图像处理

第二次作业

姓名：魏子继 学号：**202318019427048**

1、 **Hw23_2_1**：完成课本数字图像处理第二版 **116** 页，习题 **3.25**，即拉普拉斯算子具有理论上的旋转不变性。

★3.25 证明如式(3.7.1)所示的拉普拉斯变换是各向同性的(旋转不变)。需要下列轴旋转 θ 角的坐标方程：

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

其中(x,y)为非旋转坐标，而(x',y')为旋转坐标。

解：拉普拉斯变换式为：

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

当采用旋转坐标后，再在旋转坐标下对f进行拉普拉斯变换则为：

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

该题目即证明上述两式相等。

首先，求f对旋转坐标x'的一阶导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\end{aligned}$$

随后，将该一阶导求对旋转坐标x'的二阶导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\right)\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\right)\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\frac{\partial y}{\partial x'}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta\end{aligned}$$

相同的方法，求f对旋转坐标y'的一阶导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}\\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\end{aligned}$$

随后，对该一阶导求对旋转坐标y'的二阶导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} &= \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y'}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)\frac{\partial y}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial f}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial y \partial x}\cos\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

最后，将两个二阶导相加得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

即证明旋转坐标下，f的拉普拉斯变换与在非旋转坐标下一致，即可证明拉普拉斯算子具有理论上的旋转不变性。

证毕

2、Hw23_2_2：根据书中对傅立叶变换的定义，证明课本 165 页上有关傅立叶变换的平移性质。

平移	$f(x,y)e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$ $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$ 当 $x_0 = u_0 = M/2$ 和 $y_0 = v_0 = N/2$ 时， $f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2, v-N/2)$ $f(x-M/2, y-N/2) \Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}$

解：离散情况傅里叶变换公式如下（Fourier Transform（discrete case）DFT）：

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

离散情况傅里叶逆变换公式如下（Inverse Fourier Transform（discrete case）IDFT）：

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

（1）　第一条性质证明：

对$f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)}$进行离散情况傅里叶变换得：

$$
\begin{aligned}
DFT\left(f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)}\right) &= e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)}\left(\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\right) \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)+j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N}\right)} \\
&= F(u-u_0, v-v_0)
\end{aligned}
$$

（2） 第二条性质证明：

对$F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}$进行离散情况傅里叶反变换得：

$$
\begin{aligned}
IDFT\left(F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\right) &= e^{-j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\left(\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N}\right)} \\
&= f(x-x_0, y-y_0)
\end{aligned}
$$

（3） 第三条性质证明：

根据已经证明的性质 1 与欧拉公式$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$得，当$\begin{cases} u_0=\frac{M}{2} \\ v_0=\frac{N}{2} \end{cases}$时：

$$
\begin{aligned}
e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} &= e^{j2\pi\left(\frac{\frac{M}{2}x}{M}+\frac{\frac{N}{2}y}{N}\right)} \\
&= e^{j\pi(x+y)} \\
&= (\cos\pi + j\sin\pi)^{x+y} \\
&= (-1)^{x+y}
\end{aligned}
$$

因此，由性质 1 即可快速得到：

$$
f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)
$$

（4） 第四条性质证明：

根据已经证明的性质 2 与欧拉公式$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$得，当$\begin{cases} u_0=\frac{M}{2} \\ v_0=\frac{N}{2} \end{cases}$时：

$$
\begin{aligned}
e^{-j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} &= e^{-j2\pi\left(\frac{\frac{M}{2}x}{M}+\frac{\frac{N}{2}y}{N}\right)} \\
&= e^{-j\ \ (x+y)}
\end{aligned}
$$

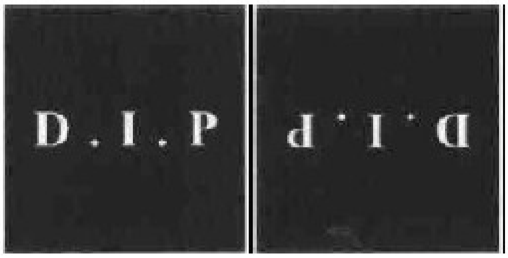
$$= (\cos(-\pi) + j\sin(-\pi))^{x+y}$$
$$= (-1)^{x+y}$$

因此，由性质 2 即可快速得到：

$$f(x-\frac{M}{2}, y-\frac{N}{2}) \Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{x+y}$$

证毕

3、 **Hw23_2_3:** 观察如下所示图像。右边的图像这样得到: **(a)**在原始图像左边乘以$(-\mathbf{1})^{\mathbf{x+y}}$; **(b)** 计算离散傅里叶变换（**DFT**）; **(c)** 对变换取复共轭; **(d)** 计算傅里叶反变换; **(e)** 结果的实部再乘以$(-\mathbf{1})^{\mathbf{x+y}}$。（用数学方法解释为什么会产生右图的效果。）



解：设左图图像，即原始图像为$f(x,y)$。根据题目步骤可得：

步骤（a）：

$$(-1)^{x+y}f(x,y)$$

步骤（b）：

$$DFT\big((-1)^{x+y}f(x,y)\big)$$

在此步骤中，根据傅里叶变换的平移性可得：

$$DFT\big((-1)^{x+y}f(x,y)\big) = F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$$

步骤（c）：

$$F\left(-\left(u-\frac{M}{2}\right), -\left(v-\frac{N}{2}\right)\right) = F\left(-u+\frac{M}{2}, -v+\frac{N}{2}\right)$$

步骤（d）：

$$IDFT\left(F\left(-u+\frac{M}{2}, -v+\frac{N}{2}\right)\right)$$

在此步骤中，根据傅里叶逆变换的性质得：

$$IDFT\left(F\left(-u+\frac{M}{2}, -v+\frac{N}{2}\right)\right) = f(-x,-y)(-1)^{-x-y}$$

步骤（e）：

$$f(-x,-y)(-1)^{-x-y}(-1)^{x+y} = f(-x,-y)$$

由此即可看出，经过上述一系列步骤，起到的效果是将左边图像翻转 180°，即得到右边的图像。