4、完美重建滤波器的双正交性的数学定义是什么？请证明其中的第二个式子与课本中第四个式子。

解：（1）完美重建滤波器的双正交性的数学定义如下：

与是内积中滤波器项的序号，当序号相同时，内积为；当序号不同时，内积为，即二者正交。双正交性即是指所有两个频带、实系数、完美建设滤波器组的脉冲响应的分析与合成都受到双正交性的约束。

（2）双正交性的第二个式子是指：

双正交性的第四个式子是指：

同时，有组成完美重建滤波器的分析与合成滤波器之间的关系：

其中，并不难看出

还有组成完美重建滤波器的条件：

上述式子的陈列均有助于该题目的证明。

* 首先进行第二个式子的证明。由分析与合成滤波器之间的关系可得：

则不难看出，。将该等式关系代入完美重建滤波器的第二个条件可得：

将上式进行反Z变换，其中利用Z变换的性质可得：

能够看出，当为奇数时，等号左边相互抵消，因此只取为偶数的情况。则将代替代入上式即有：

则可证明：

* 其次进行第四个式子的证明。由分析与合成滤波器之间的关系可得：

由此能够看出，与互为相反数，即：

将上式进行反Z变换，其中利用Z变换的性质可得：

能够看出，当为奇数时，等号左边相互抵消，因此只取为偶数的情况。则将代替代入上式即有：

则可证明：

综上，即证明了双正交性的第二个式子与第四个式子成立。