数值分析习题提示

第三章 解线性方程组的直接方法

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$，证明当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty$ 有最小值。

答案：$\|A\|_\infty=\max\{3|\lambda|,2\}$，$\|A^{-1}\|_\infty=\frac{1}{|\lambda|}(1+2|\lambda|)$。当 $|\lambda|\geq\frac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty\geq 3(1+2|\lambda|)\geq 7$；当 $|\lambda|\leq\frac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty\geq\frac{2}{|\lambda|}(1+2|\lambda|)\geq\frac{2}{|\lambda|}+4\geq 7$。等号仅当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时成立。

2. 试推导顺序主子式皆不为零矩阵 A 的 Crout 分解 $A=LU$ 的算法，其中，L 为下三角矩阵，U 为单位上三角矩阵。

答案：逐列 (或逐行) 解方程 $LU=A$，方法与 Dolittle 分解类似。

逐行：矩阵第一行元素，$l_{11}=a_{11}$，$u_{1j}=a_{1j}/l_{11}$，$j=2,3,\ldots,n$；

矩阵第 k 行前 k 个元素，$l_{kj}=a_{kj}-\sum\limits_{i=1}^{j-1}l_{ki}u_{ij}$，$j=1,2,\ldots,k$；

矩阵第 k 行后 $n-k$ 个元素，$u_{kj}=\dfrac{a_{kj}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}l_{ki}u_{ij}}{l_{kk}}$，$j=k+1,k+2,\ldots,n$；

第 n 行元素，$l_{nj}=a_{nj}-\sum\limits_{i=1}^{j-1}l_{ni}u_{ij}$，$j=1,2,\ldots,n$。

注：有的同学设计算法时，将前面的结果代入。比如：$l_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11}$。就算法而言，计算 l_{22} 时，l_{21} 和 u_{12} 的值已经知道，直接利用好了，没必要再利用 a_{21} 和 a_{12}。再有，这种算法也往往是利用原地工作，也就是 l_{21} 和 u_{12} 的值会替代 a_{21} 和 a_{12} 的值。计算 l_{22} 时，a_{21} 和 a_{12} 的值已经不存在了。

3. 分别采用高斯消去法和直接 LU 分解法对下述矩阵进行 LU 分解，写出矩阵 L 和 U：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&2&3&4\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}。$$

答案：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\0&0&-2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&1&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}。$$

4. 分别采用部分主元高斯消去法对下述矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$$

进行 LU 分解，写出矩阵 L、U 和 P。

答案：

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2/3&1&0\\1/3&1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5&6\\0&2/3&1\\0&0&1/2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1/2&1&0&0\\0&0&1&0\\1/2&0&-1/6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\0&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\0&0&0&1/3\end{bmatrix}$$

5. 分别计算矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}$$

的 Cholesky 分解。

答案：

$$\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.7321&0&0\\0.5774&1.6330&0\\0&0.6124&1.6202\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.7321&0.5774&0\\0&1.6330&0.6124\\0&0&1.6202\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&3&0&0\\2&2&1&0\\1&0&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2&1\\0&3&2&0\\0&0&1&3\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

6. 下列矩阵能否分解为 LU(其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵)？若能分解，那么分解是否唯一？

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}。$$

答案：用直接三角分解法，列出方程组 $LU=A$，无解，A 不能分解；列出方程组 $LU=B$，无穷多解，B 分解不唯一。

注：可以观察能否通过适当的行变换变为上三角矩阵。但不可以利用顺序主子式 $|B_2|=|B_3|=0$ 说明 B 无穷多 LU 分解。$|B_2|=|B_3|=0$，也可能不存在 LU 分解。有同学通过 A 和 B 行变换处理后，再说明 A 不能分解，B 分解无穷多种也是很不错的想法。但就此写出所有可能的 L 和 U 会有点

麻烦。

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix},\ B \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

前者的第三行不可能减去前两行的若干倍使得对角线前的元素变 0，而后者的第三行减去第二行的任意倍，对角线前的元素都是 0。

上机题

1. 编写程序生成 Hilbert 矩阵 H_n，以及 n 维向量 $b = H_n x$，其中 x 为所有分量都是 1 的向量。用 Cholesky 分解算法求解方程 $H_n x = b$，得到近似解 $\hat{x}$，计算残差 $r = b - H_n\hat{x}$ 和 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 ∞-范数。

(1) 设 $n = 10$，计算 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$。

(2) 在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组，观察残差和误差的变化情况。

(3) 改变 n 的值为 8 和 12，求解相应的方程，观察 $\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况。通过这个实验说明了什么问题？

答案：(1) $\|r\|_\infty = 8.8818e-16$、$\|\Delta x\|_\infty = 4.3118e-04$。

```
n = 10;
z = ones(n,1);
A = hilb(n);
R = chol(A);
b = A*z;
y = R'\b;
x = R\y;
a = norm(b-A*x,inf), b = norm(x-z,inf)
```

(2) $\|r\|_\infty = 2.2204e-16$、$\|\Delta x\|_\infty = 0.7007$。

```
n = 10;
z = ones(n,1);
A = hilb(n);
R = chol(A);
b = A*z+10^-7;
y = R'\b;
x = R\y;
a = norm(b-A*x,inf), b = norm(x-z,inf)
```

(3) $n = 8$ 时，$\|r\|_\infty = 2.2204e-16$、$\|\Delta x\|_\infty = 4.5897e-07$。

$n = 12$ 时，$\|r\|_\infty = 4.4409e-16$、$\|\Delta x\|_\infty = 0.3518$。

n 越大，方程组的解越敏感，而残差不敏感。

第四章 解线性方程组的迭代法

1. 设方程组：

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= -12; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 20; \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= 3. \end{cases}$$

(1) 考察用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法解此方程组的收敛性；

(2) 取初始解为 $[0,0,0]^T$，用 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时迭代终止。

(3) 用 SOR 方法解上述方程组 (取 $\omega = 0.9$，初始解为 $[0,0,0]^T$)，要求当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

答案：(1) 用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法解此方程组时都收敛。

(2) Jacobi 迭代法经过 11 步，得到近似解 $[-4.0002, 3.0031, 1.9999]^T$；Gauss-Seidel 迭代法经过 6 步，得到近似解 $[-3.9993, 3.0000, 1.9999]^T$。

(3) SOR 方法经过 5 步，得到近似解 $[-3.9967, 3.0000, 1.9994]^T$。

2. 基于 Gauss-Seidel 迭代法可得到一种新的迭代法。在第 k 步迭代中 ($k = 0, 1, \cdots$)，先由 Gauss-Seidel 迭代公式根据 $x^{(k)}$ 算出 $\tilde{x}^{(k)}$，然后将分量的更新顺序改为从 n 到 1，类似地，再计算一遍根据 $\tilde{x}^{(k)}$ 算出 $\tilde{x}^{(k+1)}$。这种迭代法称为对称 Gauss-Seidel(SGS) 方法。试证明 SGS 方法的迭代计算公式，并证明它也属于分裂法，且当矩阵 A 对称时矩阵 M 也是对称的。

答案：原方程改写为 $D^{-1}Ax = D^{-1}b$。$(D-L)\tilde{x}^{(k)} = Ux^{(k)} + b$，$(D-U)x^{(k+1)} = L\tilde{x}^{(k)} + b$。$(D-L)D^{-1}L = LD^{-1}(D-L)$。

因此，$(D-L)D^{-1}(D-U)x^{(k+1)} = LD^{-1}Ux^{(k)} + b$。$M = (D-L)D^{-1}(D-U)$，$N = LD^{-1}U$。当矩阵 A 对称时矩阵 M 和 N 也是对称的。

3. 考虑线性方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(1) a 为何值时，A 是正定的？

(2) a 为何值时，Jacobi 迭代法收敛？

(3) a 为何值时，Gauss-Seidel 迭代法收敛？

答案：(1) $-1 < a < 1$ 时，A 是正定的。

(2) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 \\ a & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - a^2\lambda$，特征值为 0，$a$，$-a$。

$-1 < a < 1$ 时，Jacobi 迭代法收敛。

(3) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 \\ a\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - a^2\lambda^2$，特征值为 0，0，$a^2$。

$-1 < a < 1$ 时，Gauss-Seidel 迭代法收敛。

4. 对 Jacobi 迭代法引进迭代参数 $\omega > 0$。即 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1}(Ax^{(k)} - b)$ 称为 Jacobi 松弛法。试证明：当求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法收敛且 $0 < \omega \leq 1$ 时，Jacobi 松弛法也收敛。

答案：Jacobi 迭代法的迭代矩阵 J 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。Jacobi 松弛法为 $x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(I - D^{-1}A)x^{(k)} - \omega D^{-1}b$。迭代矩阵为 $J_\omega = (1-\omega)I + \omega J$。

Jacobi 松弛法的迭代矩阵的特征值为 $(1-\omega)+\omega\lambda_1, (1-\omega)+\omega\lambda_2, \ldots, (1-\omega)+\omega\lambda_n$。

Jacobi 迭代法收敛，所有 $|\lambda_i| < 1$；此时，$|(1-\omega)+\omega\lambda_i| \leq (1-\omega) + \omega|\lambda_i| < (1-\omega)+\omega = 1$，故 Jacobi 松弛法也收敛。

注：Jacobi 迭代法收敛不能说明 $\|J\|_2 < 1$ 或 $\|J\|_\infty < 1$，但会有某个算子范数使得 $\|J\| < 1$。在此算子范数下，$\|(1-\omega)I + \omega J\| \leq (1-\omega) + \omega\|J\| < 1$。这种做法与用谱半径差不多。

再有，Jacobi 迭代矩阵特征值不一定是实数，$-1 < \lambda_i < 1$ 是错误的。

考虑 $D^{-1}A$ 的特征值 λ_i 也是不错的想法，那是一个平面几何问题，需要画图，大致想法：$|1-\lambda_i|<1$，λ_i 在以 1 为圆心，半径为 1 的圆内；此时，$\omega\lambda_i$ 在连接 0 和 λ_i 的线段内，因此也在以 1 为圆心，半径为 1 的圆内。故 Jacobi 松弛法也收敛。

5. 考虑线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 4a & 1\end{bmatrix}$。

(1) 求使 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛的 a 取值范围。

(2) 当 $a\neq 0$ 时，给出两种迭代法收敛速度之比。

答案：Jacobi 迭代法，$\lambda=\pm 2a$；Gauss-Seidel 迭代法，$\lambda=0,4a^2$。

(1) $|a|<\dfrac{1}{2}$；(2) 2。

上机题

1. 考虑 10 阶 Hilbert 矩阵作为系数阵的方程组 $Ax=b$，其中 $b=[1,\dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{10}]^T$。取初始解 $x^{(0)}=\mathbf{0}$，编写程序用 Jacobi 迭代法与 SOR 迭代法求解该方程组，将 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 作为终止迭代的判据。

(1) 分别用 Jacobi 与 SOR($\omega=1.25$) 迭代法求解，观察收敛情况。

(2) 改变 ω 的值，试验 SOR 迭代法的效果，考察解的准确度。

答案：Jacobi 迭代法发散，SOR 迭代法收敛。

```
A = hilb(10);
D = diag(diag(A));
L = -tril(A,-1);
U = -triu(A,1);
b = 1./(1:10);
J = D\(L+U);
c = 1.25;
S=(D-c*L)\((1-c)*D+c*U);
f=(D-c*L)\(c*b');

x = zeros(10,1);
y = ones(10,1);
k = 0;
while norm(y-x,inf)>10^(-4) && k<1000000
    x = y;
    y = S*x + f;
    k = k+1;
end
```

第五章 函数逼近

1. 对于 $C[0,1]$ 中的函数 $f(x)$，计算 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$，$\|f\|_2$。

(1) $f(x)=(x-1)^3$；(2) $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$。

答案：(1) $\|f\|_\infty=1$，$\|f\|_1=1/4$，$\|f\|_2=\sqrt{7}/7$。

(2) $\|f\|_\infty=1/2$，$\|f\|_1=1/4$，$\|f\|_2=\sqrt{3}/6$。

2. $f(t)=|t|$ 定义在 $[-1,1]$ 上，在子空间 $\Phi=\text{span}\{1,t^2,t^4\}$ 中求它的最佳平方逼近多项式。

答案：最佳平方逼近多项式为 $0.1171875+1.640625t^2-0.8203125t^4$。

3. 已知实验数据如下：。

t_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y=a+bt^2$ 的经验公式。

答案：经验公式为 $y=0.9726046+0.0500351t^2$。

两个待定常数，只能取两个 φ。φ_0，φ_1 也必须形如 $y=a+bt^2$。可设 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=t^2$。法方程为：

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

4. 对权函数 $\rho(x)=1+t^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

答案：$\varphi_1(t)=1$，$\varphi_2(t)=t$，$\varphi_3(t)=t^2-\dfrac{2}{5}$。

5. 设 $f(t)=t^2+3t+2$ 定义在区间 $[0,1]$ 上，试求 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上关于 $\Phi=\text{span}\{1,t\}$ 的最佳平方逼近多项式。若取 $\Phi=\text{span}\{1,t,t^2\}$，那么最佳平方逼近多项式是什么？

答案：$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{23}{6} \\ \dfrac{9}{4} \end{bmatrix}$，$\dfrac{11}{6}+4t$，$t^2+3t+2$。

上机题

1. 对物理实验中所得下列数据

t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	
y_i	33.40	79.50	122.65	159.05	189.15	214.15	238.65	
t_i	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y_i	252.2	267.55	280.50	296.65	301.65	310.40	318.15	325.15

(1) 用公式 $y=a+bt+ct^2$ 作曲线拟合。

(2) 用指数函数 $y=ae^{bt}$ 作曲线拟合。

(3) 比较上述两条拟合曲线，那条更好？

答案：用 (1) 作曲线拟合更好。

```
t = 1:0.5:8;
y = [33.4,79.5,122.65,159.05,189.15,214.15,238.65,252.2,267.55,...
    280.5,296.65,301.65,310.4,318.15,325.15];
p1 = polyfit(t,y,2);
z1 = polyval(p1,t);
d1 = norm(z1-y);
ybar = log(y);
p2 = polyfit(t,ybar,1);
z2 = exp(polyval(p2,t));
d2 = norm(z2-y);
```

也可利用曲线拟合工具箱 (输入 cftool)。不过那就演变成了如何使用 matlab 进行拟合。