图像处理

第一次作业

姓名：魏子继 学号：**202318019427048**

1、**Hw23_1_1**：完成课本习题 **3.2(a)(b)**，课本中文版《处理》第二版的 **113** 页。可以通过 **matlab** 帮助你分析理解。

3.2 ★**(a)** 试求出实现示于图 3.2(a)的对比度展宽变换的连续函数。此函数不仅包含参数 m，而且还包括参数 E，以便于控制灰度值由低向高转化时的函数斜率。该函数应归一化，以使它的最小值和最大值分别为 0 和 1。

(b) 作为参数 E 的函数，设计一组变换，m 值固定为 $L/2$，L 是图像中灰度的级数。

(c) 为使函数如图 3.2(b)的函数那样有效地执行，s 的最小值是什么？换句话说，你的函数与图 3.2(b)可以不同。它仅仅有“产生二值图像”这一相同的处理结果。假定用 8 比特图像进行处理，并使 $m = 128$。另外，令 C 为在你使用的计算机中所能表示的最小正数。

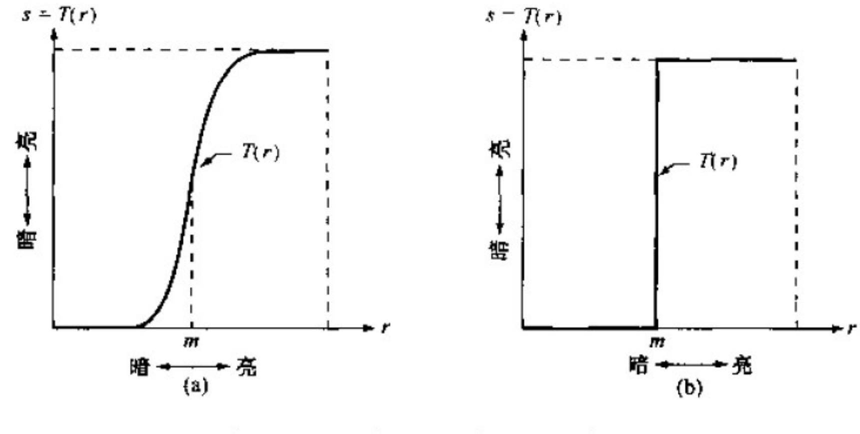
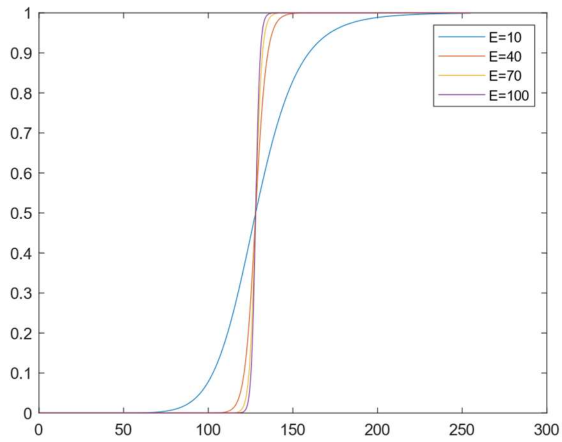


图 3.2 对比度增强的灰度级变换函数

解：（a）该函数为：

$$s = T(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{m}{r}\right)^{E}}$$

（b）设L为 256，则$m = \frac{L}{2} = 128$。在本题的分析中，m值固定为 128，E 值分别取 10、40、100 进行对比分析。利用 matlab 软件，可得分析结果如下：

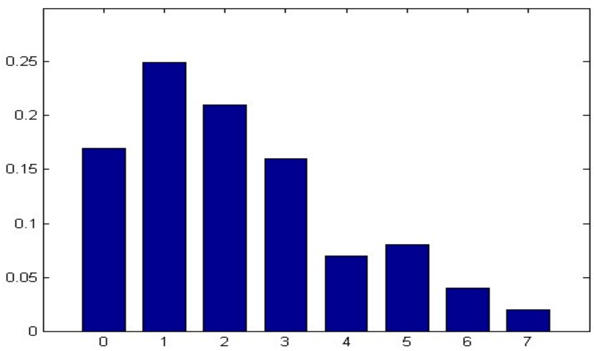


Matlab 代码：

```
clear;clc;
% hw23_1_1
% 数字图像处理第二版习题 3.2


m=128;   % 灰度级数一半
r=0.1:0.1:255;     % 变换前图像中像素值
E=10:30:100;    % 变换指数
s=zeros(length(E), length(r));
for i=1:4
    s(i,:)=1./(1+(m./r).^E(i)); % 求变换后
    plot(r,s(i,:))  % 绘图
    hold on
end
legend('E=10','E=40','E=70','E=100')
```

2、 **Hw23_1_2**：一幅 **8** 灰度级图像具有如下所示的直方图，求直方图均衡后的灰度级和对应概率，并画出均衡后的直方图的示意图。（图中的 **8** 个不同灰度级对应的归一化直方图为**[0.17 0.25 0.21 0.16 0.07 0.08 0.04 0.02]**）



解：第一步：计算累积分布概率。

本题中，使用r代表直方图均衡操作前的原灰度级，$P_r(r_j)$代表原灰度级的各级概率，

$\sum_{j=0}^{r} P_r(r_j)$代表原灰度级的各级累积分布概率。

由题意，计算各灰度级的累计分布概率如下：

$\sum_{j=0}^{0} P_r(r_j) = P_r(r_0) = 0.17;$

$\sum_{j=0}^{1} P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) = 0.17 + 0.25 = 0.42;$

$\sum_{j=0}^{2} P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) = 0.17 + 0.25 + 0.21 = 0.63;$

...

依此，可计算各灰度级的累计分布概率，结果如下：

灰度级r	各级概率$P_r(r_j)$	各级累积分布概率$\sum_{j=0}^{r} P_r(r_j)$
0	0.17	0.17
1	0.25	0.42
2	0.21	0.63
3	0.16	0.79
4	0.07	0.86
5	0.08	0.94
6	0.04	0.98
7	0.02	1

第二步：计算映射关系。

随后，计算直方图均衡操作中使用的映射关系，该映射的计算方法如下：

$$s_r = T(r_j) = (L-1)\sum_{j=0}^{r} P_r(r_j)$$

该式中，s_r为进行直方图均衡操作后获得的新灰度级，$T(r_j)$代表对j灰度级的直方图均衡映射，L代表直方图均衡操作前的原灰度级。

计算过程与计算结果如下，其中采用四舍五入的方式获得直方图均衡后的新灰度级s_r：

$s_0 = T(r_0) = (8-1) * 0.17 = 1.19 \approx 1;$

$s_1 = T(r_1) = (8-1) * 0.42 = 2.94 \approx 3;$

$s_2 = T(r_2) = (8-1) * 0.63 = 4.41 \approx 4;$

$s_3 = T(r_3) = (8-1) * 0.79 = 5.53 \approx 6;$

$s_4 = T(r_4) = (8-1) * 0.86 = 6.02 \approx 6;$

$s_5 = T(r_5) = (8-1) * 0.94 = 6.58 \approx 7;$

$s_6 = T(r_6) = (8-1) * 0.98 = 6.86 \approx 7;$

$s_7 = T(r_7) = (8-1) * 1 = 7.$

第三步：计算新灰度级对应概率。

由第二步，可知进行直方图均衡操作后，该图像仅剩 5 个灰度级。使用$P_s(r_j)$代表新灰度级j对应的概率，每个新灰度级的对应概率对应如下：

$P_s(r_0) = 0;$

$P_s(r_1) = P_r(r_0) = 0.17;$

$P_s(r_2) = 0;$

$P_s(r_3) = P_r(r_1) = 0.25;$

$P_s(r_4) = P_r(r_2) = 0.21;$

$P_s(r_5) = 0;$

$P_s(r_6) = P_r(r_3) + P_r(r_4) = 0.16 + 0.07 = 0.23;$

$P_s(r_7) = P_r(r_5) + P_r(r_6) + P_r(r_7) = 0.08 + 0.04 + 0.02 = 0.14.$

第四步：汇总并绘制新的直方图。

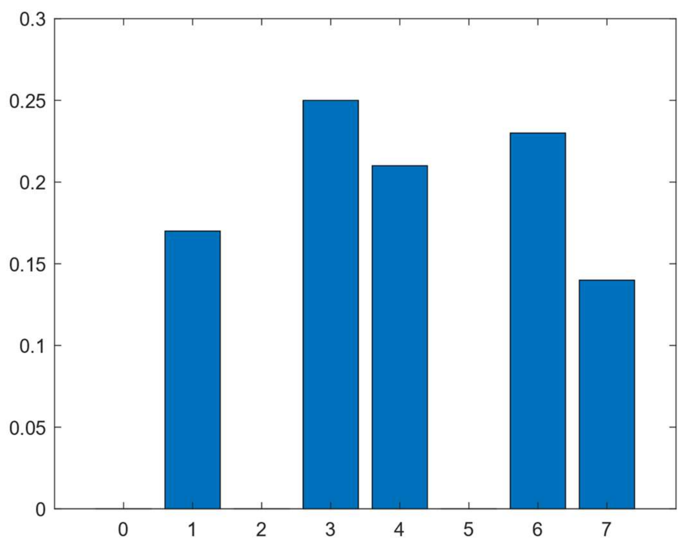
综上，经过直方图均衡操作后，图像的新灰度级与原灰度级对应如下：

灰度级r	新灰度级s_r
0	1
1	3
2	4
3	6
4	6
5	7
6	7
7	7

新灰度级对应的概率如下：

新灰度级s	新灰度级s_r
1	0.17
3	0.25
4	0.21
6	0.23
7	0.14

利用 Matlab 软件，绘制直方图均衡后的图像直方图如下：



Matlab 代码如下：

```
clear;clc;
% hw23_1_2
% 直方图均衡操作后直方图绘制
```

```
s=0:1:7;
ps=[0 0.17 0 0.25 0.21 0 0.23 0.14];
bar(s,ps)
axis([-1 8 0 0.3])
```

3、 **Hw23_1_3**：课本习题 **3.6**。对于离散的情况，用 **matlab** 进行一下实验

3.6 假定我们对一幅数字图像进行直方图均衡化处理，试说明：第二次直方图均衡化处理的结果与第一次直方图均衡化处理的结果相同。

解：在一张以离散版本表示的图像中，像素灰度级r_k的概率分布为：

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{N}, k = 1,2,\dots,L$$

若将该图像进行直方图均衡化操作，则根据直方图均衡化的定义，能够得到该操作的转换函数为：

$$s = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_{r_j}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k} n_{r_j}$$

则可将第一次直方图均衡化操作后得到的图像记为s，记其像素灰度级为s_k。由于直方图均衡操作只统计每个像素灰度级所包含的像素值数量，因此，处理前后图像的每个像素的像素值并未发生改变，因此对于第j个像素灰度级，有：

$$n_{s_j} = n_{r_j}$$

再将s进行一次直方图均衡操作，记处理后的图像为 v，则有：

$$v = T(s_k) = \sum_{j=0}^{k} p_s(s_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_{s_j}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k} n_{s_j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k} n_{r_j} = s$$

综上所述，即可说明，第二次直方图均衡化处理的结果与第一次直方图均衡化处理的结果相同。

使用书本上的例图，对于离散情况，利用 Matlab 软件进行实验：

（1）Matlab 实验结果：

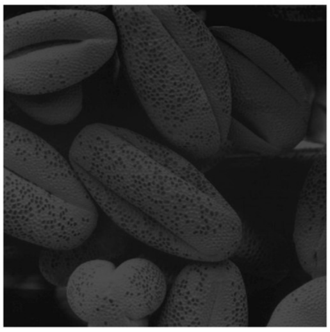


图 3-1：未处理的图像原图

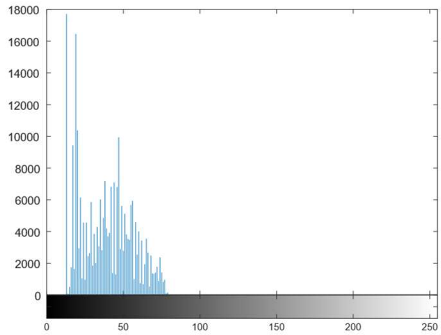


图 3-2：未处理的图像原图的直方图

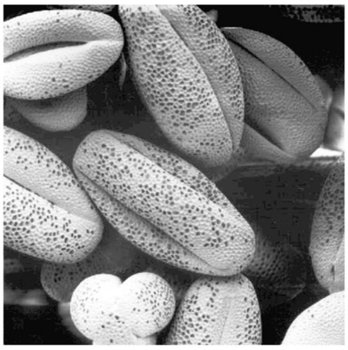


图 3-3：第一次直方图均衡操作后结果图

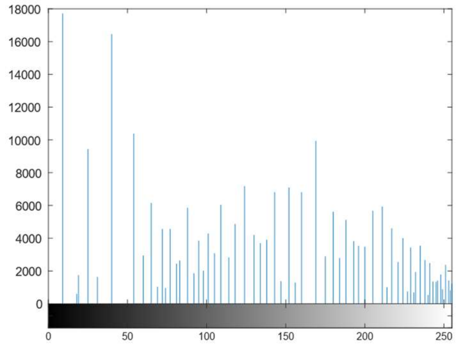


图 3-4：第一次直方图均衡操作后直方图

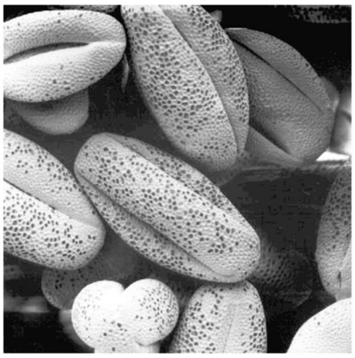


图 3-5：第二次直方图均衡操作后结果图

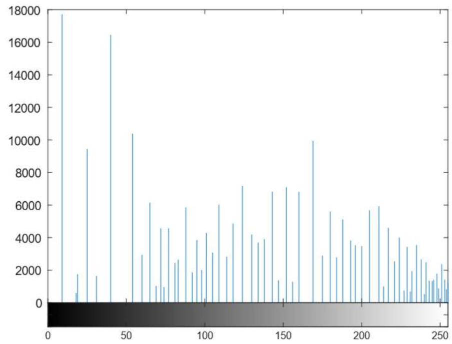


图 3-6：第二次直方图均衡操作后直方图

由此图 3-1 至图 3-4 能够看出，第一次直方图均衡化操作对原图有着显著的改善，对应的直方图有着显著的变化。但由图 3-3 至 3-6 对比能够看出，第二次直方图均衡化与第一次直方图均衡化操作的结果图相同、直方图也没有明显变化。

（2）Matlab 实验代码：

```
clear;clc;
% hw_1_3
% 数字图像处理第二版习题 3.6


fig=imread('Fig0308(a)(pollen).tif');   % 原图
imshow(fig);    % 展示图像
figure,imhist(fig); % 展示直方图
ylim('auto');


s=histeq(fig,256);    % 第一次直方图均衡化操作
figure,imshow(s);   % 一个窗口只显示一幅图像，并不指定窗口的编号
figure,imhist(s);
ylim('auto');


v=histeq(s,256);    % 第二次直方图均衡化操作
```

```
figure,imshow(v);
figure,imhist(v);
ylim('auto');
```

4、 Hw23_1_4：完成课本习题 3.7。

3.7 在实际应用中，将输入图像的直方图模型化为高斯概率密度函数，其概率密度函数形式为：

$$p_r(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 m 和 σ 分别是高斯 PDF 的平均值与标准差。具体处理方法是将 m 和 σ 看做给定图像的平均灰度级和对比度，试求出直方图均衡化的变换函数。

解：根据直方图均衡的变换函数有：

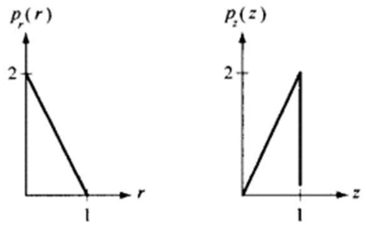
$$s=T(r)=\int_0^r p_r(w)dw=\int_0^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(w-m)^2}{2\sigma^2}}dw=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^r e^{-\frac{(w-m)^2}{2\sigma^2}}dw$$

可得该情况下直方图均衡化的变换函数。

但在实际情况中，图像的像素灰度值值域与高斯概率密度函数的定义域不同，需要进行进一步处理。例如，高斯概率密度函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而一般图像的灰度值值域为[0,255]。此时，应将函数定义域的区间压缩至[0,255]，以便很好地进行直方图均衡化处理。另一方面，该积分是没有显示形式的，一般情况下可通过查表求解，即数值分析的方法得到具体的变化函数值。

5、 Hw23_1_5：完成课本数字图像处理第二版 114 页，习题 3.10。

3.10 一幅图像的灰度 PDF，$p_r(r)$示于下图。现对此图像进行灰度变换，使其灰度表达式为下面右图的 $p_z(z)$。假设灰度值连续，求完成这一要求的变换（r 到 z）。



解：由题意可知，二者为同一图像的不同灰度表达式，因此它们在直方图均衡操作后的结果应相同。

通过计算可得，左边灰度表达式：

$$p_r(r)=-2r+2, 0\le r\le 1$$

右边灰度表达式：

$$p_z(z)=2z, 0\le z\le 1$$

对两者做直方图均衡操作，左边灰度表达式：

$$s_1=T_1(r)=\int_0^r p_r(w)dw=\int_0^r(-2w+2)dw=-r^2+2r \qquad (5-1)$$

右边灰度表达式：

$$s_2=T_2(r)=\int_0^z p_z(w)dw=\int_0^z(2w)dw=z^2 \qquad (5-2)$$

直方图操作后的结果相等，即式$(5-1)$与式$(5-2)$相等，因此有：

$$z^2 = -r^2 + 2r$$

根据$0 \le z \le 1$，可解得：

$$z = \sqrt{-r^2 + 2r}$$

此即为由r到z的变换。

6、 Hw23_1_6：请计算如下两个向量与矩阵的卷积计算结果。

（1）[1 2 3 4 5 4 3 2 1] *[2 0 -2]

（2） $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

解：卷积的计算方式是翻转 180° 的卷积核与矩阵对应元素相乘并相加的计算方式。假设计算卷积时，填充方式为 0 填充。

（1） 全卷积计算结果：

$$[1,2,3,4,5,4,3,2,1] * [2,0,-2]$$
$$= [2 \times 1, 0 \times 1 + 2 \times 2, -2 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3, \dots, -2 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 2, -2 \times 2 + 0 \times 1, -2 \times 1]$$
$$= [2,4,4,4,4,0,-4,-4,-4,-4,-2]$$

相同卷积计算结果：

$$[1,2,3,4,5,4,3,2,1] * [2,0,-2]$$
$$= [4,4,4,4,0,-4,-4,-4,-4]$$

（2） 全卷积计算结果：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \times 1 & \cdots & 1 \times 4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 \times 3 & \cdots & 1 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & -6 & -4 & 4 & -4 & 2 & 11 \\ -3 & -7 & -6 & 3 & -6 & 4 & 15 \\ -3 & -11 & -4 & 8 & -10 & 3 & 17 \\ -7 & -11 & 2 & 5 & -10 & 6 & 15 \\ -8 & -5 & 6 & -4 & -6 & 9 & 8 \\ -3 & -1 & 3 & -3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

相同卷积计算结果：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 4 & -4 & 2 \\ -7 & -6 & 3 & -6 & 4 \\ -11 & -4 & 8 & -10 & 3 \\ -11 & 2 & 5 & -10 & 6 \\ -5 & 6 & -4 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

（3） Matlab 验证：

Matlab 验证代码：

```
clear;clc;
% hw23_1_6
% 卷积计算验证
```

```
a1=[1,2,3,4,5,4,3,2,1];
b1=[2,0,-2];
c11=conv(a1,b1,"full")  % 全卷积计算结果
c12=conv(a1,b1,"same")  % 相同卷积计算结果


a2=[-1,0,1;
    -2,0,2;
    -1,0,1];
b2=[1,3,2,0,4;
    1,0,3,2,3;
    0,4,1,0,5;
    2,3,2,1,4;
    3,1,0,4,2];
c21=conv2(a2,b2,"full")
c22=conv2(a2,b2,"same")
```

Matlab 计算结果截图:

```
c11 =

     2     4     4     4     4     0    -4    -4    -4    -4    -2


c12 =

     4     4     4     4     0    -4    -4    -4    -4


c21 =

    -1    -3    -1     3    -2     0     4
    -3    -6    -4     4    -4     2    11
    -3    -7    -6     3    -6     4    15
    -3   -11    -4     8   -10     3    17
    -7   -11     2     5   -10     6    15
    -8    -5     6    -4    -6     9     8
    -3    -1     3    -3    -2     4     2


c22 =

    -6     3    -6
    -4     8   -10
     2     5   -10
```

通过 Matlab 计算，结果与手算结果相同，验算成功。