数值分析习题提示

第一章 误差

1. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差是多少？

答案：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$\varepsilon_r(V)=\dfrac{\varepsilon(V)}{V}=\dfrac{4\pi R^2\varepsilon(R)}{\dfrac{4}{3}\pi R^3}=3\varepsilon_r(R)$。

球体积要使相对误差限为 1%，R 时允许的相对误差是 $\dfrac{1}{300}=0.003333$。

2. 考虑正弦函数 $\sin x$ 的求值，特别是数据传递误差，即自变量 x 发生扰动 h 时函数值的误差。

(1) 估计 $\sin x$ 的绝对误差。

(2) 估计 $\sin x$ 的相对误差。

(3) 估计这个问题的条件数。

(4) 自变量 x 为何值时，这个问题高度敏感？

答案：(1) $\cos xh$。(2) $\cot xh$。(3) 相对条件数 $x\cot x$。(4) $x=k\pi$，$k\neq 0$ 时，这个问题高度敏感。

注：误差估计与近似值取法有关，要舍去高阶无穷小。如：$\sin(x+h)\approx\sin x+\cos xh$，则误差为 $-\dfrac{1}{2}\sin xh^2$ 等。

3. 设 $Y_0=28$，按递推公式 $Y_n=Y_{n-1}-\dfrac{1}{100}\sqrt{783}$，$(n=1,2,\ldots)$ 计算到 Y_{100}。若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(保留 5 位有效数字)，试问计算 Y_{100} 将有多大误差。

答案：$Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$，$\varepsilon(Y_{100})=\varepsilon(27.982)$(假设 Y_0 无误差)。

Y_{100} 的误差限为 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-3}$。

4. 正方形的边长大约为 $100cm$，问测量时允许多大的误差才能使其面积误差不超过 $1cm^2$。

答案：测量边长的误差应不超过 $0\ 005cm$。

5. 为使近似 $\sin\theta\approx\theta$ 给出的结果能保留 3 位十进制有效数字，问 θ 的取值范围。

答案：只考虑近似值 θ 取 3 位十进制有效数字的情形。相对误差 $\dfrac{\theta^2}{6}$。

不同 3 位有效数字，相对误差限会有所不同。最小者，$\theta=9.99\times 10^k$，误差为 $\theta=0.005\times 10^k$，相对误差限 $\dfrac{1}{1998}\approx\dfrac{1}{2000}$；最大者，$\theta=1.00\times 10^k$，误差为 $\theta=0.005\times 10^k$，相对误差限 $\dfrac{1}{200}$。

相对误差小于 $\dfrac{1}{2000}$，即 $|\theta|\leq 0.05477$，准确有效数字位数达到 3 位。

$\dfrac{1}{2000}\leq\dfrac{\theta^2}{6}\leq\dfrac{1}{200}$ 时，$0.05477\leq|\theta|\leq 0.1732$。

剩下只需讨论第一位有效数字在小数点后第一位和第二位的情形。

再考虑绝对误差限 $\dfrac{|\theta|^3}{6}$：若第一位有效数字在小数点后第一位，则 $\dfrac{|\theta|^3}{6}\leq 0.0005$，$|\theta|^3\leq 0.003$，$0.100\leq|\theta|\leq 0.144$；

若第一位有效数字在小数点后第二位，则 $\dfrac{|\theta|^3}{6}\leq 0.00005$，$|\theta|^3\leq 0.0003$，$|\theta|\leq 0.0669$。

结论：$|\theta|\leq 0.0669$，或 $0.100\leq|\theta|\leq 0.144$。

6. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，开方和对数取 6 位有效数字，计算 $f(30)$ 和 $f(-30)$ 的值。计算过程中尽量避免有效数字的损失。

答案：$f(30)=4.09462$，$f(-30)=-4.09462$。

7. 设 $f(x)=-e^{-2x}+e^x$，对微小的 x 值，x，$3x$，和 $3x(1-x/2)$ 哪个最精确？误差分别是多少？

答案：$-e^{-2x}+e^x=3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+\cdots$，$3x(1-x/2)$ 最精确。$|x|$ 很小时，$3x(1-x/2)-f(x)\approx-\frac{3}{2}x^3$。

8. 若在计算 $y=\sqrt{x^2+1}-1$ 中至多丢失两位精度，该对 x 怎样限制？

答案：抵消现象：$\sqrt{x^2+1}\geq 1.01$。

$x^2\geq 0.0201$；或 $1+\frac{1}{2}x^2\geq 1.01$，$x^2\geq 0.02$。

上机题

1. 编程观察无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的求和计算。

(1) 采用 IEEE 单精度浮点数，观察当 n 为何值时求和结果不再变化，将它与理论分析的结论进行比较 (注：在 MATLAB 中可用 single 命令将变量转成单精度浮点数)。

(2) 用 IEEE 双精度浮点数计算 (1) 中前 n 项的和，评估 IEEE 单精度浮点数计算结果的误差。

答案：

```
format long
s = single(0); u = single(1); t = 0;
k = 1;
while u ~= s
u = s;
s = s + 1/k; t = t + 1/k;
k = k+1;
end
k - 1
s - t
```

这里单精度浮点数的和为 $s=15.404$，双精度浮点数的和为 $t=15.133$。误差 $s-t=0.27038$。$s+1/2^{21}==s$ 的逻辑值是 1，即单精度求和不再变化。

2. 编写程序，按 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ 计算常数 e，即自然对数的底，具体地，对 $n=10^k(k=1,2,\ldots,20)$，计算 $(1+1/n)^n$。将结果与 exp(1) 比较，确定近似值的误差。误差是否随 n 的增加而降低？用 MATLAB 画出误差的变化趋势曲线，作出解释。

提示：n 越大，截断误差越小，舍入误差越大。

```
k=1:20;
n=10.^k;
x=(1+1./n).^n-exp(1);
plot(x)
```

第二章 方程求根

1. 为求方程 x^3-x^2-1 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

(1) $x=1+1/x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2$；

(2) $x^3=1+x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

(3) $x^2=1/(x-1)$，迭代公式 $x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根。

答案：在有根区间 $[1.4, 1.6]$ 内，(1) 和 (2) 的 $|\varphi'(x)| < 1$，收敛；(3) 的 $|\varphi'(x)| > 1$，实数下，$x_7 = 0.880204$，迭代无法进行下去。

复数下，平方根取右半平面，迭代数列的奇数项和偶数项各自收敛到 $x^2 - x + 1$ 的两个根。

近似根 1.466。

2. 研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式 $x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{a}{x_k}\right)$，$x_0 > 0$，证明对一切 $k = 1, 2, \ldots$，$x_k \geq \sqrt{a}$ 且序列 $x_1, x_2, \ldots$ 是递减的。

答案：$x_{k+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2x_k}\left(x_k - \sqrt{a}\right)^2$，得 $x_k \geq \sqrt{a}$。

$x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{2x_k}\left(\sqrt{a} - x_k^2\right) < 0$，序列 $x_1, x_2, \ldots$ 是递减的。

3. 证明迭代公式 $x_{k+1} = \dfrac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的 3 阶方法。假定初值 x_0 充分靠近根 x^*，求 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{a} - x_{k+1})/(\sqrt{a} - x_k)^3$。

答案：$\varphi(x) = \dfrac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$，$\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$。$\varphi'(\sqrt{a}) = \varphi''(\sqrt{a}) = 0$，$\varphi'''(\sqrt{a}) = \dfrac{3}{2a}$。迭代法是 3 阶方法。$\dfrac{e_{k+1}}{e_k^3} \to \dfrac{\varphi'''(\sqrt{a})}{3!} = \dfrac{1}{4a}$。$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3} = \dfrac{1}{4a}$。

4. 用下列方法求 $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根，根的准确值 $x^* = 1.87938524\cdots$，要求计算结果准确到四位有效数字。

(1) 用牛顿法；

(2) 用割线法，取 $x_0 = 2$，$x_1 = 1.9$。

答案：(1) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3}$，$x_2 = 1.879452$。

(2) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - 3x_k - 1}{x_k^3 - 3x_k - x_{k-1}^3 + 3x_{k-1}}(x_k - x_{k-1})$，$x_2 = 1.881094$，$x_3 = 1.881094$，$x_4 = 1.879411$。

5. 用迭代法 $x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k}$，求方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正根 $x^* = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$。取 $x_0 = 1$，问 x_5 具有几位正确的有效数字？

答案：$x^* = 0.618034$，$x_5 = 0.615385$。

上机题

1. 对于方程 $f(x) = x^2 - 3x + 2$，可以有以下多种不动点迭代方式：

$\varphi_1(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$，$\varphi_2(x) = \sqrt{3x - 2}$，$\varphi_3(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$，$\varphi_4(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x - 3}$。

(1) 对于根 $x = 2$，通过分析 $|\varphi_i'(2)|$，$(i = 1, 2, 3, 4)$ 来分析各个算法的收敛特性。

(2) 用程序验证分析的结果。

答案：(1) $\varphi_1'(x) = \dfrac{2x}{3}$，$|\varphi_1'(2)| = \dfrac{4}{3} > 1$，发散；$\varphi_2'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$，$|\varphi_2'(2)| = \dfrac{3}{4} < 1$，收敛；$\varphi_3'(x) = \dfrac{2}{x^2}$，$|\varphi_3'(2)| = \dfrac{1}{2} < 1$，收敛；$\varphi_4'(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{2x - 3}$，$|\varphi_4'(2)| = 0 < 1$，收敛。

(2) φ_1：$x_0 = 3$，$x_1 = 3.6667$，$x_2 = 5.1481$，$\cdots$；φ_2：$x_0 = 3$，$x_1 = 2.6458$，$x_2 = 2.4366$，$\cdots$；φ_3：$x_0 = 3$，$x_1 = 2.3333$，$x_2 = 2.1429$，$\cdots$；φ_4：$x_0 = 3$，$x_1 = 2.3333$，$x_2 = 2.0667$，$\cdots$。

2. 考虑 $p(x) = (x - 1)\cdots(x - 10) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^{10}$，考虑扰动方程 $p(x) + \varepsilon = 0$。

(1) 求系数 $a_0, a_1, \ldots, a_9$；

(2) 取 $\varepsilon = 10^{-6}$，$\varepsilon = 10^{-8}$，$\varepsilon = 10^{-10}$，分析 ε 对根的影响。

提示：设根是 x^*，则条件数是 $1/|p'(x^*)|$。十个根的条件数都很小。加上系数都是双精度浮点数，影响应该很小。

其他扰动，如：$p(x)+\varepsilon g(x)=0$，则 $x-x^* \approx -\dfrac{p(x^*)+\varepsilon g(x^*)}{p'(x^*)+\varepsilon g'(x^*)} \approx -\varepsilon \dfrac{g(x^*)}{p'(x^*)}$。

取 $g=x^{10}$，条件数会很大。同学们可试验观察对各根的影响。