第 2 章 非线性方程求根

求根问题：输入是函数，输出是数。
输入的扰动是什么？
函数扰动自然，但很复杂。

第 2 章　非线性方程求根

求根问题：输入是函数，输出是数。
输入的扰动是什么？
函数扰动自然，但很复杂。
一个简单做法：值的扰动。给出函数在根处的值的容许范围。
数值问题：输入，输出及其它们的扰动。
注：函数不同表达，结果或许不同。

$y=ax^2+bx+c$, a,b,c的扰动，结果各不相同

中国

公元一世纪，一元二次方程

公元六世纪，王孝通，一元三次方程

公元十三世纪，秦九韶，一元高次方程

秦九韶：三斜求积术，大衍求一术，正负开方法等

(Cantor、Sarton 的评价)

国外

古埃及、古巴比伦，一元二次方程

十六世纪初，Vieta，根与系数关系

十六世纪中，Tartaglia, Cardano, Ferrari，一元三次四次方程

十九世纪，Hermite, Abel, Galois，一元五次方程

§1 引言

一、非线性方程

C：连续　C^2：有连续的二阶导

$f(x)=0$，$f(x)\in C[a,b]$。可能无解，唯一解或多个解。

例：光的衍射 $x-\tan x=0$;

行星轨道，Kepler 方程 $x-a\sin x=b$。

根 x^* 也称为零点。

定义 (根 x^* 的重数)

对光滑函数 f，若 $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$，但 $f^{(m)}(x^*) \neq 0$，则称 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 重根。当 $m = 1$ 时，即 $f(x^*) = 0$，$f'(x^*) \neq 0$ 时，称 x^* 为单根。

定义 (根 x^* 的重数)

对光滑函数 f，若 $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$，但 $f^{(m)}(x^*) \neq 0$，则称 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 重根。当 $m = 1$ 时，即 $f(x^*) = 0$，$f'(x^*) \neq 0$ 时，称 x^* 为单根。

例：多项式函数 $f(x)$，　　张要求

$f(x) = (x - x^*)^m g(x)$，$g(x^*) \neq 0$。

m 重根的概念与上述定义一致。

连续函数的根未必有重数。
例：不光滑函数 $f(x) = |x - x^*|^{3/2}$；
$f(x) = (x - x^*)^m \ln |x - x^*|$；
光滑函数 $f(x) = e^{-1/(x-x^*)^2}$。

一元 n 次方程 $(n \geq 5)$ 不存在求根公式。
求根 (不计误差) 是一个无限过程。
非线性方程一般寻求近似解。

并希望尽可能快

二、问题的敏感性

数值问题的敏感性：输入数据的扰动对输出数据的影响。

数值问题要假设输入数据如何扰动。

二、问题的敏感性

数值问题的敏感性：输入数据的扰动对输出数据的影响。(求根，下面例2)

数值问题要假设输入数据如何扰动。

易于分析的情况：$f(x^*)=0$，$f(x)=y$。

绝对条件数：　扰动f相当于加了个常数项

$$\frac{|x-x^*|}{|y-0|}=\frac{|x-x^*|}{|f(x)-f(x^*)|}\approx\frac{1}{|f'(x^*)|}。$$

绝对值很小时候不考虑相对误差

新的f相较于旧f差了个y，y与0很近

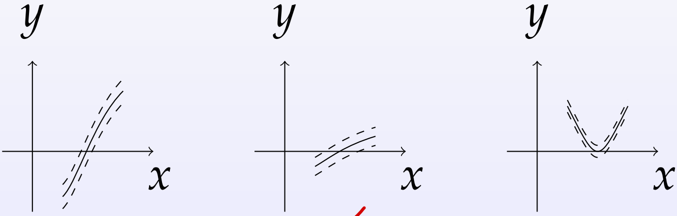
若函数值 $f(x)$ 对输入参数 x 很不敏感，则求根问题就很敏感；反之，若函数值 $f(x)$ 对输入参数 x 很敏感，则求根问题就很不敏感。

条件数的大小反映非线性方程求根问题 $f(x)=0$ 的敏感程度。 以之条件数

若 $|f'(x^*)|$ 很小，则求根问题是一个病态问题；反之，若 $|f'(x^*)|$ 很大，则问题不敏感。

$\frac{1}{|f'(x)|}$，分母为0会很大

特殊情况是 $f'(x^*) = 0$，即 x^* 为重根，此时求根问题很敏感。微小扰动可能改变解的存在性和唯一性。



斜率不同，扰动影响不同

重根

§2 二分法

数值求解非线性方程通常是设计一个迭代过程，逐步逼近准确解。

§2 二分法

数值求解非线性方程通常是设计一个迭代过程，逐步逼近准确解。

一、方法原理

有根区间就是包含至少一个根的区间。

如果能计算出一个足够小的有根区间，那么区间中点就是一个近似解。

异号时候才能判断，随后变小区间

$f(x) \in C[a,b]$，若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则 (a,b) 是有根区间，但根的个数不能确定；若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 同号，不能确定 (a,b) 是否为有根区间。

$f(x) \in C[a,b]$，若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则 (a,b) 是有根区间，但根的个数不能确定；若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 同号，不能确定 (a,b) 是否为有根区间。

二分法的思想：将有根区间逐次减半，得到区间序列 $\{(a_k, b_k)\}$，中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ 就是第 k 步迭代的近似解。

当某个 x_k 为 $f(x)$ 的根，即 $f(x_k) = 0$，则二分法成功结束。误差为

$$|x_k - x^*| < \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}。$$

例：求方程 $f(x) = x^4 - x - 2 = 0$ 在区间 $[1.0, 1.5]$ 内的一个实根，要求误差小于 $< 0.5 \times 10^{-2}$。(不超过最后一位的一半)

解：$f(1.0) < 0$，$f(1.5) > 0$ 异号，$(1.0, 1.5)$ 是有根区间。

若 $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq 0.5 \times 10^{-2}$，则 $|x_k - x^*| < 0.5 \times 10^{-2}$。代入 $a = 1$，$b = 1.5$，解得 $k \geq \log_2 \frac{0.5}{0.5\times 10^{-2}} - 1 = 5.6$。

取最小的整数值 $k = 6$。只需二分 6 次，可得到满足精度要求的解。

下表近似解为 $x = 1.356$(准确解为 1.353210)。(不在意四舍五入后的大小)

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	1.5	1.25	−0.808
1	1.25	1.5	1.375	0.199
2	1.25	1.375	1.313	−0.341
3	1.313	1.375	1.344	−0.081
4	1.344	1.375	1.36	0.061
5	1.344	1.36	1.352	−0.011
6	1.352	1.36	1.356	0.025

a_k 同号

b_k 同号

↓

构造区间符号不变

先算步长值

再算得这个

二、算法稳定性和结果准确度

二分法计算过程中解的误差限逐次减半，因而稳定。

在浮点算术体系中，二分法最终有根区间的端点是相邻的浮点数，即误差限存在最小值。二分法的缺点是不易确定合适的初始有根区间、收敛较慢，且无法求解偶数重的根。

§3 不动点迭代法

一、基本原理迭代：按同一过程重复计算的算法。

赋值

$f(x)=0$ 改写为 $x=\varphi(x)$。给定 x_0 后，由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 得到序列 $\{x_k\}$。若序列 $\{x_k\}$ 收敛，其极限必为解 x^*。x^* 也称为函数 $\varphi(x)$ 的不动点，此方法为求解非线性方程的不动点迭代法。

改写方法不同，结果不同，如何改写是关键

例：求方程 $f(x)=x^4-x-2=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根。

解：(1) 改写为 $x=x^4-2$，迭代公式为 $x_0=1.5$，$x_{k+1}=x_k^4-2$。

k	0	1	2	$\cdots$
x_k	1.5	3.0625	85.9639	$\cdots$

迭代法不收敛，无法求出近似解。

(2) 改写为 $x=\sqrt[4]{x+2}$，迭代公式为 $x_0=1.5$，$x_{k+1}=\sqrt[4]{x_k+2}$。

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1.5	1.3678	1.3547	1.3534	1.3532	1.3532

x_4 和 x_5 前 5 位有效数字均为 1.3532，可认为迭代过程是收敛的，要求的根为 1.3532。

不同不动点迭代法，收敛性可能有所不同。收敛快慢也不同

二、全局收敛的充分条件

取小一点

定理

设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足:

(1) 对任意 $x \in [a,b]$,都有

$a \le \varphi(x) \le b$; φ(x)也在区间里,保证迭代能进行下去

(2) 存在常数 $0 < L < 1$,使得对任意

$x_1, x_2 \in [a,b]$,都有 距离成比例地越来越小

$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$,

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在不动点,且不动点是唯一的。

依赖于连续性,但不一定可导

实际可能不可行

实际希望可导

条件 (1)：迭代不断进行。

φ 连续时，由 $\varphi(a) - a \geq 0$，而 $\varphi(b) - b \leq 0$，φ 在 $[a, b]$ 必有不动点。

条件 (2)：条件 (2) 也称为 L 的李普希兹 (Lipschitz) 条件，L 为李普希兹系数。

李普希兹条件强于一致连续。

当 $L < 1$ 时，φ 是压缩映射。

$[a, b]$ 经 k 次迭代后为 $[a_k, b_k]$，

$|b_k - a_k| \leq L^k |b - a| \to 0$。使其无限靠近

收缩到一点 x^*，即有全局收敛性。

问题：1. 闭区间 $[a,b]$ 改为 $[a,+\infty)$ 如何？或改为 (a,b) 如何？
2. 条件 (2) 改为对任意不同的 $x_1,x_2 \in [a,b]$，都有 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| < |x_1-x_2|$ 如何？

唯一不动点 x^*。

全局收敛性：考虑迭代序列的聚点 z，$\varphi(z)$ 也是一个聚点。
$|z-x^*| = |\varphi(z)-x^*| = \lim |x_k-x^*|$。
故 $z=x^*$。

定理 （不太用）

设 $\varphi \in C[a,b]$ 满足定理中的两个条件，则对于任意初值 $x_0 \in [a,b]$，由不动点迭代法得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计

$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$。

定理

设 $\varphi \in C[a,b]$ 满足定理中的两个条件，则对于任意初值 $x_0 \in [a,b]$，由不动点迭代法得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计
$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$。

上述收敛不依赖于初值 x_0 的选择，因此称为全局收敛。为了方便应用，条件 (2) 替换为：对任意的 $x \in [a,b]$，有
$|\varphi'(x)| \leq L < 1$，其中 L 为常数。

(微分中值定理)

定理

（没有必要背，一般也不适合）

设函数 $\varphi \in C^1[a,b]$，且对任意 $x \in [a,b]$，满足如下两个条件：

(1) $a \le \varphi(x) \le b$;

(2) $|\varphi'(x)| \le L < 1$，L 正常数，

则对于任意初值 $x_0 \in [a,b]$，由不动点迭代法得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|。$$

例：对于求方程 $f(x) = x^4 - x - 2 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根的问题，在区间 $[1,2]$ 上考察迭代

方法 (1)$x_{k+1} = x_k^4 - 2$ 和

方法 (2)$x_{k+1} = \sqrt[4]{x_k + 2}$

的全局收敛性。

解：方法 (2) 符合定理的条件 (1)，而 $\varphi'(x) = \frac{1}{4}(x+2)^{-3/4}$，也符合条件 (2)，具有全局收敛性。

方法 (1)，不符合定理条件 (1)，无法根据定理说明其全局收敛性。

关于全局收敛性再说明两点：

(1) 上述定理是不动点迭代法全局收敛的“充分条件”，但根据它不能说明某个方法不具有全局收敛性。

(2) 全局收敛性要求初始值 x_0 为定义域内任意值时不动点迭代法都收敛，这常常是很难达到的要求。

三、局部收敛性与收敛阶

定义

设函数 $\varphi(x)$ 存在不动点 x^*，若存在 x^* 的某个邻域 $D:[x^*-\delta, x^*+\delta]$，对于任意初值 $x_0 \in D$，迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的解序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*，则称迭代法局部收敛。

(取的是不动点附近的区间，与全局区别是δ不知道)

定理

设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$，则不动点迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 局部收敛。

以$\varphi'(x^*)$为系数的ee倍靠近

$|\varphi'(x^*)|$ 越小，迭代收敛的速度越快。

从迭代的角度，当 $|\varphi'(x^*)| < 1$ 时，x^* 是稳定的不动点，迭代法是稳定的算法。

一旦靠近，往某根.

$|\varphi'(x^*)|>1$ 可能不收敛

四、稳定性与收敛阶

例：如下三个迭代过程，其误差 $|e(x_k)| = |x_k - x^*|$ 随迭代步变化分别为

(1) $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$

(2) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \ldots$

(3) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \ldots$ 初值一定要离得近，平方才有意义

方法 (3) 最快，$\dfrac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^2} = 1$。方法 (1) 最慢。对于方法 (1)，$\dfrac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|} = 10^{-1}$，而对于方法 (2)，$\dfrac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|} = 10^{-2}$。

定义

设一个迭代解序列 $\{x_k\}$ 收敛于准确解 x^*，若迭代解的误差 $e(x_k) = x_k - x^*$，$k = 1, 2, \ldots$ 满足下列渐进关系：$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p} = c(c \neq 0$ 为常数)，则称该迭代过程是 p 阶收敛的，或收敛阶为 p。

对一个迭代法其收敛阶 p 的值是唯一的，若取其他值会使极限值 c 为 0 或无穷大。

p为整数可不带绝对值，带绝对值的p为小数

上述例子：(1) 1 阶收敛，$c = 10^{-1}$。(2) 1 阶收敛，$c = 10^{-2}$。(3) 2 阶收敛，$c = 1$。

上述例子：(1) 1 阶收敛，$c = 10^{-1}$。(2) 1 阶收敛，$c = 10^{-2}$。(3) 2 阶收敛，$c = 1$。对于二分法来说，相当于 1 阶收敛，$c = 0.5$。

上述例子：(1) 1 阶收敛，$c = 10^{-1}$。(2) 1 阶收敛，$c = 10^{-2}$。(3) 2 阶收敛，$c = 1$。对于二分法来说，相当于 1 阶收敛，$c = 0.5$。

阶数越高，公式计算越复杂，性价比可能不高

收敛阶 $p = 1$ 的迭代法称为线性收敛，
收敛阶 $p > 1$ 的迭代法称为超线性收敛，
收敛阶 $p = 2$ 的迭代法称为平方收敛。
收敛阶越高，迭代法收敛得越快，计算量也越少。所以我们往往寻求超线性收敛、如：2 阶收敛等迭代法。

定理

对于不动点迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若在所求根 x^* 的邻域上函数 $\varphi(x)$ 的 p 阶导数连续，$p\geq 2$，则该迭代法在点 x^* 的邻域上 p 阶收敛的充分必要条件是：

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

且 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$。

设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛的。将 $\varphi(x_k)$ 在根 x^* 处做泰勒展开，则

$$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p,$$

中间项导数为0，都缺失

$$e(x_{k+1}) = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} e(x_k)^p,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}。$$

已在x^*附近

多近与具体方程有关

收敛阶也称为局部收敛阶。

§4 牛顿迭代法

牛顿 (Newton) 迭代法是一种被广泛使用的方法，它具有比较固定的公式，并且它具有局部收敛性和较高的收敛阶。

§4 牛顿迭代法

牛顿 (Newton) 迭代法是一种被广泛使用的方法，它具有比较固定的公式，并且它具有局部收敛性和较高的收敛阶。

一、方法原理　　二阶方法.具体与$f(x)$有关

在 $x = x_k$ 处，$f(x)$ 的一次近似

$P(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$，

以 $P(x) = 0$ 的根作为 x_{k+1}。

$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$。

牛顿法的迭代公式 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$。

牛顿法的局部收敛性和收敛阶：

$f(x)=0$

假设 $f'(x^*) \neq 0$，即 x^* 为单根。

$\varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$，因此，$\varphi'(x^*) = 0$。

$\varphi''(x^*) = \dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$。 $\longrightarrow$ 由 $\varphi'(x) = f(x) \cdot \dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$

此时，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$。 求导得来

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x_k - x^*)^2$$

$$e(x_{k+1}) = \varphi(x_k) - \varphi(x^*)$$

$$\frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

$$e(x_{k+1}) = \frac{\varphi''(x^*)}{2} e(x_k)^2$$

牛顿法的局部收敛性和收敛阶：

假设 $f'(x^*) \neq 0$，即 x^* 为单根。

$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$，因此，$\varphi'(x^*) = 0$。

$\varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$。

此时，$\lim_{k\to\infty} \frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$。 不排除 $f''(x^*)=0$，因此是至少

定理

设 x^* 为方程 $f(x) = 0$ 的单根，且 $f(x)$ 在 x^* 附近有连续的 2 阶导数，则牛顿法产生的解序列至少是局部 2 阶收敛的。

例：用牛顿法求 $f(x)=x^4-x-2=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的实根。

解：牛顿法的计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{3x_k^4+2}{4x_k^3-1},\quad k=0,1,\ldots。$$

设初始值为 $x_0=1.5$。计算结果如下表。

k	0	1	2	3	4
x_k	1.5	1.375	1.3538	1.3532	1.3532

牛顿法收敛很快，体现了 2 阶收敛性的优势。

例：方程 $f(x)=x^2-c=0$，$c>0$ 的正根 x^*，试分析采用牛顿法求解过程的收敛性质。

解：列出牛顿法计算公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{c}{x_k}\right),$$

$k=0,1,\ldots$。

由于 $f'(x^*)\neq 0$，且 $f''(x^*)\neq 0$。迭代是局部 2 阶收敛。

迭代公式在区间 $(0,+\infty)$ 上全局收敛:
对 $x_{k+1}-\sqrt{c}=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{c})^2$,
$x_{k+1}+\sqrt{c}=\frac{1}{2x_k}(x_k+\sqrt{c})^2$。
$\frac{x_{k+1}-\sqrt{c}}{x_{k+1}+\sqrt{c}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{c}}{x_k+\sqrt{c}}\right)^2$, 因此,
$\frac{x_k-\sqrt{c}}{x_k+\sqrt{c}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{c}}{x_0+\sqrt{c}}\right)^{2^k}$。
若 $x_0>0$, 有 $\left|\frac{x_0-\sqrt{c}}{x_0+\sqrt{c}}\right|<1$, $\frac{x_k-\sqrt{c}}{x_k+\sqrt{c}}\to 0$,
即 $x_k\to\sqrt{c}$。全局收敛。
计算机上实际使用的求平方根算法。

法二：$x_0 > 0$ 时，归纳证明

$x_k \geq \sqrt{c}(k \geq 1)$。

$x \in [\sqrt{c}, +\infty)$ 时，$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{c}{x}) \leq x$。

$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2}$。$-\frac{1}{2} \leq \varphi'(x) \leq 0$。

$\varphi : [\sqrt{c}, x_1] \to [\sqrt{c}, x_1]$，$L = \frac{1}{2}$。

$\{x_k\}(k \geq 1)$ 递减收敛到 $\sqrt{c}$。

例：证明不管选择什么实初始点，牛顿迭代对 $f(x) = x^2 + 1$ 发散。

证：牛顿迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2+1}{2x_k}$。由于初始点是实的，所有 x_k 是实的，不可能收敛到虚根 $\pm\sqrt{-1}$。

按双精度浮点运算，如果 $\{x_k\}$ 是收敛的，则当 k 足够大时，$x_{k+1} = x_k$。此时，若 $|x_k| > 2$，$|x_{k+1} - x_k| \geq |x_k|/2$；若 $0 < |x_k| \leq 2$ 时，$|x_{k+1} - x_k| \geq 1$。

例：$e^x = 0$

牛顿迭代公式 $x_{k+1} = x_k - 1$。

实数体系下发散

双精度浮点体系下收敛。

大数吃小数

二、重根的情况

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0,$$

而 $f^{(m)}(x^*) \neq 0$。

$$e(x_{k+1}) = x_{k+1} - x^* = e(x_k) - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$\frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)} = 1 - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)(x_k - x^*)} =$$

$$1 - \frac{f^{(m)}(x^*)(x_k - x^*)^m / m! + O((x_k - x^*)^{m+1})}{f^{(m)}(x^*)(x_k - x^*)^m / (m-1)! + O((x_k - x^*)^{m+1})},$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e(x_{k+1})}{e(x_k)} = 1 - \frac{1}{m}。$$

将$f'(x_k)$泰勒展开

线性收敛，$c = 1 - \frac{1}{m}$。因此 $0.5 \leq c < 1$。不如二分法好。

重数越大，离1越近

若取 $\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$，则 $\varphi'(x^*) = 0$，至少二阶收敛。缺点是需要知道根 x^* 的重数。

若取 $\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$，则 $\varphi'(x^*) = 0$，至少二阶收敛。缺点是需要知道根 x^* 的重数。

若取 $\mu(x) = f(x)/f'(x)$，若 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重根，则 x^* 是 $\mu(x)$ 的单根，对 $\mu(x) = 0$ 用牛顿法，则迭代函数 $\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}$，至少二阶收敛。

三、判停准则

不动点迭代法，较难估计误差限。判停准则主要有两个：

(1) $\boxed{\text{残差判据}}$，即要求 $|f(x_k)| < \varepsilon_1$，其中 ε_1 为某个阈值；

(2) $\boxed{\text{误差判据}}$，即要求 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$，其中 ε_2 为某个阈值。

两个判据都有道理，但也有缺陷。

或对迭代次数有要求.

四、牛顿法的问题

可微性要好

当 $f(x)$ 不满足 2 阶导数连续，且 x^* 为单根时，牛顿法可能变得非常不可靠。

四、牛顿法的问题

当 $f(x)$ 不满足 2 阶导数连续，且 x^* 为单根时，牛顿法可能变得非常不可靠。

例：$f(x) = sign(x-a)\sqrt{|x-a|}$ 时，牛顿迭代围绕 $x=a$ 来回跳动。

解：$\frac{f(x)}{f'(x)} = 2(x-a)$。

$x_{k+1} - a = -(x_k - a)$。准确解为 $x^* = a$。

$\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$，牛顿法的收敛理论“不成立”。

小结一下，牛顿法仍有如下三方面不足之处：

(1) 无法保证全局收敛性；

(2) 连续性要求较高，需要 x^* 附近有连续的 2 阶导数；

(3) 每步迭代都要计算 $f'(x)$，其计算量大，还可能无法计算。

§5 割线法与抛物线法

一、割线法

平行弦法，$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$。缺点是收敛性较差，需 x_0 非常接近 x^*。

过 $(x_k, f(x_k))$ 和 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 割线

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_k),$$

减少求导机会

点斜式

§5　割线法与抛物线法

一、割线法

平行弦法，$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$。缺点是收敛性较差，需 x_0 非常接近 x^*。

过 $(x_k, f(x_k))$ 和 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 割线

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_k),$$

割线法：

斜率在二者很接近时即为导数

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})。$$

广义的不动点迭代法。

不是单根效果不好

定理

假设 $f(x)$ 在单根 x^* 的邻域 $D:[x^*-\delta, x^*+\delta]$ 内具有 2 阶连续导数，且对任意 $x \in D$ 有 $f'(x) \neq 0$，如果初值 $x_0, x_1 \in D$ 充分接近 x^*，则割线法将按阶 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 收敛到根 x^*。

收敛阶

黄金分割比。 $p^2=p+1$

* 二、抛物线法

二次插值法：根据三个已知点构造关于 x 的二次多项式 (抛物线)，求它与 x 轴的交点作为下一步迭代解。

ad hoc 认为 x_k 离 x^* 最近

* 二、抛物线法

二次插值法：根据三个已知点构造关于 x 的二次多项式 (抛物线)，求它与 x 轴的交点作为下一步迭代解。其单调，有反函数，因此逆二次插值

逆二次插值法：根据这三个已知点构造关于 y 的二次函数 $P_2(y)$，得到"侧向抛物线"，它与 x 轴有交点 $P_2(0)$ 是下一步迭代解。↘ 开口向左/右

理论上，单根附近两种抛物线法的收敛阶都是 $p \approx 1.839$。

优先抛物线,但则抛物线与x轴的交点在有根区间外就不考虑

§6 * 通用求根算法 zeroin

其次割线法. 但其计算量比二分法大很多

线性收敛

前面讨论的方法各有优缺点。让有根区间越来越小

zeroin 算法，Richard Brent，1973 年。

二分法、割线法和抛物线法结合，稳定、高效、通用。

局部收敛阶较快(收敛阶高)

zeroin 算法中定义 a, b, c 三个变量，变量 b 表示当前迭代步的近似解，变量 c 为上一步的 b，而变量 a 的作用则是与 b 构成有根区间。算法主要包括如下步骤：

有根区间两端异号

(1) 选取初始值 a 和 b，使得 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的正负号正好相反；

(2) 将 a 的值赋给 c；

(3) 重复下面的步骤 (4)-(7)，直到满足误差要求：

(4) 若 $f(b)$ 的正负号与 $f(a)$ 的相同，将 c 赋值给 a；

(5) 若 $|f(a)| < |f(b)|$，则将 b 的值赋给 c，然后对调 a、b 的值；

(6) 如果 $c \neq a$，利用 a、b、c 以及它们的函数值作逆二次插值法的一步迭代，否则执行割线法中的一步；

(7) 如果执行一步逆二次插值法或割线法得到的近似解“比较满意”，将它赋值给 b，否则执行一步二分法得到 b，然后将上一步的 b 赋值给 c。

上述算法中，(4) 和 (5) 步是对 a、b、c 三个量的值进行调整，使得 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的正负号相反，$|f(b)| \leq |f(a)|$，c 为上一步的 b。因此，变量 b 总是存储最好的近似解。判断逆二次插值法或割线法得到的近似解是否满意。

目标：使有根区间变小，并尽力使其变小得更快

MATLAB 中 fzero 命令基于 zeroin 算法。

zeroin 算法的主要优点如下：

(1) 本身不要求函数 $f(x)$ 具有光滑性；

(2) 不需要计算导数 $f'(x_k)$；

(3) 初始解只需要在包含准确解的区间，不需要和准确解很接近；

(4) 算法简单、稳定，每步迭代都使有根区间缩小。

例：MATLAB 演示方程求解。
Wallis 函数 $p = x^3 - 2x - 5$，唯一实根 $2.0945514815423 28$。有根区间 $[0, 3]$，
二分法——红，
割线法——绿，
逆二次插值——蓝。

Wilkinson

$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20)$,

根 20 的条件数 $\frac{1}{p'(20)} = \frac{1}{19!}$。

展开：$P(x) = x^{20} - 210x^{19} + \cdots$

初值 $x_0 = 21$，牛顿法。

$x^* = 19.99987405572419$

有效位数5位

扰动的原因

后面几项很大，

超出双精度范围，

产生扰动

应用实例：城市水管应埋于地下多深?

1. 问题背景与建模

在冬季寒冷的大城市，要保证埋于地下的水管干线不冻结。

假设土壤温度 $T(x,t)$，其中 x 深度，t 寒流持续时间。T_i 是寒流来前的土壤温度 (例如 20°C)，T_s 是寒冷季节的地面温度。

比例 $\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s}$ 介于 0 和 1。

土壤温度 $T(x,t)$ 满足:

$\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s}=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$，其中 α 热传导系数，误差函数 $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$。假设寒冷最长持续时间为 t_m，由于 $0°C$ 是水的结冰温度，那么当 $T(x,t)=0°C$ 对应的 x 值就是所求的填埋深度了。因此需求解非线性方程

$$T(x,t_m)=T_s+(T_i-T_s)erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t_m}}\right)=0。$$

好求导的，

2. 方程求解与结果

如果 x 单位是米 (m)，t 的单位是秒 (s)，则热传导系数 $\alpha = 0.138 \times l0^{-6} m^2/s$。假设正常的土壤温度 $t = 20°C$，寒冷季节地面温度 $T_s = -15°C$，寒流持续时间 t_m 为 60 天，则可求解上述非线性方程。用 zeroin 算法求解，得

$x = 0.676961854481937$。

习题:

1. 为求方程 $x^3 - x^2 - 1$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根，设将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

x^{-2}

(1) $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$\varphi'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$

(1) $x = 1 + 1/x^2$，迭代公式

$x_{k+1} = 1 + 1/x_k^2$;

$(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $x^2 = 1/(x-1)$，迭代公式

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$x_{k+1} = 1/\sqrt{x_k - 1}$;

$\varphi'(x) =$

(3) $x^3 = 1 + x^2$，迭代公式

$x_{k+1} = \sqrt[3]{1 + x_k^2}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，选取一种公式求出具有 4 位有效数字的近似根。

4. 用下列方法求 $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根，根的准确值 $x^* = 1.87938524\cdots$，要求计算结果准确到 4 位有效数字。

(1) 用牛顿法；

(2) 用割线法，取 $x_0 = 2$，$x_1 = 1.9$。

上机题

2. 考虑 $p(x) = (x-1)\cdots(x-10) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^{10}$，考虑扰动方程 $p(x) + \varepsilon = 0$。

(1) 求系数 $a_0, a_1, \ldots, a_9$；

(2) 取 $\varepsilon = 10^{-6}$，$\varepsilon = 10^{-8}$，$\varepsilon = 10^{-10}$，分析 ε 对根的影响。

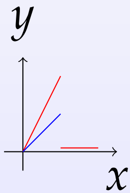
附：关于简单迭代

$|\varphi(x^*)| = 1$ 时，多种可能。

例：$\varphi(x) = x - x^3$，0 处局部收敛；

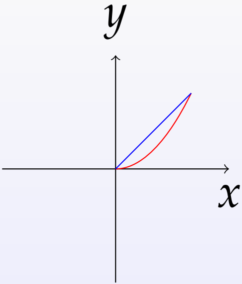
而 $\varphi(x) = x + x^3$，0 处局部不收敛。

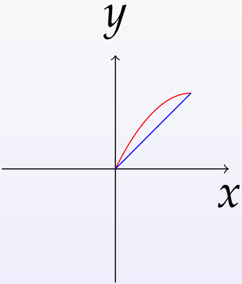
$\varphi(x^*) > 1$，但 φ 有间断点时，有可能局部收敛。



$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & if\ 0 \le x < 1 \\ 0 & if\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

φ 连续时，有可能局部总有初值，收敛到另一个不动点。

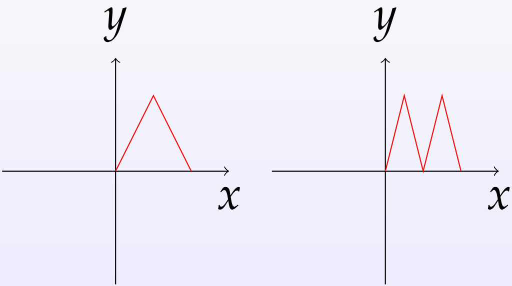




即使实数上不具备局部收敛性，浮点数下还是有可能具备。

例：帐篷函数

$$T(x)=\begin{cases}2x, & if\ 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x, & if\ \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$



T 一顶，T^2 两顶，T^n 是 2^{n-1} 顶帐篷。

若干次原像：横线 $y = x^*$ 与 T^n 交点。
迭代若干次到 x^* 的点是稠密的。
T^n 的不动点：直线 $y = x$ 与 T^n 交点。
包含 n 周期点。均不稳定。
T 不动点：0，$\frac{2}{3}$。
二进制有限小数，迭代若干次到 0。
浮点计算，迭代若干次到 0。
很多点，迭代若干次到 $\frac{2}{3}$。

T^2 不动点：0，$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{5}$。
2 周期点：$\frac{2}{5}$，$\frac{4}{5}$。
$\cdots$
T 具有混沌性质：
(1) 周期点稠密；
(2) 任给两个区域，存在第一个区域的点，经过若干次迭代到达第二个区域。
注：混沌是迭代的一个拓扑性质。如：迭代 $f:[0,1]\to[0,1]$，$f(x)=4x(1-x)$ 也具有混沌性质。