图像处理

第四次作业

姓名：魏子继　　学号：202318019427048

1、Hw23_4_1：对于公式

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum_{(s,\mathbf{t})\in S_{xy}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},\mathbf{t})^{Q+1}}{\sum_{(s,\mathbf{t})\in S_{xy}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},\mathbf{t})^{Q}}$$

给出的逆谐波滤波回答下列问题：
（a）解释为什么当 Q 是正值时滤波对去除“胡椒”噪声有效？
（b）解释为什么当 Q 是负值时滤波对去除“盐”噪声有效？

解：上式可按照如下方式展开：

$$\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$

$$= \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}\, g(s,t)}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$

上式中，当Q确定时，分母项是一个常数，分子项随着所选像素的邻域而不同，即随着s与t的变化而变化。因此，可视作分子项是对所选像素做周围邻域的加权平均，权重即是$g(s,t)^Q$，这个权重是随着Q的变化而变化的。因此，针对不同的Q，有如下分析：

（a）　当$Q > 0$时，$g(s,t)^Q$对$g(s,t)$有增强作用，由于胡椒噪声的灰度值一般为0，取Q次方后对所选像素邻域的加权平均的影响较小，滤波后所选像素的取值与周围像素的灰度值更加接近，因此有利于消除胡椒噪声；

（b）　当$Q < 0$时，$g(s,t)^Q$对$g(s,t)$有削弱作用，由于盐噪声的灰度值一般为255，取Q次方后对所选像素邻域的加权平均影响较小，滤波后所选像素的取值与周围像素的灰度值更加接近，因此有利于消除盐噪声。

2、Hw23_4_2：复习理解课本中最佳陷波滤波器进行图像恢复的过程，请推导出$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$最优解的计算过程，即从公式

$$\frac{\partial \sigma^2(x,y)}{\partial \omega(x,y)} = 0$$

到

$$\omega(x,y) = \frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)} - \overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y) - \overline{\eta}^2(x,y)}$$

的推导过程。

解：由 ppt 中关于最佳陷波滤波器的描述，能够得到：

$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\Big([g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]$$

$$-\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]\Big)^2$$

即将上述$\sigma^2(x,y)$对$\omega(x,y)$求导，并令导数等于0。求导的过程如下：

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial\omega(x,y)}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\omega(x,y)}\Bigg(\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\Big([g(x+s,y+t)\ -\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]^2$$

$$-2\Big([g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]\Big)$$

$$+\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]^2\Big)\Bigg)$$

$$=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\Bigg(\frac{\partial}{\partial\omega(x,y)}\left(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}[g(x+s,y+t)\ -\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]^2\right)$$

$$-\frac{2\partial}{\partial\omega(x,y)}\Bigg(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}[g(x+s,y+t)\ -\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]\,\Big[\overline{g(x,y)}$$

$$-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\Big]\Bigg)+\frac{\partial}{\partial\omega(x,y)}\left(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]^2\right)\Bigg)$$

$$=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\Bigg(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}2\left(-\eta(x+s,y+t)\right)[g(x+s,y+t)$$

$$-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]\Bigg)$$

$$-\frac{2}{(\ 2a+1)(2b+1)}\Bigg(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(-\eta(x+s,y+t)\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]$$

$$+\left(-\overline{\eta(x,y)}\right)[g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)])\Bigg)$$

$$+\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\left(\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}2\left(-\overline{\eta(x,y)}\right)\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]\right)$$

$$=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\big(-2\eta(x+s,y+t)[g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]$$
$$+2\eta(x+s,y+t)\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]$$
$$+2\overline{\eta(x,y)}[g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]$$
$$-2\overline{\eta(x,y)}\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]\big)$$

$$=\frac{2}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\left(\left(\overline{\eta(x,y)}-\eta(x+s,y+t)\right)\right.$$
$$\left.*\left([g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)]-\left[\overline{g(x,y)}-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\right]\right)\right)$$

$$=\frac{2}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\left(\overline{\eta(x,y)}g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)}\eta(x+s,y+t)\right.$$
$$-\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)-\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}-\eta(x+s,y+t)g(x+s,y+t)$$
$$-\omega(x,y)\left(\eta(x+s,y+t)\right)^{2}-\eta(x+s,y+t)\overline{g(x,y)}$$
$$\left.-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)\overline{\eta(x,y)}\right)$$

$$=\frac{2*2a*2b}{(2a+1)(2b+1)}\left(\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)-\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}-\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)\right.$$
$$+\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}-\overline{\eta(x,y)g(x,y)}+\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)^{2}}+\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)$$
$$\left.-\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}\right)$$

$$=\frac{8ab}{(2a+1)(2b+1)}\left(\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)^{2}}-\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}-\overline{\eta(x,y)g(x,y)}\right.$$
$$\left.+\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)\right)$$

令上述求导公式为0，即得到：

$$\omega(x,y)\overline{\eta(x,y)^{2}}-\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}-\overline{\eta(x,y)g(x,y)}+\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)=0$$

$$\omega(x,y)\left(\overline{\eta(x,y)^{2}}-\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}\right)+\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)-\overline{\eta(x,y)g(x,y)}=0$$

$$\omega(x,y)=\frac{\left(\overline{\eta(x,y)}\right)\left(\overline{g(x,y)}\right)-\overline{\eta(x,y)g(x,y)}}{\overline{\eta(x,y)^{2}}-\left(\overline{\eta(x,y)}\right)^{2}}$$

即得到题目中所需证明的$\omega(x,y)$的式子，即完成了题目要求的推导过程。

3、Hw23_4_3：考虑在 x 方向均匀加速导致的图像模糊问题。如果图像在 $t=0$ 静止，并用均匀加速 $x_0(t)=at^2/2$ 加速，对于时间 T，找出模糊函数 H(u, v)，可以假设快门开关时间忽略不计。

解：由课程讲述的 ppt 可知：

$$H(u,v)=\int_0^T \exp\big(-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))\big)\,dt$$

由题意可知$x_0(t)=\frac{1}{2}at^2$，$y_0(t)=0$，代入上式即可得到：

$$H(u,v)=\int_0^T \exp(-j\pi uat^2)\,dt$$

由于该积分无法化简，即得到模糊函数对于时间T的表达式。