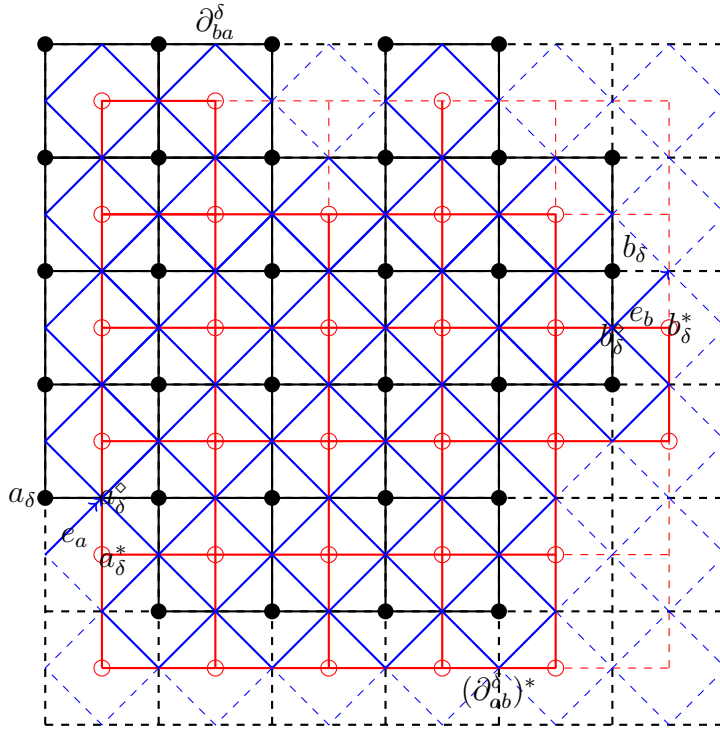


同样可定义对偶图  $\Omega_\delta^* = (V_\delta^*, E_\delta^*)$  为  $(\delta\mathbb{Z}^2)^*$  的如下子图:  $V_\delta^* = V_1^* \cup V_2^*$ , 其中  $V_1^* = \Omega \cap (\delta\mathbb{Z}^2)^*$ ,  $V_2^*$  为与  $\partial_{ab}$  距离最近的并且不在  $\Omega$  中的顶点;  $E_\delta^*$  为连接  $V_\delta^*$  中的顶点的边。记  $a_\delta^*, b_\delta^*$  分别为距离  $a, b$  最近的并且不在  $\Omega$  中的  $(\delta\mathbb{Z}^2)^*$  中的点。当  $\delta$  足够小时, 可知  $\partial\Omega_\delta^*$  为一条闭的简单折线并且  $a_\delta^*, b_\delta^* \in \partial\Omega_\delta^*$ 。记  $(\partial_{ab}^\delta)^*$  为  $\partial\Omega_\delta^*$  上的从  $a_\delta^*$  按逆时针方向到  $b_\delta^*$  的边,  $(\partial_{ba}^\delta)^*$  为  $\partial\Omega_\delta^*$  上的从  $a_\delta^*$  按顺时针方向到  $b_\delta^*$  的边。

同样可定义中间图  $\Omega_\delta^\diamond = (V_\delta^\diamond, E_\delta^\diamond)$ , 其中  $V_\delta^\diamond = \Omega \cap (\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ ,  $E_\delta^\diamond$  为连接  $V_\delta^\diamond$  中的顶点的边。记  $a_\delta^\diamond, b_\delta^\diamond$  分别为距离  $a, b$  最近的并且不在  $\Omega$  中的  $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$  中的点。当  $\delta$  足够小时, 可以得到存在  $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$  中的边  $e_a$  指向  $a_\delta^\diamond$ , 并且  $a_\delta$  和  $a_\delta^*$  分别位于以  $e_a$  为边的  $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$  的面中, 存在  $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$  中的边  $e_b$  从  $b_\delta^\diamond$  出发, 并且  $b_\delta$  和  $b_\delta^*$  分别位于以  $e_b$  为边的  $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$  的面中。

以上三个图的构造通过如下示意图可清晰看出:



上图中, 黑色、红色、蓝色的边为实线的图分别为  $\Omega_\delta, \Omega_\delta^*, \Omega_\delta^\diamond$ 。

采用以上记号,  $\delta$  足够小, 定义  $\Omega_\delta = (V_\delta, E_\delta)$  上的以  $(p, q)_{0 \leq p \leq 1, q > 0}$  为参数的随机簇模型如下: 记

$$\mathcal{S} := \{\omega : E_\delta \rightarrow \{0, 1\}, \omega|_{\partial_{ba}^\delta} = 1\},$$

对任意的  $\omega \in \mathcal{S}$ , 记  $o(\omega) = \#\{e \in E_\delta : \omega(e) = 1\}$ ,  $c(\omega) = \#\{e \in E_\delta : \omega(e) = 0\}$ , 通常如果  $\omega(e) = 1$ , 则称  $e$  是开的, 如果  $\omega(e) = 0$ , 则称  $e$  是闭的。  $(V_\delta, \{e \in E_\delta :$