图像处理

第五次作业

姓名：魏子继　　学号：202318019427048

1、Hw23_5_1：什么是线性移不变系统，请利用数学表达式进行定义说明。并进一步说明一旦我们了解了一个线性移不变系统对于单位脉冲的相应，就可以利用卷积计算出任意一个输入信号的系统输出。

解：（1）设系统为S，系统对输入信号$f(x)$将会有相应的输出$g(x)$，即满足$S\{f(x)\} = g(x)$。若一个系统S为线性移不变系统，那么他将满足线性和移不变性两个性质，即满足：

- 线性：

对于输入信号$f_1(x)$和$f_2(x)$，分别有$S\{f_1(x)\} = g_1(x)$，$S\{f_2(x)\} = g_2(x)$。对于线性，下式成立：

$$S\{\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\} = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

- 移不变性：

对于输入信号$f(x)$，有$S\{f(x)\} = g(x)$。对于移不变性，下式成立：

$$S\{f(x - x_0)\} = g(x - x_0)$$

（2）设单位脉冲为$\delta(x)$，将其作为输入信号输入系统S，输出为$h(x)$，即$S\{\delta(x)\} = h(x)$，这个输出$h(x)$就是一个线性移不变系统对于单位脉冲的响应，同时，这个过程具有线性和移不变性。

设输入信号为$f(x)$，输入线性移不变系统后的输出信号为$g(x)$。将该输入信号与单位脉冲连续冲击，得到：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau$$

将该信号输入到线性移不变系统，有：

$$S\{f(x)\} = S\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau\right\}$$

根据线性移不变系统的叠加线性有：

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)S\{\delta(\tau)\}d\tau$$

根据单位脉冲$\delta(x)$的性质有：

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)S\{\delta(x - \tau)\}d\tau$$

根据线性移不变系统的移不变性有：

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(x - \tau)d\tau$$

由此能够看出，上式即是$f(x)$与$h(x)$的卷积

$$= f(x) * h(x)$$

$$= g(x)$$

由以上证明即可看出，当已知一个线性移不变系统对于单位脉冲的响应时，便可以通过这个响应，与任意输入信号进行卷积计算，得到该系统对这个输入信号的输出。

2、 Hw23_5_2：已知一个退化系统的退化函数 H(u,v)， 以及噪声的均值与方差，请描述如何利用约束最小二乘方算法计算出原图像的估计算法。

解：由题意，已知的数据有：观测的退化图像$g(x,y)$，退化函数的频域表达形式$H(u,v)$，噪声的均值m_η^2、噪声的方差σ_η^2。

目标是利用约束最小二乘方法计算原图像的估计表达式$\hat{f}(x,y)$。

利用约束最小二乘算法计算原图像的估计表达的流程如下：

（1） 由已知$g(x,y)$，将其做傅里叶变换，得到观测到的退化图像的频率域表达$G(u,v)$

（2） 由$G(u,v)$与$H(u,v)$计算$\hat{F}(u,v)$，计算公式如下：

$$\hat{F}(u,v) = \left(\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma|P(u,v)|^2}\right)G(u,v)$$

并将该公式记为公式①，同时式中$P(u,v)$是拉普拉斯算子在频率域的表达，其在空间域的表达如下：

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

此时计算得到的$\hat{F}(u,v)$与真实图像相比，存在较大误差，还需利用约束最小二乘方法，对误差进行最小化，从而得到误差较小的真实图像的近似

（3） 根据已知m_η^2与σ_η^2，计算$\|\eta\|^2$，计算公式如下：

$$\|\eta\|^2 = MN\left\|\sigma_\eta^2 + m_\eta^2\right\|$$

将该公式记为公式②，式中 M 和 N 分别代表图像的行数与列数

（4） 记r为噪声估计，r的计算方式为：

$$r = G(u,v) - H(u,v)\hat{F}(u,v)$$

其中，观察此计算公式中变量的关系能够发现，r与$\hat{F}(u,v)$均是γ的函数，即通过调整r，能够达到调整$\hat{F}(u,v)$的目的，也就是说，调整了γ而达到调整$\hat{F}(u,v)$的目的

（5） 引入a，a的计算方式为$a = \|r\|^2 - \|\eta\|^2$

- ◆ 当a大于0时，$\|r\|^2 > \|\eta\|^2$，需减小$\|r\|^2$，以使得噪声估计值与噪声真值尽可能地接近，即需要增大$\hat{F}(u,v)$，这一步等效于减小了公式①中的γ；
- ◆ 当a小于0时，$\|r\|^2 < \|\eta\|^2$，需增大$\|r\|^2$，以使得噪声估计值与噪声真值尽可能地接近，即需要减小$\hat{F}(u,v)$，这一步等效于增大了公式①中的γ；

（6） 重复步骤（5），直至a值很小，达到了停止条件

（7） 由步骤（6）得到了符合要求的$\|r\|^2$，由此能够得到符合要求的$\hat{F}(u,v)$，将其进行反傅里叶变换，即可得到更加接近原图像的估计图像$\hat{f}(x,y)$。