数值分析习题提示

第六章 插值法

1. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\dots,2^7]$，$f[2^0,2^1,\dots,2^8]$ 及 $f[1,1,1,1,1]$。

答案：$f[2^0,2^1,\dots,2^7]=1$，$f[2^0,2^1,\dots,2^8]=0$，$f[1,1,1,1,1]=\dfrac{f^4(1)}{4!}=36$。

2. 用插值基和广义差商表两种方法求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$。

答案：$P(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$。

插值基：$L_{00}(x)=-0.5(x-1)^2(x-2)-1.25x(x-1)^2(x-2)$，$L_{01}(x)=-0.5x(x-1)^2(x-2)$，$L_{10}(x)=-x^2(x-2)+x^2(x-1)(x-2)$，$L_{11}(x)=-x^2(x-1)(x-2)$，$L_{20}(x)=0.25x^2(x-1)^2$。

$P(x)=L_{10}(x)+L_{11}(x)+L_{20}(x)$。

广义差商表：

0	0				
0	0	0			
1	1	1	1		
1	1	1	0	-1	
2	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$P(x)=x^2-x^2(x-1)+\dfrac{1}{4}x^2(x-1)^2$。

3. 已知函数 $f(x)$ 充分光滑，求满足插值条件 $P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2)$ 及 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 的插值基多项式 L_{ik}，并写出余项公式。

答案：$L_{00}(x)=\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2\left(\dfrac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)$，$L_{20}(x)=\left(\dfrac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2$，

$L_{11}(x)=(x-x_1)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)$，

$L_{10}(x)=\left(1-\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}-\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)$。

4. 求 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

答案：当 $x\in[x_j,x_{j+1}]$ 时，$I_h(x)=(x_j+x_{j+1})x-x_jx_{j+1}$。$M_2=2$。$R_2\le\dfrac{M_2}{8}h^2=\dfrac{1}{4}h^2$。

5. 求 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上的分段埃尔米特插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

答案：当 $x\in[x_j,x_{j+1}]$ 时，$I_h(x)=\dfrac{x_j^4}{h^3}(x-x_{j+1})^2(h+2x-2x_j)+\dfrac{x_{j+1}^4}{h^3}(x-x_j)^2(h-2x+2x_{j+1})+\dfrac{4x_j^3}{h^2}(x-x_{j+1})^2(x-x_j)+\dfrac{4x_{j+1}^3}{h^2}(x-x_j)^2(x-x_{j+1})$。$M_2=2$。$R_4\le\dfrac{M_4}{384}h^4=\dfrac{1}{16}h^4$。

上机题

1. 对 $[-5,5]$ 作等距划分，$x_i=-5+ih$，$h=\dfrac{10}{n}(i=0,1,\dots,n)$ 并对 Runge 给出的函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$，取 $n=10,20$ 作拉格朗日插值 $L_{10}(x)$ 与 $L_{20}(x)$，考察在 $x=4.8$ 处的误差。

答案：$n=20$ 时误差较大。

```
n = 10;
d = 10/n;
x = -5:d:5;
y = 1./(1+x.^2);
p = polyfit(x,y,n);
a = polyval(p,4.8)-1/(1+4.8^2)
```

第七章 数值积分和数值微分

1. 确定下面求积公式中的待定系数或积分节点的待定值，使其代数精度尽量高，并指出所构造的求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$。

(3) $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0) + B_1 f'(1)$。

答案：(1) 用 $f = 1, x, x^2$ 代入两边，解待定系数，得 $8/3h, -4/3h, 8/3h$。

再 $f = x^3$ 代入两边，等式成立；$f = x^4$ 代入两边，等式不成立。3 次代数精度。

(2) 用 $f = 1, x, x^2$ 代入两边，得方程组 $2x_1 + 3x_2 = 1$，$2x_1^2 + 3x_2^2 = 1$。两组解 $x_1 = -0.2899$，$x_2 = 0.5266$；$x_1 = 0.6899$，$x_2 = -0.1266$。

再 $f = x^3$ 代入两边，等式不成立。2 次代数精度。

(3) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{12}f'(0) - \frac{1}{12}f'(1)$。3 次代数精度。

2. 证明下列等式，它们分别说明下列三种矩形求积公式及其余项

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，$\eta \in (a,b)$；

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，$\eta \in (a,b)$；

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$，$\eta \in (a,b)$。

答案：$\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx = \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，$\int_a^b f'(\xi)(x-b)dx = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$，

$\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$。

3. 对下列积分，分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算，其中 n 表示计算中是用 $n+1$ 个区间等分点上的函数值，然后比较两种计算结果的准确度。

(1) $\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx$，$n = 8$；

(2) $\int_0^9 \sqrt{x}dx$，$n = 4$。

答案：(1) $T_8 = 0.11140235452955$，$S_4 = 0.11157238253891$。

(2) $T_4 = 17.368642248554156$，$S_2 = 17.726209149399413$。

上机题

1. 用复合 Simpson 公式计算圆周率 $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$，要求绝对误差限小于 $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$，试根据积分余项估计步长 h 的取值范围。按要求选择一个步长进行计算，观察数值结果与误差要求是否相符。

答案：$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$，$f^{(4)}(x) = \frac{96}{(x^2+1)^3} - \frac{1152x^2}{(x^2+1)^4} + \frac{1536x^4}{(x^2+1)^5} = \frac{96(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2+1)^5}$，由于 $|5x^4 - 10x^2 + 1| \le 10x^4 + 5x^2 + 1 \le (x^2+1)^5$，$M_4 = 96$。

解不等式 $\frac{1}{2880} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^4 \cdot 96 < \frac{1}{2} \times 10^{-8}$，即 $n^4 > \frac{1}{15} \times 10^8$。因此 $n \ge 51$。

数值结果与误差要求相符，精确度远超于估计。

也可以用数值方法求出最大值 M_4：

```
f4 = @(x) 96./(x.^2+1).^3 - 1152*x.^2./(x.^2+1).^4 + 1536*x.^4./(x.^2+1).^5;
t = 0:0.01:1;
a = f4(t);
M = max(a)

n = 51;
d = 1/(2*n);
x = 0:d:1;
y = 4./(1+x.^2);
I = (y(1)+2*sum(y(3:2:(2*n-1)))+4*sum(y(2:2:(2*n)))+y(2*n+1))*(1/n/6);
abs(I-pi)
```