数值分析（电子与通信类）

第二次作业

姓名：魏子继　学号：202318019427048

一、Ch3：4

4. 采用部分主元高斯消去法对矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$$

进行 LU 分解，写出矩阵 L、U 和 P。

解：（1）对A进行 LU 分解：

将A存储为二维数组$\mathbb{A}$，并设$p=[1,2,3]$. 交换第一行、第三行得到：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3&5&6\\2&4&5\\1&2&3\end{bmatrix},p=[3,2,1]$$

利用第一行，将第二行、第三行的第一项化为0，即第二行加上$m_{21}=-\frac{2}{3}$倍的第一行，第三行加上$m_{31}=-\frac{1}{3}$倍的第一行，能够得到：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3&5&6\\0&2/3&1\\0&1/3&1\end{bmatrix}$$

随后，再将m_{21}与m_{31}以相反数填入能够得到：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3&5&6\\2/3&2/3&1\\1/3&1/3&1\end{bmatrix},p=[3,2,1]$$

随后，重复上述步骤，直至将除了第一行之外都处理。此时不用交换，利用第二行将第三行第二列消为 0 得：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3&5&6\\2/3&2/3&1\\1/3&0&1/2\end{bmatrix},m_{32}=-\frac{1}{2}$$

填入相反数得：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3&5&6\\2/3&2/3&1\\1/3&1/2&1/2\end{bmatrix},p=[3,2,1]$$

由此，可得A矩阵的 LU 分解为：

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2/3&1&0\\1/3&1/2&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}3&5&6\\0&2/3&1\\0&0&1/2\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

（2）对B进行 LU 分解：

交换第一行、第三行得到：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\2&2&2&3\\2&1&1&2\\0&0&6&-1\end{bmatrix},p=[3,2,1,4]$$

利用第一行，将第二行、第三行的第一列化为 0 得到：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\0&1&0&3/2\\0&0&-1&1/2\\0&0&6&-1\end{bmatrix},m_{21}=-\frac{1}{2},m_{31}=-\frac{1}{2}$$

以相反数填入得：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\1/2&0&-1&1/2\\0&0&6&-1\end{bmatrix},p=[3,2,1,4]$$

交换第三行、第四行得到：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\1/2&0&-1&1/2\end{bmatrix},p=[3,2,4,1]$$

利用第三行，将第四行的第三列化为 0 得：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\1/2&0&0&1/3\end{bmatrix},m_{43}=\frac{1}{6}$$

以相反数填入得：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\1/2&0&-1/6&1/3\end{bmatrix},p=[3,2,4,1]$$

由此，可得B矩阵的 LU 分解为：

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1/2&1&0&0\\0&0&1&0\\1/2&0&-1/6&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\0&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\0&0&0&1/3\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

二、Ch3：6

6. 下列矩阵能否分解为 LU(其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵)？若能分解，那么分解是否唯一？

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}。$$

解：（1）判断A矩阵是否能够 LU 分解。经判断，A不能进行 LU 分解。

首先，计算A的前两个顺序主子式，易得$|D|_1=1$，即第一个顺序主子式不为 0。计算第二个顺序主子式：

$$|D|_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4-4=0$$

因此，A不存在唯一的 LU 分解。则A不存在 LU 分解或A存在无数个 LU 分解。

进一步判断，若利用第一行，将A的第二行、第三行的第一列元素化为0，则能够得到：

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&-5\\0&-2&-5\end{bmatrix}$$

能够看到，此时A的第二行第二列元素为0，第三行第二列的元素不为0，这意味着无论对第二行怎样变换，都无法将第三行第二列的元素化为 0，即已无法继续进行 LU 分解。因此，A不能进行 LU 分解。

（2）判断B矩阵是否能够 LU 分解。经判断，B存在无穷多种 LU 分解。

首先，计算B的前两个顺序主子式，易得$|D|_1=1$，即第一个顺序主子式不为 0。计算第二个顺序主子式：

$$|D|_2=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=2-2=0$$

因此，B不存在唯一的 LU 分解。则B不存在 LU 分解或B存在无数个 LU 分解。

进一步判断，若利用第一行，将B的第二行、第三行的第一列元素化为0，则能够得到：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

能够看到，此时B的第二行第二列元素为0，第三行第二列的元素也为0，这意味着无论对第二行怎样变换，都能够将第三行第二列的元素化为 0，即能够将B矩阵化为：

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&-2+a\end{bmatrix}$$

这样，能够看出，a取任何实数，都是符合 LU 分解条件的。因此，B矩阵存在无穷多种 LU 分解。

综上，A矩阵不能进行 LU 分解，B矩阵存在无穷多种 LU 分解。

三、Ch3：上机题

上机题

1. 编写程序生成 Hilbert 矩阵 H_n，以及 n 维向量 $b = H_n x$，其中，x 为所有分量都是 1 的向量。用 Cholesky 分解算法求解方程 $H_n x = b$，得到近似解 $\hat{x}$，计算残差 $r = b - H_n\hat{x}$ 和 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 ∞-范数。

(1) 设 $n = 10$，计算 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$。

(2) 在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组，观察残差和误差的变化情况。

(3) 改变 n 的值为 8 和 12，求解相应的方程，观察 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况。通过这个实验说明了什么问题？

解：（1）由题意，利用 Matlab 软件，编写代码生成 Hilbert 矩阵H_n与对应的 n 维向量b，其中b由$H_n x$得到，其中x为分量为 1 的向量，即b的每一行元素为 Hilbert 矩阵H_n的每一行元素之和。随后，将x认为是待求解量，利用 Matlab 软件，编写代码使用 Cholesky 分解方法求解方程组$H_n x = b$的解，求解的结果为：

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.9999 \\ 1.0003 \\ 0.9995 \\ 1.0005 \\ 0.9997 \\ 1.0001 \end{bmatrix}$$

由此，能够计算求解残差的无穷范数为：

$$\begin{aligned} \|r\|_\infty &= \|b - H_n\hat{x}\|_\infty \\ &= 4.4409e - 16 \end{aligned}$$

同样地，能够计算求解误差的无穷范数为：

$$\begin{aligned} \|\Delta x\|_\infty &= \|\hat{x} - x\|_\infty \\ &= 5.4929e - 04 \end{aligned}$$

（2）依题意，得到新的 b 向量为：

$$b_{new} = b + 10^{-7}$$

重复上述利用 Choleshy 分解的上三角矩阵求解线性方程组解的方法，能够解出增加扰动后的新的解为：

$$\hat{x}_{new} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 0.9762 \\ 1.2402 \\ -0.2611 \\ 4.7833 \\ -5.7259 \\ 8.0005 \\ -2.9378 \\ 1.9237 \end{bmatrix}$$

随后，能够计算增加扰动后，解的残差的无穷范数为：

$$\|r_{new}\|_\infty = \|b_{new} - H_n\hat{x}_{new}\|_\infty = 4.4409e - 16$$

同样地，能够计算增加扰动后，解的误差的无穷范数为：

$$\|\Delta x_{new}\|_\infty = \|\hat{x}_{new} - x\|_\infty = 7.0005$$

观察$\|r\|_\infty$与$\|r_{new}\|_\infty$能够看出，增加10^{-7}量级的扰动后，解的残差几乎没有变化；观察$\|\Delta x\|_\infty$与$\|\Delta x_{new}\|_\infty$能够看出，增加$10^{-7}$量级的扰动后，误差变化剧烈，无穷范数值增加了近千倍。这说明利用 Cholesky 分解法求解 Hilbert 矩阵为系数的线性方程组时，解的误差对扰动敏感。

（3）重复上述步骤，求解利用 Cholesky 分解矩阵求解不同维度的 Hilebrt 矩阵为系数的线性方程组。分别求解$n = 8$与$n = 12$时的残差与误差，。利用 Matlab 软件能够解出：

n	$\|r\|_\infty$	$\|\Delta x\|_\infty$
8	$4.4409e - 16$	$5.9785e - 07$
12	$4.4409e - 16$	0.3701

同时对比$n = 10$时求解的$\|r\|_\infty$与$\|\Delta x\|_\infty$能够看出，残差基本没变，但$\|\Delta x\|_\infty$随着n的增大而增大，并且是指数级别的增大。这说明了，利用 Cholesky 分解法求解 Hilbert 矩阵为系数的线性方程组时，解的误差对 Hilbert 矩阵的维数敏感，换而言之，Hilbert 矩阵是病态的。

MATLAB 代码：（Cholesky.m）

```
clear;clc;
% 数值分析
% 第二次作业
% Ch3-上机题 Cholesky 分解


% 生成 Hilbert 矩阵
n=8;
H=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        H(i,j)=1/(i+j-1);
    end
```

```
end


% 计算 b
x=ones(n,1);
b=H*x;


% Cholesky 分解
C=chol(H);  % C 为上三角矩阵
% C=zeros(n,n);
% % 求第一列
% C(1,1)=sqrt(H(1,1));
% for i=2:n
%     C(i,1)=H(i,1)/C(1,1);
% end
% % 求剩下 L-1 列
% for j=2:n
%     for i=2:n
%         C(j,j)=sqrt(H(j,j)-sum(C(j,1:j-1).^2));
%         if i>j
%             C(i,j)=(H(i,j)-sum(C(i,1:j-1).*C(j,1:j-1)))/C(j,j);
%         end
%     end
% end


% 由 Cholesky 分解的矩阵求解 xhat
y=C'\b;
xhat=C\y;


% 计算残差与误差的无穷范数
rnorm=norm(b-H*xhat,"inf")
deltaxnorm=norm(xhat-x,"inf")
%% 第二问
% 增加扰动
bnew=b+10e-7;
ynew=C'\bnew;
xhatnew=C\ynew;


% 计算新的残差与误差的无穷范数
rnormnew=norm(bnew-H*xhatnew,"inf");
deltaxnormnew=norm(xhatnew-x,"inf");
```

四、Ch4：1

习题：

1. 设方程组：

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20; \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

(1) 考察用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法解此方程组的收敛性；

(2) 取 $x_0 = [0,0,0]^T$，用 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

(3) 用 SOR 方法解上述方程组 (取 $\omega = 0.9$，初始解为 $[0,0,0]^T$)，要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

解：（1）经判断，使用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解此方程组均收敛。判断过程如下：

1. Jacobi 迭代法：

   由题意得，该方程组的系数矩阵A与右端项矩阵b为：

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

依据 Jacobi 迭代法的计算流程，能够将该系数矩阵分裂为D、L、U，它们分别为：

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此，能够将 Jacobi 迭代法的迭代公式以矩阵的形式写出，即：

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x^{(k)} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0.25 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} -2.4 \\ 5 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

可见，该迭代公式中：

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0.25 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} -2.4 \\ 5 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

根据 1 阶定常迭代法基本定理，依据B矩阵的谱半径是否小于 1 能够判断迭代法是否收敛。由此计算B的谱半径：

$$\rho(B) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$$

$$= 0.5061$$

由此看出，谱半径小于 1，因此 Jacobi 迭代法解此方程组收敛。

2. Gauss-Seidel 迭代法：

与判断 Jacobi 迭代法是否收敛的方法同理，首先根据A的分裂矩阵，能够求出矩阵形式的 Gauss-Seidel 迭代公式为：

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

$$= \left(\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\-2 & 3 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}x^{(k)}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\-2 & 3 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-12\\20\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & \text{-0.4} & \text{-0.2}\\0 & \text{-0.1} & \text{-0.55}\\0 & 0.05 & \text{-0.125}\end{bmatrix}x^{(k)} + \begin{bmatrix}\text{-2.4}\\4.4\\2.1\end{bmatrix}$$

可见，该迭代公式中：

$$B = \begin{bmatrix}0 & \text{-0.4} & \text{-0.2}\\0 & \text{-0.1} & \text{-0.55}\\0 & 0.05 & \text{-0.125}\end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix}\text{-2.4}\\4.4\\2.1\end{bmatrix}$$

根据 1 阶定常迭代法基本定理，依据B矩阵的谱半径是否小于 1 能够判断迭代法是否收敛。由此计算B的谱半径：

$$\rho(B) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$$

$$= 0.2$$

由此看出，谱半径小于 1，因此 Jacobi 迭代法解此方程组收敛。

（2）由（1），可分别列出矩阵形式的解此方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss- Seidel 迭代法的迭代公式为：

- Jacobi 迭代法：

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix}0 & \text{-0.4} & \text{-0.2}\\0.25 & 0 & \text{-0.5}\\\text{-0.2} & 0.3 & 0\end{bmatrix}x^{(k)} + \begin{bmatrix}\text{-2.4}\\5\\0.3\end{bmatrix}$$

- Gauss-Seidel 迭代法：

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix}0 & \text{-0.4} & \text{-0.2}\\0 & \text{-0.1} & \text{-0.55}\\0 & 0.05 & \text{-0.125}\end{bmatrix}x^{(k)} + \begin{bmatrix}\text{-2.4}\\4.4\\2.1\end{bmatrix}$$

利用 Matlab 软件，依据两个迭代法的迭代公式、该题目题意中的初始点值与迭代终止条件，能够编写相关代码，迭代求解该方程组。迭代计算的迭代次数和结果如下：

- Jacobi 迭代法：

k	x^k

9	$\begin{bmatrix}-3.9952\\2.99\\1.9972\end{bmatrix}$

- Gauss- Seidel 迭代法：

k	x^k
5	$\begin{bmatrix}-4.0045\\2.9981\\2.0003\end{bmatrix}$

（3）由（1）中，系数矩阵A的分裂矩阵，能够写出 SOR 迭代法迭代公式的矩阵形式为：

$$x^{(k+1)} = (D - wL)^{-1}[(1 - w)D + wU]x^{(k)} + (D - wL)^{-1}wb$$

$$= \begin{bmatrix}0.1 & -0.36 & -0.18\\0.0225 & 0.019 & -0.4905\\-0.0119 & 0.0699 & 0\end{bmatrix}x^{(k)} + \begin{bmatrix}-2.16\\4.014\\1.7426\end{bmatrix}$$

利用 Matlab 软件，依据该迭代公式与题目中所给的初始条件、设置参数和迭代终止，能够编写相关代码，迭代求解该方程组。迭代计算的迭代次数和结果如下：

k	x^k
5	$\begin{bmatrix}-3.9967\\3\\1.9994\end{bmatrix}$

MATLAB 代码：

1. Jacobi 迭代法（Jacobi.m）：

```
clear;clc;
% 数值分析
% 第二次作业
% Ch4-1 Jacobi 迭代计算


D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];
L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];
U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];
b=[-12;20;3];


B=D\(L+U);   % 求迭代公式中的 B
f=D\b;   % 求迭代公式中的 f


[v,lambda]=eig(B);
sqrt(0.1074^2+0.4946^2); % 谱半径


k=1;
```

```
x=zeros(3,2);
x(:,k+1)=B*x(:,1)+f;
disp("------------iter:1--------------")
double(x)
while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02
    k=k+1;
    x(:,k+1)=B*x(:,k)+f;
    disp("------------iter: "+k+"--------------")
    double(x)
end
```

2. Gauss-Seidel 迭代法（Gauss_Seidel.m）：

```
clear;clc;
% 数值分析
% 第二次作业
% Ch4-1 Gauss-Seidel 迭代计算


D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];
L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];
U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];
b=[-12;20;3];


B=(D-L)\U   % 求迭代公式中的 B
f=(D-L)\b   % 求迭代公式中的 f


[v,lambda]=eig(B)
sqrt(0.1125^2+0.1654^2) % 谱半径


k=1;
x=zeros(3,2);
x(:,k+1)=B*x(:,1)+f;
disp("------------iter:1--------------")
double(x)
while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02
    k=k+1;
    x(:,k+1)=B*x(:,k)+f;
    disp("------------iter: "+k+"--------------")
    double(x)
end
```

SOR 迭代法（SOR.m）:

```
clear;clc;
% 数值分析
% 第二次作业
% Ch4-1 SOR 迭代计算


D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];
L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];
U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];
b=[-12;20;3];
w=0.9;


B=(D-w*L)\((1-w)*D+w*U)   % 求迭代公式中的 B
f=(D-w*L)\(w*b)   % 求迭代公式中的 f


k=1;
x=zeros(3,2);
x(:,k+1)=B*x(:,1)+f;
disp("------------iter:1--------------")
double(x)
while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02
    k=k+1;
    x(:,k+1)=B*x(:,k)+f;
    disp("------------iter: "+k+"--------------")
    double(x)
end
```

五、Ch4：5

5. 考虑线性方程组 $Ax=b$，其中
$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 4a & 1\end{bmatrix}$。
(1) 求使 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛的 a 取值范围。
(2) 当 $a\neq 0$ 时，给出两种迭代法收敛速度之比。

解：（1）由题意得，根据对角占优定理，当A为严格对角占优矩阵或不可约对角占优矩阵时，解方程组$Ax=b$的 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。考虑A为严格对角占优矩阵，能够列出该方程组求解a的取值范围：

$$\begin{cases}|1|>|a|\\|1|>|4a|\end{cases}$$

解得：$-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{4}$。由此，可知，当$-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{4}$时，解方程组$Ax=b$的 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。

（2）根据迭代法迭代速度的计算方式可知，需要首先计算迭代法迭代公式中系数矩阵的谱半径。由题意，对A分裂为对应的矩阵D、L、U：

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},L=\begin{bmatrix}0 & 0\\-4a & 1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}0 & -a\\0 & 0\end{bmatrix}$$

- Jacobi 迭代法的谱半径：

根据 Jacobi 迭代法的计算流程，能够写出矩阵形式的 Jacobi 迭代法的迭代公式：

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -a\\-4a & 0\end{bmatrix}x^{(k)}+D^{-1}b$$

能够看出，其中$B=\begin{bmatrix}0 & -a\\-4a & 0\end{bmatrix}$，由此能够求出$B$矩阵的谱半径。谱半径的计算公式为：

$$\rho(B)=\max_{1\leq i\leq n}\{|\lambda_i|\}$$

因此，需要先行计算 B 矩阵的特征值。计算流程与结果如下：

$$\begin{vmatrix}\lambda & -a\\-4a & \lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\lambda^2=4a^2$$
$$\lambda=2a$$

由此，能够得到 Jacobi 迭代法的谱半径为：

$$\rho(B)=2a$$

- Gauss-Seidel 迭代法的谱半径：

根据 Gauss-Seidel 迭代法的计算流程，能够写出矩阵形式的 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式：

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -a\\0 & 4a^2\end{bmatrix}x^{(k)}+D^{-1}b$$

能够看出，其中$B=\begin{bmatrix}0 & -a\\ 0 & 4a^2\end{bmatrix}$。同求解 Jacobi 迭代法谱半径的求解步骤，能够求出B矩阵的谱半径。因此，B矩阵的特征值为：

$$\begin{vmatrix}\lambda & -a\\ 0 & \lambda-4a^2\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda(\lambda-4a^2)=0$$

$$\lambda=4a^2$$

由此得出，Gauss-Seidel 迭代法的谱半径为：

$$\rho(B)=4a^2$$

由此，能够分别计算 Jacobi 与 Gauss- Seidel 迭代法的迭代速度为：

- Jacobi 迭代法：

$$R_J=-\log_{10}2a$$

- Gauss- Seidel 迭代法：

$$R_G=\log_{10}4a^2$$

最后，能够得出 Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代法的迭代速度之比为：

$$\frac{R_J}{R_G}=\frac{\log_{10}2a}{\log_{10}4a^2}=\frac{\log_{10}2a}{2\log_{10}2a}=\frac{1}{2}$$

即 Jacobi 迭代法的迭代速度是 Gauss-Seidel 迭代法的迭代速度的$\frac{1}{2}$

六、Ch5：4

4. 对权函数 $\rho(x)=1+t^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

解：求解正交多项式的递推公式为：

$$\begin{cases} \varphi_0(t)=1,\varphi_1(t)=t-\dfrac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} \\ \varphi_{k+1}(t)=(t-\alpha_k)\varphi_k(t)-\beta_k\varphi_{k-1}(t) \end{cases}$$

其中，$\alpha_k=\frac{\langle t\varphi_k(t),\varphi_k(t)\rangle}{\langle \varphi_k(t),\varphi_k(t)\rangle}$，$\beta_k=\frac{\langle \varphi_k(t),\varphi_k(t)\rangle}{\langle \varphi_{k-1}(t),\varphi_{k-1}(t)\rangle}$，$k=1,2,3,\ldots$。

同时，在本题中，计算内积时，在积分函数中，应乘上权函数$\rho(x)=1+t^2$.

由题意得：

$$\varphi_0(t)=1$$

由递推公式得：

$$\begin{aligned}\varphi_1(t)&=t-\frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\\ &=t-\frac{\int_{-1}^{1}t(1+t^2)\,dt}{\int_{-1}^{1}(1+t^2)\,dt}\\ &=t\end{aligned}$$

随后，即可由前两项递推计算得到下一项的φ值。当前已有$\varphi_0(t)$与$\varphi_1(t)$，计算$\varphi_2(t)$的过程与结果如下：

$$\begin{aligned}\varphi_2(t)&=(t-\alpha_1)\varphi_1(t)-\beta_1\varphi_0(t)\\ &=\left(t-\frac{\langle t\varphi_1(t),\varphi_1(t)\rangle}{\langle \varphi_1(t),\varphi_1(t)\rangle}\right)\varphi_1(t)-\frac{\langle \varphi_1(t),\varphi_1(t)\rangle}{\langle \varphi_0(t),\varphi_0(t)\rangle}\varphi_0(t)\\ &=\left(t-\frac{\langle t^2,t\rangle}{\langle t,t\rangle}\right)t-\frac{\langle t,t\rangle}{\langle 1,1\rangle}*1\\ &=t^2-t*\frac{\int_{-1}^{1}t^3(1+t^2)\,dt}{\int_{-1}^{1}t^2(1+t^2)\,dt}-\frac{\int_{-1}^{1}t^2(1+t^2)\,dt}{\int_{-1}^{1}(1+t^2)\,dt}\\ &=t^2-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

同理，由$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$，根据递推公式能够计算$\varphi_3(t)$，计算过程与结果如下：

$$\begin{aligned}\varphi_3(t)&=(t-\alpha_2)\varphi_2(t)-\beta_2\varphi_1(t)\\ &=\left(t-\frac{\langle t\varphi_2(t),\varphi_2(t)\rangle}{\langle \varphi_2(t),\varphi_2(t)\rangle}\right)\varphi_2(t)-\frac{\langle \varphi_2(t),\varphi_2(t)\rangle}{\langle \varphi_1(t),\varphi_1(t)\rangle}\varphi_1(t)\\ &=\left(t-\frac{\langle t^3-\frac{2}{5}t,t^2-\frac{2}{5}\rangle}{\langle t^2-\frac{2}{5},t^2-\frac{2}{5}\rangle}\right)\left(t^2-\frac{2}{5}\right)-\frac{\langle t^2-\frac{2}{5},t^2-\frac{2}{5}\rangle}{\langle t,t\rangle}*t\\ &=\left(t-\frac{\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{2}{5}t)(t^2-\frac{2}{5})(1+t^2)\,dt}{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{2}{5}\right)^2(1+t^2)\,dt}\right)\left(t^2-\frac{2}{5}\right)-\frac{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{2}{5}\right)^2(1+t^2)\,dt}{\int_{-1}^{1}t^2(1+t^2)\,dt}*t\end{aligned}$$

$$= t^3 - \frac{9}{14}t$$

综上所述，可得本题的求解答案：

$$\varphi_1(t) = t$$

$$\varphi_2(t) = t^2 - \frac{2}{5}$$

$$\varphi_3(t) = t^3 - \frac{9}{14}t$$

七、Ch5：5

5. 设 $f(t) = t^2 + 3t + 2$ 定义在区间 $[0,1]$ 上，试求 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上关于 $\Phi = \text{span}\{1,t\}$ 的最佳平方逼近多项式。若取 $\Phi = \text{span}\{1,t,t^2\}$，那么最佳平方逼近多项式是什么？

解：（1）根据最佳平方逼近多项式求解方法，当$\Phi = span\{1,t\}$，区间为$[0,1]$时，法方程中的系数矩阵为：

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

法方程的右端项为：

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 f(t)\,dt \\ \int_0^1 f(t)t\,dt \end{bmatrix}$$

其中，分别计算两项积分：

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 + 3t + 2\,dt = \frac{23}{6}$$

$$\int_0^1 f(t)t\,dt = \int_0^1 (t^2 + 3t + 2)t\,dt = \frac{9}{4}$$

由此，能够得出法方程为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/6 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

可解出该法方程的解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 23/6 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.8333 \\ 4 \end{bmatrix}$$

由此，可得出区间$[0,1]$上的$f(t)$关于$\Phi = span\{1,t\}$的最佳平方逼近多项式为：

$$S_1^* = 1.8333 + 4t$$

（2）由题意，当$\Phi = span\{1,t,t^2\}$时，法方程的系数矩阵为：

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

法方程的右端项为：

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 f(t)\,dt \\ \int_0^1 f(t)t\,dt \\ \int_0^1 f(t)t^2\,dt \end{bmatrix}$$

计算右端项的第三项积分为：

$$\int_0^1 f(t)t^2\,dt=\int_0^1 (t^2+3t+2)t^2\,dt=\frac{97}{60}$$

由此，能够得出法方程为：

$$\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23/6\\ 9/4\\ 97/60\end{bmatrix}$$

可解出该法方程的解为：

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}23/6\\ 9/4\\ 97/60\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

由此，可得出区间[0,1]上的$f(t)$关于$\Phi=span\{1,t,t^2\}$的最佳平方逼近多项式为：

$$S_2^*=2+3t+t^2$$

综上：当$\Phi=span\{1,t\}$时，最佳平方逼近多项式为：

$$S_1^*=1.8333+4t$$

当$\Phi=span\{1,t,t^2\}$时，最佳平方逼近多项式为：

$$S_2^*=2+3t+t^2$$