Introduction to Digital Signal Processing

1. 디지털 신호처리 기초

신호의 종류

신호는 시공간적으로 변하는 물리량으로, 형태에 따라 아날로그 신호와 디지털 신호로 나눌 수 있다.

신호를 목적에 맞게 가공하는 과정을 **신호처리**라고 한다.

하나의 소스에서 발생되는 신호를 **스칼라 신호**라고 하고, 시간에 따라 두 개 이상의 소스에서 발생하는 신호를 **벡터 신호**라고 한다. 스칼라 신호는 하나의 독립 변수로 표현할 수 있으므로 **1차원 신호**라고 하고, 벡터 신호는 두 개 이상의 독립 변수로 표현되므로 **다차원 신호**라고 한다. 예를 들어 영상(image)신호는 2차원 신호이며, 동영상(video) 신호는 3차원 신호이다.

디지털화

아날록 신호를 디지털 시스템에서 처리하기 위한 과정을 **디지털화 과정**이라고 한다. 디지털화는 기본적으로 **샘플링**과 **양자화**를 거쳐서 수행된다. 샘플링은 연속 시간 신호를 이산 시간 신호로 변환하는 과정을 말하고, 양자화는 신호의 크기를 연속된 크기에서 몇 개의 크기로 매핑하는 과정을 말한다.

일반적으로 연속 신호를 샘플링하여 얻은 신호를 **이산 신호**라고 하고, 이를 양자화해서 얻은 신호를 **디지털 신호**라고 한다.

나이퀴스트 샘플링 정리

샘플링을 촘촘하게 수행할수록 이산 신호는 연속 신호로 손실 없이 복원될 수 있다. 나이퀴스트가 증명한 샘플링 정리에 따르면 대역 제한된 신호(band-limited signal)에 대해, 몇 개의 이산 표본으로 원래의 아날로그 신호를 완벽하게 표현할 수 있다.

2. 시간 영역에서의 분석

신호

단위 임펄스 신호는 하나의 샘플 신호를 가지는 신호로, 다음과 같이 정의된다.

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases}$$

단위 계단 신호는 신호가 계단 형태여서 붙여진 이름으로 다음과 같이 정의된다.

$$u[n] = \begin{cases} 1, & (n \geq 0) \\ 0, & (n < 0) \end{cases}$$

단위 계단 신호를 1 지연시킨 후 빼서 단위 임펄스 신호를 얻을 수 있다.

시스템

이산 신호 x는 샘플 인덱스 n에 대하여 $x[n]$와 같이 표현한다.

> $x[n]$은 일종의 함수이기 때문에 상수로 착각하지 않도록 하자.

이산 신호를 입력으로 받을 때 이산 출력 신호를 생성하는 함수를 **시스템**이라고 한다.

선형 · 비선형 시스템

중첩 합 정리를 만족시키는 시스템을 **선형 시스템**, 그렇지 않은 시스템을 **비선형 시스템**이라고 한다.

중첩 합 정리는 합 성질과 스칼라 곱 성질을 모두 만족시키는 것으로, 시스템 T에 대하여 간단히 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T\{\alpha x[n]+\beta y[n]\}=\alpha T\{x[n]\}+\beta T\{y[n]\}$$

시불변 · 시가변 시스템

어떤 입력 신호 $x[n]$에 대하여 출력 신호 $y[n]$이 생성되는 시스템 T과 모든 정수 k에 대하여 $x[n-k]$를 입력 신호로 했을 때 출력 신호가 $y[n-k]$가 생성되는 시스템을 **시불변 시스템**이라고 하며 그렇지 않은 시스템을 **시가변 시스템**이라고 한다.

예제

다음 시스템이 시불변 시스템인지 시가변 시스템인지 밝히시오.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

신호 $x_1[n]$을 n_0만큼 지연시켜서 얻은 데이터를 시스템에 통과시키면

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k]=y[n-n_0]$$

을 얻을 수 있다. 따라서 이 시스템은 시불변 시스템이다.

> 위에 주어진 시스템은 **누산기** 시스템이라 불린다.

임펄스 응답 시스템

임의의 시스템이 갖는 고유한 성질을 알고자 할 때 주로 사용하는 방법은 시스템에 임퍼스 입력 $\delta[n]$을 넣어 나오는 출력 $h[n]$의 형태로 파악하는 것이다. 이를 **임펄스 응답**이라고 한다. 임펄스 응답은 이산 시스템의 고유한 성질을 반영하게 되어 **임펄스 응답 시스템**이라고 부른다.

LTI 시스템

선형성과 시불변성을 동시에 만족하는 시스템을 **LTI(Linear time-invariant) 시스템**이라고 한다. LTI 시스템은 입력과 출력의 관계를 쉽게 해석할 수 있어서 매우 중요한 시스템이다. LTI 시스템에서 임펄스 응답은 아주 큰 역할을 한다.

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n]=T\{x[n]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n]T\{\delta[n-k]\}\quad\cdots\ \text{linearity}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n]h[n-k]=x[n]*h[n]\quad\cdots\ \text{time invariant}$$

위의 과정을 통해 LTI시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 가지고 있으면, 그 출력 $y[n]$을 곧바로 알 수 있다는 사실을 알 수 있다. 또한 LTI의 시스템의 이러한 특성 때문에, 여러 LTI 시스템을 직렬로 통과시키는 것은 여러 개의 임펄스 응답 $h_2[x], h_2[n], \cdots$을 연쇄적으로 컨벌루션을 수행하는 것으로 계산할 수 있다. 이는 결국 여러 개의 LTI 시스템의 임펄스 응답을 가지고 있으면 이를 단 한 번의 컨벌루션으로 줄일 수 있다는 것을 함의한다. 따라서 시스템을 설계할 때, 여러 LTI 시스템을 직렬로 연결해서 마음에 드는 시스템을 얻

어내고 나서 그 최종 임펄스 응답만을 기록하면 된다. 이와 같은 방법으로 뮤직 플레이어에서 가끔 볼 수 있는 이퀄라이저가 만들어진다.

인과성(causality)과 안정성(Stability)

LTI 시스템의 임펄스 응답이 절대 수렴할 때, LTI 시스템은 **안정성**을 갖는다고 말한다.

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

LTI 시스템이 과거와 현재에만 영향을 받고, 미래 신호에 대해서는 영향을 받지 않을 때, LTI 시스템은 **인과성**을 갖는다고 말한다.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\text{위의 적분식에서 오른쪽 항은 미래 시간에 대한 식이므로 인과성을 갖기 위해서는}$$

$$h(t-\tau) = 0 \ for \ t \le \tau < \infty$$

따라서, 인과성의 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\therefore h(t) = 0 \ \text{ if } t < 0$$

3. 신호의 변환(transform)

신호의 확장

신호를 **확장**한다는 것은 같은 신호를 다른 기저로 표현한다는 것이다. 어떤 공간의 모든 원소를 **선형 독립**인 몇 개의 원소의 **선형 조합**으로 표현 가능할 때, 그 몇개의 원소를 그 공간의 **기저**라고 한다.

정현·여현파의 선형 독립

정현파 함수와 여현파 함수에는 다음과 같은 성질이 있다.

$$< \sin(mx), \sin(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \pi\delta_{mn}$$

$$< \cos(mx), \cos(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{mn}$$

$$< \sin(mx), \cos(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0$$

$$< \sin(mx), 1 >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)dx = 0$$

$$< \cos(nx), 1 >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0$$

푸리에 계수

따라서 폐구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 직교(orthogonal)하는 정현파 및 여현파 함수들을 이용해 다음과 같이 원본 연속 신호 f를 확장할 수 있다.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

각 계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

여기서 오일러 전개를 이용하면

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{jnx} + e^{-jnx})$$

$$\sin(nx) = \frac{1}{2j}(e^{jnx} - e^{-jnx})$$

이므로 c_n을 다음과 같이 정의하면

$$c_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}jb_n$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}jb_n$$

다음 식에 의해서

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2}j\right)e^{jnx} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}j\right)e^{-jnx}$$

f를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

> 푸리에 계수 c_n은 a_n과 b_n 성분을 모두 가지고 있다. 따라서 실수가 아닌 복소수로 존재할 수 있다. $|c_n|$은 각 주파수 성분의 진폭이 되고, $\angle c_n$은 각 주파수 성분의 위상이 된다.

푸리에 변환

일반적으로 연속 시간 위에서 정의되는 비주기 신호의 푸리에 분석을 연속 시간 푸리에 변환(CTFT: Continuous Time Fourier Transform)이라고 한다.

비주기 연속 신호의 푸리에 변환은 다음과 같이 계산한다.

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

이산 푸리에 변환

이산 푸리에 변환은 연속 푸리에 변환을 영차 홀드 근사를 이용해서 리만 근사한 것으로 다음과 같이 계산한다.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{2\pi}{N} nk}$$

주파수 응답 함수

임펄스 응답 $h[n]$을 갖는 선형 시불변 이산 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있었다.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

여기에 $x[n]$을 복소 지수 함수라고 생각하면 선형 시불변 시스템의 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

여기서 괄호로 묶은 부분은 임펄스 응답 $h[k]$에 대한 푸리에 변환이다. 따라서 이 계수를 $H(e^{j\omega})$로 대체하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

이 계수는 n에 대하여 독립이므로 이는 복소 상수로 볼 수 있고, 이렇게 입력의 상수배가 되면서 출력을 만들어낼 수 있는 함수를 그 함수의 **고유 함수**(eigen function)라고 한다. 따라서 복소 지수 함수 $e^{j\omega n}$은 LTI 시스템의 고유 함수가 된다.

이 때, $H(e^{j\omega})$ 를 **주파수 응답 함수**라고 한다.

무한 임펄스 응답 저주파 패스 필터(IIR LPF: Infinite Impulse Response Low Pass Filter)

주파수 대역에서 **이상적인 저주파 패스 필터**를 설계하면 다음과 같은 주파수 응답 함수를 생각할 수 있다.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

이 함수의 푸리에 역변환인 임펄스 응답 $h[n]$은 다음과 같다. (이는 구형파 신호의 푸리에 변환이 $sinc$함수인 것과 푸리에 변환 결과에 한 번 더 푸리에 변환을 수행한 결과와 원본 신호 간의 관계를 따져 보면 알 수 있다.)

$$h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

이 때, w_c는 $0 < w_c < \pi$를 만족하도록 정규화되어 있기 때문에 $w_c = \pi f_c$에서 , 컷오프 주파수 f_c는 나이퀴스트 주파수 $f_s = \frac{N}{2}$에 대하여 컷오프 될 주파수 샘플인 N_c를 정하고 $f_c = \frac{N_c}{f_s}$ 으로 잡아야 한다. 따라서 실습에서는 임펄스 응답 h_n 의 w_c를 다음과 같이 잡았다.

$$w_c = \frac{2\pi N_c}{N}$$

```python
# IIR 임펄스 응답
def h(n: int):

    f_c = 600
    w_c = 2*pi*f_c / SAMPLE_RATE

    if n==0:
        return w_c / pi
    else:
        return sin(w_c * n) / pi / n
```