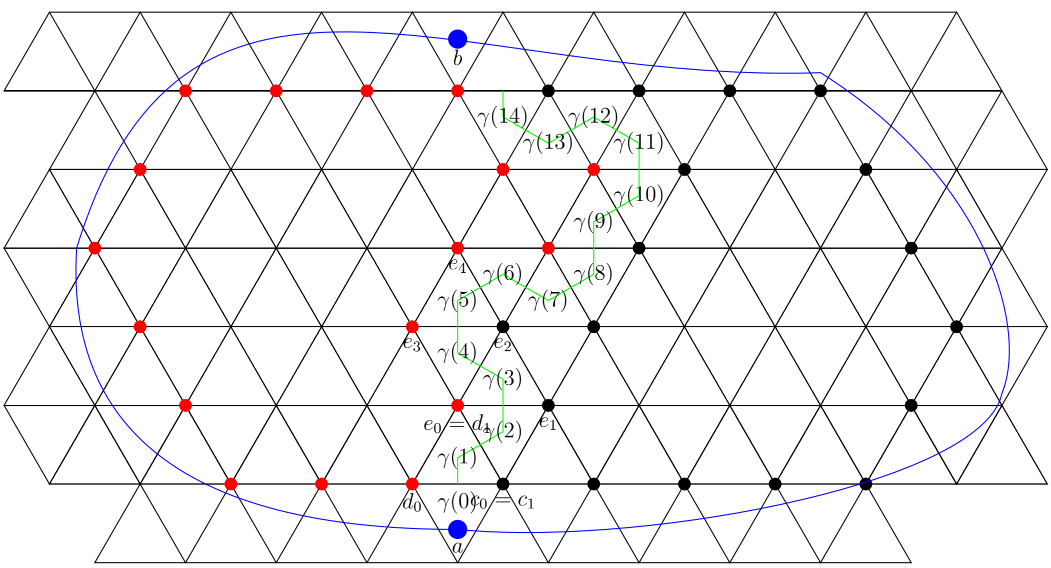
2.5.2 调和探索模型

采用上一小节的记号，记 Ω 为一个 Jordan 区域，$a, b \in \partial\Omega$。$\Omega_\delta = \delta\mathcal{T} \cap \Omega$。$ab$ 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 a 到 b 的弧；ba 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 b 到 a 的弧。将与 ab 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为黑色，将与 ba 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为红色。而其他的点染色与逾渗模型不一样。我们要构造一条探索曲线，具体如下。记 $\Delta c_0 d_0 e_0$ 为与 a 相邻的位于 Ω_δ 中的三角形，其中 c_0, d_0 为分别被染成黑色和红色的顶点。记 $\gamma^\delta(0)$ 为 $\Delta c_0 d_0 e_0$ 的中心，考虑定义在 Ω_δ 上的函数 f_δ^0，在黑色顶点上取值 1，在红色顶点上取值 0，在其他未染色的顶点上调和。于是以 $f_\delta^0(e_0)$ 的概率将 e_0 染成黑色。如果 e_0 为黑色，则选取以 $e_0 d_0$ 为边的三角形 $\Delta c_1 d_1 e_1 (c_1 = e_0, d_1 = d_0)$ 的中心为 $\gamma^\delta(1)$；如果 e_0 为红色，则选取以 $e_0 c_0$ 为边的三角形 $\Delta c_1 d_1 e_1 (c_1 = c_0, d_1 = e_0)$ 的中心为 $\gamma^\delta(1)$。再考虑 e_1 的染色……。假定已经得到 $\gamma_\delta(n)$，其所在的三角形为 $\Delta c_n d_n e_n$，并且 c_n 已经被染成黑色，d_n 已经被染成红色。考虑定义在在 Ω_δ 上的函数 f_δ^n，在黑色顶点上取值 1，在红色顶点上取值 0，在其他未染色的顶点上调和。于是依概率 $f_\delta^n(e_n)$ 将 e_n 染成黑色，以 $1 - f_\delta^n(e_n)$ 的概率将 e_n 染成红色。当 e_n 为黑色时，取 $\gamma^\delta(n+1)$ 为以 $e_n d_n$ 为边的三角形 $\Delta c_{n+1} d_{n+1} e_{n+1} (c_{n+1} = e_n, d_{n+1} = d_n)$；当 e_n 为红色时，取 $\gamma^\delta(n+1)$ 为以 $e_n c_n$ 为边的三角形 $\Delta c_{n+1} d_{n+1} e_{n+1} (c_{n+1} = c_n, d_{n+1} = e_n)$。一直进行下去，直到 $\gamma^\delta(n)$ 位于与 b 相邻的三角形的中心。这样产生了一条探索曲线 γ_δ，称为 Ω_δ 上的调和探索曲线。



自然其同样诱导了 $\mathcal{C}$ 上的概率测度。我们有定理：