数值分析（电子与通信类）

第三次作业

姓名：魏子继 学号：202318019427048

一、 Ch6.1：

1. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求广义差商 $f[2^0,2^1,\ldots,2^7]$，$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]$ 及 $f[1,1,1,1,1]$。

解：由广义差商的定义得，广义差商可由如下公式计算：

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中ξ是所有节点的某个加权平均。

1. 由初项为1，公比为2的等比数列的求和公式，将求和取平均后，可取$\xi=\frac{1}{8}(2^8-1)$，同时可知由题意$n=7$可得：

$$f[2^0,2^1,\ldots,2^7]=f^{(7)}\left(\frac{\frac{1}{8}(2^8-1)}{7!}\right)=\frac{5040}{7!}=1$$

2. 同 1.中相同的ξ的计算方法，可取$\xi=\frac{1}{9}(2^9-1)$，同时由题意$n=8$可得：

$$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]=f^{(8)}\left(\frac{\frac{1}{9}(2^9-1)}{8!}\right)=0$$

3. 一般地，当$x_0=x_1=\cdots=x_n$时，广义差商的计算公式能够写为：

$$f[x,x,\ldots,x]=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

 其中，f中包括$n-1$个x的广义差商的计算。
 那么，即可计算题目中要求的广义差商为：

$$f[1,1,1,1,1]=\frac{f^{(4)}(1)}{4!}=\frac{840*1^3+24}{4*3*2*1}=36$$

综上：$f[2^0,2^1,\ldots,2^7]=1; f[2^0,2^1,\ldots,2^8]=0; f[1,1,1,1,1]=36.$

二、Ch6.4：

4. 求 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

解：易得，分段线性插值函数的计算方式如下：

$$f(x)=\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}f_j+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}f_{j+1}$$

因此，在区间$[a,b]$上等分取分段区间$[x_j,x_{j+1}]$，对于每一个小区间，均有：

$$\begin{aligned}I_h(x)&=\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}f(x_j)+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}f(x_{j+1})\\&=\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}x_j^2+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}x_{j+1}^2\\&=\frac{x_j^2(x-x_{j+1})-x_{j+1}^2(x-x_j)}{x_j-x(j+1)}\\&=\frac{(x_j^2-x_{j+1}^2)x+x_jx_{j+1}^2-x_j^2x_{j+1}}{x_jx_{j+1}}\\&=\frac{(x_j+x_{j+1})(x_j-x_{j+1})x+x_jx_{j+1}(x_{j+1}-x_j)}{x_j-x_{j+1}}\\&=(x_j+x_{j+1})x-x_jx_{j+1}\end{aligned}$$

在每个小区间上，由课堂讲述 ppt 可知，误差$|f(x)-I_h(x)|\le\frac{h^2}{8}M_2$，其中$M_2=\max\limits_{a\le x\le b}\{|f''(x)|\}$，$h=\max\limits_{k}(x_{k+1}-x_k)$。因此，根据题意能得到：

$$M_2=2,h=x_{j+1}-x_j$$

即误差估计为：

$$|f(x)-I_h(x)|\le\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{4}$$

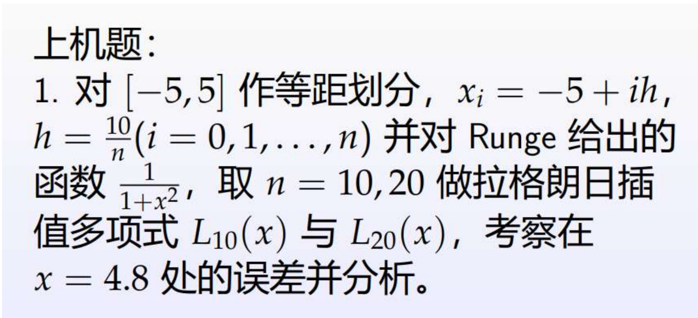
综上可得，题目需求解的分段线性插值函数$I_h(x)$为：

$$I_h(x)=(x_j+x_{j+1})x-x_jx_{j+1}$$

误差估计为：

$$|f(x)-I_h(x)|\le\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{4}$$

三、Ch6. 上机题：



解：首先，能够计算当$x=4.8$时，$f(4.8)=\frac{1}{1+4.8^2}=0.0416$

利用 Matlab 软件，编写拉格朗日插值函数的相关代码，能够得到当$x=4.8$时，如下的计算结果与误差值：

当$n=10$时：

$$L_{10}(4.8)=1.8044$$
$$error_{10}(4.8)=L_{10}(4.8)-f(4.8)=1.7628$$

当$n=20$时：

$$L_{20}(4.8)=-50.8644$$

$$error_{20}(4.8)=-50.9060$$

能够看出$error_{20}(4.8)\gg error_{10}(4.8)$，因此拉格朗日插值函数，项数大于 10 的插值函数，对于龙格函数来讲，插值项越多，误差越大。

MATLAB 代码如下：(LagrangeInterpolation.m)：

```
clear;clc;
% 数值分析
% Ch6-上机题
% 拉格朗日插值计算


L10_4p8=Lagrange(4.8,10);   % x=4.8 处 10 项拉格朗日插值函数计算值
L20_4p8=Lagrange(4.8,20);   % x=4.8 处 20 项拉格朗日插值函数计算值
f4p8=1/(1+4.8^2);   % x=4.8 处非插值函数计算值
e10_4p8=L10_4p8-f4p8    % x=4.8 处 10 项拉格朗日插值函数误差值
e20_4p8=L20_4p8-f4p8    % x=4.8 处 20 项拉格朗日插值函数误差值
```

```
function L=Lagrange(x,n)
% x 是输入的 x 的值;n 是拉格朗日函数的阶数
    h=10/n; % 步长
    xi=zeros(n+1);   % 插值计算中各节点的 x 值
    for i=1:n+1 % 计算各节点的值
        xi(i)=-5+(i-1)*h;
    end
    yi=1./(1+xi.^(2));  % 计算各节点的 y 值


    L=0;
    for j=1:n+1
        t=1;
        for k=1:n+1
            if k~=j
                t=t*(x-xi(k))/(xi(j)-xi(k));    % 拉格朗日插值函数每个节点
            end
        end
        L=L+yi(j)*t;    % 插值节点相加
    end
end
```

四、Ch7.1：

1. 确定下面求积公式中的待定系数或积分节点的待定值，使其代数精度尽量高，并指出它们所具有的代数精度：

(1) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$；

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$；

(3) $\int_{0}^{1} f(x)dx \approx A_0f(0) + A_1f(1) + B_0f'(0) + B_1f'(1)$。

解：（1）取$f(x) = 1, x, x^2$代入，通过待定系数求解各参数。

代入$f(x) = 1$可得：

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = \int_{-2h}^{2h} 1\,dx = 4h$$

代入$f(x) = x$可得：

$$-hA_{-1} + hA_1 = \int_{-2h}^{2h} x\,dx = 0$$

$$-A_{-1} + A_1 = 0$$

代入$f(x) = x^2$可得：

$$h^2A_{-1} + h^2A_1 = \int_{-2h}^{2h} x^2\,dx = \frac{16}{3}h^3$$

联立上述三个式子能够解出：

$$\begin{cases} A_{-1} = \dfrac{8}{3}h \\ A_0 = -\dfrac{4}{3}h \\ A_1 = \dfrac{8}{3}h \end{cases}$$

该求积公式有三个求积条件，因此代数精度至少为2。假设$f(x) = (x+h)x(x-h)$时，可知$H(x) = I(x) = 0$，因此该求积公式的代数精度至少为3；假设$f(x) = (x+h)x^2(x-h)$时，可知$H(x) \neq I(x)$，因此该求积公式的代数精度不会为4，综上，该求积公式的代数精度为3。

（2）取$f(x) = a, x, x^2$代入，通过待定系数求解各参数。

代入$f(x) = a$可得：

$$\frac{1}{3}(a + 2a + 3a) = \int_{-1}^{1} a\,dx = 2a$$

此式恒成立，与a的取值无关。

代入$f(x) = x$可得：

$$\frac{1}{3}(-1 + 2x_1 + 3x_2) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

代入$f(x) = x^2$可得：

$$\frac{1}{3}(1+2x_1^2+3x_2^2)=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

$$2x_1^2+3x_2^2=1$$

联立上述三个式子能够解出：

$$\begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{6}+1}{5} \\ x_2=-\frac{2\sqrt{6}}{15}+\frac{1}{5} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2=\frac{2\sqrt{6}}{15}+\frac{1}{5} \end{cases}$$

该求积公式有三个求积条件，因此代数精度至少为2。假设$f(x)=(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$时，可知$H(x)\neq I(x)$，因此该求积公式的代数精度不会为3，综上，该求积公式的代数精度为2。

（3）取$f(x)=1,x,x^2,x^3$代入，通过待定系数求解各参数。

代入$f(x)=1$可得：

$$A_0+A_1=\int_0^1 1\,dx=1$$

代入$f(x)=x$可得：

$$A_1+B_0+B_1=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

代入$f(x)=x^2$可得：

$$A_1+2B_1=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

代入$f(x)=x^3$可得：

$$A_1+3B_1=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$$

联立上述四个式子能够解出：

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{2} \\ A_1=\frac{1}{2} \\ B_0=\frac{1}{12} \\ B_1=-\frac{1}{12} \end{cases}$$

该求积公式有四个求积条件，因此代数精度至少为3。假设$f(x)=x^2(x-1)^2$时，可知$H(x)\neq I(x)$，因此该求积公式的代数精度不会为4，综上，该求积公式的代数精度为3。

五、Ch7.2：

2. 证明下列等式，它们分别说明下列三种矩形求积公式及其余项

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$, $\eta\in(a,b)$;

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$, $\eta\in(a,b)$;

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$，$\eta\in(a,b)$。

解：易得微分中值定理为：

$$f(x) = f(a) + f'(\eta)(x-a)$$

（1） 由微分中值定理与题意可得：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a) + f'(\eta)(x-a)dx$$

$$= \left[f(a)x + \frac{f'(\eta)}{2}(x-a)^2\right]_a^b$$

$$= (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

（2） 由微分中值定理与题意可得：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(b) + f'(\eta)(x-b)dx$$

$$= \left[f(b)x + \frac{f'(\eta)}{2}(x-b)^2\right]_a^b$$

$$= (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

（3） 由微分中值定理与题意可得：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)x + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{6}\,\frac{(b-a)^3}{4}$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$$

综上，即完成了题目要求的证明。