



Politechnika Wrocławska

Sterowanie Procesami Ciągłymi

Opracowanie zagadnień laboratoryjnych nr 4, 5, 6

**Układ o złożonej strukturze połączeń, układ
automatycznej regulacji
Obiekty z czasem dyskretnym i regulacja dyskretna
Identyfikacja parametrów w systemie
niestacjonarnym**

Skład grupy

Filip Chmielowski, Eryk Możdżeń

Wydział i kierunek studiów

W12N, Automatyka i Robotyka

Kod grupy zajęciowej, termin zajęć

Y01-38g, śr. 13:15 - 15:00 TN

Prowadzący

Mgr inż. Maciej Filiński

Data wykonania ćwiczenia, termin oddania sprawozdania

4: 23.11.2022, 5: 07.12.2022, 6: 21.12.2022, Oddanie: 18.01.2023

1 Układ o złożonej strukturze połączeń, układ automatycznej regulacji

W ćwiczeniu rozpatrywany był obiekt o transmitancji:

$$K_O(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (1)$$

Zadawany był na niego sygnał:

$$y_0(t) = 1(t) \quad (2)$$

1.1 Regulator P, stabilność układu regulacji, wartość błędu

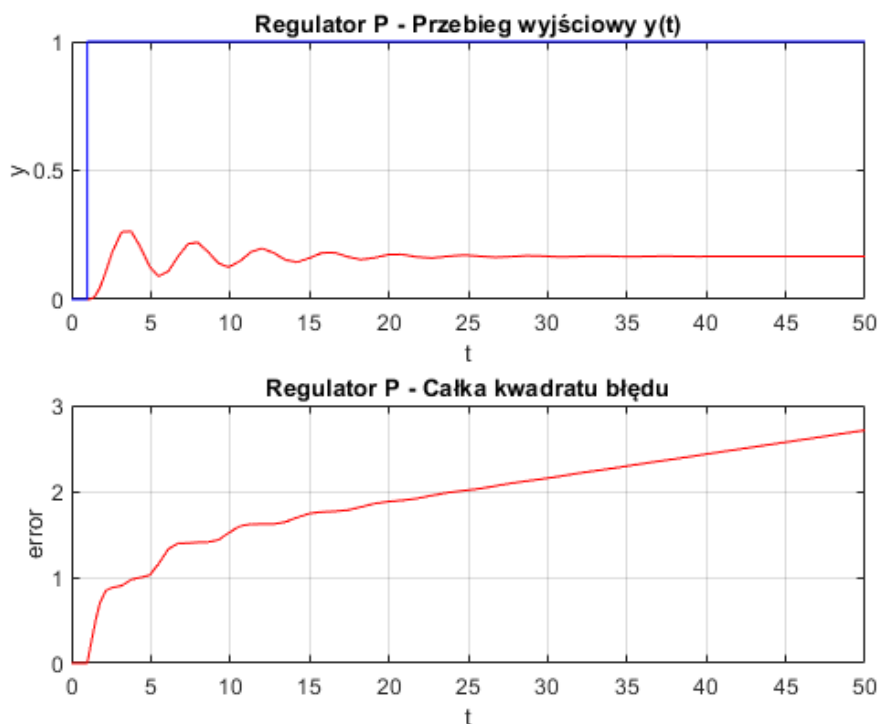
Zastosowany został regulator **P**:

$$K_R(s) = k_p \quad (3)$$

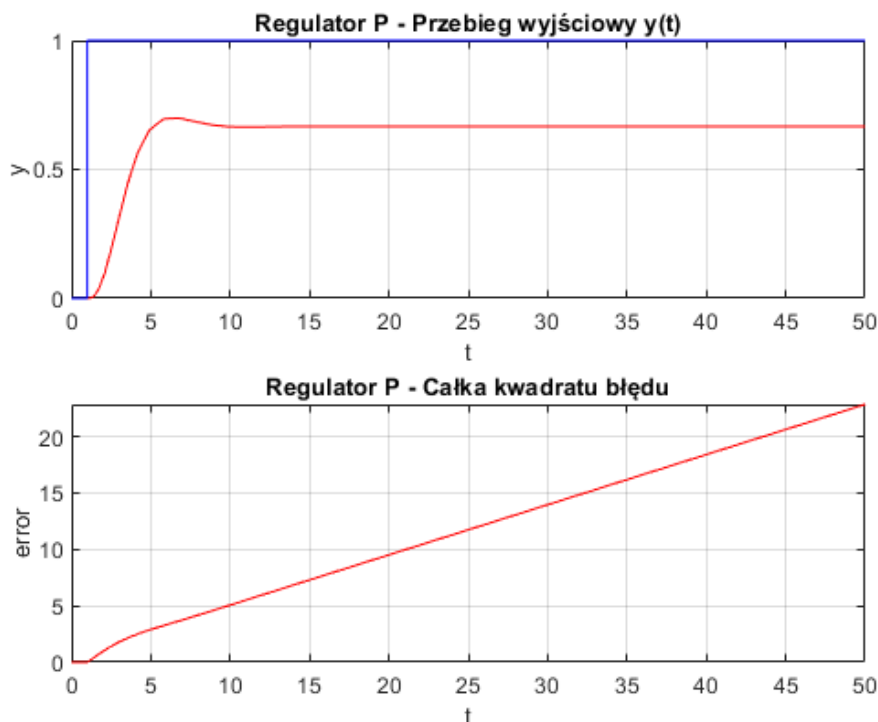
Zbadaliśmy, dla jakich wartości parametru k_p układ automatycznej regulacji pozostawał w stanie stabilnym oraz jak zależała od tego wartość całki kwadratu błędu ϵ_{ust} .

Przeprowadziliśmy odpowiednie symulacje, w których zmienialiśmy wartość parametru k_p i obserwowaliśmy zmiany odpowiedzi układu automatycznej regulacji. Na ich podstawie doszliśmy do wniosku, iż układ ten pozostaje w stanie stabilnym dla wartości parametru $k_p > -1$.

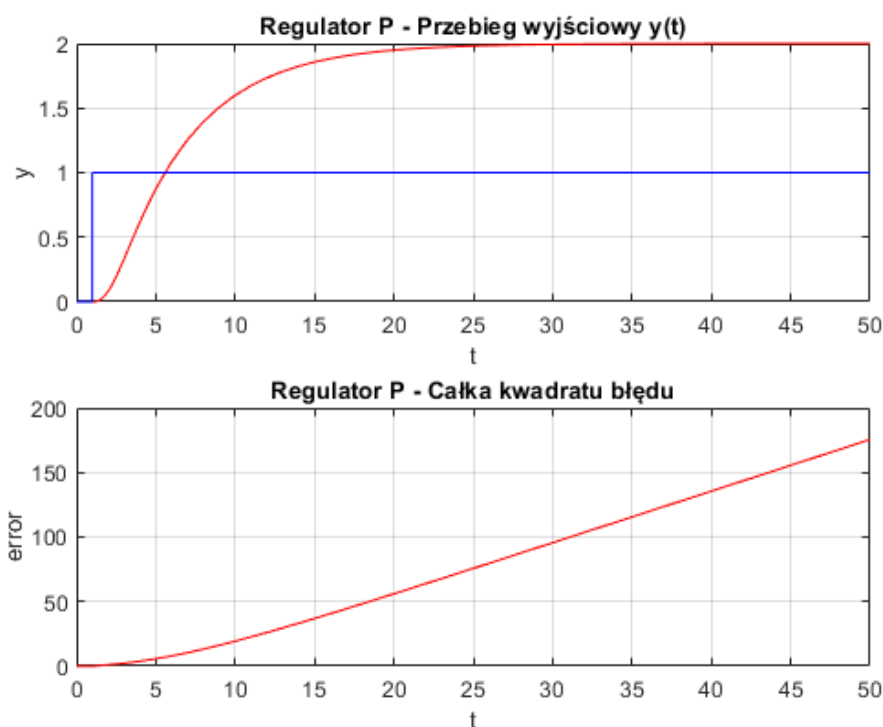
Poniżej zilustrowane zostały przebiegi dla kilku wybranych wartości $k_p = 5; k_p = 0,5; k_p = -0,5$ wraz z odpowiadającymi im przebiegami całki kwadratu błędu ϵ_{ust} .



Rysunek 1: Przebieg wyjściowy regulatora P dla $k_p = 5$ oraz całka kwadratu błędu ϵ_{ust}



Rysunek 2: Przebieg wyjściowy regulatora P dla $k_p = 0,5$ oraz całka kwadratu błędu ϵ_{ust}



Rysunek 3: Przebieg wyjściowy regulatora P dla $k_p = -0,5$ oraz całka kwadratu błędu ϵ_{ust}

Ujemna wartość parametru $k_p = -0,5$, przyjęta podczas wykonywania ostatniej symulacji, została założona czysto hipotetycznie, aby zobrazować bliskość rozpatrywanego układu regulacji względem granicy stabilności. W praktyce nie stosuje się jednak ujemnych wartości tego parametru.

1.2 Teoretyczna stabilność układu regulacji regulatora P

Wyznaczyliśmy wartości parametru k_p , dla których system pozostawał w stanie stabilnym, w sposób teoretyczny (za pomocą metody Hurwitza) oraz porównaliśmy je z wynikami z powyższego podpunktu.

Przeprowadziliśmy obliczenia analityczne, stosując metodę Hurwitza, z której wynikło, iż układ regulacji pozostawał w stanie stabilnym dla wartości parametru $k_p > -1$:

$$K_O(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (4)$$

$$K_R(s) = k_p \quad (5)$$

$$K_Z(s) = \frac{K_O(s)}{1 + K_O(s) * K_R(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^3}}{1 + \frac{1}{(s+1)^3} * k_p} = \frac{1}{(s+1)^3 + k_p} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k_p} \quad (6)$$

Macierz Hurwitza (oraz jej podwyznaczniki):

$$H_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 + k_p \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = 3 * 3 - 1 * 1 = 9 - 1 = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 * (1 + k_p) = 8 * (1 + k_p) = 8 + 8 * k_p \Rightarrow k_p > -1$$

Otrzymany wynik jest zgodny z tym, co wykazały symulacje w poprzedniej części zadania, w związku z czym stwierdzamy, iż rozpatrywany układ automatycznej regulacji P pozostaje w stanie stabilnym dla wartości parametru $k_p > -1$.

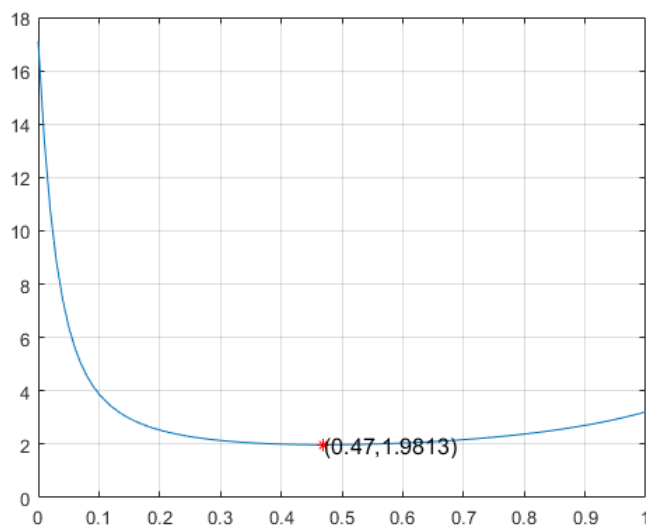
1.3 Regulator PI, minimalizacja kryterium $Q(k_p, k_i)$

Tym razem zastosowany został regulator **PI**:

$$K_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (7)$$

Dla ustalonej wartości parametru k_p , zminimalizowaliśmy poniższe kryterium:

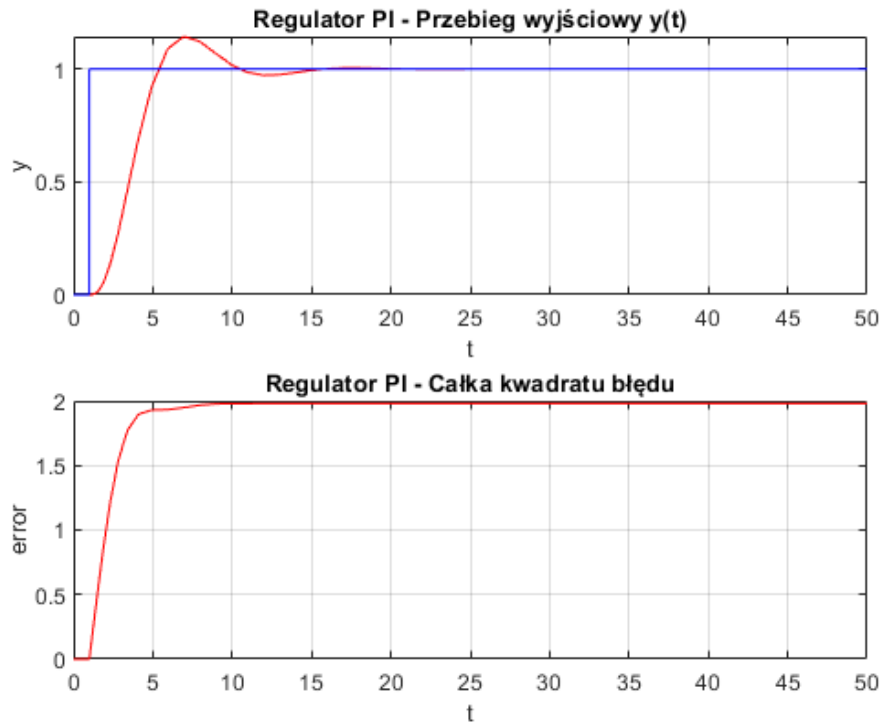
$$Q(k_p, k_i) = \int_0^\infty \epsilon^2(t) dt \quad (8)$$



Rysunek 4: Znalezienie, zaznaczenie oraz wypisanie współrzędnych minimum funkcji

Dla przyjętej stałej wartości $k_p = 0,75$, wyznaczone zostało minimum powyższego przebiegu. Jego współrzędne przyjmują wartość:

$$\begin{cases} x = 0,47 \\ y = 1,9813 \end{cases}$$

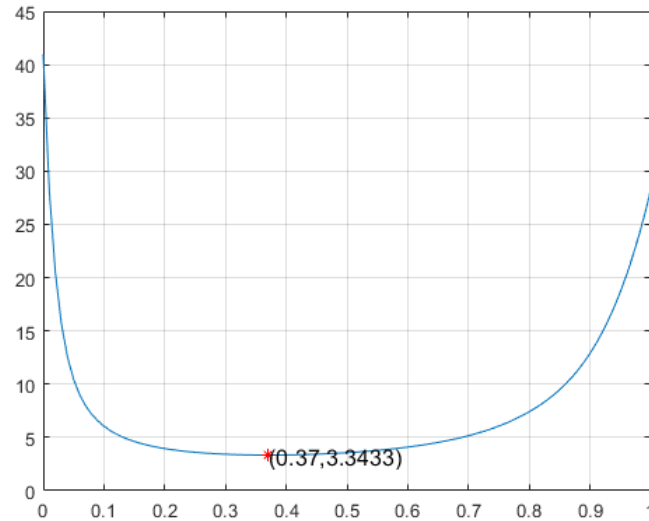


Rysunek 5: Przebieg wyjściowy regulatora PI dla $k_p = 0,75$ i $k_i = 0,47$ oraz całka kwadratu błędu

Dla przyjętej stałej wartości $k_p = 0,75$ oraz znalezionej wartości parametru $k_i = x = 0,47$, kryterium $Q(k_p, k_i)$ przyjmuje wartość minimalną. Wobec tego, dla uzyskanych wartości zasymulowana została odpowiedź układu automatycznej regulacji PI oraz odpowiadająca jej całka kwadratu błędu, co przedstawia powyższy wykres. Układ regulatora PI szybko stabilizuje się dla wartości $k_p = 0,75$ oraz $k_i = 0,47$.

1.4 Regulator PI

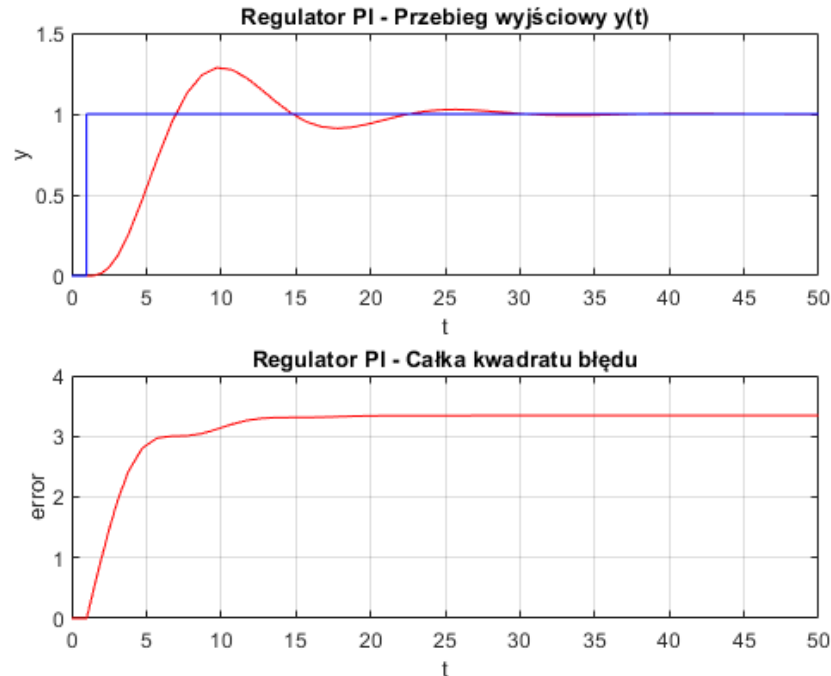
W ostatniej części ćwiczenia, powtórzyliśmy czynności z poprzedniego podpunktu dla zmienionej wartości k_p , której przypisaliśmy wartość równą $k_p = 0,1$.



Rysunek 6: Znalezienie, zaznaczenie oraz wypisanie współrzędnych minimum funkcji

Dla przyjętej stałej wartości $k_p = 0,1$, wyznaczone zostało minimum powyższego przebiegu. Jego współrzędne przyjmują wartość:

$$\begin{cases} x = 0,37 \\ y = 3,3433 \end{cases}$$



Rysunek 7: Przebieg wyjściowy regulatora PI dla $k_p = 0,1$ i $k_i = 0,37$ oraz całka kwadratu błędu

Dla przyjętej stałej wartości $k_p = 0,1$ oraz znalezionej wartości parametru $k_i = x = 0,37$, kryterium $Q(k_p, k_i)$ przyjmuje wartość minimalną. Wobec tego, dla uzyskanych wartości zasymulowana została odpowiedź układu automatycznej regulacji PI oraz odpowiadająca jej całka kwadratu błędu, co przedstawia powyższy wykres. Układ regulatora PI dosyć szybko stabilizuje się dla wartości $k_p = 0,1$ oraz $k_i = 0,37$.

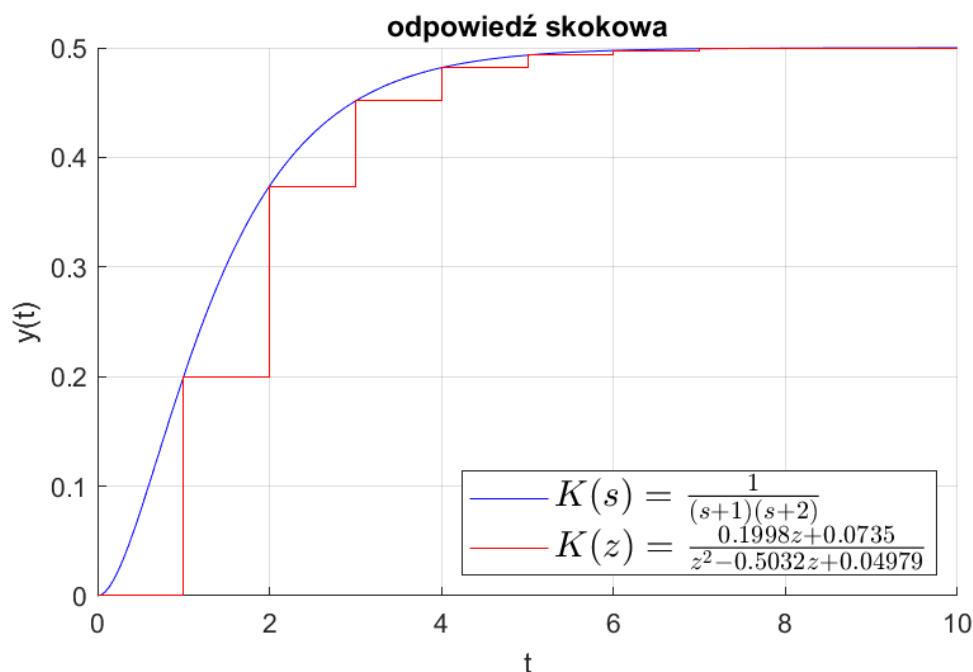
2 Obiekty z czasem dyskretnym i regulacja dyskretna

2.1 Odpowiedź skokowa systemu ciągłego oraz systemu dyskretnego

Ćwiczenie rozpoczęliśmy od porównania odpowiedzi skokowych systemu ciągłego oraz systemu dyskretnego. System ciągły opisany był transmitancją (9), natomiast jego dyskretny odpowiednik (10) obliczony został w środowisku Matlab za pomocą funkcji *c2d* (continuous-to-discrete).

$$K(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (9)$$

$$K(z) = \frac{0.1990z + 0.0735}{z^2 - 0.5032z + 0.0498} \quad (10)$$



Rysunek 8: Porównanie odpowiedzi skokowej systemu ciągłego oraz systemu dyskretnego

Na przebiegach odpowiedzi skokowych systemu ciągłego oraz systemu dyskretnego zauważyć można, iż mają one bardzo podobny kształt oraz, w punktach istnienia wartości układu dyskretnego, nakładają się na siebie.

2.2 Dyskretny regulator PI, optymalizacja funkcji $Q(k_p, k_i)$

Następnie, mając podaną transmitancję obiektu $K_o(s)$ (11) oraz wykorzystując regulator PI (12), wyznaczona została transmitancja ciągła systemu automatycznej regulacji (13). Dyskretna transmitancja została następnie wyznaczona z wykorzystaniem funkcji *c2d* (continuous-to-discrete) w środowisku Matlab.

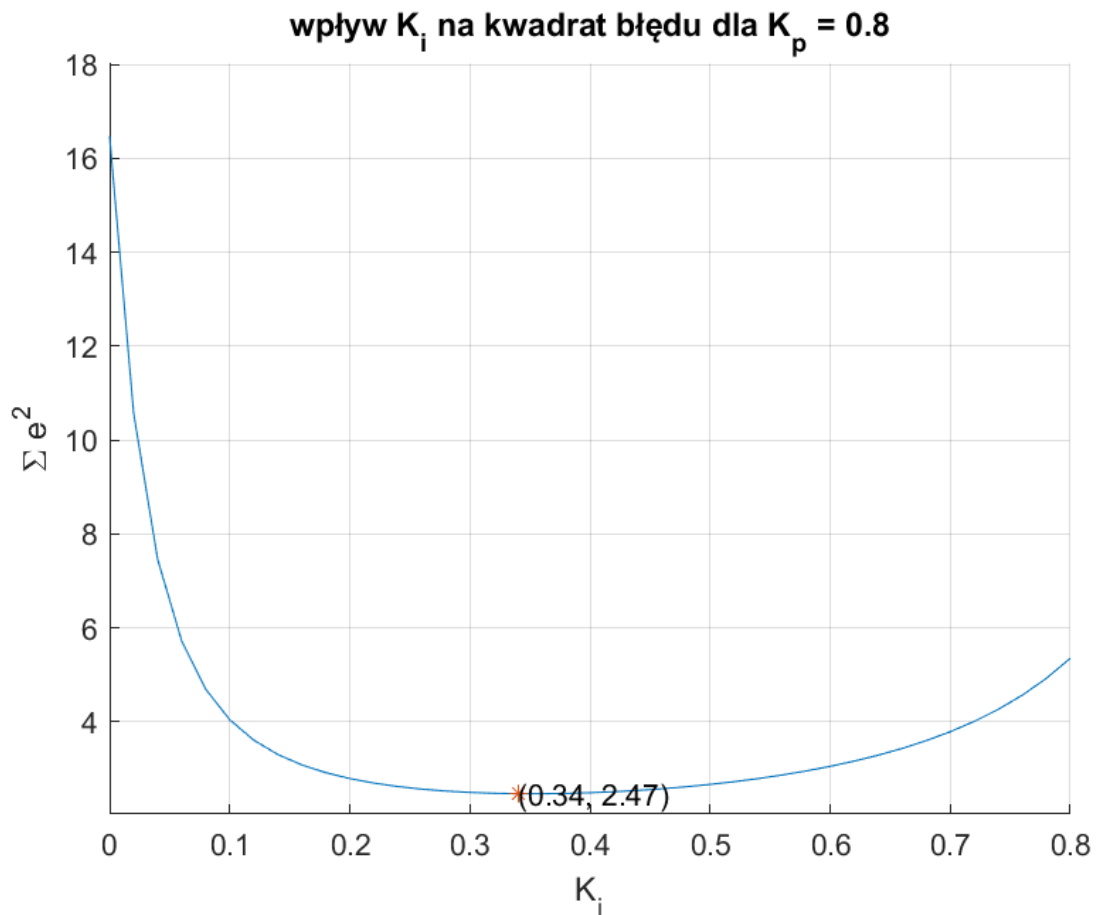
$$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (11)$$

$$K_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (12)$$

$$K_{UAR}(s) = K_R(s) \cdot K_o(s) = \frac{k_p s + k_i}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} \quad (13)$$

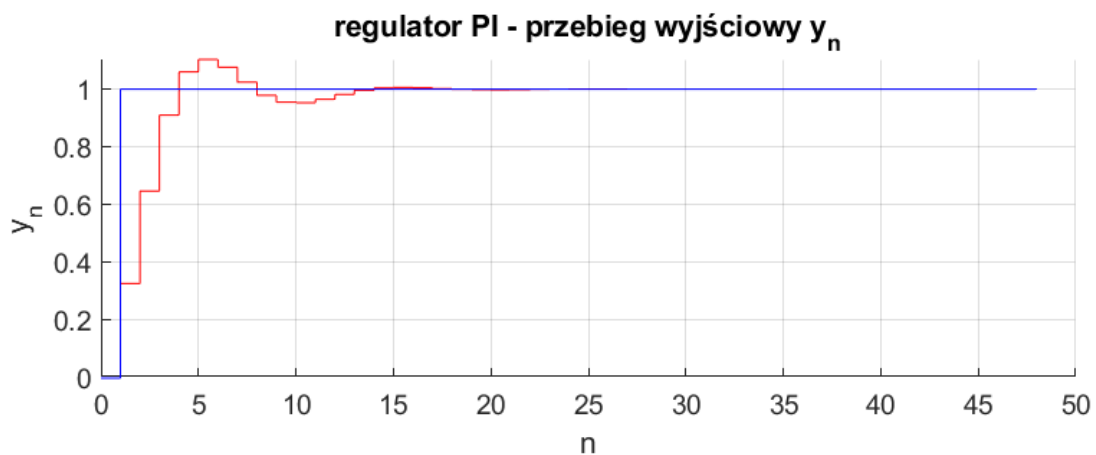
Dla wartości $k_p = 0,8$ przeszukany został przedział możliwych wartości $k_i \in [0, 1]$ w celu minimalizacji wartości funkcji $Q(k_p, k_i)$, zdefiniowanej jako:

$$Q(k_p, k_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (y_{zadana} - y_n)^2 \quad (14)$$

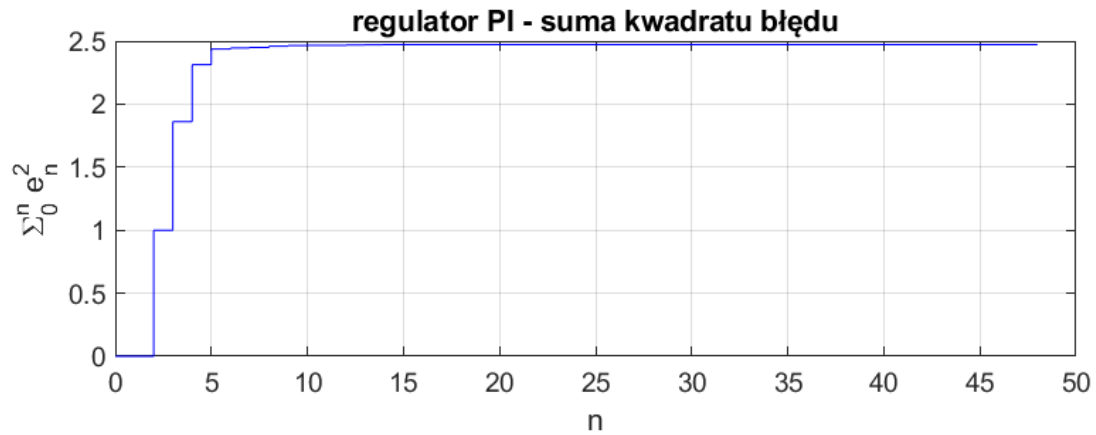


Rysunek 9: Znalezienie, zaznaczenie oraz wypisanie współrzędnych minimum funkcji

Dla przyjętej stałej wartości k_p , wyznaczone zostało minimum powyższego przebiegu. Wynika z tego, iż optymalna wartość funkcji $Q(k_p, k_i)$ dla $k_p = 0,8$ istnieje, gdy wartość $k_i = 0,34$.



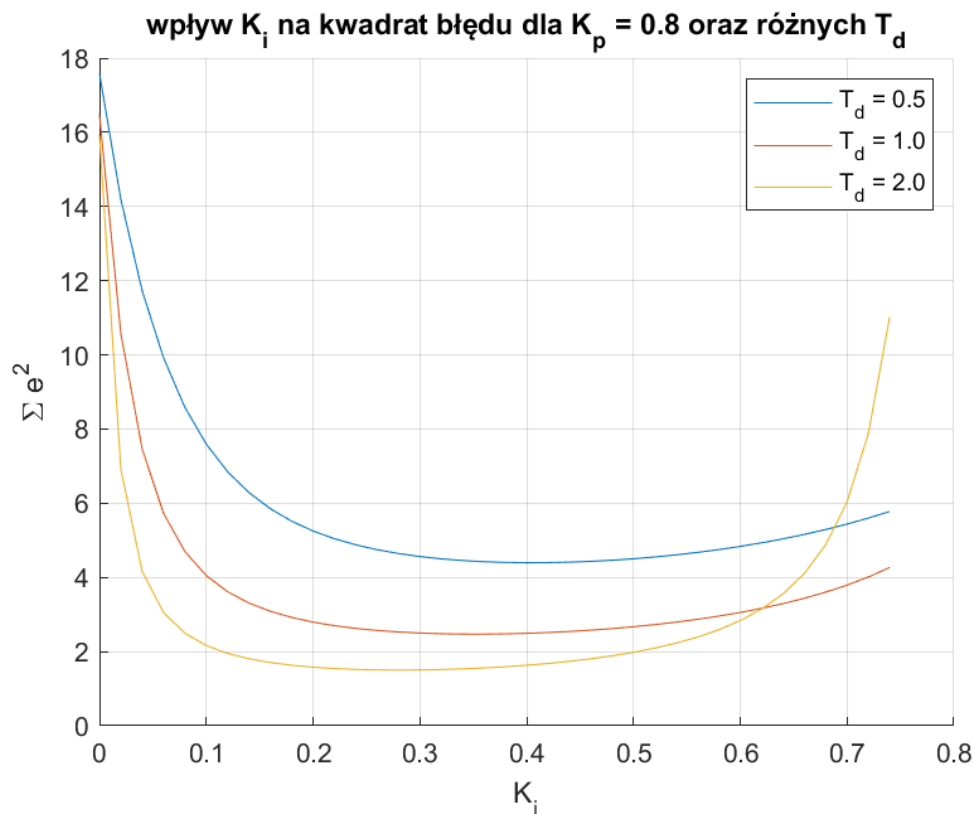
Rysunek 10: Przebieg wyjściowy regulatora PI dla $k_p = 0,8$ oraz $k_i = 0,34$



Rysunek 11: Suma kwadratu błędu dla przebiegu wyjściowego regulatora PI dla $k_p = 0,8$ oraz $k_i = 0,34$

2.3 Wpływ okresu próbkowania na funkcję $Q(k_p, k_i)$

Na koniec, zbadaliśmy wpływ okresu próbkowania na optymalizowaną funkcję $Q(k_p, k_i)$. Na tej podstawie, odpowiedzieliśmy na pytanie, czy zmiana okresu próbkowania wpływa na optymalne parametry.



Rysunek 12: Wartość kryterium $Q(k_p, k_i)$ dla $k_p = 0,8$ w zależności od k_i przy różnych okresach T_d

Jak widać na powyższym wykresie, zmiana okresu próbkowania znacznie wpływa na kształt minimalizowanej funkcji $Q(k_p, k_i)$, czyli na optymalizowane kryterium. Wobec tego, również minimum tej funkcji zmienia swoje wartości / położenie. Oznacza to, że optymalne parametry regulatora PI ulegną zmianie, gdy zmieni się okres próbkowania.

3 Identyfikacja parametrów w systemie niestacjonarnym

W ćwiczeniu dany jest system:

$$v_n = a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2} + b_1 u_n + b_2 u_{n-1} \quad (15)$$

$$y_n = v_n + z_n \quad (16)$$

3.1 Ustalenie parametrów θ

Na potrzeby eksperymentów, ustalono parametry θ , które będą estymowane:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.2 Wyznaczenie parametrów estymatora $\hat{\theta}$

W środowisku Matlab zaimplementowane zostały wzory, które odpowiadają rekurencyjnej wersji metody najmniejszych kwadratów:

$$\phi_n = \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

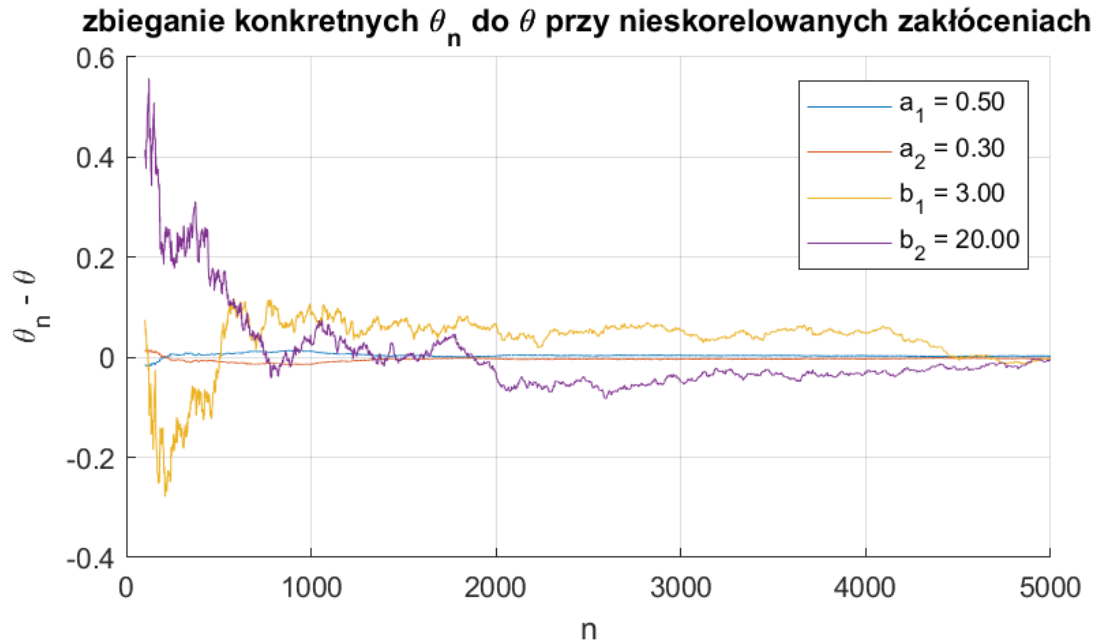
$$P_n = \frac{1}{\lambda} \left(P_{n-1} - \frac{P_{n-1} \phi_n \phi_n^T P_{n-1}}{\lambda + \phi_n^T P_{n-1} \phi_n} \right) \quad (19)$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + P_n \phi_n (y_n - \phi_n^T \hat{\theta}_{n-1}) \quad (20)$$

Dla przyjętego $\lambda = 1$, czyli braku ważenia wykładniczego, wygenerowane zostały losowe wartości sygnału wejściowego u_n o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Następnie obliczano wyjście systemu, obciążone zakłóceniem $y_n = \theta u_n + z_n$. Proces powtarzano iteracyjnie.



Rysunek 13: Zbieganie $\hat{\theta}_n$ do θ - dla małych n , błąd przyjmuje bardzo duże wartości, więc obcięto je



Rysunek 14: Błąd poszczególnych składowych wektora $\hat{\theta}_n$

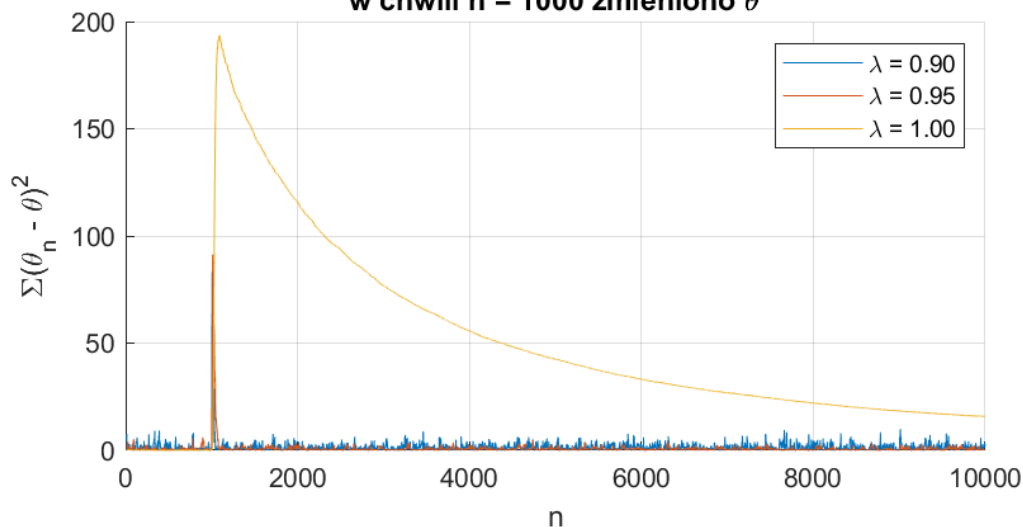
Z ostatniego wykresu wywnioskować można, iż parametry o małej wartości (mniej znaczące) zbiegają znacznie szybciej od parametrów o większej wartości (bardziej znaczących).

3.3 Zmiana parametrów θ , ważenie wykładnicze

W chwili $N = 1000$ wektor parametrów systemu θ zmienił się o $\Delta\theta$. Skutkowało to znacznym wzrostem błędu estymatora, co było do przewidzenia, jednak malał on wykładniczo.

Jednocześnie, dane liczone były dla trzech różnych wartości λ , odpowiedzialnej za wagę wykładniczego zapominania parametrów systemu przez estymator. Z wykresu można odczytać, że dla $\lambda < 1$ podążanie za zmieniającymi się parametrami jest znacznie szybsze - estymator "łatwiej" zapomina przeszłość, która już przestaje obowiązywać.

**zbieganie θ_n do θ przy nieskorelowanych zakłóceniach dla różnych λ dla $n > 10$
 w chwili $n = 1000$ zmieniono θ**



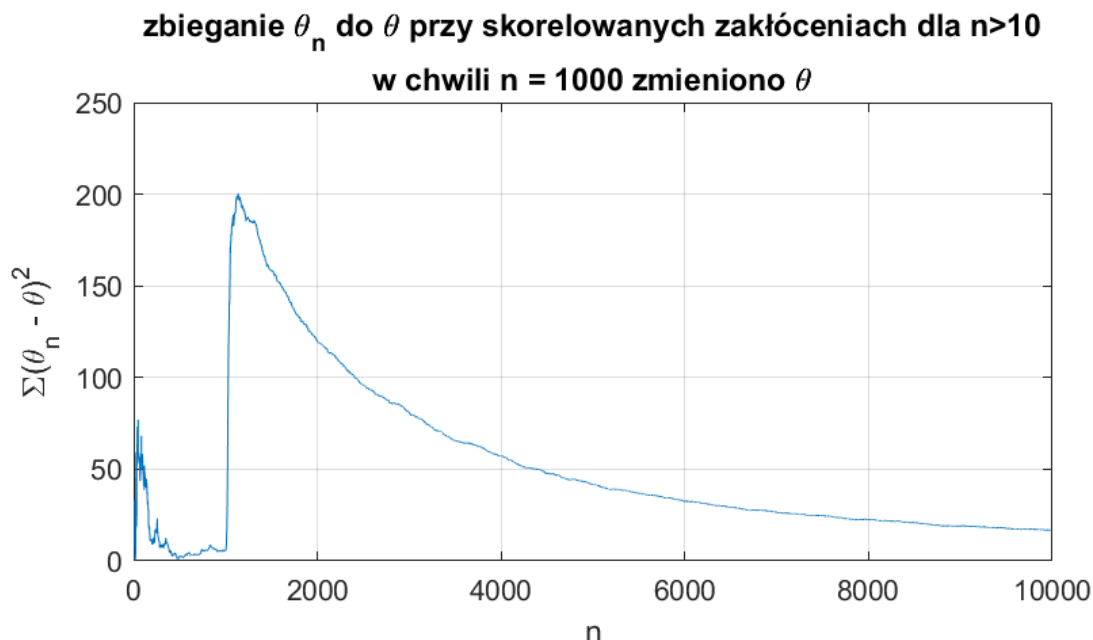
Rysunek 15: Zmiana parametrów w chwili $N = 1000$ dla różnych wartości λ

3.4 Skorelowane zakłócenia

W ostatniej części ćwiczenia dotyczącego identyfikacji parametrów w systemie niestacjonarnym, wprowadzono zmianę sposobu symulacji poprzez dodanie do zakłóceń korelacji w postaci:

$$z_n = e_n + de_{n-1} \quad (21)$$

Zastosowano parametry o wartościach $d = 10$ oraz $\lambda = 1$.



Rysunek 16: Zmiana parametrów w chwili $N = 1000$ przy obecności zakłóceń skorelowanych

Na powyższym wykresie występuje zauważalne spowolnienie zbiegania estymatora na początku trwania symulacji, jednak wraz ze wzrostem n , estymator ten zbiega coraz szybciej.

Wnioskujemy, iż ważona rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów jest wrażliwa na zakłócenia, a szybkość adaptacji do nowej wartości parametru zależy od współczynnika zapominania λ . Im wartość współczynnika zapominania λ jest mniejsza, tym większa wrażliwość systemu na zakłócenia, ale szybsza jego adaptacja do nowej rzeczywistości. Wobec tego, dobór współczynnika zapominania λ powinien umożliwiać zachowanie optymalnej relacji pomiędzy odpornością systemu na zakłócenia, a szybkością jego adaptacji.

4 Bibliografia

- Laboratorium 4
- Laboratorium 5
- Laboratorium 6
- Strona domowa prof. Grzegorza Mzyka