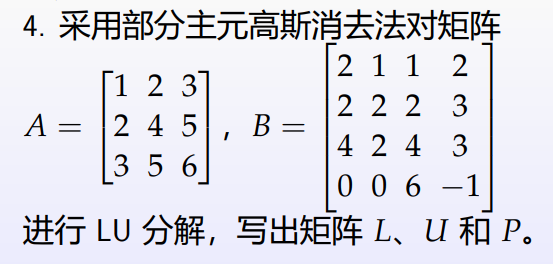
# 数值分析（电子与通信类）

## 第二次作业

### 姓名：魏子继 学号：202318019427048

1. **Ch3：4**



解：（1）对进行LU分解：

将存储为二维数组，并设.交换第一行、第三行得到：

利用第一行，将第二行、第三行的第一项化为，即第二行加上倍的第一行，第三行加上倍的第一行，能够得到：

随后，再将与以相反数填入能够得到：

随后，重复上述步骤，直至将除了第一行之外都处理。此时不用交换，利用第二行将第三行第二列消为0得：

填入相反数得：

由此，可得矩阵的LU分解为：

（2）对进行LU分解：

交换第一行、第三行得到：

利用第一行，将第二行、第三行的第一列化为0得到：

以相反数填入得：

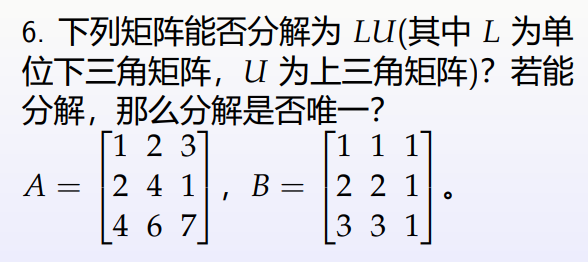
交换第三行、第四行得到：

利用第三行，将第四行的第三列化为0得：

以相反数填入得：

由此，可得矩阵的LU分解为：

1. **Ch3：6**



解：（1）判断矩阵是否能够LU分解。经判断，不能进行LU分解。

首先，计算的前两个顺序主子式，易得，即第一个顺序主子式不为0。计算第二个顺序主子式：

因此，不存在唯一的LU分解。则不存在LU分解或存在无数个LU分解。

进一步判断，若利用第一行，将的第二行、第三行的第一列元素化为，则能够得到：

能够看到，此时的第二行第二列元素为，第三行第二列的元素不为，这意味着无论对第二行怎样变换，都无法将第三行第二列的元素化为0，即已无法继续进行LU分解。因此，不能进行LU分解。

（2）判断矩阵是否能够LU分解。经判断，存在无穷多种LU分解。

首先，计算的前两个顺序主子式，易得，即第一个顺序主子式不为0。计算第二个顺序主子式：

因此，不存在唯一的LU分解。则不存在LU分解或存在无数个LU分解。

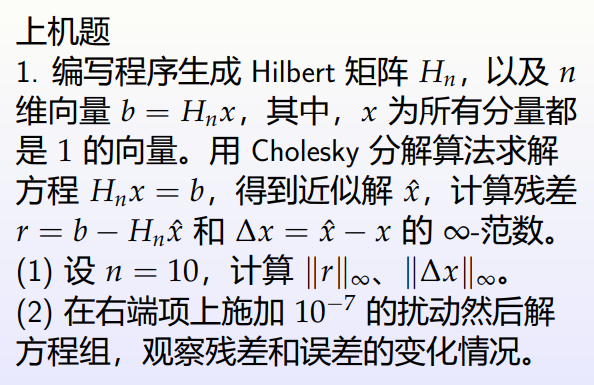
进一步判断，若利用第一行，将的第二行、第三行的第一列元素化为，则能够得到：

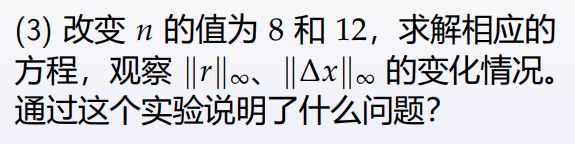
能够看到，此时的第二行第二列元素为，第三行第二列的元素也为，这意味着无论对第二行怎样变换，都能够将第三行第二列的元素化为0，即能够将矩阵化为：

这样，能够看出，取任何实数，都是符合LU分解条件的。因此，矩阵存在无穷多种LU分解。

综上，矩阵不能进行LU分解，矩阵存在无穷多种LU分解。

1. **Ch3：上机题**





解：（1）由题意，利用Matlab软件，编写代码生成Hilbert矩阵与对应的n维向量，其中由得到，其中为分量为1的向量，即的每一行元素为Hilbert矩阵的每一行元素之和。随后，将认为是待求解量，利用Matlab软件，编写代码使用Cholesky分解方法求解方程组的解，求解的结果为：

由此，能够计算求解残差的无穷范数为：

同样地，能够计算求解误差的无穷范数为：

（2）依题意，得到新的b向量为：

重复上述利用Choleshy分解的上三角矩阵求解线性方程组解的方法，能够解出增加扰动后的新的解为：

随后，能够计算增加扰动后，解的残差的无穷范数为：

同样地，能够计算增加扰动后，解的误差的无穷范数为：

观察与能够看出，增加量级的扰动后，解的残差几乎没有变化；观察与能够看出，增加量级的扰动后，误差变化剧烈，无穷范数值增加了近千倍。这说明利用Cholesky分解法求解Hilbert矩阵为系数的线性方程组时，解的误差对扰动敏感。

（3）重复上述步骤，求解利用Cholesky分解矩阵求解不同维度的Hilebrt矩阵为系数的线性方程组。分别求解与时的残差与误差，。利用Matlab软件能够解出：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

同时对比时求解的与能够看出，残差基本没变，但随着的增大而增大，并且是指数级别的增大。这说明了，利用Cholesky分解法求解Hilbert矩阵为系数的线性方程组时，解的误差对Hilbert矩阵的维数敏感，换而言之，Hilbert矩阵是病态的。

MATLAB代码：（Cholesky.m）

clear;clc;

% 数值分析

% 第二次作业

% Ch3-上机题 Cholesky分解

% 生成Hilbert矩阵

n=8;

H=zeros(n,n);

for i=1:n

for j=1:n

H(i,j)=1/(i+j-1);

end

end

% 计算b

x=ones(n,1);

b=H\*x;

% Cholesky分解

C=chol(H); % C为上三角矩阵

% C=zeros(n,n);

% % 求第一列

% C(1,1)=sqrt(H(1,1));

% for i=2:n

% C(i,1)=H(i,1)/C(1,1);

% end

% % 求剩下L-1列

% for j=2:n

% for i=2:n

% C(j,j)=sqrt(H(j,j)-sum(C(j,1:j-1).^2));

% if i>j

% C(i,j)=(H(i,j)-sum(C(i,1:j-1).\*C(j,1:j-1)))/C(j,j);

% end

% end

% end

% 由Cholesky分解的矩阵求解xhat

y=C'\b;

xhat=C\y;

% 计算残差与误差的无穷范数

rnorm=norm(b-H\*xhat,"inf")

deltaxnorm=norm(xhat-x,"inf")

%% 第二问

% 增加扰动

bnew=b+10e-7;

ynew=C'\bnew;

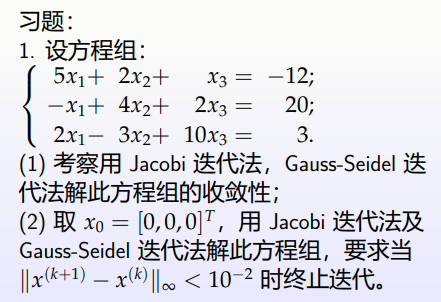
xhatnew=C\ynew;

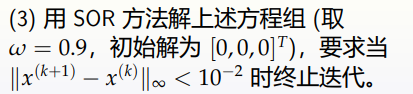
% 计算新的残差与误差的无穷范数

rnormnew=norm(bnew-H\*xhatnew,"inf");

deltaxnormnew=norm(xhatnew-x,"inf");

1. **Ch4：1**





解：（1）经判断，使用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解此方程组均收敛。判断过程如下：

1. Jacobi迭代法：

由题意得，该方程组的系数矩阵与右端项矩阵为：

依据Jacobi迭代法的计算流程，能够将该系数矩阵分裂为、、，它们分别为：

由此，能够将Jacobi迭代法的迭代公式以矩阵的形式写出，即：

可见，该迭代公式中：

根据1阶定常迭代法基本定理，依据矩阵的谱半径是否小于1能够判断迭代法是否收敛。由此计算的谱半径：

由此看出，谱半径小于1，因此Jacobi迭代法解此方程组收敛。

1. Gauss-Seidel迭代法：

与判断Jacobi迭代法是否收敛的方法同理，首先根据的分裂矩阵，能够求出矩阵形式的Gauss-Seidel迭代公式为：

可见，该迭代公式中：

根据1阶定常迭代法基本定理，依据矩阵的谱半径是否小于1能够判断迭代法是否收敛。由此计算的谱半径：

由此看出，谱半径小于1，因此Jacobi迭代法解此方程组收敛。

（2）由（1），可分别列出矩阵形式的解此方程组的Jacobi迭代法和Gauss- Seidel迭代法的迭代公式为：

* Jacobi迭代法：
* Gauss-Seidel迭代法：

利用Matlab软件，依据两个迭代法的迭代公式、该题目题意中的初始点值与迭代终止条件，能够编写相关代码，迭代求解该方程组。迭代计算的迭代次数和结果如下：

* Jacobi迭代法：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

* Gauss- Seidel迭代法：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

（3）由（1）中，系数矩阵的分裂矩阵，能够写出SOR迭代法迭代公式的矩阵形式为：

利用Matlab软件，依据该迭代公式与题目中所给的初始条件、设置参数和迭代终止，能够编写相关代码，迭代求解该方程组。迭代计算的迭代次数和结果如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

MATLAB代码：

1. Jacobi迭代法（Jacobi.m）：

clear;clc;

% 数值分析

% 第二次作业

% Ch4-1 Jacobi迭代计算

D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];

L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];

U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];

b=[-12;20;3];

B=D\(L+U); % 求迭代公式中的B

f=D\b; % 求迭代公式中的f

[v,lambda]=eig(B);

sqrt(0.1074^2+0.4946^2); % 谱半径

k=1;

x=zeros(3,2);

x(:,k+1)=B\*x(:,1)+f;

disp("------------iter:1--------------")

double(x)

while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02

k=k+1;

x(:,k+1)=B\*x(:,k)+f;

disp("------------iter: "+k+"--------------")

double(x)

end

1. Gauss-Seidel迭代法（Gauss\_Seidel.m）：

clear;clc;

% 数值分析

% 第二次作业

% Ch4-1 Gauss-Seidel迭代计算

D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];

L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];

U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];

b=[-12;20;3];

B=(D-L)\U % 求迭代公式中的B

f=(D-L)\b % 求迭代公式中的f

[v,lambda]=eig(B)

sqrt(0.1125^2+0.1654^2) % 谱半径

k=1;

x=zeros(3,2);

x(:,k+1)=B\*x(:,1)+f;

disp("------------iter:1--------------")

double(x)

while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02

k=k+1;

x(:,k+1)=B\*x(:,k)+f;

disp("------------iter: "+k+"--------------")

double(x)

end

SOR迭代法（SOR.m）：

clear;clc;

% 数值分析

% 第二次作业

% Ch4-1 SOR迭代计算

D=[5,0,0;0,4,0;0,0,10];

L=[0,0,0;1,0,0;-2,3,0];

U=[0,-2,-1;0,0,-2;0,0,0];

b=[-12;20;3];

w=0.9;

B=(D-w\*L)\((1-w)\*D+w\*U) % 求迭代公式中的B

f=(D-w\*L)\(w\*b) % 求迭代公式中的f

k=1;

x=zeros(3,2);

x(:,k+1)=B\*x(:,1)+f;

disp("------------iter:1--------------")

double(x)

while norm(x(:,k+1)-x(:,k),"inf")>=0.02

k=k+1;

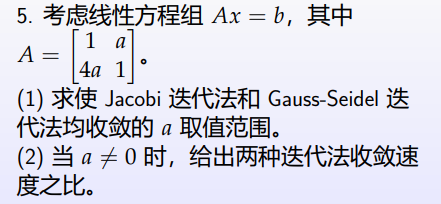
x(:,k+1)=B\*x(:,k)+f;

disp("------------iter: "+k+"--------------")

double(x)

end

1. **Ch4：5**



解：（1）由题意得，根据对角占优定理，当为严格对角占优矩阵或不可约对角占优矩阵时，解方程组的Jacobi迭代法与Gauss-Seidel迭代法均收敛。考虑为严格对角占优矩阵，能够列出该方程组求解的取值范围：

解得：。由此，可知，当时，解方程组的Jacobi迭代法与Gauss-Seidel迭代法均收敛。

（2）根据迭代法迭代速度的计算方式可知，需要首先计算迭代法迭代公式中系数矩阵的谱半径。由题意，对分裂为对应的矩阵、、：

* Jacobi迭代法的谱半径：

根据Jacobi迭代法的计算流程，能够写出矩阵形式的Jacobi迭代法的迭代公式：

能够看出，其中，由此能够求出矩阵的谱半径。谱半径的计算公式为：

因此，需要先行计算B矩阵的特征值。计算流程与结果如下：

由此，能够得到Jacobi迭代法的谱半径为：

* Gauss-Seidel迭代法的谱半径：

根据Gauss-Seidel迭代法的计算流程，能够写出矩阵形式的Gauss-Seidel迭代法的迭代公式：

能够看出，其中。同求解Jacobi迭代法谱半径的求解步骤，能够求出矩阵的谱半径。因此，矩阵的特征值为：

由此得出，Gauss-Seidel迭代法的谱半径为：

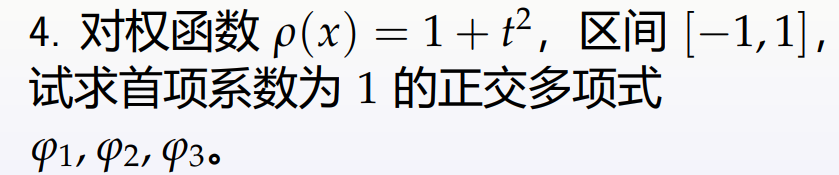
由此，能够分别计算Jacobi与Gauss- Seidel迭代法的迭代速度为：

* Jacobi迭代法：
* Gauss- Seidel迭代法：

最后，能够得出Jacobi与Gauss-Seidel迭代法的迭代速度之比为：

即Jacobi迭代法的迭代速度是Gauss-Seidel迭代法的迭代速度的

1. **Ch5：4**



解：求解正交多项式的递推公式为：

其中，，，。

同时，在本题中，计算内积时，在积分函数中，应乘上权函数.

由题意得：

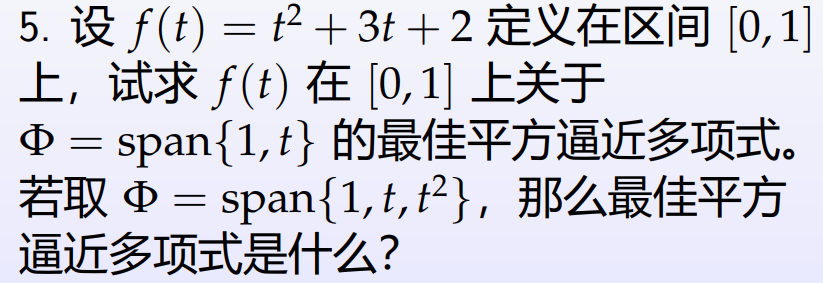
由递推公式得：

随后，即可由前两项递推计算得到下一项的值。当前已有与，计算的过程与结果如下：

同理，由与，根据递推公式能够计算，计算过程与结果如下：

综上所述，可得本题的求解答案：

1. **Ch5：5**



解：（1）根据最佳平方逼近多项式求解方法，当，区间为时，法方程中的系数矩阵为：

法方程的右端项为：

其中，分别计算两项积分：

由此，能够得出法方程为：

可解出该法方程的解为：

由此，可得出区间上的关于的最佳平方逼近多项式为：

（2）由题意，当时，法方程的系数矩阵为：

法方程的右端项为：

计算右端项的第三项积分为：

由此，能够得出法方程为：

可解出该法方程的解为：

由此，可得出区间上的关于的最佳平方逼近多项式为：

综上：当时，最佳平方逼近多项式为：

当时，最佳平方逼近多项式为：