因数阵，由于水准测量各观测之间独立，因此 Q 为对角阵

Q = zeros(n, n);

for i = 1 : n

 Q(i, i) = S(1, i) / c;

end

Q

% Naa 为法方程系数阵

Naa = A * Q * A';

Naa

% K 为联系数阵

$$K = -\text{inv}(Naa) * w;$$

% V 为改正数阵

$$V = Q * A' * K;$$

V

% hp 为平差值方程

$$hp = \text{zeros}(n, 1);$$

$$hp = hg + V;$$

hp

5、例题展示

(1) 例题题目

《误差理论与测量平差基础（第三版）》P83 例 5-2

42°12'17" + 78°09'06" + 59°38'37" - 180° = 0
可见各角的平差值满足了一三角形内角和等于 180°
的几何条件,即闭合差为零,故知计算无误。

例 5-2 在图 5-2 中, A、B 为已知水准点,其高程 $H_A = 12.013\text{m}$, $H_B = 10.013\text{m}$, 可视为无误差。为了确定 C 点及 D 点的高程,共观测了四个高差,高差观测值及相应水准路线的距离为:

$h_1 = -1.004\text{m}, S_1 = 2\text{km}; h_2 = +1.516\text{m}, S_2 = 1\text{km};$
 $h_3 = +2.512\text{m}, S_3 = 2\text{km}; h_4 = +1.520\text{m}, S_4 = 1.5\text{km}。$

试求 C 点和 D 点高程的平差值。

解: 此例 $n = 4, t = 2$, 故 $r = 2$, 可列出如下两个条件方程:

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_1 + \hat{h}_2 - \hat{h}_3 + H_A - H_B &= 0 \\ \hat{h}_2 - \hat{h}_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

以 $\hat{h}_i = h_i + v_i$ 代入上式, 经计算可得条件方程最后形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$$

式中闭合差的单位是 mm。

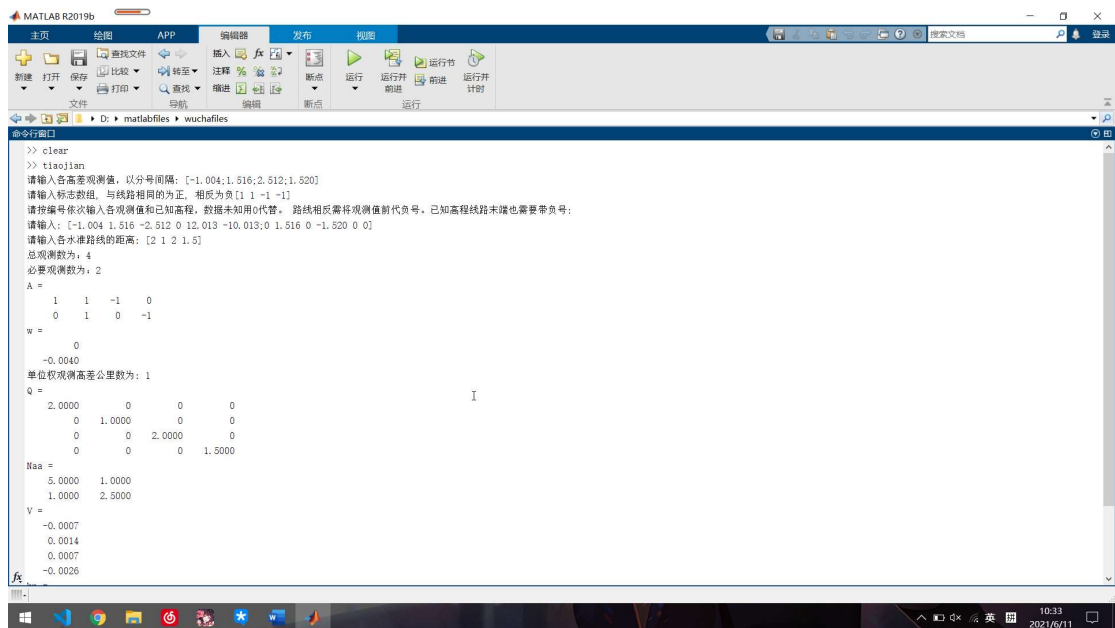
图 5-2 水准网

水准网条件方程:

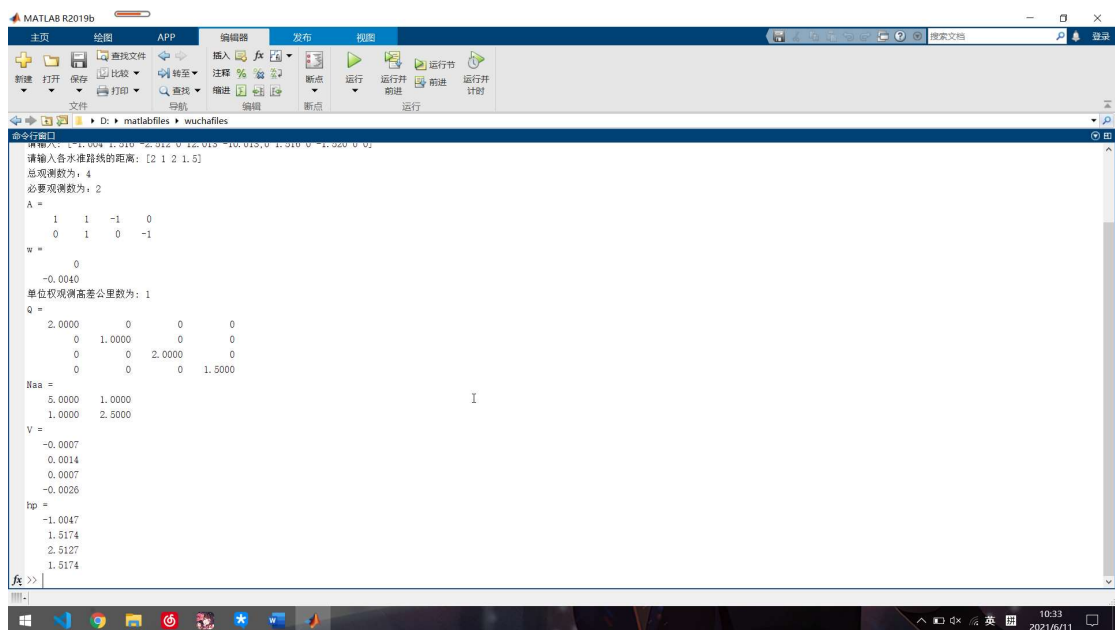
1. 必要起算 1 个
2. 必要观测数 $t = P$ (待定点数)
3. 两类条件 $\left\{ \begin{aligned} &\text{闭合 } r = n - t \text{ 个} \\ &\text{附合 } r = k - 1 \text{ 个} \end{aligned} \right.$
4. 最简条件 $\left\{ \begin{aligned} &\text{按从环数} \\ &\text{是否每个观测值都用} \end{aligned} \right.$
5. 不才目关

83

(2) 代码运行结果展示:



```
>> clear
>> tiaojian
请输入各高差观测值，以分号间隔: [-1.004;1.516;2.512;1.520]
请输入标志数组，与线路相同的为正，相反为负[1 1 -1 -1]
请输入编号依次输入各观测值和已知高程，数据未加用0代替，路线相反需将观测值前代负号，已知高程线路末端也需要带负号:
[-1.004 1.516 -2.512 0 12.013 -10.013;0 1.516 0 -1.520 0 0]
请输入各水准路线的距离: [2 1 2 1.5]
总观测数为: 4
必要观测数为: 2
A =
     1     1    -1     0
     0     1     0    -1
w =
     0
    -0.0040
单位权观测高差公里数为: 1
Q =
     2.0000     0         0         0
         0     1.0000     0         0
         0         0     2.0000     0
         0         0         0     1.5000
Naa =
     5.0000     1.0000
     1.0000     2.5000
V =
    -0.0007
     0.0014
     0.0007
    -0.0026
```



```
请输入: [-1.004 1.516 -2.512 0 12.013 -10.013;0 1.516 0 -1.520 0 0]
请输入各水准路线的距离: [2 1 2 1.5]
总观测数为: 4
必要观测数为: 2
A =
     1     1    -1     0
     0     1     0    -1
w =
     0
    -0.0040
单位权观测高差公里数为: 1
Q =
     2.0000     0         0         0
         0     1.0000     0         0
         0         0     2.0000     0
         0         0         0     1.5000
Naa =
     5.0000     1.0000
     1.0000     2.5000
V =
    -0.0007
     0.0014
     0.0007
    -0.0026
tp =
    -1.0047
     1.5174
     2.5127
     1.5174
```


三、间接平差

1、 间接平差编程基本思想

对待定点以及已知点的编号（先编待定点号码，再编已知点号），建立矩阵 a （格式是依次输入起始点编号、终止点编号 1 观测值），矩阵 H_0 存储已知点高程，通过循环矩阵中两列起始点和终止点的编号判断循环方向建立误差方程中的 B 以及常数项 l ，从而得到水准网的间接误差方程：

$$v = Bx - l$$

2、 实验目的、实验时间和实验地点

- （1）实验目的：利用间接平差的方法，利用 matlab 计算，建立水准网间接平差的误差方程，从而大大简便了间接平差的计算。
- （2）实验时间：2021 年 6 月 6 日
- （3）实验地点：计算机机房 DS1404

3、 程序功能与使用说明：

在测量实际工作中，间接平差是一种常用的方法。间接平差的重点是参数的选择和误差方程的列立。因此，应注意本代码的适用范围以及对于水准网的编号顺序。之后便可以根据误差方程的解算方便的算出各高差的改正数，从而计算出高差平差值。

本代码参照示例代码，着重对代码进行完善，从而使代码更加简洁、通俗易懂，方便测量人员使用。

4、 源代码展示 (matlab-wucha.m)

```
n=input('总观测数=');  
t=input('必要观测数=');  
b=input('已知高程点数=');  
H0=input('已知点的高程=');  
a=input('输入始点、终点、观测值');  
disp('间接平差模型为  $v=Bx-l$ ，解得:');
```

% 求解误差方程中的系数

```
B=zeros(n, t);
```

% 测量起始点在误差方程中的系数为-1

```
for i=1:n
```

```
    if(a(i, 1)<=n)
```

```
        B(i, a(i, 1))=-1;
```

```
    end
```

```
end
```

% 测量终点在误差方程中的系数为 1

```

for i=1:n
    if(a(i,2)<=n)
        B(i,a(i,2))=1;
    end
end

% 已知点没有设参数，在误差方程中的系数为 0
for i=1:n
    if(a(i,1)>t && a(i,1)<=(b+t))
        B(i,a(i,1))=0;
    elseif(a(i,2)>t && a(i,2)<=(b+t))
        B(i,a(i,2))=0;
    end
end

end

% 输出 B
B=B(1:n,1:t)

% 求解误差方程中的 1
% 首先求解水准网中各点近似高程
H=zeros((b+t),1);

```

```

for i=1:b
    H((t+i), 1)=H0(i, 1);
end

% 与已知点有联系的高程直接求解

for i=1:n
    if(a(i, 1)>=(t+1)&&a(i, 1)<=(b+t))
        H(a(i, 2), 1)=H(a(i, 1), 1)+a(i, 3);
    elseif(a(i, 2)>=(t+1)&&a(i, 2)<=(b+t))
        H(a(i, 1), 1)=H(a(i, 2), 1)-a(i, 3);
    end
end

% 求解和已知点没有直接联系的点的高程

for i=1:n
    if(H(a(i, 1), 1)~=0&&H(a(i, 2), 1)==0)
        H(a(i, 2), 1)=H(a(i, 1), 1)+a(i, 3);
    elseif(H(a(i, 1), 1)==0&&H(a(i, 2), 1)~=0)
        H(a(i, 2), 1)=H(a(i, 1), 1)-a(i, 3);
    end
end
end

```

```
% 求解常数阵 l
```

```
l=zeros(n,1);
```

```
for i=1:n
```

```
    l(i,1)=H(a(i,2),1)-H(a(i,1),1)-a(i,3);
```

```
end
```

```
% 输出 l
```

```
L
```

5、 例题解算展示

(1) 例题题目

已知水准点 A 的高程为 $H_A=237.483\text{m}$ ，各个高差观测值以及各段的观测距离如下：

$h_1=4.835\text{m}$ ， $s_1=3.5\text{km}$ ；

$h_2=3.782\text{m}$ ， $s_2=2.7\text{km}$ ；

$h_3=9.640\text{m}$ ， $s_3=4.0\text{km}$ ；

$h_4=7.384\text{m}$ ， $s_4=3.0\text{km}$ ；

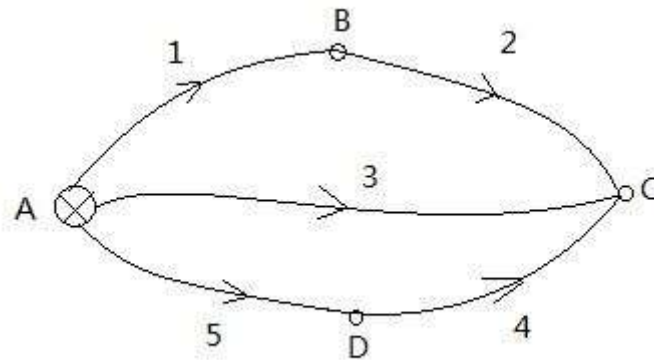
$h_5=2.270\text{m}$ ， $s_5=2.5\text{km}$ 。

利用间接平差求各个观测值得平差值。设 B、C、D、A 四个点的

编号为 1、2、3、4，因此各段高差值可以用编号表示起始与终止。

例如：h1 是 4 点与 1 点相连。

水准网示意图如下：



(2) 代码运行结果展示：

```
>> wucha
总观测数=5
必要观测数=3
已知高程点=1
已知点的高程=237.483
输入始点、终点、观测值[4 1 5.835;1 2 3.782;4 2 9.640;3 2 7.384;4 3 2.270]
间接平差模型为v=Bx-l，解得：
B =
     1     0     0
    -1     1     0
     0     1     0
     0     1    -1
     0     0     1
l =
    0.0000
    0.0230
   -0.0000
   -0.0140
    0.0000
fx >>
```

四、法方程解算

1、 法方程解算方法基本思想

考虑到 matlab 在矩阵运算方法得天独厚的优势，故采用分块求逆的方法对法方程进行解算。

具体的求解方法是将矩阵 A 划分为 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 四个矩阵，其中要求 A_{11} 或 A_{22} 的逆矩阵存在。对每个分块矩阵求逆，即为矩阵 A 的逆矩阵 B 对应的分块逆矩阵。引用规则为矩阵的乘法，即 $AB = E$ 。可列出关于 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 同 B_{11} 、 B_{12} 、 B_{21} 、 B_{22} 的四个方程组，联立解算即可求出 B_{11} 、 B_{12} 、 B_{21} 、 B_{22} 。合在一起便可以求得矩阵 A 的逆矩阵 B 。

2、 实验目的、实验时间和实验地点

- (1) 实验目的：利用分块矩阵的方法，借助 matlab 的功能解算法方程
- (2) 实验时间：2021 年 6 月 11 日
- (3) 实验地点：计算机机房 DS1404

3、 程序功能与使用说明

分块矩阵的方法要求分块后， A_{11} 或 A_{22} 的逆矩阵存在。因此考虑到单位矩阵一定存在逆矩阵，偷懒将 A_{11} 直接设定成为 1×1 的单

位矩阵。达到程序普适性的目的。

4、 源代码展示 (matlab-fafangcheng.m)

% 使用分块求逆的方法解算法方程

N=input('法方程系数阵=');

n=input('法方程系数阵为 n*n 的方阵, 其中 n=');

A11=N(1,1);

A12=N(1,2:n);

A21=N(2:n,1);

A22=N(2:n,2:n);

B22=inv(A22-A21*inv(A11)*A12);

B12=-inv(A11)*A12*B22;

B21=-inv(A22-A21*inv(A11)*A12)*A21*inv(A11);

B11=inv(A11)-inv(A11)*A12*B21;

fprintf('法方程系数阵为:')

B=[B11 B12;B21 B22]

5、 例题解算

(1) 例题题目

现有矩阵如下，求解此矩阵的逆，要求使用分块矩阵的方法。

输入的方阵为： $N =$

3	4	5	7
1	1	2	6
4	4	4	4
1	3	3	3

(2) 代码运行结果展示

The screenshot shows the MATLAB R2019b environment. The script 'fafangcheng.m' is being executed. The command window displays the following output:

```

>> fafangcheng
法方程系数阵=[3 4 6 7;1 1 2 6;4 4 4 4;1 3 3 3]
法方程系数阵为n*n的方阵,其中n=4
法方程系数阵为:B =
    0.0000         0    0.3750   -0.5000
   -0.5714    0.1429    0.1964    0.7857
    0.7143   -0.4286   -0.3393   -0.3571
   -0.1429    0.2857    0.0179    0.0714

法方程系数阵为:B =
    0.0000         0    0.3750   -0.5000
   -0.5714    0.1429    0.1964    0.7857
    0.7143   -0.4286   -0.3393   -0.3571
   -0.1429    0.2857    0.0179    0.0714
  
```

The workspace window shows the variables defined in the script, including the input matrix N and the resulting inverse matrix B.

五、心得感悟

在完成三个平差实验后，实验小组成员感受颇深，对于水准网模型，条件平差和间接平差的方法有了更加深刻的理解。同时，感受到了在代码编撰过程中，不断调试并不断改正纠错后的不易，得到理想结果的不易，同时也加深了小组成员代码编写的能力，架构了使用 matlab 解算方程组的整体思想。

但这三个方法还是存在一定的缺陷的。比如上述提到的在条件平差方法使用过程中，输入过于繁琐和严谨。我们期望测量工作人员能够一个简洁的输入从而得到一个完善的结果，在这个方向还需要实验小组成员不断优化代码，得到更加简洁的代码。

最后，希望实验小组成员提高程序设计能力，使用更加完善的语言写出更加完善的程序，方便测量外业人员使用。