# 数值分析习题提示

第一章 误差

1. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 $R$ 时允许的相对误差是多少？

2. 考虑正弦函数 $\sin x$ 的求值，特别是数据传递误差，即自变量 $x$ 发生扰动 $h$ 时函数值的误差。

(1) 估计 $\sin x$ 的绝对误差。

(2) 估计 $\sin x$ 的相对误差。

(3) 估计这个问题的条件数。

(4) 自变量 $x$ 为何值时，这个问题高度敏感？

3. 设 $Y_0 = 28$，按递推公式 $Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$，$(n = 1, 2, \ldots)$ 计算到 $Y_{100}$。若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$(保留 5 位有效数字)，试问计算 $Y_{100}$ 将有多大误差。

4. 正方形的边长大约为 $100cm$，问测量时允许多大的误差才能使其面积误差不超过 $1cm^2$。

5. 为使近似 $\sin\theta \approx \theta$ 给出的结果能保留 3 位十进制有效数字，问 $\theta$ 的取值范围。

6. 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，开方和对数取 6 位有效数字，计算 $f(30)$ 和 $f(-30)$ 的值。计算过程中尽量避免有效数字的损失。

7. 设 $f(x) = -e^{-2x} + e^x$，对微小的 $x$ 值，$x$，$3x$，和 $3x(1 - x/2)$ 哪个最精确？误差分别是多少？

8. 若在计算 $y = \sqrt{x^2+1} - 1$ 中至多丢失两位精度，该对 $x$ 怎样限制？

上机题

1. 编程观察无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的求和计算。

(1) 采用 IEEE 单精度浮点数，观察当 $n$ 为何值时求和结果不再变化，将它与理论分析的结论进行比较 (注：在 MATLAB 中可用 single 命令将变量转成单精度浮点数)。

(2) 用 IEEE 双精度浮点数计算 (1) 中前 $n$ 项的和，评估 IEEE 单精度浮点数计算结果的误差。

2. 编写程序，按 $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ 计算常数 $e$，即自然对数的底，具体地，对 $n = 10^k (k = 1, 2, \ldots, 20)$，计算 $(1 + 1/n)^n$。将结果与 $\exp(1)$ 比较，确定近似值的误差。误差是否随 $n$ 的增加而降低？用 MATLAB 画出误差的变化趋势曲线，作出解释。

提示：$n$ 越大，截断误差越小，舍入误差越大。

```
k=1:20;
n=10.^k;
x=(1+1./n).^n-exp(1);
plot(x)
```

第二章 方程求根

1. 为求方程 $x^3 - x^2 - 1$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根，设将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

(1) $x=1+1/x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2$；

(2) $x^3=1+x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

(3) $x^2=1/(x-1)$，迭代公式 $x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根。

2. 研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式 $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{a}{x_k}\right)$，$x_0>0$，证明对一切 $k=1,2,\ldots$，$x_k\geq\sqrt{a}$ 且序列 $x_1,x_2,\ldots$ 是递减的。

3. 证明迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的 3 阶方法。假定初值 $x_0$ 充分靠近根 $x^*$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{a}-x_{k+1})/(\sqrt{a}-x_k)^3$。

4. 用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根，根的准确值 $x^*=1.87938524\cdots$，要求计算结果准确到四位有效数字。

(1) 用牛顿法；

(2) 用割线法，取 $x_0=2$，$x_1=1.9$。

5. 用迭代法 $x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}$，求方程 $x^2+x-1=0$ 的正根 $x^*=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。取 $x_0=1$，问 $x_5$ 具有几位正确的有效数字？

上机题

1. 对于方程 $f(x)=x^2-3x+2$，可以有以下多种不动点迭代方式：

$\varphi_1(x)=\dfrac{x^2+2}{3}$，$\varphi_2(x)=\sqrt{3x-2}$，$\varphi_3(x)=3-\dfrac{2}{x}$，$\varphi_4(x)=\dfrac{x^2-2}{2x-3}$。

(1) 对于根 $x=2$，通过分析 $|\varphi_i'(2)|$，$(i=1,2,3,4)$ 来分析各个算法的收敛特性。

(2) 用程序验证分析的结果。

2. 考虑 $p(x)=(x-1)\cdots(x-10)=a_0+a_1x+\cdots+x^{10}$，考虑扰动方程 $p(x)+\varepsilon=0$。

(1) 求系数 $a_0,a_1,\ldots,a_9$；

(2) 取 $\varepsilon=10^{-6}$，$\varepsilon=10^{-8}$，$\varepsilon=10^{-10}$，分析 $\varepsilon$ 对根的影响。

第三章 解线性方程组的直接方法

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$，证明当 $\lambda=\pm\dfrac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty$ 有最小值。

2. 试推导顺序主子式皆不为零矩阵 $A$ 的 Crout 分解 $A=LU$ 的算法，其中，$L$ 为下三角矩阵，$U$ 为单位上三角矩阵。

3. 分别采用高斯消去法和直接 LU 分解法对下述矩阵进行 LU 分解，写出矩阵 $L$ 和 $U$：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -1\end{bmatrix}。$$

4. 分别采用部分主元高斯消去法对下述矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

进行 LU 分解，写出矩阵 $L$、$U$ 和 $P$。

5. 分别计算矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}$$

的 Cholesky 分解。

6. 下列矩阵能否分解为 $LU$(其中 $L$ 为单位下三角矩阵，$U$ 为上三角矩阵)？若能分解，那么分解是否唯一？

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}。$$

上机题

1. 编写程序生成 Hilbert 矩阵 $H_n$，以及 $n$ 维向量 $b=H_nx$，其中 $x$ 为所有分量都是 1 的向量。用 Cholesky 分解算法求解方程 $H_nx=b$，得到近似解 $\hat{x}$，计算残差 $r=b-H_n\hat{x}$ 和 $\Delta x=\hat{x}-x$ 的 $\infty$-范数。

(1) 设 $n=10$，计算 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$。

(2) 在右端项上施加 $10^{-7}$ 的扰动然后解方程组，观察残差和误差的变化情况。

(3) 改变 $n$ 的值为 8 和 12，求解相应的方程，观察 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况。通过这个实验说明了什么问题？

第四章 解线性方程组的迭代法

1. 设方程组：

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 &= -12;\\ -x_1+4x_2+2x_3 &= 20;\\ 2x_1-3x_2+10x_3 &= 3.\end{cases}$$

(1) 考察用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法解此方程组的收敛性；

(2) 取初始解为 $[0,0,0]^T$，用 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-2}$ 时迭代终止。

(3) 用 SOR 方法解上述方程组 (取 $\omega=0.9$，初始解为 $[0,0,0]^T$)，要求当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-2}$ 时终止迭代。

2. 基于 Gauss-Seidel 迭代法可得到一种新的迭代法。在第 $k$ 步迭代中 ($k=0,1,\cdots$)，先由 Gauss-Seidel 迭代公式根据 $x^{(k)}$ 算出 $\tilde{x}^{(k)}$，然后将分量的更新顺序改为从 $n$ 到 1，类似地，再计算一遍根据 $\tilde{x}^{(k)}$ 算出 $\tilde{x}^{(k+1)}$。这种迭代法称为对称 Gauss-Seidel(SGS) 方法。试证明 SGS 方法的迭代计算公式，并证明它也属于分裂法，且当矩阵 $A$ 对称时矩阵 $M$ 也是对称的。

3. 考虑线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&0\\a&0&1\end{bmatrix}$。

(1) $a$ 为何值时，$A$ 是正定的？

(2) $a$ 为何值时，Jacobi 迭代法收敛？

(3) $a$ 为何值时，Gauss-Seidel 迭代法收敛？

4. 对 Jacobi 迭代法引进迭代参数 $\omega>0$。即 $x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega D^{-1}(Ax^{(k)}-b)$ 称为 Jacobi 松弛法。试证明：当求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛且 $0<\omega\le 1$ 时，Jacobi 松弛法也收敛。

5. 考虑线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 4a & 1\end{bmatrix}$。

(1) 求使 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛的 $a$ 取值范围。

(2) 当 $a\neq 0$ 时，给出两种迭代法收敛速度之比。

上机题

1. 考虑 10 阶 Hilbert 矩阵作为系数阵的方程组 $Ax=b$，其中 $b=[1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{10}]^T$。取初始解 $x^{(0)}=\mathbf{0}$，编写程序用 Jacobi 迭代法与 SOR 迭代法求解该方程组，将 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 作为终止迭代的判据。

(1) 分别用 Jacobi 与 SOR($\omega=1.25$) 迭代法求解，观察收敛情况。

(2) 改变 $\omega$ 的值，试验 SOR 迭代法的效果，考察解的准确度。

第五章 函数逼近

1. 对于 $C[0,1]$ 中的函数 $f(x)$，计算 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$，$\|f\|_2$。

(1) $f(x)=(x-1)^3$；(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$。

2. $f(t)=|t|$ 定义在 $[-1,1]$ 上，在子空间 $\Phi=\mathrm{span}\{1,t^2,t^4\}$ 中求它的最佳平方逼近多项式。

3. 已知实验数据如下：。

| $t_i$ | 19 | 25 | 31 | 38 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 19.0 | 32.3 | 49.0 | 73.3 | 97.8 |

用最小二乘法求形如 $y=a+bt^2$ 的经验公式。

4. 对权函数 $\rho(x)=1+t^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

5. 设 $f(t)=t^2+3t+2$ 定义在区间 $[0,1]$ 上，试求 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上关于 $\Phi=\mathrm{span}\{1,t\}$ 的最佳平方逼近多项式。若取 $\Phi=\mathrm{span}\{1,t,t^2\}$，那么最佳平方逼近多项式是什么？

上机题

1. 对物理实验中所得下列数据

| $t_i$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 33.40 | 79.50 | 122.65 | 159.05 | 189.15 | 214.15 | 238.65 | |
| $t_i$ | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 |
| $y_i$ | 252.2 | 267.55 | 280.50 | 296.65 | 301.65 | 310.40 | 318.15 | 325.15 |

(1) 用公式 $y=a+bt+ct^2$ 作曲线拟合。

(2) 用指数函数 $y=ae^{bt}$ 作曲线拟合。

(3) 比较上述两条拟合曲线，那条更好？

第六章 插值法

1. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\ldots,2^7]$，$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]$ 及 $f[1,1,1,1,1]$。

2. 用插值基和广义差商表两种方法求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$。

3. 已知函数 $f(x)$ 充分光滑，求满足插值条件 $P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2)$ 及 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 的插值基多项式 $L_{ik}$，并写出余项公式。

4. 求 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

5. 求 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上的分段埃尔米特插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

上机题

1. 对 $[-5,5]$ 作等距划分，$x_i=-5+ih$，$h=\dfrac{10}{n}(i=0,1,\ldots,n)$ 并对 Runge 给出的函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$，取 $n=10,20$ 作拉格朗日插值 $L_{10}(x)$ 与 $L_{20}(x)$，考察在 $x=4.8$ 处的误差。

第七章 数值积分和数值微分

1. 确定下面求积公式中的待定系数或积分节点的待定值，使其代数精度尽量高，并指出所构造的求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$；

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$。

(3) $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0f(0)+A_1f(1)+B_0f'(0)+B_1f'(1)$。

2. 证明下列等式，它们分别说明下列三种矩形求积公式及其余项

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\dfrac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，$\eta\in(a,b)$；

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\dfrac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，$\eta\in(a,b)$；

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$，$\eta\in(a,b)$。

3. 对下列积分，分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算，其中 $n$ 表示计算中是用 $n+1$ 个区间等分点上的函数值，然后比较两种计算结果的准确度。

(1) $\int_0^1 \dfrac{x}{4+x^2}dx$，$n=8$；

(2) $\int_0^9 \sqrt{x}dx$，$n=4$。

上机题

1. 用复合 Simpson 公式计算圆周率 $\pi=4\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx$，要求绝对误差限小于 $\dfrac{1}{2}\times10^{-8}$，试根据积分余项估计步长 $h$ 的取值范围。按要求选择一个步长进行计算，观察数值结果与误差要求是否相符。