图像处理

第七次作业

姓名：魏子继　　学号：202318019427048

1、 Hw23_7_1：$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{b}$是 RGB 彩色空间沿 R,G,B 轴的单位向量，定义向量：

$$\mathbf{u}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{r}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{b}$$

和

$$\mathbf{v}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{r}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{g}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{g_{xx}}, \boldsymbol{g_{yy}}, \boldsymbol{g_{xy}}$定义为这些向量的点乘：

$$\boldsymbol{g_{xx}}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{u}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2+\left|\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2+\left|\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2$$

$$\boldsymbol{g_{yy}}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{v}=\left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|^2+\left|\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|^2+\left|\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|^2$$

$$\boldsymbol{g_{xy}}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{v}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{y}}$$

推导出最大变换率方向$\boldsymbol{\theta}$和$(\mathbf{x},\mathbf{y})$点在$\boldsymbol{\theta}$方向上变化率的值$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$。

解：设函数是f，则变换率方向便是f关于θ的导数，即为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l_\theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\&=u\cos\theta+v\sin\theta\end{aligned}$$

题目的要是是求$\frac{\partial f}{\partial l_\theta}$的最大值，可以等价于求他平方的最大值，即：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial l_\theta}\right)^2&=(u\cos\theta+v\sin\theta)^2\\&=u^2\cos^2\theta+v^2\sin^2\theta+2uv\cos\theta\sin\theta\\&=g_{xx}\cos^2\theta+g_{yy}\sin^2\theta+2g_{xy}\cos\theta\sin\theta\\&=\frac{1}{2}g_{xx}(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}g_{yy}(1-\cos 2\theta)+g_{xy}\sin 2\theta\end{aligned}$$

即可设$\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial l_\theta}\right)^2$，那么当$\varphi$对$\theta$的导数值为0时，即可求得变换率方向的最大值：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-g_{xx}\sin 2\theta+g_{yy}\sin 2\theta+2g_{xy}\cos 2\theta=0$$

即可求得此时：

$$\tan 2\theta=\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}$$

即：

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2g_{xy}}{g_{xx} - g_{yy}}\right)$$

此时，在θ方向上变化率的值$F(\theta)$为：

$$F(\theta) = \left(\frac{1}{2}g_{xx}(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2}g_{yy}(1-\cos 2\theta) + g_{xy}\sin 2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\left[\left(g_{xx}+g_{yy}\right) + \left(g_{xx}-g_{yy}\right)\cos 2\theta + sg_{xy}\sin 2\theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

综上，可得最大变化率方向θ为：

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2g_{xy}}{g_{xx} - g_{yy}}\right)$$

点(x,y)在θ方向上变化率的值为：

$$F(\theta) = \left\{\frac{1}{2}\left[\left(g_{xx}+g_{yy}\right) + \left(g_{xx}-g_{yy}\right)\cos 2\theta + sg_{xy}\sin 2\theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

2、Hw23_7_2：请根据课本中 Z 变换的定义，证明如下结论。

(1) 若 $\mathbf{x(n)}$的 Z 变换为 $\mathbf{X(z)}$，则$(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}\mathbf{x(n)}$ 的 Z 变换为 $\mathbf{X(-z)}$

(2) 若 $\mathbf{x(n)}$的 Z 变换为$\mathbf{X(z)}$，$\mathbf{x(-n)}$ 的 Z 变换为$\mathbf{X(\frac{1}{z})}$

(3) 若 $\mathbf{x(n)}$的 Z 变换为$\mathbf{X(z)}$，课本 280 页公式 7.1.2

$$x_{\mathrm{down}}(n) = x(2n) \Leftrightarrow X_{\mathrm{down}}(z) = \frac{1}{2}\left[X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})\right] \quad (7.1.2)$$

解：若$x(n)$的 Z 变换为$X(z)$，则有：

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

（1） 对$(-1)^n x(n)$进行 Z 变换，则有：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x(n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{-n}x(n)z^{-n}$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)(-z)^{-n}$$
$$= X(-z)$$

即$(-1)^n x(n)$的 Z 变换为$X(-z)$

（2） 对$x(-n)$进行 Z 变换，则有：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}x(-n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty}x(n')z^{n'}$$

其中$n' = -n$，则有：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n')z^{n'} = \sum_{-\infty}^{+\infty}x(n')\left(\frac{1}{z}\right)^{-n'} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

即$x(-n)$的 Z 变换为$X\left(\frac{1}{z}\right)$

（3） 证明式 7.1.2 成立的关键是证明$x(2n)$的 Z 变换为$\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$。

对$x(2n)$进行 Z 变换，则有：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}x(2n)z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(m)z^{-\frac{1}{2}m}$$

其中$m=2n$。显然，无论n的取值，m均为偶数，因此进一步有：

$$x(m)=\frac{1}{2}(1+(-1)^m)x(m)$$

将此式代入上述关于$x(m)$的 Z 变换公式则有：

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(1+(-1)^m)x(m)z^{-\frac{1}{2}m}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}x(m)z^{-\frac{1}{2}m}+\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m x(m)z^{-\frac{1}{2}m}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}x(m)\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{-m}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m x(m)\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{-m}\\&=\frac{1}{2}X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

即可得到$x(2n)$的 Z 变换为$\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

即可证明$x_{down}(n)=x(2n)\Leftrightarrow X_{down}(z)=\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

3、Hw23_7_3：对于一幅给定的大小为$N\times N, N=2^n, n\in Z^+$的图像$f(x,y)$，请描述如何建立该图像的高斯金字塔与拉普拉斯金字塔。

解：建立该图像的高斯金字塔与拉普拉斯金字塔的流程如下：

（1）　对输入图像使用高斯低通滤波器进行滤波，随后对滤波后的图像进行下采样，如以步长为 2 进行抽样（去除图像中的偶数行和偶数列）。该步骤如若迭代进行，能够得到n级、$n-1$级、$n-2$级…1级的高斯金字塔；

（2）　对高斯金字塔中，除了原始图像的其他级图像，进行因子为2内插上采样，并进行滤波，得到与各级输入等分辨率的预测图像。如对于由第（1）步得来的第$n-1$级高斯金字塔中的图像，对其可以在每个方向扩大为原来图像的两倍，新增的行与列均以0填充，随后使用与第一步相同的高斯卷积核乘以4对其进行滤波，最终得到与n级图像等分辨率的上采样图像；

（3）　计算各级第（2）步预测值与第（1）步输入之间的差异，得到的各级残差图像即可组成拉普拉斯金字塔。如将第（2）步中得到的与n级图像等分辨率的上采样图像与高斯金字塔中的第n级图像做差，得到的残差图像，是拉普拉斯金字塔的第n级图像。

总得来说，建立高斯图像金字塔的过程是对图像不断进行高斯低通滤波后下采样的结果；随后将下采样得到的图像进行上采样并用与高斯低通滤波相同的卷积核乘以4组成的新卷积核进行滤波，得到的预测图像和高斯滤波、下采样之前的原始输入图像（高斯金字塔中等分辨率的图像）作差，得到的残差图像组成的金字塔便是拉普拉斯金字塔。

4、Hw23_7_4：完美重建滤波器的双正交性的数学定义是什么？请证明其中的第二个式子与课本中第四个式子。

解：（1）完美重建滤波器的双正交性的数学定义如下：

$$<g_i(k),h_j(2n-k)>=\delta(i-j)\delta(n)\quad i,j=\{0,1\}$$

i与j是内积中滤波器项的序号，当序号相同时，内积为1；当序号不同时，内积为0，即二者正交。双正交性即是指所有两个频带、实系数、完美建设滤波器组的脉冲响应的分析与合成都受到双正交性的约束。

（2）双正交性的第二个式子是指：

$$< g_1(k), h_1(2n-k) >= \delta(n)$$

双正交性的第四个式子是指：

$$< g_1(k), h_0(2n-k) >= 0$$

同时，有组成完美重建滤波器的分析与合成滤波器之间的关系：

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \frac{2}{\det(\boldsymbol{H_m}(z))} \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{H_m}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$，并不难看出$\det(\boldsymbol{H_m}(z)) = -\det(\boldsymbol{H_m}(-z))$

还有组成完美重建滤波器的条件：

$$\begin{cases} H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0 \\ H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = 2 \end{cases}$$

上述式子的陈列均有助于该题目的证明。

- 首先进行第二个式子的证明。由分析与合成滤波器之间的关系可得：

$$H_1(z)G_1(z) = \frac{-2}{\det\left(\boldsymbol{H_m}(z)\right)} H_0(-z)H_1(z)$$

$$H_0(z)G_0(z) = \frac{2}{\det\left(\boldsymbol{H_m}(z)\right)} H_0(z)H_1(-z)$$

则不难看出，$H_0(z)G_0(z) = H_1(-z)G_1(-z)$。将该等式关系代入完美重建滤波器的第二个条件可得：

$$H_1(z)G_1(z) + H_1(-z)G_1(-z) = 2$$

将上式进行反 Z 变换，其中利用 Z 变换的性质$X(-z) \Leftrightarrow (-1)^n x(n)$可得：

$$\sum_k g_1(k)h_1(n-k) + (-1)^n \sum_k g_1(k)h_1(n-k) = 2\delta(n)$$

能够看出，当n为奇数时，等号左边相互抵消，因此只取n为偶数的情况。则将$2n$代替n代入上式即有：

$$2\sum_k g_1(k)h_1(2n-k) = 2\delta(2n) = 2\delta(n)$$

则可证明：

$$\sum_k g_1(k)h_1(2n-k) =< g_1(k), h_1(2n-k) >= \delta(n)$$

- 其次进行第四个式子的证明。由分析与合成滤波器之间的关系可得：

$$H_0(z)G_1(z) = \frac{-2}{\det\left(\boldsymbol{H_m}(z)\right)} H_0(-z)H_0(z)$$

$$H_0(-z)G_1(-z) = \frac{-2}{\det\left(\boldsymbol{H_m}(-z)\right)} H_0(z)H_0(-z)$$

$$= \frac{2}{\det\left(\boldsymbol{H_m}(z)\right)} H_0(z)H_0(-z)$$

由此能够看出，$H_0(z)G_1(z)$与$H_0(-z)G_1(-z)$互为相反数，即：

$$H_0(z)G_1(z) + H_0(-z)G_1(-z) = 0$$

将上式进行反 Z 变换，其中利用 Z 变换的性质$X(-z) \Leftrightarrow (-1)^n x(n)$可得：

$$\sum_k g_1(k)h_0(n-k) + (-1)^n \sum_k g_1(k)h_0(n-k) = 0$$

能够看出，当n为奇数时，等号左边相互抵消，因此只取n为偶数的情况。则将$2n$代替n

代入上式即有：

$$2\sum_{k} g_1(k)h_0(2n-k)=0$$

则可证明：

$$\sum_{k} g_1(k)h_0(2n-k)=< g_1(k),h_0(2n-k) >= 0$$

综上，即证明了双正交性的第二个式子与第四个式子成立。

5、 Hw23_7_5：若$\mathbf{G_1(z)=-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})}$成立，请证明：

$$\mathbf{g_1(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)}$$

解：为证明方便，首先证明 Z 变换的三个性质：

- 平移性：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k)z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k)z^{-n}z^{-k}z^{k}$$

$$=z^{-k}\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k)z^{-(n-k)}$$

$$=z^{-k}X(z)$$

- 时间翻转性：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(-n)z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(-n)(z^{-1})^{-(-n)}=X(z^{-1})$$

- Z 域翻转性：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x(n)z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)(-z)^{-n}=X(-z)$$

随后，即可对题目的公式进行证明。显然，等式的左边$G_1(z)\Leftrightarrow g_1(n)$是自然成立的，因此证明题目的公式成立，即是证明$-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})\Leftrightarrow(-1)^n g_0(2K-1-n)$成立。由 Z 变换的时间翻转性与平移性可得：

$$g_0(-n)\Leftrightarrow G_0(z^{-1})$$
$$g_0(n-k)\Leftrightarrow z^{-k}G_0(z)$$

因此：

$$g_0\big(-(n-2K+1)\big)\Leftrightarrow z^{-2K+1}G_0(z^{-1})$$

再由 Z 域的翻转性可得：

$$\begin{aligned}(-1)^n g_0(-n+2K-1)&\Leftrightarrow(-z)^{-2K+1}G_0((-z)^{-1})\\&\Leftrightarrow(-1)^{-2K+1}z^{-2K+1}G_0((-1)^{-1}z^{-1})\\&\Leftrightarrow -z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})\end{aligned}$$

即证明了$-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})\Leftrightarrow(-1)^n g_0(2K-1-n)$成立。

因此，由$G_1(z)=-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$，能够得到$g_1(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)$。

6、 Hw23_7_6：假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导$\boldsymbol{h_0}$与$\boldsymbol{h_1}$的关系。

解：如题，完美重建滤波器的正交族的关系如下：

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n) \tag{1}$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n) \tag{2}$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} g_0(2K-1-n) \tag{3}$$

将式(1)、式(2)代入式(3)得：

$$(-1)^{n+1} h_0(n) = (-1)^{n+1}(-1)^{2K-1-n} h_1(2K-1-n)$$

即：

$$h_0(n) = (-1)^{2K-1-n} h_1(2K-1-n)$$

即：

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(2K-1-n)$$

即可得到h_0与h_1之间的关系。

其次，完美重建滤波器的正交族还有一种关系如下：

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n) \tag{4}$$
$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n) \tag{5}$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} g_0(2K-1-n) \tag{6}$$

将式(4)、式(5)代入式(6)得：

$$(-1)^n h_0(n) = (-1)^{n+1}(-1)^{2K-1-n+1} h_1(2K-1-n)$$

即：

$$h_0(n) = (-1)^{2K-n+1} h_1(2K-1-n)$$

即：

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(2K-1-n)$$

即可看出，两个关系得到的结论是一样的。因此：

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(2K-1-n)$$

7、 Hw23_7_7：题目如下图：

7. 哈尔变换可以用矩阵的形式表示为：

$$\mathrm{T} = \mathrm{HFH}^{\mathrm{T}}$$

其中，F是一个$\mathrm{N} \times \mathrm{N}$的图像矩阵，H是$\mathrm{N} \times \mathrm{N}$变换矩阵，T是$\mathrm{N} \times \mathrm{N}$变换结果。对于哈尔变换，变换矩阵H包含基函数$\mathrm{h_k(z)}$，它们定义在连续闭区间$\mathrm{z} \in [0,1]$，$\mathrm{k} = 0,1,2 \cdots \mathrm{N}-1$，其中$\mathrm{N} = 2^{\mathrm{n}}$。为了生成矩阵，定义整数k，即$\mathrm{k} = 2^{\mathrm{p}} + \mathrm{q} - 1$（这里$0 \le \mathrm{p} \le \mathrm{n}-1$，当 p=0 时 q=0，或 1；当$\mathrm{p} \ne 0$时，$1 \le \mathrm{q} \le 2^{\mathrm{p}}$）。可得哈尔基函数为：

$$\mathrm{h_0(z)} = \mathrm{h_{00}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}, \mathrm{z} \in [0,1]$$

且$$\mathrm{h_k(z)} = \mathrm{h_{pq}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\begin{cases} 2^{\frac{p}{2}}, (\mathrm{q}-1)/2^{\mathrm{p}} \le \mathrm{z} < (q-0.5)/2^{\mathrm{p}} \\ -2^{\frac{p}{2}}, (\mathrm{q}-0.5)/2^{\mathrm{p}} \le \mathrm{z} < q/2^{\mathrm{p}} \\ 0, \text{其它}，\mathrm{z} \in [0,1] \end{cases}$$

N×N 哈尔变换矩阵的第i行包含了元素$\mathrm{h_i(z)}$，其中$\mathrm{z} = \frac{0}{\mathrm{N}}, \frac{1}{\mathrm{N}}, \cdots (\mathrm{N}-1)/\mathrm{N}$。计算当$\mathrm{N} = 16$时的$\mathrm{H_{16}}$矩阵。

解：由上述公式以及哈尔变换公式的定义可知，当$N = 16$时，k的取值范围是0到15。因此，依据公式$k = 2^p + q - 1$能够得：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
q	0	1	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8

因此，根据公式计算$h_k(z) = h_{pq}(z)$能够得到哈尔变换矩阵H_{16}：

$$H_{16} = \frac{1}{\sqrt{16}}\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\
2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}
\end{bmatrix}$$