

密级:_____



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

随机共形不变过程及其应用

作者姓名:_____韩勇_____

指导教师:_____王跃飞 研究员_____

_____中国科学院数学与系统科学研究院_____

学位类别:_____理学博士_____

学科专业:_____基础数学_____

培养单位:_____中国科学院数学与系统科学研究院_____

2019 年 03 月

SLE process and its application

By
Yong Han

A Dissertation Submitted to
The University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirements
For the degree of
PhD of mathematics

Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences

March, 2019

学位论文独创性声明

本人郑重声明：我所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及所取得的研究成果。尽我所知，除了文中已经标注引用的内容外，本论文中不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明或致谢。本人知道本声明的法律结果由自己承担。

作者签名：_____ 日期：_____

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解中国科学院数学与系统科学研究院有关保留、使用学位论文的规定，即：中国科学院数学与系统科学研究院有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

作者签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____

摘 要

本文主要介绍平面上的随机共形不变过程-SLE 过程及其应用，并且通过带型区域上的 SLE 引进一个共形限制测度，最后对 Lévy 过程驱动的全平面 SLE 的谱问题进行一些初步研究。

关键词： SLE，共形限制测度，Lévy 过程，谱。

Abstract

This thesis will give an introduction to the conformal invariant process (SLE process) in the plane and its applications, and a conformal restriction measure on the strip will be given. Also the spectrum about the whole plane SLE driven by Lévy process will be issued.

Keywords: SLE process, conformal restriction measure, Lévy process, spectrum.

目 录

摘 要	vii
Abstract	ix
目 录	xi
第一章 引言	1
第二章 SLE 过程	5
2.1 Loewner 理论	5
2.2 SLE 定义及其性质	12
2.3 有关 SLE 的一些计算	21
2.4 平面布朗运动的相交指数	27
2.5 离散模型与 SLE	35
第三章 共形限制测度	55
3.1 上半平面上的共形限制测度	55
3.2 单位圆盘上的共形限制测度	56
3.3 带型上的共形限制测度	56
第四章 关于布朗环测度	71
4.1 SLE 气泡	72
4.2 主要定理的证明	74
4.3 剩余的情形	79
第五章 全平面 SLE 的谱	81
5.1 单页函数与 SLE 的谱问题	81
5.2 Lévy 过程驱动的 SLE 的谱	83
附录 A 概率和随机分析	93
A.1 概率论初步	93
A.2 条件期望	94

A.3 随机过程	95
A.4 布朗运动	96
A.5 Itô 积分	97
附录 B 布朗路径测度	99
B.1 曲线空间	99
B.2 一维布朗溢出测度	103
B.3 布朗气泡	111
B.4 环测度	119
参考文献	125
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与科研成果	131
致 谢	133

第一章 引言

相变在物理学中是一个非常重要的概念，它刻画系统的状态的变化。例如在温度到达 100 摄氏度时，水变成水蒸气；当温度降低到一定的温度时，超导体的电阻瞬间变为零。这些都是急剧的变化，如何解释相变？物理学家对不同的系统引入不同的参数来刻画其相变。比如用密度的急剧变化来描述水由液体变成气体的变化；用电阻来描述超导体的导电性的变化。一个系统是由许多分子或者原子组成，自然地，物理学家就采用一些格子点模型来描述。存在一个临界值，使得在临界值处系统的一些性质发生了不连续的变化（比如密度），因此对临界值的研究非常重要。

基于系统的大范围的尺度不变性，物理学家大胆猜测其也满足局部的尺度不变性，从而满足共形不变性质。利用格子点模型描述一个系统时，自然产生了一个问题：当格子点的尺度（比如 $\epsilon\mathbb{Z}^2, \epsilon > 0$ ）趋于零时，其连续极限是否存在？如果极限存在，是否满足共形不变性质？甚至在数学上尺度极限都没有一个严格的定义。直到本世纪初，数学家 Oded Schramm 将复分析中的 Loewner 理论与随机分析相结合，给出了尺度极限的严格定义，并且引入 SLE 来描述尺度极限，这在一定程度上解决了部分上述问题 [1]。在 Schramm 的文章 [1] 中，他还证明了如果擦除回路的随机游走的尺度极限存在并且满足共形不变性质，则其一定 SLE(2)。

在随后的几十年，SLE 作为将复分析、随机分析和统计物理联合起来的交叉领域蓬勃发展起来，许多数学家在这方面做出了非常出色的工作，其中最为著名的是 Oded Schramm、Wendelin Werner 和 Gregory Lawler 利用 SLE 作为工具证明了 Mandelbrot 关于平面布朗运动的边界的 Hausdorff 维数依概率 1 为 $\frac{4}{3}$ 的猜想。而 Wendelin Werner 和 Smirnov 也因其在该领域的杰出成果分别获得 2006 年和 2010 年的菲尔兹奖。

本文首先介绍平面上的 SLE 过程以及其主要应用（第二章），这包括几种不同的 SLE 的定义、与 SLE 相关的计算、布朗运动的相交指数以及离散模型与 SLE 的关系。接下来主要讨论和研究在以下三个方面取得的研究进展和成果。

（一）带型区域上的共形限制测度。记 \mathcal{S} 为如下带型区域：

$$\mathcal{S} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi\}.$$

我们将研究 \mathcal{S} 上的满足如下条件的随机集合：

- (1) K 为 $\bar{\mathcal{S}}$ 的连通紧集， $K \cap \mathbb{R} = \{0\}$ 并且 $\mathcal{S} \setminus K$ 有两个连通分支，其边界分别包含 $+\infty$ 和 $-\infty$ ；

(2) 对任意给定的 $\bar{\mathcal{S}}$ 的紧致集合 A , 如果 $A \cap \mathbb{R}_\pi = \emptyset$ (这里 $\mathbb{R}_\pi := \{z = x + i\pi : x \in \mathbb{R}\}$), $\mathcal{S} \setminus A$ 是单连通的并且 $d(0, A) > 0$, 则已知 $\{K \cap A = \emptyset\}$ 的条件下, $\Phi_A(K)$ 和 K 有相同的分布。这里 Φ_A 是从 $\mathcal{S} \setminus A$ 到 \mathcal{S} 的共形映射并满足 $\Phi_A(+\infty) = +\infty$, $\Phi_A(-\infty) = -\infty$ 以及 $\lim_{z \rightarrow +\infty} (\Phi_A(z) - z) = -\lim_{z \rightarrow -\infty} (\Phi_A(z) - z)$ 。

称满足以上条件的随机集合 K 的分布律为带型区域上的共形限制测度。事实上带型区域的共形限制测度可由两个参数 (α, β) 唯一刻画。具体来说, 有如下结果:

定理 1.1. K 服从 \mathcal{S} 上的共形限制分布当且仅当存在常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得对任意的满足上面的 (2) 中的条件的 A 有

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = |\Phi'_A(0)|^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}.$$

这里 $S(A) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\Phi_A(z) - z)$ 。

带型共形限制测度可看作是上半平面和单位圆盘共形限制测度 (参见 [2] 和 [3]) 的“带型”版本, 我们将结合 [2] 和 [3] 中的方法来证明上述定理。同时也将通过带型 SLE(κ) 和 SLE($\kappa; \rho$) 过程来构造满足一定条件的共形限制测度。此结果也在一定程度上扩大了共形限制测度的范围。

(二) 布朗环测度。 布朗环测度直观上可以看作是从平面上布朗运动从某一点出发并且返回出发点的路径所诱导的环路空间上的测度。基于平面布朗运动的共形不变性, 布朗环测度也满足共形不变性质。布朗环测度在理论上应为随机不交环路模型的尺度极限, Cardy 和 Gamsa 利用物理上的方法预测出了上半平面的布朗环将任意给定两个点与 \mathbb{H} 的边界值分开的总测度的公式 (参见 [4])。本文将利用 SLE($\frac{8}{3}$) 严格证明 Cardy 和 Gamsa 给出的公式。具体如下:

定理 1.2. 记 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}$ 为上半平面上的布朗环测度, γ 为其对应的样本。给定 $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{H}$, 记 $E(z, w)$ 为 γ 将 z 和 w 同时与 $\partial\mathbb{H}$ 分开的事件。则

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}[E(z, w)] &= -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{10}\eta {}_3F_2\left(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; \eta\right) - \frac{1}{10} \log(\eta(\eta-1)) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{5\Gamma(\frac{4}{3})} (\eta(\eta-1))^{\frac{1}{3}} {}_2F_1\left(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \eta\right). \end{aligned}$$

这里

$$\eta = \eta(z, w) = -\frac{(x-u)^2 + (y-v)^2}{4yv},$$

并且 ${}_3F_2, {}_2F_1$ 为超几何函数 (定义参见 [5])。

Cardy-Gamsa 公式的证明主要基于 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 气泡和布朗气泡的关系: $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \frac{8}{5}\mu_{\text{SLE}(8/3)}^{\text{bub}}(0)$ 。关于 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 气泡和布朗气泡的定义可参见第四章和附录。此结果可以看作 SLE 这个强大的工具在解决物理问题中的又一应用。

(三) 全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 过程的谱。 给定 $p, q \in \mathbb{R}$ 以及单位圆盘 \mathbb{D} 上的单页函数 ϕ (满足 $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$), ϕ 的广义积分平均谱定义如下:

$$\beta_{\phi}(p, q) := \limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log \int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{\phi(z)} \right|^q |\phi'(re^{i\theta})|^p d\theta}{|\log |r - 1||}.$$

称 $\beta_{\phi}(p, q)$ 为区域 $\phi(\mathbb{D})$ 的 (p, q) -谱。通常来说, 对任意的给定的单连通区域 D , 由于我们很难写出从 \mathbb{D} 或者 \mathbb{D}_- 到 D 的共形映射, D 的积分平均谱很难计算。但是对于随机单连通区域 D , 我们可以借助于一些工具来计算其期望的积分平均谱, 也即

$$\beta_{\phi}(p, q) := \limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log \int_0^{2\pi} \mathbf{E} \left[\left| \frac{z}{\phi(z)} \right|^q |\phi'(re^{i\theta})|^p \right] d\theta}{|\log |r - 1||}.$$

全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 过程定义为如下随机微分方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t f_t(z) = z f_t'(z) \frac{\lambda_t + z}{\lambda_t - z} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(e^{-t}z) = z, \forall z \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

其中 $\lambda_t = \exp\{i\sqrt{\kappa}B_t\}$, B_t 为标准的一维布朗运动。这里 f_t 为 \mathbb{D} 上的单页函数, 一个自然的问题就是如何计算 $f_t(\mathbb{D})$ 的积分平均谱。由于全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 的尺度不变性, 只需对 $t = 0$ 计算即可。

在文章 [6][7] 和 [8] 中, 作者对以上问题做了深入研究, 本文将要计算当驱动过程由布朗运动换成更为一般的 Lévy 过程后所得到的全平面的 $\text{SLE}(\kappa)$ 的积分平均谱。主要结论如下:

定理 1.3. 如果 (f_t) 为上述微分方程的解, 此时 $\lambda_t = \exp\{iL_t\}$, L_t 为 Lévy 过程。记 $f = f_0$, $(\eta_n : n \in \mathbb{N})$ 为 Lévy 记号 (定义参见第五章)。

(1) 如果 $L_t = at + \sqrt{\kappa}B_t$, 则当

$$p = p(\kappa, a) = \frac{(\kappa + 4)^2}{8\kappa} \left(1 + \frac{4a^2}{(\kappa + 2)^2}\right), q = q(\kappa, a) = \frac{\kappa + 4}{2\kappa} \left(1 + \frac{4a^2}{(\kappa + 2)^2}\right)$$

时, f 的广义积分平均谱 $\beta(p, q)$ 为 p 。

(2) 如果 L_t 为对称的 Lévy 过程, 当 $p = 2$, $\eta_1 = 3 - q$ 时, f 的广义积分平均谱为 $\beta(2, q) = 3 - q$;

(3) 如果 L_t 为对称的 Lévy 过程, 当 $p = 2$, $\eta_1 = 4 - q$ 时, f 的广义积分平均谱为 $\beta(2, q) = 4 - q$ 。

我们将通过全平面与射线型 SLE 的关系导出 $\mathbf{E}[|\frac{z}{\phi(z)}|^q |\phi'(re^{i\theta})|^p]$ 满足的一个偏微分方程，再通过寻找特殊解的方法来证明上述定理。由于布朗运动是特殊的 Lévy 过程，这个结果一定程度上推广了 [6][7] 和 [8] 中结果。

第二章 SLE 过程

2.1 Loewner 理论

在本节主要介绍 Loewner 理论, 这在复分析的单叶函数理论中非常重要。特别是 De Branges 在证明 Bieberbach 猜想中主要是利用了全平面与单位圆盘的 Loewner 理论, 具体可参考文章 [9] 和的书 [10] 的第 17 章。在介绍 Loewner 理论前, 先引入几个复分析中几个引理:

引理 2.1 (Schwarz 引理, [11] 第四章定理 13). 假定 f 是单位圆盘 \mathbb{D} 上的全纯函数, 并且 $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, $f(0) = 0$, 则有 $|f'(0)| \leq 1$, 等号成立当且仅当 f 是 \mathbb{D} 上的 Möbius 变换。

引理 2.2 (Riemann 映照定理, [11] 第六章定理 1). 假定 D 是平面上单连通域且不等于 \mathbb{C} , $z \in D$, 则存在唯一的共形映射 $f: D \rightarrow \mathbb{D}$ 满足 $f(z) = 0, f'(z) > 0$ 。

引理 2.3 (广义 Riemann 映照定理, [12] 第 10 页定理 2). 假定 D 是平面上单连通域且不等于 \mathbb{C} , z_1, z_2, z_3 为边界 ∂D 上的三个不同的按逆时针排序的素端 (定义可参见 [12]), 则存在唯一的同胚映射 $f: \hat{D} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ 满足: f 是 D 到 \mathbb{D} 的共形映射, 且 $f(z_1) = -1, f(z_2) = -i, f(z_3) = 1$, 其中 \hat{D} 是 D 与其边界的素端的并。

引理 2.4 (参见 [13] 第 48 页 (2.5)). 假定 D 是一个 Jordan 区域或者 ∂D 是局部 C^1 的, f 为 D 上的调和函数并且可连续扩充到边界, 记 $H_D(z, w)$ 为区域 D 上的 Poisson 核, 则有

$$f(z) = \int_{\partial D} f(w) H_D(z, w) d|w|.$$

注记 2.1. 对一般的区域 D , Poisson 核不一定能显示表达出来, 此时取代 $H_D(z, w)$ 的是 ∂D 上的调和测度, 具体参见 [13] 第 48 页。

注记 2.2. 一些规则区域上的 Poisson 核有显式表达式 (参见 [13]), 例如

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{D}}(z, w) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z}, w \in \partial\mathbb{D}, z \in \mathbb{D}. \\ H_{\mathbb{H}}(z, x) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{z-x}, z \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{R}. \\ H_{S_\pi}(z, x) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{e^x}{e^z - e^x}, z \in S_\pi, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

在 SLE 的研究中主要运用到了四个典型的单连通域上的 Loewner 理论, 这四个单连通区域分别是 $\mathbb{D}, \mathbb{H}, \mathbb{C}$ 和 S_π , 下面我们一一介绍。

2.1.1 上半平面 \mathbb{H} 上的 Lowner 理论

记 $\mathbb{H} := \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 。如果紧集 $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ 满足 $\mathbb{H} \setminus K$ 是单连通的并且 $K = \overline{K \cap \mathbb{H}}$ ，则称 K 为 \mathbb{H} 上的**紧致包**。

引理 2.5 (参见 [13] 第 69 页性质 3.36). 对任意的紧致包 $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ ，存在唯一的共形映射 $g_K : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ 满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} (g_K(z) - z) = 0$ 。

由 Schwarz 对称原理， $g_K(z)$ 可以全纯扩充到 $z = \infty$ 的邻域，于是在 $z = \infty$ 附近有洛朗展开：

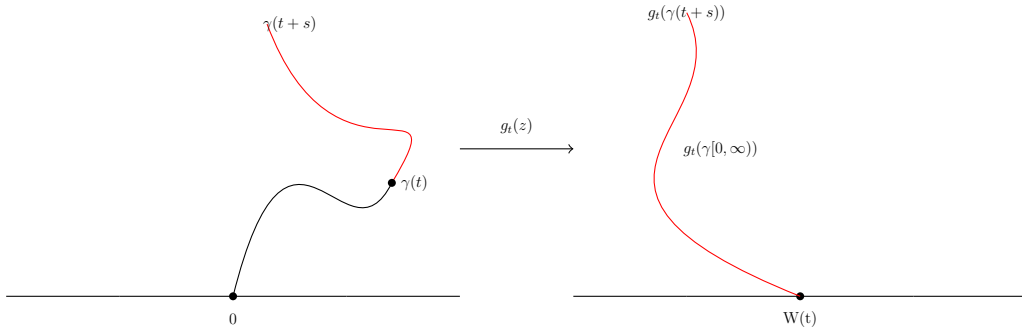
$$g_K(z) = z + \frac{a_1(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

称 $a_1(K)$ 为 K 的**容度**，记为 $\text{hcap}(K)$ 。

性质 2.1 (参见 [13] 第 3.4 小节). \mathbb{H} 上的紧致包的容度 hcap 满足如下性质：

- (1) $\text{hcap}(K) \geq 0$ ，并且 $\text{hcap}(K) = 0$ 当且仅当 $K \subset \mathbb{R}$ ；
- (2) $\text{hcap}(rK) = r^2 \text{hcap}(K)$ 对任意的 $r > 0$ 成立；
- (3) $\text{hcap}(K + x) = \text{hcap}(K)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立；
- (4) 如果 $K_1 \subset K_2$ ，则有 $\text{hcap}(K_2) = \text{hcap}(K_1) + \text{hcap}(g_{K_1}(K_2 \setminus K_1))$ 。

取 $T \in (0, \infty]$ ，假定 $\gamma : [0, T]$ 为 $\overline{\mathbb{H}}$ 上的一条简单曲线，满足 $\gamma(0) = 0$ ， $\gamma(0, T) \subset \mathbb{H}$ 。于是对任意的 $0 \leq t < T$ ， $K_t := \gamma[0, t]$ 为 \mathbb{H} 上的紧致包，从而有唯一的共形映射 $g_t : \mathbb{H} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{H}$ 满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) - z = 0$ 。



记 $a(t) = \text{hcap}(K_t)$ ，我们有以下定理：

定理 2.1 ([13] 第 4.1 小节). 采用以上记号，则有

- (1) $a(t)$ 为 $[0, T]$ 上的连续函数并且是严格单调增的；

(2) 极限 $W(t) = \lim_{z \in \mathbb{H} \setminus K_t, z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z) \in \mathbb{R}$ 存在, 并且 $W(t)$ 为连续函数。

由以上定理知 $a(t)$ 为严格单调增的, 则可以 $u = \frac{1}{2}a(t)$ 作参数使得 $\text{hcap}(K_{t(u)}) = 2u$ 。重新参数化之后, 有以下定理成立:

定理 2.2 ([13] 第 4.1 小节). 采用以上记号, 则 $g_t(z)$ 满足以下常微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - W(t)}, \\ g_0(z) = z. \end{cases} \quad (2.1)$$

注记 2.3. 当 K_t 不是由一条曲线生成而是满足

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{diam}(g_t(K_{t+h} \setminus K_t)) = 0$$

仍可以证明微分方程 (2.1) 成立, 具体可参见文章 [14]。

反过来, 如果已知连续函数 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 。考虑微分方程 (2.1), $g_t(z)$ 为微分方程 (2.1) 的解, 记

$$\tau(z) := \sup\{t > 0, \min_{0 \leq s \leq t} |g_s(z) - W(s)| > 0\}, \quad (2.2)$$

$$K_t := \{z \in \mathbb{H} : \tau(z) \leq t\}, H_t := \mathbb{H} \setminus K_t.$$

则有以下定理成立:

定理 2.3. [参见 [13]] 假定 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, $g_t(z)$ 为微分方程 (2.1) 的解。 K_t 和 H_t 如上定义, 则

(1) $g_t(z) : H_t \rightarrow \mathbb{H}$ 为共形映射;

(2) $(K_t, 0 \leq t \leq T)$ 为 \mathbb{H} 上的紧致包;

(3) 在 $z = \infty$ 附近, $g_t(z)$ 有洛朗展开: $g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + O(\frac{1}{|z|^2})$ 。

注记 2.4. 由定理 2.2 和定理 2.3 可以看出给定简单曲线 γ , 存在一个连续函数使得对应的共形映射满足微分方程 (2.1)。反之不一定成立, 即给定连续函数 $W(t)$, (2.1) 的解产生的紧致包不一定由曲线生成。关于这方面更深一步的研究可参见 *Stefen Rohde* 的文章 [15]。

定义 2.1. 给定连续函数 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, 考虑微分方程 (2.1) 的解所对应的紧致包 K_t , 如果存在一条曲线 $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ 使得对任意的 t , $H_t = \mathbb{H} \setminus K_t$ 为 $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$ 的无界连通分支, 则称 (2.1) 是由 γ 生成的。

2.1.2 单位圆盘上的 Loewner 理论

在这一节，主要介绍单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ 上的 Loewner 理论及其应用。

定义 2.2. 如果紧集 $K \subset \overline{\mathbb{D}}$ 满足 $0 \notin K$, $K = \overline{K \cap \mathbb{D}}$ 且 $\mathbb{D} \setminus K$ 是单连通的，则称 K 为单位圆盘上的紧致包。

由 Riemann 映照定理，存在唯一的 $g_K : \mathbb{D} \setminus K \rightarrow \mathbb{D}$ 满足 $g_K(0) = 0, g'_K(0) > 0$ 。由 Schwarz 引理 2.1 知： $g'_K(0) \geq 1$ 且 $g'_K(0) = 1$ 当且仅当 $K \subset \partial\mathbb{D}$ 。于是定义 K 的容度为

$$\text{cap}(K) := \log g'_K(0).$$

很容易验证如下性质：

性质 2.2. 假设 K 为 \mathbb{D} 上的紧致包，则其容度满足：

- (1) $\text{cap}(K) \geq 0$ ，并且 $\text{cap}(K) = 0$ 当且仅当 $K \subset \partial\mathbb{D}$ ；
- (2) 如果 $K_1 \subseteq K_2$ ，则 $\text{cap}(K_2) = \text{cap}(K_1) + \text{cap}(g_{K_1}(K_2 \setminus K_1))$ 。

同样的，如果简单曲线 $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ ，满足 $\gamma(0) = 1, \gamma(0, T) \subset \mathbb{D}$ 且 $0 \notin \gamma$ 。定义 $K_t := \gamma[0, t], a(t) = \text{cap}(K_t)$, $g_t(z) : \mathbb{D} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{D}, g_t(0) = 0, g'_t(0) > 0$ 。

引理 2.6 ([10] 第 17 章). 采用以上记号，则有：

- (1) $a(t)$ 关于 t 是严格递增的非负函数；
- (2) 极限 $\lambda(t) := \lim_{z \in \mathbb{D} \setminus \gamma[0, t], z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z) \in \partial\mathbb{D}$ 存在，记 $\lambda(t) = e^{iW(t)}$ ，则可选取辅角使得 $W(t)$ 关于 t 连续。

由于 $a(t)$ 严格单调增，并且 $a(0) = 0$ ，则可以重新参数化使得 $a(t) = t$ 。类似地，有如下 Loewner 方程：

定理 2.4 (参见书本 [10] 第 17 章). 假定 $\gamma, K_t, g_t(z)$ 如上，则 $g_t(z)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)} \\ g_0(z) = z. \end{cases} \quad (2.3)$$

注记 2.5. 类似地可以证明如果 \mathbb{D} 上的一族紧致包 $(K_t, t \geq 0)$ 满足

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{diam}(g_t(K_{t+h} \setminus K_t)) = 0$$

则也有方程(2.3)成立。

如果给定连续函数 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, T \in (0, +\infty]$ 。考虑微分方程 (2.3) 的解, 记

$$\tau(z) := \inf\{t > 0 : \min_{0 \leq s \leq t} |g_s(z) - e^{iW(s)}| > 0\}.$$

$$K_t := \{z \in \mathbb{D} : \tau(z) \leq t\}, D_t := \mathbb{D} \setminus K_t.$$

定理 2.5. 给定连续函数 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, T \in (0, +\infty]$ 。考虑微分方程 (2.3) 的解。则有

(1) K_t 为 \mathbb{D} 上的紧致包;

(2) $g_t : D_t \rightarrow \mathbb{D}$ 是共形映射并且 $g_t(0) = 0, g'_t(0) = e^t$ 。

证明. 由常微分方程解对参数的连续依赖性可知 K_t 为闭集, 从而 D_t 为开的。由于 $\frac{e^{iW(t)} + z}{e^{iW(t)} - z}$ 是全纯向量场, 从而 $g_t(z)$ 在 D_t 上全纯。有初值问题解的唯一性可得到对任意的 t 有 $g_t(0) = 0$ 。取 $z, w \in \mathbb{D}$ 且不为零, 则

$$\partial_t \log \frac{g_t(z)}{g_t(w)} = \frac{2e^{iW(t)}}{(e^{iW(t)} - g_t(z))(e^{iW(t)} - g_t(w))}$$

于是

$$\frac{g_t(z)}{g_t(w)} = \frac{z}{w} \exp\left\{\int_0^t \frac{2e^{iW(s)}}{(e^{iW(s)} - g_s(z))(e^{iW(s)} - g_s(w))} ds\right\}$$

从而可以看出 $g_t(z)$ 是单射。

固定 $t > 0, z \in \mathbb{D}$, 对 $0 \leq s \leq t$ 考虑方程

$$\partial_s h_s(z) = -h_s(z) \frac{e^{iW(t-s)} + h_s(z)}{e^{iW(t-s)} - h_s(z)}, h_0(z) = z.$$

由于 $\operatorname{Re} \partial_s \log h_s(z) = \partial_s \log |h_s(z)| = -\operatorname{Re} \frac{e^{iW(t-s)} + h_s(z)}{e^{iW(t-s)} - h_s(z)} < 0$, 于是 $|h_s(z)| \leq |z| < 1$, 从而 $h_s(z)$ 在整个区间 $[0, t]$ 上有定义。而 $h_{t-s}(z), s \in [0, t]$ 满足

$$\partial_s h_{t-s}(z) = h_{t-s}(z) \frac{e^{iW(s)} + h_{t-s}(z)}{e^{iW(s)} - h_{t-s}(z)}, h_{t-0}(z) = h_t(z).$$

由初值问题解的唯一性可得 $h_{t-s}(z) = g_s(h_t(z))$, 特别地 $z = h_0(z) = g_t(h_t(z))$, 于是 $g_t(z)$ 是满射。

对方程 (2.3) 两边关于 z 求导, 并令 $z = 0$ 可得到 $\partial_t g'_t(0) = g'_t(0)$, 而 $g'_0(0) = 1$, 所以 $g'_t(0) = e^t$. \square

注记 2.6. 对给定的连续函数 $W(t)$, 并不一定存在曲线 γ 使得 $K_t = \gamma[0, t]$ 。如果存在曲线 γ 满足对任意的 $t \geq 0$, D_t 为 $\mathbb{D} \setminus \gamma[0, t]$ 包含 0 的连通分支, 则称微分方程 (2.3) 是由曲线 γ 生成的。

2.1.3 全平面的 Loewner 理论

Bieberbach 猜想的证明实际上是利用了全平面的 Loewner 理论, Loewner 于 1923 年在文章 [16] 中证明了该猜想的部分内容, De Branges 利用 Loewner 的方法完全证明了该猜想。

定义 2.3. 如果 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧集, 并且 $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ 为单连通的, 则称 K 为平面上的紧致包。仍由 Riemann 映照定理 2.2 可知存在 $F_K : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ 满足

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F_K(z)}{z} > 0.$$

事实上, 如果 $0 \in K$, 则 $F_K(z) = \frac{1}{f_K(\frac{1}{z})}$ 。其中 $f_K(z)$ 是 \mathbb{D} 到 $\{\frac{1}{z} : z \in \mathbb{C} \setminus K\}$ 的共形映射, 并且满足 $f_K(0) = 0, f'_K(0) > 0$ 。记 $\text{cap}(K) = -\log[f'_K(0)] = \log[\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F_K(z)}{z}]$, 称为 K 的容量。

容易验证全平面的紧致包的容量满足如下性质:

引理 2.7. 假定 K 为全平面上的紧致包, 则其容量满足:

- (1) 对任意的 $r \in \mathbb{R}$, $\text{cap}(rK) = \log r + \text{cap}(K)$;
- (2) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, $\text{cap}(K + z) = \text{cap}(K)$;
- (3) 如果 $K_1 \subset K_2$, 则有 $\text{cap}(K_2) = \text{cap}(K_1) + \text{cap}(\mathbb{D} \cup F_{K_1}^{-1}(K_2 \setminus K_1))$ 。

同样, 给定简单曲线 $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, 满足 $\gamma(-\infty) = 0, \gamma(+\infty) = \infty$ 。定义 $K_t := \gamma[-\infty, t]$, 则 K_t 为全平面上的紧致包。

令 $a(t) = \text{cap}(K_t)$, $g_t = F_{K_t}^{-1} : \mathbb{C} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, 其中 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g_t(z)}{z} > 0$ 。于是可以类似于单位圆盘中的证明一样得到:

引理 2.8 ([10] 第 17 章). 采用以上记号, 则有:

- (1) $a(t)$ 关于 t 连续并且严格单调增, 并且 $a(-\infty) = 0, a(+\infty) = +\infty$;
- (2) 极限 $\lambda(t) := \lim_{z \rightarrow \gamma(t), z \in \mathbb{C} \setminus K_t} g_t(z)$ 存在, 记 $\lambda(t) = e^{iW_t}$, 则可以选取辅角使得 W_t 关于 t 连续;
- (3) 如果 $a(t) = t$, 则 $g_t(z)$ 满足如下微分方程

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{e^{iW(t)} + g_t(z)}{e^{iW(t)} - g_t(z)} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t g_t(z) = z, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

注记 2.7. 如果 \mathbb{C} 上的一族递增紧致包 $\{K_t, t \in \mathbb{R}\}$ 满足 $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} K_t = \{0\}$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{diam}(g_t(K_{t+h} \setminus K_t)) = 0$$

并且 $\text{cap}(K_t) = t$, 同样有以上微分方程成立。

反之, 假定 W_t 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 则

定理 2.6 ([13] 第 4.3 小节). 存在唯一的一族共形映射 $g_t(z) : \mathbb{C} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ 满足微分方程(2.4)。特别地, K_t 为全平面的紧致包, 并且 $\text{cap}(K_t) = t$ 。

2.1.4 带型区域上的 Loewner 理论

记 $S_\pi := \{x + iy : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi\}$, $\mathbb{R}_\pi := \{x + i\pi : x \in \mathbb{R}\}$ 。在这一小节里我们主要介绍 S_π 上的 Loewner 方程。具体相关详细内容可参见詹大鹏的博士论文 [17]。

定义 2.4. 设紧集 $K \subset \overline{S_\pi}$ 满足: $S_\pi \setminus K$ 是单连通的, $K \cap \mathbb{R}_\pi = \emptyset$ 并且 $K = \overline{K \cap S_\pi}$ 。则称 K 为 S_π 上的紧致包。

引理 2.9 (参见 [17]). 设 K 为 S_π 上的紧致包, 则存在唯一的共形映射 $g_K : S_\pi \setminus K \rightarrow S_\pi$ 满足

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g_K(z) - z = \pm C(K)$$

其中 $C(K) \geq 0$ 称为 K 的 S_π 容度, 记为 $\text{scap}(K)$ 。

同样的假定 $\gamma(t) : [0, T] \rightarrow \overline{S_\pi}$ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma(0) = 0, \gamma(0, T) \subset S_\pi$ 。令 $K_t := \gamma[0, t]$, 则 K_t 为 S_π 上的紧致包。记 $a(t) = \text{scap}(K_t)$, 于是同样的可以证明如下定理:

定理 2.7 (参见 [17]). 采用如上记号, 则有

- (1) $a(t)$ 关于 t 是严格增的连续函数;
- (2) $W(t) := \lim_{z \in S_\pi \setminus \gamma[0, t], z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z)$ 存在并且关于 t 连续;
- (3) 若重新参数化 γ 使得 $a(t) = t$, 则 $g_t = g_{\gamma[0, t]}$ 满足如下微分方程

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = \coth \frac{g_t(z) - W(t)}{2} \\ g_0(z) = z. \end{cases} \quad (2.5)$$

反之当给定连续函数 $W(t)$ 时, 同样通过分析方程 (2.5) 可得:

定理 2.8 ([17]). 给定连续函数 $W(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, W(0) = 0$, 考虑方程(2.5)。 $\tau(z)$ 和 K_t 定义如上, 则有

- (1) K_t 为 S_π 上的紧致包;
- (2) $g_t(z) : S_\pi \setminus K_t \rightarrow S_\pi$ 为共形映射;
- (3) $\lim_{z \rightarrow +\infty} (g_t(z) - z) = t, \lim_{z \rightarrow -\infty} (g_t(z) - z) = -t$ 。

其中

$$\tau(z) := \sup\{t > 0, \inf_{0 \leq s \leq t} |g_s(z) - W(s)| > 0\}, K_t = \{z \in S_\pi : \tau(z) \leq t\}.$$

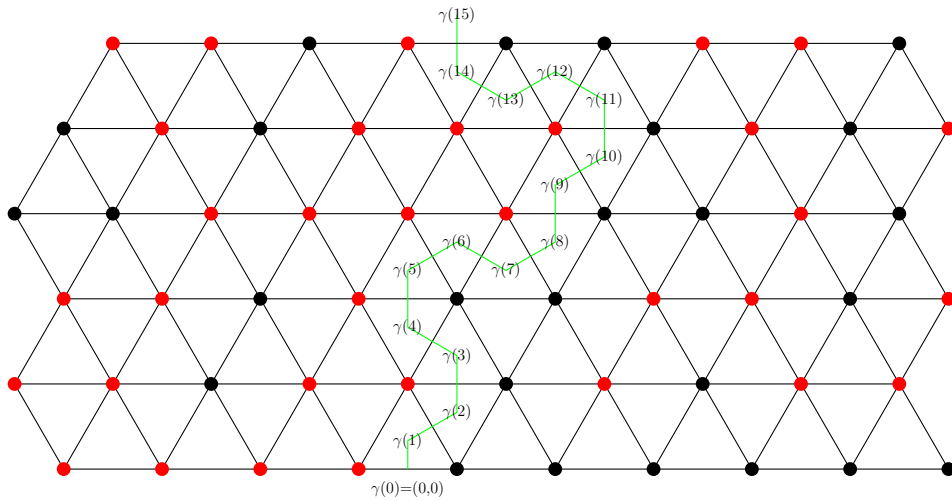
2.2 SLE 定义及其性质

SLE 是 Schramm 在文章 [1] 中定义的。他的目的是为了刻画离散模型的尺度极限, 基于物理学家给出的尺度极限的共形不变性和马尔可夫性质, Schramm 定义了 SLE 并且证明了擦除回路的随机游动的尺度极限如果存在, 则一定为射线型 SLE(2)。在本节主要介绍四种 SLE 及其性质。

2.2.1 SLE 的定义

按照 Schramm 的思路, 我们从逾渗来介绍其是如何引进 SLE 的。

假定 $(\varepsilon\mathcal{T}, \varepsilon > 0)$ 是平面上的正三角形剖分, 如下图:



假定 0 恰好位于某个三角形的一条边的中心。下面将正实轴上的顶点染成黑色，将负实轴上的顶点染成红色。而 $\mathbb{H} \cap \varepsilon\mathcal{T}$ 中的点独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率染成黑色或者红色。那么对每一种染色方案，存在唯一的一条从 0 到 ∞ 的折线 γ^ε 满足：

$$\gamma^\varepsilon(0) = 0, \gamma^\varepsilon(k) \in (\varepsilon\mathcal{T})^*.$$

并且 $\gamma^\varepsilon(k)$ 和 $\gamma^\varepsilon(k+1)$ 之间用线段相连。称 γ^ε 为从 0 到 ∞ 的探索曲线。物理学家猜测当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， γ^ε 收敛到一条随机曲线 γ （当然这个收敛需要定义，参看 Schramm 的文章 [1] 或者后续小节）并且 γ 的分布满足共形不变性质和马尔可夫性质。下面我们从离散模型的角度解释马尔可夫性质。如果已经知道 $\gamma^\varepsilon(k) : 0 \leq k \leq N$ ，那么 $\{\gamma^\varepsilon(N+m) : m=0, m=1, m=2, \dots\}$ 即为 $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, N] \cap \varepsilon\mathcal{T}$ 中的从 $\gamma(N)$ 到 ∞ 的探索曲线。设 $\gamma^\varepsilon[0, N]$ 收敛到 $\gamma[0, t]$ ， $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ 共形不变性粗略的可描述为，如果存在共形映射将并且 $g_t(\gamma(t)) = 0, g_t(\infty) = \infty$ ，那么 $g_t(\gamma[t, \infty))$ 恰恰与 γ 有着相同的分布。

于是假定 $\gamma[0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ 为简单的随机曲线， $\gamma(0) = 0, \gamma(\infty) = \infty, \gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ 。并且满足如下条件：如果参数化 $\gamma(t)$ 使得 $\text{hcap}(\gamma[0, t]) = 2t$ 。令 $g_t := g_{\gamma[0, t]}$ ，则对任意的 $s \geq 0$ ，定义

$$\bar{\gamma}(t) := g_s(\gamma(t+s)) - g_s(\gamma(s)).$$

那么在已知 $\gamma[0, s]$ 的条件下 $\bar{\gamma}[0, \infty)$ 的分布与 $\gamma[0, \infty)$ 的分布相同。假定存在连续函数 $W(t)$ 使得 $g_t(z)$ 满足微分方程 (2.1)。则作为紧致包 $\bar{\gamma}[0, t]$ 对应的共形映射为 $\bar{g}_t(z) = g_{t+s} \circ g_s^{-1}(z + W(s)) - W(s)$ 。则所假设的条件可转化为：

- (1) $\bar{g}_t(z)$ 与 $g_t(z)$ 同分布，从而不依赖于 s ；
- (2) $\bar{g}_t(z)$ 与 $g_r(z), 0 \leq r \leq s$ 独立。

转化到 $W(t)$ 上应为

- (1) $W(t+s) - W(s)$ 与 $W(t)$ 同分布，并且不依赖于 s ；
- (2) $W(t+s) - W(s)$ 与 $W(r), 0 \leq r \leq s$ 独立。

再结合 $W(t)$ 是连续的，由随机分析的知识知（参见书本 [19]） $W(t)$ 可以表示为 $W(t) = \mu t + \sqrt{\kappa} B_t$ ，其中 B_t 是标准的一维布朗运动， $\kappa \geq 0$ 。如果假定 γ 关于 y 轴对称，则 $W(t)$ 与 $-W(t)$ 同分布，从而 $\mu = 0$ ， $W(t) = \sqrt{\kappa} B_t$ 。

定义 2.5 ([14]). 假定 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, 其中 B_t 为标准的一维布朗运动。称满足随机微分方程 (2.1) 的一族共形映射为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。有时也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。

由布朗运动的性质可以导出弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 的许多性质。

性质 2.3 (参见 [20]). 假定 $\{g_t(z) : t \geq 0\}$ 与 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$, 则

(1) (尺度不变性) 对任意的 $r > 0$, 定义 $\hat{g}_t(z) := r^{-\frac{1}{2}}g_{rt}(\sqrt{r}z)$ 与 $g_t(z)$ 作为以 (t, z) 为指标的随机过程有着相同的分布。特别 $t \rightarrow K_t$ 与 $t \rightarrow r^{-\frac{1}{2}}K_{rt}$ 作为随机紧致包也有相同的分布。

(2) (马尔可夫性) 假定 τ 是关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时。则 $\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_\tau^{-1}(z + W_\tau) - W_\tau$ 与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ 独立。

证明. 注意到 \hat{g}_t 所对应的驱动函数为 $\hat{W}_t := \sqrt{\kappa}r^{-\frac{1}{2}}B_{rt}$, \tilde{g}_t 对应的驱动函数为 $\tilde{W}_t := \sqrt{\kappa}B_{t+\tau} - \sqrt{\kappa}B_\tau$ 。而由布朗运动的性质知道 \hat{W}_t 与 \tilde{W}_t 均与 $W_t = \sqrt{\kappa}B_t$ 同分布。 \square

类似地, 利用单位圆盘上的 Loewner 微分方程 (2.3) 可定义单位圆盘中的 SLE 。

定义 2.6 ([21][14]). 令 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, 其中 B_t 为标准的一维布朗运动。称满足随机微分方程 (2.3) 的一族共形映射为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。有时也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 。

射线型 SLE 不满足尺度不变性, 但是仍满足马尔可夫性质。

性质 2.4 (参见 [14]). 假定 τ 是关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时。则 $\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_\tau^{-1}(zW_\tau)/W_\tau$ 与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ 独立。

证明. 注意到 \tilde{g}_t 对应的驱动函数为 $\tilde{W}_t := \sqrt{\kappa}B_{t+\tau} - \sqrt{\kappa}B_\tau$ 。 \square

定义 2.7. 假定 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, 其中 B_t 为标准的一维布朗运动。称满足随机微分方程 (2.4) 的一族共形映射为 \mathbb{C} 上从 0 到 ∞ 的全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 。

容易验证如下性质:

性质 2.5. 假定 $(g_t, K_t : t \in \mathbb{R})$ 为全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 。如果 $r \in \mathbb{R}$, 那么 $g_{t+r}(e^r z)$ 也是全平面 $\text{SLE}(\kappa)$;

于是根据尺度不变性可以通过共形映射定义平面上任意两点间的全平面 SLE。同样可定义带型区域 S_π 上的 SLE(κ)。

定义 2.8 (詹大鹏 [17]). 假定 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, 其中 B_t 为标准的一维布朗运动。称满足随机微分方程(2.5)的一族共形映射为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的带型 SLE(κ)。有时也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为带型 SLE(κ)。

类似于弦 SLE, 可证明对关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时 τ , $\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_\tau^{-1}(z + W_\tau) - W_\tau$ 与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ 独立。

2.2.2 几种 SLE 的等价性

通过共形映射, 我们可以定义任一单连通区域上的 SLE(κ)。

定义 2.9. 假定 D 为任一单连通区域, 并且 $a \in D, b, c, e$ 为 ∂D 上的三个不同的点 (素端)。

(1) 如果 $f_1 : \mathbb{H} \rightarrow D$ 为共形映射, 并且 $f_1(0) = b$, $f_1(\infty) = c$ 。 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(κ)。定义 $\{f_1(K_t) : t \geq 0\}$ 为 D 上从 b 到 c 的弦 SLE(κ)。等价地, 可定义为一族满足如下微分方程的共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, g_0(z) = f_1^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D \setminus f_1(K_t)$ 共形映为 \mathbb{H} 并且 $g_t(b) = 0, g_t(c) = \infty$ 。

(2) 如果 $f_2 : \mathbb{D} \rightarrow D$ 为共形映射, 并且 $f_2(0) = a$, $f_2(1) = b$ 。 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的射线型 SLE(κ)。则定义 $\{f_2(K_t) : t \geq 0\}$ 为 D 上从 a 到 b 的射线型 SLE(κ)。等价地, 可定义为一族满足如下微分方程的共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + g_t(z)}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - g_t(z)}, g_0(z) = f_2^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D \setminus f_2(K_t)$ 共形映为 \mathbb{D} 并且 $g_t(a) = 0, g_t'(a) = e^t$ 。

(3) 如果 $f_3 : S_\pi \rightarrow D$ 为共形映射, 并且 $f_3(0) = b$, $f_3(+\infty) = c$, $f_3(-\infty) = e$ 。 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的带型 SLE(κ)。则定义 $\{f_3(K_t) : t \geq 0\}$ 为 D 上从 b 到弧 bc 的带型 SLE(κ)。等价地, 可定义为一族满足如下微分方程的共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = \coth \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}{2}, g_0(z) = f_3^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D \setminus f_3(K_t)$ 共形映为 S_π 并且 $g_t(a) = 0, g_t(b) = +\infty, g_t(c) = -\infty$ 。

经过以上的定义，我们将三种 SLE 的定义推广到了任一单连通区域上。于是可以导出三者在某意义上的等价性。

定理 2.9 (Schramm, Lawler, Werner[21]). 假定 $(K_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{D} 上从 -1 到 1 的弦 SLE(κ)。

$(\tilde{K}_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{D} 上从 -1 到 0 的射线型 SLE(κ)。令

$$\tau := \sup\{t > 0 : 0 \notin K_t\}, \tilde{\tau} := \sup\{t > 0 : 1 \notin \tilde{K}_t\},$$

则当 $\kappa = 6$ 时, $\{K_t : 0 \leq t < \tau\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \leq t < \tilde{\tau}\}$ 同分布。当 $\kappa \neq 6$ 时, 存在停时序列 $(T_n, n \geq 1) \uparrow T$ 与 $(\tilde{T}_n, n \geq 1) \uparrow \tilde{T}$ 满足 $\{K_t : 0 \leq t < T_n\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \leq t < \tilde{T}_n\}$ 的分布彼此绝对连续。

事实上, 带型 SLE(κ) 与弦 SLE(κ) 在某意义上也等价。

定理 2.10 (詹大鹏 [17]). 假定 $(K_t)_{t \geq 0}$ 为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的带型 SLE(κ)。

$(\tilde{K}_t)_{t \geq 0}$ 为 S_π 上从 0 到 $+\infty$ 的弦 SLE(κ)。令

$$\tau := \inf\{t > 0 : K_t \cap \mathbb{R}_\pi \neq \emptyset\}, \tilde{\tau} := \inf\{t > 0 : \tilde{K}_t \cap \mathbb{R}_\pi \neq \emptyset\},$$

则当 $\kappa = 6$ 时, $\{K_t : 0 \leq t < \tau\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \leq t < \tilde{\tau}\}$ 同分布。当 $\kappa \neq 6$ 时, 存在停时序列 $(T_n, n \geq 1) \uparrow \tau$ 与 $(\tilde{T}_n, n \geq 1) \uparrow \tilde{\tau}$ 满足 $\{K_t : 0 \leq t < T_n\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \leq t < \tilde{T}_n\}$ 的分布彼此绝对连续。

同样, 全平面 SLE 与射线型 SLE 有着紧密的联系:

定理 2.11. 假定 $(g_t, K_t : t \in \mathbb{R})$ 为全平面 SLE(κ)。固定 $t_0 \in \mathbb{R}$, 则在已知 $(K_t, t \leq t_0)$ 的条件下, $(K_t : t \geq t_0)$ 为 $\mathbb{C} \setminus K_{t_0}$ 中从其边界某个点到 ∞ 的射线型 SLE(κ)。

证明. 对任意的 $t \geq 0$, 定义

$$f_t(z) := \frac{e^{iW_t}}{g_{t+t_0}(z)},$$

则有 $f_t(\infty) = 0$ 。

$$\partial_t f_t(z) = f_t(z) \frac{e^{iW'_t} + f_t(z)}{e^{iW'_t} - f_t(z)}.$$

其中 $W'_t = W(t_0) - W(t + t_0) = \sqrt{\kappa}B_t$, 这里 B_t 为标准的一维布朗运动。于是得证。 \square

2.2.3 SLE 的曲线性质

由 Loewner 理论知, 任意的连续函数 W_t , 四种类型的微分方程(2.1), (2.3), (2.4) 和(2.5) 并不一定由一条连续曲线生成。但是对于 $SLE(\kappa)$, 依概率 1, 其对应的紧致包是由一条曲线生成的。

定理 2.12 (Oded Schramm, Steffen Rhode[20]). 假定 $\{g_t(z) : t \geq 0\}$ 与 $\{K_t : t \geq 0\}$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$, 则依概率 1 存在一条连续曲线 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ 使得 $\mathbb{H} \setminus K_t$ 为 $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$ 的无界连通分支。

注记 2.8. Oded Schramm 和 Steffen Rohde 在 $\kappa \neq 8$ 的情况下给出了此命题的直接证明。而他们的方法不适用于 $\kappa = 8$ 的情况。 $\kappa = 8$ 时, 此定理是作为弦 $SLE(8)$ 为一致生成树的探索曲线的尺度极限从而由曲线生成的推论而得到的 (详见文章 [22])。至今都没有一个直接的证明, 技术上的困难 Gregory Lawler 在文章 [23] 中作出了说明。

有时称上述定理中的随机曲线 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$ 。并且根据上一节可知, 射线型 $SLE(\kappa)$ 与全平面 $SLE(\kappa)$ 以及带型 $SLE(\kappa)$ 也是由一条曲线生成的。

作为一条随机曲线, γ 的性质依赖于 κ 。

定理 2.13 (Schramm, Rohde[20]). 设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$ 。则

- (1) 当 $0 \leq \kappa \leq 4$ 时, 依概率 1, 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0, \infty) \subset \mathbb{H} \cup \{0\}$;
- (2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1, 对任意的 $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$, 并且 $\bigcup_{t \geq 0} K_t = \overline{\mathbb{H}}$;
- (3) 当 $\kappa \geq 8$ 时, 依概率 1, 有 $\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}$, 即 γ 铺满整个上半平面;
- (4) 对任意的 $\kappa \geq 0$, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty$ 。

此定理的证明涉及比较精细的分析, 具体可参见文章 [20]。Gregory Lawler 在书本 [13] 和文章 [24] 中给出了简化的证明。

对于射线型 $SLE(\kappa)$, 由等价性也有对应的性质:

定理 2.14 ([21]). 设 γ 为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的射线型 $SLE(\kappa)$ 。则

- (1) 当 $0 \leq \kappa \leq 4$ 时, 依概率 1, 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0, \infty) \subset \mathbb{D} \cup \{1\}$;

(2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1, 对任意的 $z \in \bar{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$, 并且 $\cup_{t \geq 0} K_t = \bar{\mathbb{D}}$;

(3) 当 $\kappa \geq 8$ 时, 依概率 1, 有 $\gamma[0, \infty) = \bar{\mathbb{D}}$, 即 γ 铺满整个闭的单位圆盘。

此外 Lawler 还证明了如下性质:

定理 2.15 ([25]). 设 γ 为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 。则依概率 1 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0.$$

相比射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 与弦 $\text{SLE}(\kappa)$, 带型 $\text{SLE}(\kappa)$ 也有类似的性质, 但是稍有不同。

定理 2.16 (詹大鹏 [17]). 设 γ 为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 。则

(1) 当 $0 \leq \kappa \leq 4$ 时, 依概率 1, 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0, \infty) \subset S_\pi \cup \{0\}$;

(2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1, 对任意的 $z \in \bar{S}_\pi \setminus \{0\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$;

(3) 当 $\kappa \geq 8$ 时, 则依概率 1, $\gamma[0, \infty)$ 的 Hausdorff 维数为 2, 即 γ 铺满整个其所围绕的区域。

定理 2.17 (詹大鹏 [17]). 设 γ 为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 。则

(1) 依概率 1 极限 $m := \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ 存在;

(2) 依概率 1, $m \in \mathbb{R}_\pi$ 。如果记 $m = X + i\pi$, 则随机变量 X 有密度函数 $\rho(x) = (\cosh(\frac{x}{2}))^{-\frac{4}{\kappa}} / c_\kappa$, 其中 $c_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cosh(\frac{x}{2}))^{-\frac{4}{\kappa}} dx$ 。

注记 2.9. 由此定理可知, 设 $(K_t)_{t \geq 0}$ 为带型 $\text{SLE}(\kappa)$ 的对应的紧致包, 记 $K_\infty = \cup_{t \geq 0} K_t$, 则 K_∞ 是有界的。而詹大鹏正是先证明 K_∞ 为有界的来证明上面的定理的 [17]。

注记 2.10. 对于全平面 SLE , 由定理 2.11 我们同样可得到其由一条曲线生成, 以及对应的性质。

当 $\kappa \geq 8$ 时, 由以上的定理可知四种 SLE 的 Hausdorff 维数依概率 1 为 2。而其他情形, Schramm 与 Rohde 在文章 [20] 中给出了上界估计。最终 Vincent Beffra 采用两点估计的方法确定了 SLE 的 Hausdorff 维数, 而 Lawler 在文章 [24] 给出了简化证明。

定理 2.18 (Beffra[26]). 设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。则依概率 1 有

$$\dim(\gamma) = \min\{2, 1 + \frac{\kappa}{8}\}.$$

注记 2.11. 由四种 $\text{SLE}(\kappa)$ 的等价性可知其他类型的 $\text{SLE}(\kappa)$ 的维数与弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 相同。

2.2.4 局部性与限制性

在本节主要介绍 $\text{SLE}(6)$ 的局部性和 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的限制性。

引理 2.10 ([13] 第 4.6 小节). 设 K 为 \mathbb{H} 上的紧致包, 并且 $0 \notin K$ 。则有唯一的共形映射 $\Phi_K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 满足 $\Phi_K(0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} = 1$ 。设 $(K_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{H} 上的包含 0 的严格递增紧致包, 满足 $K \cap K_t = \emptyset$, 并且存在连续函数 $W(t)$ 使得与 K_t 对应的共形映射满足上半平面的 *Loewner* 方程。则 $\tilde{K}_t := \Phi_K(K_t)$ 也为 \mathbb{H} 上的紧致包。记 $\tilde{g}_t(z)$ 为与之对应的共形映射, $a(t) = \text{hcap}(\tilde{K}_t)$ 。设 $\Phi_t(z) = \tilde{g}_t \circ \Phi_K \circ g_t^{-1}(z)$, $\tilde{W}(t) = \Phi_t(W(t))$ 。则有

$$\partial_t a(t) = 2\Phi_t'^2(W(t)).$$

从而

$$\partial_t \tilde{g}_t(z) = \frac{2\Phi_t'^2(W(t))}{\tilde{g}_t(z) - \tilde{W}_t}.$$

引理 2.11 ([13] 第 4.6 小节). 条件和记号如上一引理, 由 *Schwarz* 反射原理知, $\Phi_t(z)$ 可解析延拓至 $W(t)$ 邻域内, 于是有

$$\partial_t \Phi_t(z)|_{z=W_t} = -3\Phi_t''(W_t).$$

$$\partial_t \Phi_t'(z)|_{z=W_t} = \frac{\Phi_t''^2(W_t)}{2\Phi_t'(W_t)} - \frac{4}{3}\Phi_t'''(W_t).$$

下面利用上述引理可得到 $\text{SLE}(6)$ 的局部性质。

定理 2.19 (Schramm, Lawler, Werner[21],[14][13] 第 6.3 小节). 设 K 为 \mathbb{H} 上的紧致包, 并且 $0 \notin K$ 。 $\gamma(t)$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(6)$ 。记 $T = \inf\{t > 0 : \gamma(t) \cap K \neq \emptyset\}$ 。设 $\tilde{\gamma}(t)$ 为 $\mathbb{H} \setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(6)$, 记 $S = \inf\{t > 0 : \tilde{\gamma}(t) \cap K \neq \emptyset\}$ 。则 $\{\gamma(t) : 0 \leq t < T\}$ 与 $\{\tilde{\gamma}(t) : 0 \leq t < S\}$ 在相差一个时间变换的条件下有相同的分布。

证明. 在 $t < T$ 时, 定义 $\eta(t) = \Phi_K(\gamma(t))$ 。那么对应 $\eta(t)$ 的共形映射 \tilde{g}_t 满足

$$\partial_t \tilde{g}_t(z) = \frac{2\Phi_t'^2(W(t))}{\tilde{g}_t(z) - \tilde{W}_t}, \tilde{g}_0(z) = z.$$

其中 $\tilde{W}_t = \Phi_t(W_t)$ 。而由引理 2.11 可得

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_t &= \partial_t \Phi_t(W_t)dt + \Phi'_t(W_t)dW_t + \frac{1}{2}\Phi''_t(W_t)d[W]_t \\ &= -3\Phi''_t(W_t)dt + \Phi'_t(W_t)\sqrt{\kappa}dB_t + \frac{\kappa}{2}dt \\ &= \Phi'_t(W_t)\sqrt{\kappa}dB_t + (\frac{\kappa}{2} - 3)\Phi''_t(W_t)dt. \end{aligned}$$

当 $\kappa = 6$ 时, $\frac{\kappa}{2} - 3 = 0$, 于是 $d\tilde{W}_t = \Phi'_t(W_t)\sqrt{\kappa}dB_t$ 。作时间参数变换

$$u = u(t) = \int_0^t \Phi_s'^2(W_s)ds.$$

于是 $d\tilde{W}_{t(u)} = \sqrt{\kappa}d\tilde{B}_u$, 其中 \tilde{B}_u 是标准的一维布朗运动。得证。 \square

注记 2.12. 从以上定理可以看出从 0 出发到 ∞ 的弦 SLE(6) 在未碰到 K 时, 我们是分辨不出其到底是 \mathbb{H} 上的 SLE(6) 还是 $\mathbb{H} \setminus K$ 上的 SLE(6)。这就是“局部性”的由来。由四种 SLE 的等价性可以证明其他类型的 SLE(6) 也满足局部性。

除了 SLE(6) 满足一定的特殊性质外, SLE($\frac{8}{3}$) 也满足一种特殊性质——限制性。

引理 2.12 ([2],[13] 第 6.4 小节). 假定 $\gamma(t)$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE($\frac{8}{3}$)。对 \mathbb{H} 上的任意的紧致包 $K(0 \notin K)$, 设 Φ_K 为从 $\mathbb{H} \setminus K$ 到 \mathbb{H} 的共形映射, 满足 $\Phi_K(0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} = 1$ 。则

$$\mathbb{P}[\gamma \cap K = \emptyset] = \Phi_K'^{\frac{5}{8}}(0).$$

证明. 采用引理 2.10 和引理 2.11 中的记号, 令 $Y_t := \Phi'_t(W_t)1_{\{t < \tau_K\}}$, 其中

$$\tau_K := \inf\{t > 0 : \gamma[0, t] \cap K \neq \emptyset\}.$$

令 $M_t := Y_t^{\frac{5}{8}}$, 则由引理 2.11 可得

$$dY_t = \frac{\Phi_t''^2(W_t)}{2\Phi_t'(W_t)}dt + \Phi_t''(W_t)\sqrt{\kappa}dB_t.$$

于是

$$\frac{dM_t}{\frac{5}{8}M_t} = \frac{\Phi_t''(W_t)}{\Phi_t'(W_t)}\sqrt{\kappa}dB_t.$$

从而 $(M_t = 1_{\{t < \tau_K\}}\Phi_t'(W_t)^{\frac{5}{8}} : t \geq 0)$ 是一个鞅。当 $\tau_K < \infty$ 时, $\lim_{t \uparrow \tau_K} M_t = 0$; 当 $\tau_K = \infty$ 时, $\lim_{t \uparrow \infty} M_t = 1$ 。于是由停止定理 [19]

$$\Phi_K'^{\frac{5}{8}}(0) = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{P}[\tau_K = \infty] = \mathbb{P}[\gamma \cap K = \emptyset].$$

\square

由以上引理可得

定理 2.20 ([13] 第 6.4 小节). 假定 γ 是上半平面 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 。 K 为 \mathbb{H} 上的任意的紧致包, 满足 $0 \notin K$ 。则在已知 $\gamma \cap K = \emptyset$ 的条件下, γ 的分布与 $\mathbb{H} \setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的分布一样。

注记 2.13. 定理 2.20 可解释为, 如果将 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 限制在与 K 不交的集合上, 则得到的测度为 $\mathbb{H} \setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 。这也是“限制性”的直观解释。

证明. 对任意的 \mathbb{H} 上的紧致包 A , 有:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\gamma \cap \Phi_K^{-1}(A) = \emptyset | \gamma \cap K = \emptyset] \\ &= \frac{\mathbb{P}[\gamma \cap (\Phi_K^{-1}(A) \cup K) = \emptyset]}{\mathbb{P}[\gamma \cap K = \emptyset]} = \frac{\Phi_K'^{\frac{5}{8}}(\Phi_K^{-1}(A) \cup K)(0)}{\Phi_K'^{\frac{5}{8}}(0)} \\ &= \Phi_A'^{\frac{5}{8}}(0) = \mathbb{P}[\tilde{\gamma} \cap \Phi_K^{-1}(A) = \emptyset]. \end{aligned}$$

其中根据 $\mathbb{H} \setminus K$ 中 $\text{SLE}(\kappa)$ 的定义, $\tilde{\gamma}$ 为 $\mathbb{H} \setminus K$ 中从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 。 \square

注记 2.14. 当然, 我们还应说明 $\{\{K \cap \gamma = \emptyset\} : K \text{ 取遍所有的紧致包}\}$ 完全刻画了 γ 的分布, 具体可参见文章 [2]。

对射线型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$, 情形有点不太一样。设 K 为 \mathbb{D} 上的紧致包, 则有唯一的共形映射 $\Phi_K(z) : \mathbb{D} \setminus K \rightarrow \mathbb{D}$ 满足 $\Phi_K'(0) > 0, \Phi_K(0) = 0$ 。

定理 2.21 ([3], Lawler[13] 第 6.5 小节). 设 $\gamma(t)$ 为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的射线型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$, 则对 \mathbb{D} 上的任意的紧致包 K , 设 Φ_K 为如上定义的共形映射。则有

$$\mathbb{P}[\gamma \cap K = \emptyset] = \Phi_K'^{\frac{5}{48}}(0) |\Phi_K'(1)|^{\frac{5}{8}}.$$

从而在已知 $\gamma \cap K = \emptyset$ 的条件下, γ 的分布与 $\mathbb{D} \setminus K$ 上的从 1 到 0 的射线型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的分布一样。

2.2.5 对偶性与自反性

在逾渗模型中的离散探索曲线, 如果从 ∞ 出发, 得到的是同一条探索曲线, 只是方向发生了变化。因此其尺度极限应该也满足这样的性质。

Schramm 和 Rohde 在文章中 [20] 猜测弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 应该满足自反性。最终由詹大鹏通过构造配对的方法证明。

定理 2.22 (詹大鹏 [27]). 设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$, 其中 $0 < \kappa < 8$. $\phi(z) = -\frac{1}{z}$. 记 $\beta := \phi(\gamma)$. 则 $\gamma[0, \infty)$ 和 $\beta[0, \infty)$ 作为随机曲线有相同的分布。

注记 2.15. 由于射线型 SLE 和带型 SLE 的端点不具备某种对称性, 因此其分布不满足自反性。并且当 $\kappa > 8$ 时, 本定理不成立, 具体参见詹大鹏文章 [27] 和 [28]。

除了自反性, 弦 SLE 还满足对偶性。Duplantier 利用物理的方法猜测, 当 $4 < \kappa$ 时, 弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 的边界应为弦 $\text{SLE}(\frac{16}{\kappa})$ 。这里还要涉及 $\text{SLE}(\kappa, \rho)$ 的定义, 就不详细叙述, 具体参见詹大鹏的文章 [28]。

2.3 有关 SLE 的一些计算

SLE 作为一个强大的工具解决了许多以前未解决的问题, 特别是关于平面布朗运动的边界的 Hausdorff 维数的确定。这主要利用了 SLE 可以做出许多具体的计算这一特点。在本节主要介绍涉及 SLE 的一些计算。

2.3.1 Cardy 公式

假定 $\gamma(t)$ 是上半平面 \mathbb{H} 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。由定理 2.13 知当 $\kappa > 4$ 时, $\gamma(t)$ 不是一条简单曲线, 并且 $\cup_{t \geq 0} K_t = \overline{\mathbb{H}}$ 。

对任意的 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 定义 $T_x := \inf\{t \geq 0 : x \in K_t\}$, 则依概率 1 有 $T_x < \infty$ 。显然当 $x_1 < x_2 < 0$ 或者 $0 < x_2 < x_1$ 时, 有 $T_{x_2} \leq T_{x_1}$ a.s.。自然地有问题: 当 $-x < 0 < y$ 时, $T_{-x} \leq T_y$ 的概率是多少?

首先由于弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 满足尺度不变性以及关于 y 轴对称, 则可以得到

$$\mathbb{P}(T_{-x} \leq T_y) = \mathbb{P}(T_x \leq T_{-y}) = \mathbb{P}(T_{-\frac{x}{y}} \leq T_1) = \mathbb{P}(T_{-1} \leq T_{\frac{y}{x}}).$$

于是只需处理 $T_{-x} \leq T_1$ 的情形。我们有如下定理:

定理 2.23 ([14],[13] 第 6.7 小节).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{-x} > T_1) &= \frac{\Gamma(2-4a)}{\Gamma(2-2a)\Gamma(1-2a)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-2a} {}_2F_1(2a, 1-2a, 2-2a; \frac{x}{1+x}) \\ &= \frac{\Gamma(2-4a)}{(\Gamma(1-2a))^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} \frac{dy}{y^{2a}(1-y)^{2a}}. \end{aligned}$$

其中 $a = \frac{2}{\kappa}$ 。

令 $T := \inf\{t : \gamma(t) \in [1, \infty)\}$, 则当 $0 \leq \kappa \leq 4$ 时, 依概率 1 有 $T = \infty$; 当 $\kappa \geq 8$ 时, 依概率 1 有 $\gamma(T) = 1$ 。而在 $4 < \kappa < 8$ 时, $\gamma(T)$ 有一个分布:

定理 2.24 ([20],[13] 第 6.7 小节). 设 γ 是上半平面的从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 并且 $4 < \kappa < 8$, T 的定义如上。令 $a = \frac{2}{\kappa}$, 则对任意的 $x \geq 0$ 有

$$\mathbb{P}(\gamma(T) \leq 1+x) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(4a-1)\Gamma(2a-1)} \int_0^{\frac{x}{1+x}} \frac{dy}{y^{2-4a}(1-y)^{2a}}.$$

由定理 2.23 和定理 2.24 可以得到如下定理:

定理 2.25 ([13] 第 6.7 小节). 假定 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(6)$ 。定义随机变量

$$Y := \sup\{x : T_x \leq T_{-1}\} = \sup\{x : x \in \partial K_{T_{-1}}\}.$$

$$Z := \sup\{x : T_x = T_1\} - 1$$

则对任意的 $y \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[Z \leq y] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{y}{1+y}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du.$$

证明. 注意到 $Y \leq y$ 当且仅当 $T_y \geq T_{-1}$ 。而 $\mathbb{P}[T_y \geq T_{-1}] = \mathbb{P}[T_{-y} \geq T_1]$ 。

$Z \leq y$ 当且仅当 $\max\{x : x \in \mathbb{R} \cap \gamma[0, T_1]\} \leq y$ 。利用定理 2.23 和定理 2.24 可以得到本定理的证明。 \square

考虑共形映射

$$f(z) := \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^z w^{-\frac{2}{3}}(1-w)^{-\frac{2}{3}} dw.$$

此映射将上半平面 \mathbb{H} 共形映到以 $A = 0, B = 1, C = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 为顶点的正三角形 (参见 [11] 的第六章第二小节), 其中 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = e^{i\frac{\pi}{3}}$, 并且分支的选取如下:

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du, & \text{当 } 0 < x < \infty \text{ 时;} \\ f(x) &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^x u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时;} \\ f(-x) &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du, & \text{当 } x > 1 \text{ 时.} \end{aligned}$$

设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(6)$, 则根据定义 $\eta := f(\gamma)$ 为 $\triangle ABC$ 上从 A 到 C 的弦 $\text{SLE}(6)$ 。由于

$$\mathbb{P}[T_1 \leq T_{-y}] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{y}{1+y}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du,$$

令 $D := f(-y)$ 则可以得到:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\gamma \text{ 先于 } (-\infty, -y] \text{ 碰到 } [1, +\infty)] \\ &= \mathbb{P}[\eta \text{ 先于 } DC \text{ 碰到 } BC] \\ &= |AD|. \end{aligned}$$

其中 $|AD|$ 表示 AD 的长度。以上称为 *Cardy* 公式。正是 Cardy 公式促使了 Smirnov 关于渗流的研究 [29], 这也是 Smirnov 获得菲尔兹奖的重要工作之一。又因为

$$\mathbb{P}[\gamma(T_1) \leq 1+x] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du,$$

从而

$$\mathbb{P}[\eta(T_{BC}) \in BE] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{2}{3}} du = |BE|.$$

这里 T_{BC} 表示 η 第一次碰到线段 BC 的时刻。 $E = f(1+x)$ 为 BC 上的任一点。从而得到 $\eta(T_{BC})$ 为 BC 上的均匀分布。

设 $L > 0$, 记矩形 $\mathcal{R}_L := [0, L] \times [0, \pi i]$ 的四个顶点为 $A = 0, B = L, C = L + i\pi, D = i\pi$ 。则存在唯一的共形映射 $\phi(z) : \mathcal{R}_L \rightarrow \mathbb{H}$, 满足

$$f(C) = 0, f(A) = 1, f(B) = \infty, f(D) = \xi \in (0, 1).$$

由极值距离的共形不变性, 可得到 $[\xi, 1]$ 与 $[-\infty, 0]$ 在 \mathbb{H} 中的 π -极值距离为 L 。而由椭圆函数与超几何函数的性质可得到, 当 $L \rightarrow \infty$ 时有:

$$1 - \xi = e^{-L+O(1)}.$$

有唯一的 $x > 0$ 满足存在唯一的共形映射 $f(z) : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{R}_L$ 并且使得

$$f(0) = D, f(-1) = C, f(\infty) = L, f(x) = 0.$$

我们有如下定理:

定理 2.26 ([14]). 设 $\kappa > 4$, 假定 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。则根据定义 $\eta = f(\gamma)$ 为 \mathcal{R} 上从 $D = i\pi$ 到 $B = L$ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。设

$$\tau = \inf\{t > 0 : \eta[0, t] \cap [B, C] \neq \emptyset\},$$

则当 $L \rightarrow \infty$ 时有

$$\mathbb{P}[\gamma[0, \tau] \cap [0, L] = \emptyset] \asymp e^{-(1-\frac{4}{\kappa})}.$$

证明. 记 $E := \{\gamma[0, \tau] \cap [0, L] = \emptyset\}$ 。则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(T_{-1} < T_x) = \mathbb{P}(T_1 < T_x) \\ &= \frac{\Gamma(2 - \frac{8}{\kappa})}{\Gamma(1 - \frac{4}{\kappa})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{4}{\kappa}} (1-u)^{-\frac{4}{\kappa}} du \\ &= \frac{\Gamma(2 - \frac{8}{\kappa})}{\Gamma(2 - \frac{4}{\kappa})\Gamma(1 - \frac{4}{\kappa})} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-\frac{4}{\kappa}} {}_2F_1\left(\frac{4}{\kappa}, 1 - \frac{4}{\kappa}, 2 - \frac{4}{\kappa}, \frac{x}{1+x}\right).\end{aligned}$$

如果令 $g(z) = \frac{z+1}{1+x}$, 则 $g(-1) = 0, g(0) = \frac{1}{1+x}$ 。于是仍由极值距离的共形不变性质可得到 $[-\infty, -1]$ 和 $[0, x]$ 在 \mathbb{H} 中的极值距离等于 $[-\infty, 0]$ 和 $[\frac{1}{1+x}, 1]$ 之间的极值距离, 从而为 $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} = e^{-L+O(1)}$ 。

由于 ${}_2F_1(\frac{4}{\kappa}, 1 - \frac{4}{\kappa}, 2 - \frac{4}{\kappa}, \frac{x}{1+x})$ 有界, 则当 $L \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\mathbb{P}(E) \asymp e^{-(1-\frac{4}{\kappa})L}.$$

□

事实上, 上述定理有更为一般的形式, 当 $\eta[0, \tau] \cap [0, L] = \emptyset$ 时, 可以考虑 $\mathcal{R}_L \setminus K_\tau$ 中 $[0, i\pi]$ 到 $[L, L + i\pi]$ 的 π 极值距离 \mathcal{L} 。

定理 2.27 ([14]). 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 对任意的 $b \geq 0$ 有

$$\mathbb{E}[1_E e^{-b\mathcal{L}}] \asymp e^{-u(\kappa, b)L}.$$

其中 $u(\kappa, b) = b + \frac{\kappa-4+\sqrt{(\kappa-4)^2+16\kappa b}}{2\kappa}$ 。

注记 2.16. 当 $b = 0$ 时, $u(\kappa, 0) = 1 - \frac{4}{\kappa}$ 。

考虑共形映射 $f(z) : \mathcal{R}_L \rightarrow \mathbb{H}$, 满足

$$f(C) = 0, f(A) = 1, f(B) = \infty, f(D) = x \in (0, 1).$$

设 $\gamma(t), K_t$ 为 \mathbb{H} 上从 x 到 ∞ 的弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 。记

$$T_0 := \inf\{t > 0 : 0 \in K_t\}, T_1 := \{t > 0 : 1 \in K_t\}.$$

$$T = \min\{T_0, T_1\}.$$

我们的目标是在 $T = T_0$ 的情况下, 计算 $\mathbb{H} \setminus K_T$ 中 $[x, 1]$ 到 $[-\infty, 0]$ 的 π 极值距离。当 $t < T$ 时, 定义

$$f_t(z) := \frac{g_t(z) - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)}.$$

则有 $f_t(0) = 0, f_t(1) = 1$ 。记 $M_T = \sup\{K_T \cap \mathbb{R}\}$, $N_T = f_T(M_T)$, 于是

$$\mathcal{L} = \pi(-\infty, 0] \text{ 与 } [N_T, 1] \text{ 在 } \mathbb{H} \text{ 中的极值距离} = \log(1 - N_T) + O(1).$$

因此需要需要估计 $\mathbb{E}[(1 - N_t)^\lambda]$ 。而 $(1 - N_t) \asymp (1 - x)f'_T(1)$, 从而只需估计 $\mathbb{E}[1_E f_T'^\lambda(1)]$ 。

令 $Z_t(z) := \frac{W_t - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)}$, 定义 $\Lambda(1 - x, b) = \mathbb{E}^x[1_{T_0 < T_1} f_T'^b(1)]$, 其中 \mathbb{E}^x 表示是从 x 出发的 SLE。

引理 2.13 ([14]).

$$\Lambda(x, b) = C(b, \kappa) x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_\kappa} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_\kappa, -\frac{1}{2} + \frac{6}{\kappa} + \hat{b}_\kappa, 1 + 2\hat{b}_\kappa; x\right). \quad (2.6)$$

其中

$$C(b, \kappa) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{6}{\kappa} + \hat{b}_\kappa) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_\kappa)}{\Gamma(1 - \frac{4}{\kappa}) \Gamma(1 + 2\hat{b}_\kappa)}, \quad \hat{b}_\kappa = \frac{\sqrt{(\kappa - 4)^2 + 16b\kappa}}{2\kappa}. \quad (2.7)$$

定理 2.28 ([14]). 设 $t \geq 0$, 采用同上述定理中的记号。记

$$\Theta(x, b) = \mathbb{E}^{1-x}[1_{\{T_0 < T_1\}}(1 - N_T)^b],$$

则有

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^b \Lambda(x, b) \leq \Theta(x, b) \leq x^b \Lambda(x, b).$$

下面给出**定理 2.27** 的证明:

证明.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_{\{T_0 < T_1\}} e^{-b\mathcal{L}}] &\asymp \mathbb{E}[1_{\{N_T < 1\}}(1 - N_T)^b] \asymp \Theta(1 - x, b) \\ &\asymp (1 - x)^b \Lambda(1 - x, b) \asymp e^{-u(\kappa, b)L}. \end{aligned}$$

□

注记 2.17. 对于射线型 SLE(κ), 由于其不具备尺度不变性。因此对于 $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$, 一般不能将 $\mathbb{P}(T_{z_1} < T_{z_2})$ 转化为只有一个参量的微分方程来计算, 因此就比较复杂。而对带型 SLE, 有一些结果可参见詹大鹏的博士论文 [17]。

2.3.2 射线 SLE 的分支估计

对于射线型的 SLE 也有类似弦 SLE 的估计。设 $(g_t(z), K_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{D} 上的从 1 到 0 的射线型 SLE(κ)。如果 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $e^{ix} \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ 。 $T_x := \inf\{t > 0 : e^{ix} \in K_t\}$ 。

对 $t < T_x$, 定义 $h_t(x)$ 满足 $g_t(x) = e^{ih_t(x)}$ 并且 $h_t(x)$ 连续。于是

$$\begin{aligned}\partial_t g_t(x) &= g_t(e^{ix}) \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + g_t(e^{ix})}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - g_t(e^{ix})} = e^{h_t(x)} \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + e^{ih_t(x)}}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - e^{ih_t(x)}} \\ &= ie^{ih_t(x)} \cot \frac{h_t(x) - \sqrt{\kappa}B_t}{2} = e^{ih_t(x)} i \partial_t h_t(x).\end{aligned}$$

从而有

$$\partial_t h_t(x) = \cot \frac{h_t(x) - \sqrt{\kappa}B_t}{2}.$$

并且

$$T_x = \inf\{t > 0 : h_t(x) - \sqrt{\kappa}B_t \in \{0, 2\pi\}\}.$$

令 $f_t(x) = h_{t/\kappa}(x)$, 则有

$$\partial_t f_t(x) = \frac{1}{\kappa} \cot \frac{f_t(x) - \tilde{B}_t}{2}.$$

其中 \tilde{B}_t 为标准的一维布朗运动。定义 $a = \frac{2}{\kappa}$, $Y_t := f_t(x) - B_t$, 则

$$dY_t = \frac{a}{2} \cot \frac{Y_t}{2} - dB_t, Y_0 = x.$$

这是一个类 Bessel 过程。其具体研究和性质可参见书本 [13] 的 1.10 小节。

定理 2.29 (参见 [21] 或者 [13] 第 6.11 小节). 设 $(g_t, K_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{D} 中从 1 到 0 的射线型 SLE(κ)。记 $A_t = \partial D \setminus K_t$, 则 $A_t = \emptyset$ 或者为 ∂D 上的一段圆弧。对任意的 $b \geq 1, r \in (0, 1)$, 仍记

$$\sigma_r = \inf\{t > 0 : K_t \cap \{|z| = r\} \neq \emptyset\}.$$

设 $\mathcal{L}(r)$ 为 $\mathbb{D} \setminus K_{\sigma_r}$ 中从 $|z| = r$ 到 $|z| = 1$ 的 π 极值距离。当 $A_{\sigma_r} = \emptyset$ 时, 记 $\mathcal{L}(r) = +\infty$ 。则当 $r \rightarrow 0$ 时有

$$\mathbb{E}[e^{-b\mathcal{L}(r)}] \asymp r^{\kappa\lambda}.$$

2.3.3 点与 SLE 曲线的关系

由于当 $0 \leq \kappa < 8$ 时, \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(κ) 是一条从 0 到 ∞ 的曲线, 并且对任意的 $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(z \in \gamma) = 0$, 因此可以考虑点 z 位于曲线 γ 的左侧的概率。当 γ 为简单曲线时, 赋予 γ 从 0 到 ∞ 的定向。那么对 $z \notin \gamma$, 如果 z 位于 \mathbb{H} 的左连通分支, 则称 z 位于 γ 的左侧。当 γ 不是简单曲线时, 存在 $t_1 < t_2$ 满足 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, $\gamma[t_1, t_2]$ 为一个简单环路, 并且 z 位于环路将平面分成的有界的连通部分。此时如果沿着 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_2)$ 的方向, z 位于左侧, 则称 z 位于 γ 的左侧。

定理 2.30 (Schramm[30]). 对任意的 $0 < \kappa < 8$ 和 $z = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, 有

$$\mathbb{P}[z \text{ 位于 } \gamma \text{ 的左侧}] = C \int_{\frac{x_0}{y_0}}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{4}{\kappa}}} dy.$$

其中

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{4}{\kappa}}} dy}.$$

注记 2.18. 当 $\kappa = 4$ 时, $G(\frac{x_0}{y_0}) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_0}{y_0}) = \frac{\arg(z)}{\pi}$ 。

注记 2.19. 由于射线型 $\text{SLE}(\kappa)$ 是从 \mathbb{D} 的边界点到内部点, 因此不能定义位于左边还是右边的概念。而对带型 $\text{SLE}(\kappa)$ 则可以定义和计算可参见詹大鹏的博士论文 [17]。

2.4 平面布朗运动的相交指数

在这一小节, 我们主要介绍平面布朗运动的相交指数的定义以及如何利用 $\text{SLE}(6)$ 来得到平面布朗运动的相交指数的具体值。

2.4.1 平面布朗运动的相交指数的定义及计算

有许多方法可以用来定义平面布朗运动的相交指数 (参见文章 [36]), 这里采用如下方法。对任意的整数 $k \geq 2$, 以及正整数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, 记 $K = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ 。任意的 $j \in \{1, 2, 3, \dots, K\}$, 假定 $(B_j(t) : j = 1, 2, 3, \dots, K)$ 为 K 个互相独立的布朗运动, 并且其初始分布 $B_j(0)$ 服从 $|z| = 1$ 上的均匀分布。任取 $R > 1$, 记 $\tau_j(R) := \inf\{t > 0 : |B_j(t)| = R\}$ 。

令事件 $E(R)$ 为

$$E(R) := \left\{ \left(\bigcup_{i=1}^{p_l} B_{p_{l-1}+i}[0, \tau_{p_{l-1}+i}(R)] \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p_s} B_{p_{s-1}+j}[0, \tau_{p_{s-1}+j}(R)] \right) = \emptyset, \right. \\ \left. \forall l \neq s \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \right\}.$$

记 $f(R) = \mathbb{P}(E(R))$, 则由布朗运动的马尔可夫性质可以得到 $f(R+T) \leq f(R)f(T)$, 由次可加性可以得到存在 $\xi = \xi(p_1, p_2, \dots, p_k)$ 使得:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log f(R)}{R} = \xi(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

称 $\xi(p_1, p_2, \dots, p_k)$ 为平面布朗运动的全平面相交指数。

如果令 $F(R)$ 为事件

$$F(R) := \left\{ \left(\bigcup_{i=1}^{p_l} B_{p_{l-1}+i}[0, \tau_{p_{l-1}+i}(R)] \right) \subset \mathbb{H}, \forall l \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \right\}$$

记 $g(R) = \mathbb{P}(E(R) \cap F(R))$, 则仍由马尔可夫性质可以得到 $g(R+T) \leq g(R)g(T)$ 。于是再由次可加性得到, 存在 $\tilde{\xi}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ 使得:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log g(R)}{R} = \tilde{\xi}(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

在 Werner 和 Lawler 的文章 [36] 中, 他们将 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 的定义进行了推广, 使得对任意的 $\lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, k)$, $\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 均可定义; 以及对任意的 $\lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, k)$, 如果存在 $i \neq j$ 使得 $\lambda_i \geq 1, \lambda_j \geq 1$, 则 $\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 可定义。文章 [36] 中还利用布朗溢出测度给出了相交指数的等价的定义。

定理 2.31 (Lawler, Werner[36]). 相交指数 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 满足如下性质:

- (1) $\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}, \tilde{\xi}(\lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k));$
- (2) $\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}, \tilde{\xi}(\lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k));$
- (3) 对任意的 $\{1, 2, \dots, k\}$ 上的置换 σ , 有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \xi(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma_k})$$

$$\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \tilde{\xi}(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma_k}).$$

定理 2.32 (Lawler, Werner[36]). 存在函数 $\eta: [\tilde{\xi}(1, 1), \infty) \rightarrow [\xi(1, 1), \infty)$, 使得对任意的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$ 并且至少两个不小于 1, 则有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \eta(\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k))$$

在文章 [36] 和 [35] 中, 给出了 $\tilde{\xi}(\lambda_1, 1, \lambda_2)$ 与 $\tilde{\xi}(1, \lambda)$ 的刻画。具体如下:

如果记 \mathcal{B} 为矩阵 $\mathcal{R}_L = [0, L] \times [0, i\pi]$ 上的布朗溢出测度, 记 $B[0, \tau]$ 为其样本轨道。令事件 $E := \{B(0) \in [0, i\pi], B(\tau) \in [L, L + i\pi]\}$ 。在 E 发生的条件下, 记 A_1 和 A_2 分别为 $\mathcal{R}_L \setminus B[0, \tau]$ 的以 $[i\pi, L + i\pi]$ 和 $[0, L]$ 为边界的连通分支。记 \mathcal{L}_+ 与 \mathcal{L}_- 分别为 A_1 和 A_2 中 $[0, i\pi]$ 和 $[L, L + i\pi]$ 的 π 极值距离。则有

定理 2.33 (Werner, Lawler[36][35]). 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \mathcal{L}_+} 1_E] \asymp e^{-L \tilde{\xi}(1, \lambda)},$$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda_1 \mathcal{L}_+ - \lambda_2 \mathcal{L}_-} 1_E] \asymp e^{-L \tilde{\xi}(\lambda_1, 1, \lambda_2)}.$$

同样的, 文章 [36][35] 也给出了 $\xi(1, \lambda)$ 与 $\xi(\lambda_1, 1, \lambda_2, 1)$ 的刻画。对 $0 < r < 1$, 考虑环 $A_r := \{z : r < |z| < 1\}$ 。对任意的曲线 $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{D}$, 满足 $|\gamma(0)| = |\gamma(T)| = 1$ 并且 $\gamma(0, T) \subset \mathbb{D}$ 。记 $T(r) := \inf\{t > 0 : |\gamma(t)| = r\}$ 。令 $\phi(\gamma) := \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq T(r)\}$ 。于是 ϕ 将 \mathbb{D} 上的布朗溢出测度应为 A_r 上的曲线空间上的测度, 称为环 A_r 上的布朗溢出测度。

记 \mathcal{B} 为 A_r 上的布朗溢出测度, $B[0, \tau]$ 为其样本轨道。事件 $E = \{|B(0)| = 1, |B(\tau)| = r\}$, 事件 $F := E \cap \{B[0, \tau] \text{ 没有将 } 0 \text{ 和 } \infty \text{ 分离}\}$ 。在 F 发生的条件下, 记 O 为 $A_r \setminus B[0, \tau]$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 相交的唯一的连通分支, \mathcal{L} 为 O 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。

定理 2.34 (Werner, Lawler[36][35]). 当 $r \rightarrow 0$ 时有:

$$\mathbb{E}[1_F e^{-\lambda \mathcal{L}}] \asymp r^{\xi(\lambda, 1)}.$$

若 $B_1[0, \tau_1]$ 和 $B_2[0, \tau_2]$ 为 A_r 上的两个相互独立的布朗溢出测度的样本轨道。记

$$G := \{B[0, \tau_1] \cap B[0, \tau_2] = \emptyset, |B_1(0)| = |B_2(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = |B_2(\tau_2)| = r\}.$$

在 G 发生的条件下, 存在 $A_r \setminus (B_1[0, \tau_1] \cup B_2[0, \tau_2])$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 相交的连通分支 O_1 和 O_2 。记 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 为 O_1 和 O_2 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。则

定理 2.35 (Werner, Lawler[36][35]). 当 $r \rightarrow 0$ 时, 则有

$$\mathbb{E}[1_G e^{-\lambda_1 \mathcal{L}_1 - \lambda_2 \mathcal{L}_2}] \asymp r^{\xi(\lambda_1, 1, \lambda_2, 1)}.$$

在文章 [35] 中, 作者定义了一种完全共形不变测度, 其满足一定的泛性性质。正是基于这个思想, 在 [14][21][37] 中, 作者利用 SLE(6) 和上述关于相交指数的刻画, 得到了上述相交指数的具体值, 再利用相交指数间的关系, 可以确定相交指数的所有值。下面详细介绍 SLE 这个强大的工具在平面布朗运动的相交指数计算上的应用。

2.4.2 上半平面相交指数

首先我们利用 SLE(6) 来计算 $\tilde{\xi}(\frac{1}{3}, \lambda)$ 。假定 $(\gamma(t), K_t : t \geq 0)$ 为矩形 \mathcal{R}_L 上从顶点 $i\pi$ 到顶点 L 的 SLE(6), $B[0, \tau]$ 为 \mathcal{R}_L 上的布朗溢出。二者定义在相同的

概率空间上，并且互相独立。记 $T := \inf\{t \geq 0 : K_t \cap ([0, L] \cup [L, L + i\pi]) \neq \emptyset\}$, $\mathcal{S} = K_T$ 。考虑如下事件：

$$E_1 = \{B(0) \in [0, i\pi], B(\tau) \in [L, L + i\pi]\},$$

$$E_2 = \{K_T \cap [0, L] = \emptyset\},$$

$$E_3 = E_1 \cap E_2 \cap \{K_T \cap B[0, \tau] = \emptyset\}.$$

在 E_1 发生的条件下，记 A_1 和 A_2 分别为 $\mathcal{R}_L \setminus B[0, \tau]$ 的以 $[i\pi, L + i\pi]$ 和 $[0, L]$ 为边界的连通分支。记 \mathcal{L}_+ 与 \mathcal{L}_- 分别为 A_1 和 A_2 中 $[0, i\pi]$ 和 $[L, L + i\pi]$ 的 π 极值距离。则由对称性可知 \mathcal{L}_+ 和 \mathcal{L}_- 有着相同的分布。在 E_2 发生的条件下，记 $\mathcal{L}_{\text{SLE}(6)}$ 为 $\mathcal{R}_L \setminus K_T$ 中 $[0, i\pi]$ 与 $[L, L + i\pi]$ 的 π 极值距离。在 E_3 发生的条件下，记 O 为 $\mathcal{R}_L \setminus K_T \cup B[0, \tau]$ 的介于 K_T 和 $B[0, \tau]$ 之间的连通分支， \mathcal{L} 为 O 中 $[0, i\pi]$ 到 $[L, L + i\pi]$ 的 π 极值距离。下面分两种方法计算 $\mathbb{E}[e^{-\lambda \mathcal{L}} 1_{E_3}]$ 。记 \mathbb{E}_B 是对布朗溢出求对应的期望， $\mathbb{E}_{\text{SLE}(6)}$ 是对 SLE(6) 求期望。

首先在已知 $B[0, \tau]$ 的条件下，由 SLE(6) 的局部性质可得到在 E_3 发生时， K_T 可以看做 A_1 中从 $i\pi$ 出发到 $L + i\pi$ 的 SLE(6) 在碰到 $[L, L + i\pi]$ 停止，并且与 $B[0, \tau]$ 不交。于是根据定理 2.27 和定理 2.33 可以得到，当 $L \rightarrow \infty$ 时有：

$$\mathbb{E}_B[\mathbb{E}_{\text{SLE}(6)}[e^{-\lambda \mathcal{L}}]] \asymp \mathbb{E}[e^{-u(6, \lambda) \mathcal{L}_+}] \asymp e^{-L \tilde{\xi}(0, 1, u(6, \lambda))}.$$

同时，在已知 K_T 的条件下，由布朗溢出的限制性质，如果 E_3 发生，则 $B[0, \tau]$ 可看做 $\mathcal{R}_L \setminus K_T$ 上的布朗溢出。此时再由对称性可知 \mathcal{L} 与 \mathcal{L}_- 同分布。于是结合定理 2.27 与定理 2.33 可得：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\text{SLE}(6)}[\mathbb{E}_B[e^{-\lambda \mathcal{L}}]] &= \mathbb{E}_B[\mathbb{E}_{\text{SLE}(6)}[e^{-\lambda \mathcal{L}_-}]] \\ &= \mathbb{E}_B[e^{-\lambda \mathcal{L}_-} \mathbb{E}_{\text{SLE}(6)}[1_{E_3}]] \\ &\asymp \mathbb{E}_B[e^{-\lambda \mathcal{L}_- - \frac{1}{3} \mathcal{L}_+}] \\ &\asymp e^{-L \tilde{\xi}(\lambda, 1, \frac{1}{3})}. \end{aligned}$$

于是结合 $\tilde{\xi}(0, 1, \lambda) = \tilde{\xi}(1, \lambda)$ 以及 $\tilde{\xi}(1, \lambda)$ 关于 λ 的严格单调性（参见 [36]）可得到 $\tilde{\xi}(\lambda, 1, \frac{1}{3}) = \tilde{\xi}(1, u(6, \lambda))$ ，从而

$$\tilde{\xi}(\lambda, \frac{1}{3}) = u(6, \lambda) = \frac{6\lambda + 1 + \sqrt{1 + 24\lambda}}{6}$$

定理 2.36 ([14]). 对任意的 $\lambda \geq 0$

$$\tilde{\xi}(\lambda, \frac{1}{3}) = u(6, \lambda) = \frac{6\lambda + 1 + \sqrt{1 + 24\lambda}}{6}$$

利用上述定理以及相交指数的关系定理 2.31 可以得到一系列的相交指数的值。
对任意的 $p \in \mathbb{N}$, 记 $v_p = \frac{1}{6}p(p+1)$ 。则

定理 2.37 ([14]). 对任意的 $k \geq 2$, 以及非负整数 p_1, p_2, \dots, p_k , 有

$$\tilde{\xi}(v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_k}) = \frac{1}{24}((\sqrt{24v_{p_1}+1} + \dots + \sqrt{24v_{p_k}+1} - (k-1))^2 - 1).$$

证明. 定义 $U(\lambda) = \sqrt{24\lambda+1} - 1$, $u(\lambda) = u(6, \lambda)$ 。则 $\tilde{\xi}(v_1, \lambda) = \tilde{\xi}(\frac{1}{3}, \lambda) = u(\lambda)$ 。

$$U(\tilde{\xi}(v_1, \lambda)) = U(u(\lambda)) = \sqrt{24\lambda + 4 + 4\sqrt{24\lambda+1} + 1} - 1 = 2 + U(\lambda).$$

注意到 $v_p = u(v_{p-1})$, $U(u(\lambda)) = 2 + U(\lambda)$ 。从而

$$\tilde{\xi}(v_p, \lambda) = \tilde{\xi}(\tilde{\xi}(\frac{1}{3}, v_{p-1}), \lambda) = \tilde{\xi}(\frac{1}{3}, \tilde{\xi}(v_{p-1}, \lambda)) = u(\tilde{\xi}(v_{p-1}, \lambda)).$$

于是归纳可得:

$$U(\tilde{\xi}(v_p, \lambda)) = 2p + U(\lambda).$$

$$U(\tilde{\xi}(v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_k})) = 2(p_1 + p_2 + \dots + p_k) + U(\lambda).$$

反解即可得到

$$\tilde{\xi}(v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_k}) = \frac{1}{24}((\sqrt{24v_{p_1}+1} + \dots + \sqrt{24v_{p_k}+1} - (k-1))^2 - 1).$$

□

2.4.3 全平面相交指数

以上我们利用矩形 \mathcal{R}_L 中的弦 SLE(6) 导出了一部分上半平面相交指数的值。
接下来我们利用射线型 SLE (6) 来计算全平面相交指数的一些值。

若 $B_1[0, \tau_1]$ 和 $B_2[0, \tau_2]$ 为 A_r 上的两个相互独立的布朗溢出测度的样本轨道。
记

$$G(r) := \{|B_1(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = r, \text{没有将 } |z| = 1 \text{ 和 } |z| = r \text{ 分离}\}.$$

$$\tilde{G}(r) := \{B_1[0, \tau_1] \cap B_2[0, \tau_2] = \emptyset, |B_1(0)| = |B_2(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = |B_2(\tau_2)| = r\}.$$

在 $G(r)$ 发生的条件下, 记 O 为 $A_r \setminus B_1[0, \tau]$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 相交的唯一
的连通分支, \mathcal{L} 为 O 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。记 $\Phi: O \rightarrow \mathcal{R}_L$ 满足
 $\Phi(|z| = 1 \cap \overline{O}) = [0, i\pi]$, $\Phi(|z| = r \cap \overline{O}) = [L, L + i\pi]$ 。当 $\tilde{G}(r)$ 发生的条件下, 存
在 $A_r \setminus (B_1[0, \tau_1] \cup B_2[0, \tau_2])$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 相交的连通分支 O_1 和 O_2 。记

\mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 为 O_1 和 O_2 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。此时对应地有共形映射 $\Phi_i : O_1 \rightarrow \mathcal{R}_L$ 满足 $\Phi_i(|z| = 1 \cap \overline{O_i}) = [0, i\pi]$, $\Phi_i(|z| = r \cap \overline{O_i}) = [L, L + i\pi]$ ($i = 1, 2$)。对任意的 $\alpha > 0$, 记

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha &= G(r) \cap \{i \in \overline{O}, \Phi(i) \in [i\alpha, i(\pi - \alpha)]\}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_\alpha &= \tilde{G}(r) \cap \{i \in \overline{O_1}, \Phi_1(i) \in [i\alpha, i(\pi - \alpha)]\}.\end{aligned}$$

则有

引理 2.14 ([21] 引理 5.5). 对任意的 $\lambda \geq 0$. 存在序列 $x_n \downarrow 0$ 和 $y_n \downarrow 0$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}_\alpha} e^{-\lambda \mathcal{L}} d\mu_{x_n}(B_1) &\approx (x_n)^{\xi(1, \lambda)}. \\ \int_{\tilde{\mathcal{H}}_\alpha} e^{-\mathcal{L}_1 - \lambda \mathcal{L}_2} d\mu_{y_n}(B_1) d\mu_{y_n}(B_2) &\approx (y_n)^{\xi(1, 1, \lambda)}.\end{aligned}$$

其中 μ_{x_n}, μ_{y_n} 代表 A_{x_n} 和 A_{y_n} 上的布朗溢出测度。

定理 2.38 ([21]).

$$\xi(1, 1) = \frac{5}{4}.$$

证明. 假定 $(K_t : t \geq 0)$ 为 \mathbb{D} 上从 i 到 0 的射线型 SLE(6)。记 $T(r) := \inf\{t > 0 : K_t \cap \{|z| = r\} \neq \emptyset\}$, \mathbb{P}_r 为 K_T 的分布律, \mathbb{E}_r 为关于 K_T 求期望。 $B[0, \tau]$ 为如上述的 A_r 上的布朗溢出测度 μ_r 的样本轨道。

$$H := \{K_T \cap B[0, \tau] = \emptyset, |B(0)| = 1, |B(\tau)| = r\}.$$

下面用两种方法计算 $(\mathbb{P}_r \times \mu_r)[H]$ 。当 $B[0, \tau]$ 没有将 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 分离时, 记 O 为 $A_r \setminus B[0, \tau]$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 同时相交的连通分支, 而 \mathcal{L} 为 O 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。

当 K_T 没有将 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 分离时, 记 $O_{sle(6)}$ 为 $A_r \setminus K_T$ 的与 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 同时相交的连通分支, 而 $\mathcal{L}_{sle(6)}$ 为 $O_{sle(6)}$ 中 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 的 π 极值距离。

首先, 给定 K_T 并且 $\mathcal{L}_{sle(6)} < \infty$ 。由布朗溢出的共形不变性和限制性和定理 2.33 (令 $\lambda = 0$) 可得到

$$\mu_r[|B(0)| = 1, |B(\tau)| = r] = \mu_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}_{sle(6)}}}[H'] \asymp e^{-\mathcal{L}_{sle(6)}},$$

这里 H' 代表 $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_{sle(6)}}$ 中的布朗溢出的初始点位于 $[0, i\pi]$, 末端点位于 $[\mathcal{L}_{sle(6)}, \mathcal{L}_{sle(6)} + i\pi]$ 的事件。又由于定理 2.29 可知: 当 $r \rightarrow 0$ 时

$$\mathbb{E}_r[e^{-\mathcal{L}_{sle(6)}}] \asymp r^{\frac{5}{4}}.$$

同时，假定给定布朗溢出 $B[0, \tau]$ ，满足 $|B(0)| = 1, |B(\tau)| = r$ 并且没有分离 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 。则存在 c ([21]) 使得

$$\mathbb{P}_r[H] \leq ce^{-\mathcal{L}}.$$

结合定理2.33可得到：

$$(\mathbb{P}_r \times \mu_r)[H] \leq r^{\xi(1,1)+o(1)}.$$

另一方面，假定 $B[0, \tau]$ 给定，并且 $B \in \mathcal{H}_\alpha$ 。这里的 \mathcal{H}_α 同引理2.14。仍存在 c' (参见 [21]) 满足

$$\mathbb{P}_r[H] \geq c'e^{\mathcal{L}}$$

结合引理2.14 知当 $x_n \downarrow 0$ 时

$$(\mathbb{P}_{x_n} \times \mu_{x_n})[H] \geq [H \cap \mathcal{H}_\alpha] \geq (x_n)^{\xi(1,1)+o(1)}.$$

于是可以得到

$$(x_n)^{\frac{5}{4}} \asymp (x_n)^{\xi(1,1)}.$$

从而 $\xi(1,1) = \frac{5}{4}$ 。 □

同样的方法利用可以得到：

定理 2.39 ([21]).

$$\xi(1,1,1,\lambda) = \frac{1}{48}[(11 + \sqrt{24\lambda + 1})^2 - 4].$$

结合定理2.32 和 $\tilde{\xi}(1,1)$ 和 $\tilde{\xi}(1,1,1,\lambda)$ 可得到：

定理 2.40 ([21]). 对任意的 $x \geq 7$,

$$\eta(x) = \frac{1}{48}[(\sqrt{24x + 1} - 1)^2 - 4]$$

其中 $\eta(x)$ 同定理2.32。特别地，对任意的 $m \geq 2$ 以及 $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \in \{\frac{1}{6}l(l+1) : l \in \mathbb{N}\}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$ 有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{48}[(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \sqrt{24\lambda_2 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_m + 1} - m)^2 - 4].$$

其中至少有两个 λ_i 不小于 1 并且上式右端大于 $\frac{35}{12}$ 。

结合随后的文章 [42][37]，Schramm、Lawler、Werner 证明了 $\xi(1, \lambda)$ 关于 λ 是解析的，从而完全确定了平面布朗运动的相交指数。我们总结为如下定理

定理 2.41 ([37]). 对任意的 $k \geq 2$, 以及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$, 有

$$\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \frac{1}{24}[(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_k + 1} - (k-1))^2 - 1].$$

定理 2.42 ([37]). 对任意的 $m \geq 2$, 以及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$, 如果至少有两个 λ_i 不小于 1, 则有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{48}[(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \sqrt{24\lambda_2 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_m + 1} - m)^2 - 4].$$

2.4.4 平面布朗运动的一些集合的 Hausdorff 维数

记 $B(t)$ 为一个标准的平面布朗运动, 自然地, 会考虑其作为一条曲线的 Hausdorff 维数。记 $\mathbb{C} \setminus B[0, t]$ 的无界连通分支为 H_t , 则称 $D_t : \mathbb{C} \setminus H_t$ 为布朗运动生成的紧致包。称 $F_t := \partial D_t$ 为布朗运动的**前沿点**。由于布朗运动具有尺度不变性, 因此对任意的 $r > 0$, $rF_{\frac{t}{r^2}}$ 与 F_t 同分布, 从而 $F_t r^2$ 与 F_t 几乎处处有相同的 Hausdorff 维数。Mandelbrot 通过模拟猜测, 依概率 1, F_t 的 Hausdorff 维数是 $\frac{4}{3}$ 。而利用相交指数, 可以严格证明这个猜想。对 $s \in [0, t]$, 如果 $B(s) \in F_t$, 则称 $B(s)$ 为时间 t 的**先锋点**, 记为 P_t 。由尺度不变性知, 几乎处处对任意的 t , P_t 的 Hausdorff 维数一样。如果 $s \in (0, t)$ 满足 $B[0, s] \cap B(s, t] = \emptyset$, 则称 s 为一个**割断时间**, 称 $B(s)$ 为布朗运动相对于时间 t 的**割点**。记时间 t 的割点的集合为 C_t , 同样的由尺度不变性知, 几乎处处对任意的 t , C_t 的 Hausdorff 维数一样。在 Lawler 的文章中, 其证明了如下结果:

定理 2.43 ([21],[14]). 假定 $B(t)$ 为标准的平面布朗运动, 其时间 $t > 0$ 时的前沿点、先锋点和割点分别记为 F_t, P_t, C_t 。则依概率 1, 这三个集合的 Hausdorff 维数分别为:

$$\dim(F_t) = \frac{4}{3} \quad \dim(P_t) = \frac{7}{4} \quad \dim(C_t) = \frac{3}{4}.$$

事实上, Lawler 在文章 [38][39][40] 中证明了, 依概率 1, 这三个集合的 Hausdorff 维数分别是 $2 - \xi(2, 0)$ 、 $2 - \xi(1, 0)$ 和 $2 - \xi(1, 1)$ 。从而结合上一小节的相交指数的公式可以得出其具体值。需要指出的是, $\xi(1, 1) = \frac{5}{4}$ 和 $\xi(1, 0) = \frac{1}{4}$ 早先已由 Duplantier 和 Kwon [41] 根据共形场论的知识猜出来, 但是没能严格证明。所以数学上的一些参数可以通过物理上的理论猜出其值, 然后再严格证明。

2.5 离散模型与 SLE

Schramm 建立 SLE 的目的就是为了刻画一些离散模型的尺度极限, 在本节主要对这些离散模型并对其尺度极限和 SLE 的关系进行一些介绍。

定义 2.10. 如果 γ_2 是 γ_1 的重新参数化, 则称曲线 $\gamma_1(t) : [0, t_{\gamma_1}] \rightarrow \mathbb{C}$ 与曲线 $\gamma_2(t) : [0, t_{\gamma_2}] \rightarrow \mathbb{C}$ 等价, 即存在单调增的同胚 $\theta : [0, t_{\gamma_1}] \rightarrow [0, t_{\gamma_2}]$ 使得 $\gamma_1(t) = \gamma_2(\theta(t))$ 。

定义 2.11. 定义 \mathcal{C} 为平面上所有等价的曲线类的集合, 即平面上不考虑参数变换的曲线的集合。对任意的 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}$, 定义

$$d(\gamma_1, \gamma_2) := \inf_{\{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2\}} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |\hat{\gamma}_1(t) - \hat{\gamma}_2(t)| \right\}.$$

这里 \inf 取遍所有 γ_1 与 γ_2 在区间 $[0, 1]$ 上的参数化 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 。

可以验证 d 为 \mathcal{C} 上的度量, 并且由 d 诱导的拓扑与 \mathcal{C} 作为 \mathbb{D} 上的闭集的 Hausdorff 度量下诱导的拓扑一致。从而平面布朗运动便诱导了 \mathcal{C} 上的一个概率测度, 其 σ 代数为其 Borel 代数。

引理 2.15. 任意的 $\kappa \geq 0$, 三种 $\text{SLE}(\kappa)$ 的生成曲线诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度。

证明. 由 SLE 定义的 Loewner 方程知 $B_t \rightarrow \gamma(t)$ 是可测映射, 再由布朗运动诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度可得 $\text{SLE}(\kappa)$ 也诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度。□

定义 2.12. 设 (Ω, \mathcal{F}) 为一个可测空间, \mathbb{P}, \mathbb{P}_n 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的一族概率测度, 如果对任意的 Ω 上的有界连续函数 f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mathbb{P}_n = \int_{\Omega} f d\mathbb{P}.$$

称 \mathbb{P}_n 弱收敛到 \mathbb{P} 。

注记 2.20. 弱收敛有许多等价刻画, 参见 [58]。

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 并且没有平行边和自回路。记 $x \in V$, 称取值于 V 中的随机点列 $(X)_{n \geq 0}$ 为从 x 出发的简单随机游动, 如果 $X_0 = x$ 并且

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = w | X_n = v, X_{n-1}, \dots, X_1] = \frac{1_{\{w \sim v\}}}{\deg(v)},$$

其中 $\deg(v)$ 表示与 v 相邻的点的个数, $v \sim w$ 表示 v 和 w 相邻。

考虑 $G = \delta\mathbb{Z}^2$ 。设 $(X)_n$ 为 $G = \delta\mathbb{Z}^2$ 上从 0 出发的简单随机游动。

$$S_n^\delta := \sum_{k=0}^n X_k.$$

对任意的 $t \geq 0$, 定义

$$S_t^\delta = \sqrt{(t - [t])}(S_{[t]+1} - S_{[t]}) + S_{[t]},$$

于是 $S_t^\delta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ 诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度, 则

定理 2.44 (Donsker 1951). 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{\delta} S_t^\delta$ 弱收敛到平面上的布朗运动 B_t 。

这是最经典的离散模型收敛到连续极限的例子。有时称布朗运动是简单随机游动的尺度极限。

2.5.1 临界逾渗模型

记 $\mathcal{T} := \{m + ne^{i\frac{\pi}{3}}\}$ 为平面上的三角形格子点, 其中 $v_1, v_2 \in \mathcal{T}$ 相邻当且仅当 $|v_1 - v_2| = 1$ 。记 $\Lambda_n := \{k + le^{i\frac{\pi}{3}} : k, l \in [-n, n] \cap \mathbb{Z}\}$ 。记

$$\Omega := \{(\omega_v)_{v \in \mathcal{T}} : \omega_v = 1 \text{ 或 } -1\}.$$

如果 $\omega(i, j) = 1$, 称顶点 (i, j) 为黑色的; 如果 $\omega(i, j) = -1$, 称顶点 (i, j) 为红色的。

$$\Omega_n := \{(\omega_v)_{v \in \Lambda_n} : \omega_v = 1 \text{ 或 } -1\}.$$

对任意的 $p \in [0, 1]$, 独立地以概率 p 将每一个顶点 $v \in \mathcal{T}$ 染成黑色, 以概率 $1 - p$ 将其染成红色。于是这在 Ω_n 上定义了一个概率测度 P_n :

$$\mathbb{P}(\omega) = p^{b(\omega)}(1 - p)^{w(\omega)},$$

其中 $\omega \in \Omega_n$, $b(\omega)$ 和 $w(\omega)$ 分别代表 ω 中黑色顶点与红色顶点的个数。

下面构造 Ω 上的 σ 代数。任取 $\omega \in \Omega$ 和 $x \in \mathcal{T}$, 定义 $\omega_x \in \Omega$ 为

$$\text{如果 } y \neq x, \text{ 则 } \omega_x(y) = \omega(y); \text{ 如果 } y = x, \text{ 则 } \omega_x(y) = -\omega(y).$$

定义 2.13. 如果存在有限顶点集 $V \subset \mathcal{T}$, 使得对任意的 $\omega \in E$ 和 $x \in \mathcal{T} \setminus V$, 有 $\omega_x \in E$, 称 $E \subset \Omega$ 为柱集, 即 E 仅仅由 V 中的点决定。可以验证所有柱集的集合形成一个代数。记 Ω 上由柱集生成的 σ 代数为 \mathfrak{F} 。

对任意的柱集 E , 设 E 仅有 $V \subset \Lambda_n$ 中的点决定。定义

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_n(E|_{\Lambda_n}),$$

其中 $E|_{\Lambda}$ 表示 E 在 Λ_n 上的限制。可以证明 $\mathbb{P}(E)$ 不依赖于 Λ_n 的选取。于是由概率的唯一扩张定理, 存在 (Ω, \mathfrak{F}) 上的唯一概率测度使得对任意的柱集 E , 如果 E 由 Λ_n 中的点决定, 则

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_n(E|_{\Lambda_n}).$$

于是我们构造了 (Ω, \mathfrak{F}) 上的概率测度。在逾渗中, 存在临界点:

定理 2.45 ([31]). 存在 $p_c \in (0, 1)$ 使得:

- (1) 当 $p > p_c$ 时, 依概率 1 存在唯一的无穷黑色连通分支;
- (2) 当 $p \leq p_c$ 时, 依概率 1 不存在无穷的黑色连通分支。

这里的一个黑色连通分支指的是一组被染成黑色的顶点 $(v_n)_{n \geq 0}$ 并且对任意的 n , v_n 和 v_{n+1} 相邻。

定理 2.46 (Smirnov, Werner[29]). 在三角形格子点的逾渗模型中, $p_c = \frac{1}{2}$ 。

逾渗在临界点的状态最难刻画, 因此以下我们假定 $p = p_c = \frac{1}{2}$ 。

定理 2.47 (Smirnov[29]). 记 Ω 为一个 Jordan 区域, $a, b, c, d \in \partial\Omega$ 为按逆时针排列的四个不同的点。对任意的 $\delta > 0$, 记 $\delta\mathcal{T} := \{\delta z : z \in \mathcal{T}\}$ 。 $\Omega_\delta := \Omega \cap \delta\mathcal{T}$ 。考虑 Ω_δ 上的临界逾渗 \mathbb{P}_δ , 记 $P_\delta(\Omega, a, b, c, d)$ 为存在一条连结弧 ab 和弧 cd 的黑色路径的概率, 即存在 Ω_δ 中的顶点序列 (v_0, v_1, \dots, v_n) 满足 $v_i (0 \leq i \leq n)$ 为黑色并且 v_0 是距离弧 ab 最近的顶点, v_n 是距离弧 cd 最近的顶点。则有

(1) $\lim_{\delta \downarrow 0} P_\delta(\Omega, a, b, c, d)$ 存在, 记为 $f(\Omega, a, b, c, d)$ 。

(2) f 是共形不变的。即如果 $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ 为共形映射, 则有

$$f(\Omega, a, b, c, d) = f(\Omega', \Phi(a), \Phi(b), \Phi(c), \Phi(d)).$$

(3) 若 Δ 为一个等边三角形, 其顶点按逆时针方向为 a, b, c , 则

$$f(\Delta, a, b, c, d) = \frac{|cd|}{|ab|}.$$

注记 2.21. Cardy 首先通过模拟给出了这个猜想, 而 Smirnov 充分利用了 \mathcal{T} 的结构通过离散解析函数的方法给出了这个定理的证明。正是通过这个结果, Smirnov 证明了逾渗上的探索曲线收敛到 SLE(6)。

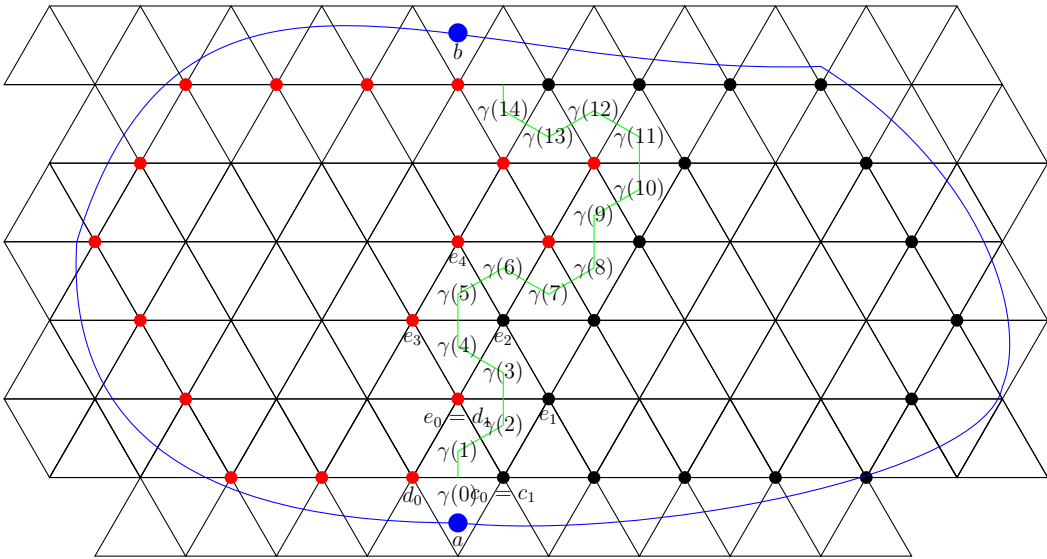
记 Ω 为一个 Jordan 区域, $a, b \in \partial\Omega$ 。 $\Omega_\delta = \delta\mathcal{T} \cap \Omega$ 。 ab 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 a 到 b 的弧; ba 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 b 到 a 的弧。将与 ab 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为黑色, 将与 ba 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为红色, 而 Ω_δ 中的其他点分别独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率染成黑色和红色。对于每一种染色结果, 存在一条曲线 γ^δ 连结 a 和 b , 使得 γ^δ 右侧的顶点为黑色, 左侧的顶点为红色。为了使得 γ^δ 唯一, 可选取 γ^δ 是由 \mathcal{T} 的对偶图中的边组成的折线。称 γ^δ 为 Ω_δ 上从 a 到 b 的探索曲线。自然地, γ^δ 诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度。事实上, 我们有以下结论:

定理 2.48 (Smirnov). 当 δ 趋于 0 时, γ^δ 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(6)。

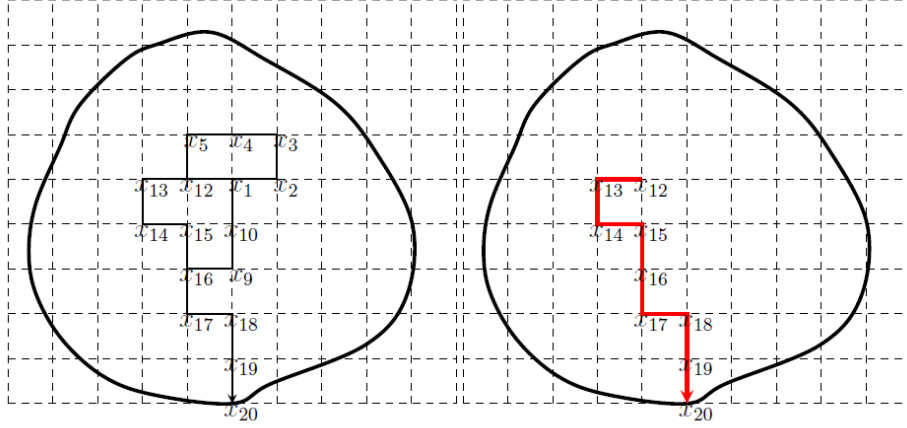
详细的证明可参见 [32]。

2.5.2 调和探索模型

采用上一小节的记号, 记 Ω 为一个 Jordan 区域, $a, b \in \partial\Omega$. $\Omega_\delta = \delta\mathcal{T} \cap \Omega$. ab 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 a 到 b 的弧; ba 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 b 到 a 的弧。将与 ab 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为黑色, 将与 ba 相邻的 Ω_δ 上的顶点染为红色。而其他的点染色与逾渗模型不一样。我们要构造一条探索曲线, 具体如下。记 $\Delta_{c_0 d_0 e_0}$ 为与 a 相邻的位于 Ω_δ 中的三角形, 其中 c_0, d_0 为分别被染成黑色和红色的顶点。记 $\gamma^\delta(0)$ 为 $\Delta_{c_0 d_0 e_0}$ 的中心, 考虑定义在 Ω_δ 上的函数 f_δ^0 , 在黑色顶点上取值 1, 在红色顶点上取值 0, 在其他未染色的顶点上调和。于是以 $f_\delta^0(e_0)$ 的概率将 e_0 染成黑色。如果 e_0 为黑色, 则选取以 $e_0 d_0$ 为边的三角形 $\Delta_{c_1 d_1 e_1} (c_1 = e_0, d_1 = d_0)$ 的中心为 $\gamma^\delta(1)$; 如果 e_0 为红色, 则选取以 $e_0 c_0$ 为边的三角形 $\Delta_{c_1 d_1 e_1} (c_1 = c_0, d_1 = e_0)$ 的中心为 $\gamma^\delta(1)$ 。再考虑 e_1 的染色……。假定已经得到 $\gamma_\delta(n)$, 其所在的三角形为 $\Delta_{c_n d_n e_n}$, 并且 c_n 已经被染成黑色, d_n 已经被染成红色。考虑定义在 Ω_δ 上的函数 f_δ^n , 在黑色顶点上取值 1, 在红色顶点上取值 0, 在其他未染色的顶点上调和。于是依概率 $f_\delta^n(e_n)$ 将 e_n 染成黑色, 以 $1 - f_\delta^n(e_n)$ 的概率将 e_n 染成红色。当 e_n 为黑色时, 取 $\gamma^\delta(n+1)$ 为以 $e_n d_n$ 为边的三角形 $\Delta_{c_{n+1} d_{n+1} e_{n+1}} (c_{n+1} = e_n, d_{n+1} = d_n)$; 当 e_n 为红色时, 取 $\gamma^\delta(n+1)$ 为以 $e_n c_n$ 为边的三角形 $\Delta_{c_{n+1} d_{n+1} e_{n+1}} (c_{n+1} = c_n, d_{n+1} = e_n)$ 。一直进行下去, 直到 $\gamma^\delta(n)$ 位于与 b 相邻的三角形的中心。这样产生了一条探索曲线 γ_δ , 称为 Ω_δ 上的调和探索曲线。



自然其同样诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度。我们有定理:



定理 2.49 (Scott Sheffield, Schramm[33]). 当 δ 趋于 0 时, Ω_δ 上的调和探索曲线 γ^δ 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(4)。

2.5.3 LERW——擦除回路的随机游动

设 Ω 为一个 Jordan 区域。对任意的 $\delta > 0$, 定义 $\Omega_\delta = \Omega \cap \delta\mathbb{Z}^2$ (当 δ 足够小时, Ω_δ 可成为一个连通图)。任取 $x \in \Omega_\delta$, 记 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为从 x 出发的简单随机游动。

$$\tau := \inf\{n : X_n \notin \Omega_\delta\}.$$

定义 X_n 的擦除回路路径 $\text{LE}(X)$ 如下: 定义 $n_0 = 0$; 当 $n < \tau$ 时,

$$n_{i+1} := \max\{n \leq \tau : X_n = X_{n_i}\} + 1.$$

定义 $(\text{LE}(X))_i = X_{n_i}$ 。显然, $\text{LE}(X)$ 是一条从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的简单路径, 称为 Ω_δ 上从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的擦除回路的随机游动。如下图随机游动为 $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{20})$, 而擦除回路后的路径为 $(x_0, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20})$ 。

如果取 $z \in \Omega$, x 为 Ω_δ 上距离 z 最近的顶点。 γ^δ 为 Ω_δ 上从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的擦除回路的随机游动的反向曲线。那么有

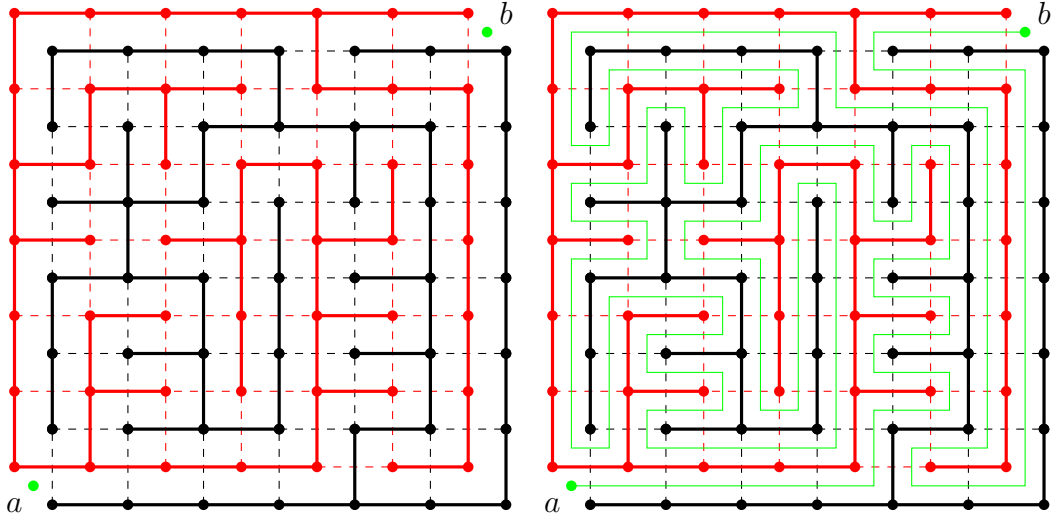
定理 2.50 ([22]). 当 δ 趋于 0 时, γ^δ 弱收敛到 Ω 上从 $\partial\Omega$ 到 z 的射线型 SLE(2), 其初始分布为 $\partial\Omega$ 上的均匀分布。

2.5.4 一致生成树

设 $G = (V, E)$ 为一个连通的有限图, 称子图 $T \subset G$ 为 G 的一个生成树是指: T 是连通的, T 包含 G 的所有顶点并且没有回路。如果 (V_α, E_α) 为 G 的一个

子图，并且是一个树。对任意的生成树 T ，如果 T 包含 (V_α, E_α) ，则称 T 为包含 (V_α, E_α) 的生成树。如果赋予所有的生成树相同的概率，我们称所得到的概率测度为 G 上的一致生成树。同样可以定义 G 上包含 (V_α, E_α) 的一致生成树。

设 Ω 为一个 Jordan 区域。对任意的 $\delta > 0$ ，定义 $\Omega_\delta = \Omega \cap \delta\mathbb{Z}^2$ （当 δ 足够小时， Ω_δ 可成为一个连通图）。设 $a, b \in \partial\Omega$ 。记弧 ab 为 $\partial\Omega$ 上沿着逆时针方向的从 a 到 b 的弧。选取 δ 足够小，可以使与 ab 相邻的 Ω_δ 的顶点形成一个树 l_{ab}^δ ，设 T 为 Ω_δ 上的从包含 l_{ab}^δ 的一致生成树，则有位于 $(\delta(\mathbb{Z}^2))^*$ 中的与 T 对应的对偶树 T^* 。存在唯一一条曲线 γ^δ 位于 $\frac{\delta}{2}\mathbb{Z}^2 + (\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4})$ ，连结 a 和 b 。如下示意图：



定理 2.51 ([22]). 采用以上记号，当 δ 趋于 0 时， γ^δ 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(8)。

注记 2.22. γ^δ 遍历了 $\Omega \cap [\frac{\delta}{2}\mathbb{Z}^2 + (\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4})]$ 的每一个点，因此直观上可以得到 SLE(8) 是填满 Ω 的。

正是由于 SLE(8) 是一列随机曲线的弱极限，Schramm, Werner 和 Lawler 证明 SLE(8) 是由曲线生成的。（参见文章 [22]）

2.5.5 离散高斯自由场

一维的布朗运动是以 \mathbb{R}_+ 为指标的一族正态随机变量，自然地是否存在一族正态随机变量，使其指标集合为 2 维的并且满足类似于布朗运动的性质？2 维的高斯自由场便是满足此条件的随机过程。具体将在下一章节介绍。本节主要介绍离散的高斯自由场以及其与 SLE 的关系。

如果 $G = (V, E)$ 为一个有限连通图。 $V_\alpha \subset V$ 为一个非空的子集。记

$$\Omega := \{h : V \rightarrow \mathbb{R}, h|_{V_\alpha} = 0\}.$$

于是 $\Omega \cong \mathbb{R}^{\#V - \#V_\alpha}$ 。如果记 m 为 Ω 上的 Lebesgue 测度，赋予 Ω 上的概率测度如下

$$\frac{d\mathbb{P}}{dm}(h) \asymp e^{-\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} (h(u) - h(v))^2},$$

则称服从 \mathbb{P} 的分布的随机函数 h 为 G 上的零边值高斯自由场。

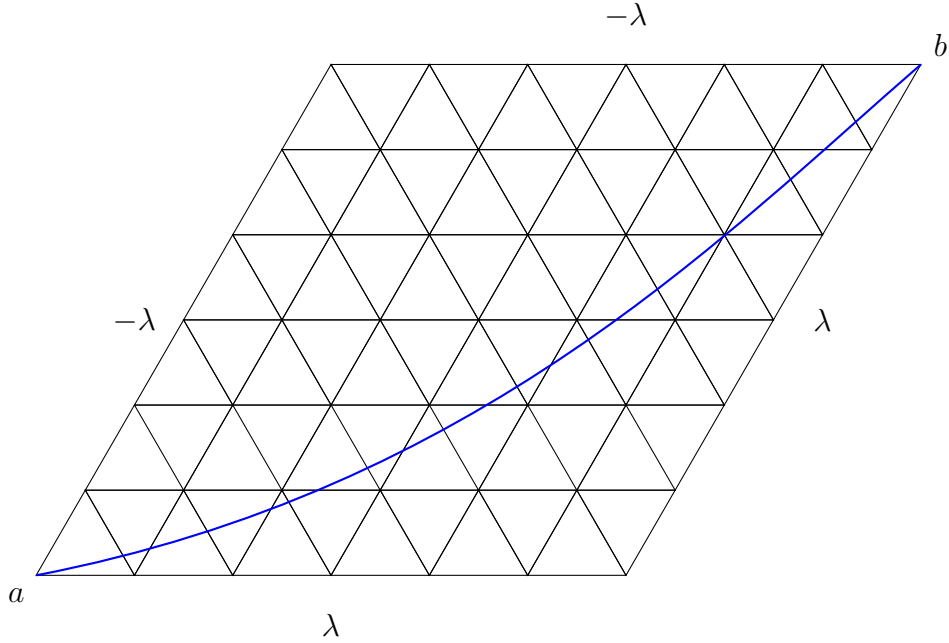
固定 $h_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ ，可定义

$$\Omega_{h_\alpha} := \{h : V \rightarrow \mathbb{R}, h|_{V_\alpha} = h_\alpha\}.$$

同样可定义 Ω_{h_α} 上的概率测度 \mathbb{P}_{h_α} ：

$$\frac{d\mathbb{P}_{h_\alpha}}{dm}(h) \asymp e^{-\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} (h(u) - h(v))^2}.$$

服从 \mathbb{P}_{h_α} 分布的随机函数称为 G 上以 h_α 为边值的高斯自由场。设 D 为一个 Jordan 区域，并且 ∂D 由 \mathcal{T} 中的边组成。记 $V = \bar{D} \cap \delta\mathcal{T}$, $V_\alpha = \partial D \cap \delta\mathcal{T}$ 。则任意的 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 可线性扩充为 D 上的映射，使得在每一个三角形上为仿射变换。记 $a, b \in \partial D$ ， ab (ba) 为沿着逆时针方向 ∂D 上从 $a(b)$ 到 $b(a)$ 的弧。设 $h_\alpha : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $h_\alpha|_{ab} = \lambda > 0$, $h_\alpha|_{ba} = -\lambda < 0$ 。记 h^δ 为 V 上的以 h_α 为边值的高斯自由场。则存在唯一的一条曲线 γ^δ 连结 a 和 b 并且 $h^\delta|_{\gamma^\delta} = 0$ 。如下示意图：



于是有：

定理 2.52 ([34]). 采用以上记号，当 δ 趋于 0 时， γ^δ 弱收敛到 D 上从 a 到 b 的弦 SLE(4)。

2.5.6 连续高斯自由场

设 D 是平面上的一个 Jordan 区域, 有时可以再要求其边界 ∂D 是 C^1 的 (对一般的区域同样可以处理)。记 H_s 为 D 上的具有紧致支集的光滑函数的全体, 即

$$H_s = \{f : f \text{ is smooth on } D, \text{ and supports compactly in } D\}.$$

在 H_s 上定义 Dirichlet 内积如下:

$$(f, g)_\nabla = \frac{1}{2\pi} \int_D \nabla f \cdot \nabla g dz.$$

在这个内积下, H_s 不是一个 Hilbert 空间, 记其 Hilbert 闭包是 $H(D)$, 实际上这是 Soblev 空间 $H_0^1(D)$ 。

注记 2.23. 如果 $f, g \in H_s(D)$ 则有:

$$(f, g)_\nabla = \frac{1}{2\pi} \int_D \nabla f \cdot \nabla g dz = -\frac{1}{2\pi} \int_D f \cdot \Delta g dz = \frac{1}{2\pi} (f, -\Delta g)_{L^2(D)}.$$

通常 H_s 作为测试空间, 在赋予一定拓扑后成为一个拓扑向量空间。具体拓扑为: 点列 $(\phi_n, n = 1, 2, 3, \dots) \subseteq H_s(D)$ 收敛到 $\phi \in H_s(D)$ 当且仅当存在紧集 $K \subseteq D$ 满足 $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subseteq K$ 并且 ϕ_n 的各阶导数在 K 上一致收敛到 ϕ 的各阶导数。

于是广义函数或者分布 (distribution) 定义为 H_s 上的线性连续泛函。

同样可定义分布 h 的导数:

$$(\partial_x h, \rho) := (h, -\partial_x \rho) \quad \forall \rho \in H_s(D).$$

$$(\Delta h, \rho) := (h, \Delta \rho) \quad \forall \rho \in H_s(D).$$

引进如下记号:

$$(h, \rho)_\nabla := (-\Delta h, \rho) = (h, -\Delta \rho).$$

固定 $x \in D$, 记 D 上的满足以下方程的解为 $\tilde{G}_x(y)$:

$$\begin{cases} \Delta_y \tilde{G}_x(y) = 0 & \text{on } D \\ \tilde{G}_x = -\log |x - y| & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

则 D 上的格林函数定义为:

$$G(x, y) := -\log |x - y| - \tilde{G}_x(y).$$

当 x 固定时, 格林函数可看作

$$\begin{cases} \Delta_y G_x(y) = -2\pi\delta_x(y) \text{ in } D \\ G_x = 0 \text{ on } \partial D \end{cases}$$

的弱解。即: 对任意的 $\rho \in H_s(D)$

$$(\Delta G(x, \cdot), \rho) = (G(x, \cdot), \Delta \rho) = \int_D G(x, y) \Delta \rho(y) dy = -2\pi\delta_x(\rho) = -2\pi\rho(x).$$

对 $\rho \in H_s(D)$, 记 $(-\Delta^{-1}\rho)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_D G(x, y) \rho(y) dy$, 则 $(-\Delta^{-1}\rho)(x)$ 是 D 上的光滑函数, 但是不一定具有紧致支集。如果 ρ 是一个测度, 采用同样的记号, 只要有意义。

如果 $\rho_1, \rho_2 \in H_s(D)$, 则有:

$$(-2\pi\Delta^{-1}\rho_1, -2\pi\Delta^{-1}\rho_2)_{\nabla} = \frac{1}{2\pi}(-2\pi\Delta^{-1}\rho_1, 2\pi\rho_2) = \int_{D \times D} \rho_1(x) G(x, y) \rho_2(y) dx dy < \infty.$$

如果 $h \in H(D)$, 则 h 自然可看成一个分布:

$$(h, \rho) := (h, -2\pi\Delta^{-1}\rho)_{\nabla} \quad \forall \rho \in H_s(D).$$

这是定义好的, 因为可以证明 $-2\pi\Delta^{-1}\rho \in H(D)$ 。

定义 2.14. 取 $H(D)$ 的一组标准正交基 $(\phi_n, n = 1, 2, 3, \dots)$, 事实上这组标准正交基可以取拉普拉斯算子的特征向量, 从而使位于 $H_s(D)$ 中的。形式地定义如下:

$$h = \sum_{n>0} \alpha_n \phi_n.$$

取光滑函数 $g = \sum_{n>0} \beta_n \phi_n \in H(D)$, 则可以定义

$$(h, g)_{\nabla} = \sum_{n>0} \alpha_n \beta_n.$$

可以看到这个定义是合理的, 因为如果记 $X_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$, 那么

$$\|X_{n+m} - X_n\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=n+1}^{n+m} \beta_i^2 \rightarrow 0 \text{ as } n, m \rightarrow \infty.$$

于是存在正态随机变量记为 $(h, g)_{\nabla}$ 为 X_n 的 L^2 极限, 并且其均值为 0, 方差为 $(g, g)_{\nabla}$ 。在这里如果记 Ω 为 D 上的所有的分布组成的集合, 而赋予的 σ 代数是使得 $(h, \rho), \forall \rho \in H_s(D)$ 可测的最小的 σ 代数, 记 $\mu = \mu_D$ 为 h 的分布律。事实上, 这里我们给出了一个随机过程 $\{(h, \rho) : \rho \in H_s(D)\}$, 并将推广到指标集为 $H(D)$ 上。这是一个高斯过程, 称其为 D 上的零边值高斯自由场。

定理 2.53 (Scheffield [46]). GFF 是 D 上的满足如下条件的唯一的随机分布:

对任意的 $\rho \in H_s(D)$, 随机变量 $(h, \rho) = (h, -2\pi\Delta^{-1}\rho)_\nabla$ 是一个均值为 0, 方差为 $(-2\pi\Delta^{-1}\rho, -2\pi\Delta^{-1}\rho)_\nabla$ 的正态随机变量。特别地, h 的分布与我们之前选取的 $H(D)$ 的基的选取无关。

注记 2.24. 虽然在空间 $H(D)$ 中, 依概率 1 上述随机序列不收敛, 但是作为分布, 上述序列依概率 1 收敛。或者对任意的 $a > 0$, 作为 $H^{-a}(D)$ 中的随机元, 上述序列依概率 1 收敛 (参见 *Sheffield* 的文章 [46])。

定理 2.54 (Scheffield[46]). 记 h 为 D 上的 GFF, 对任意的 $\rho \in H_s(D)$, 记 $(h, \rho) := (h, -2\pi\Delta^{-1}\rho)_\nabla$, 则 $(h, \rho)_{\rho \in H_s(D)}$ 是一个以 $H_s(D)$ 为指标的中心高斯过程, 并且其协方差结构:

$$Cov[(h, \rho_1), (h, \rho_2)] = \int \int_{D \times D} \rho_1(x) \rho_2(y) G_D(x, y) dx dy.$$

其中 $G_D(x, y)$ 为区域 D 上的格林函数。

定理 2.55 (Scheffield[46]). 如果 $\phi : D' \rightarrow D$ 为共形映射, h 为 D 上的 GFF, 则 $h' := h \circ \phi$ 为 D' 上的 GFF。这里对任意的 $\rho \in H_s(D')$,

$$(h', \rho) := (h, \rho'), \rho'(x) := |\rho^{-1}(x)|^2 \phi \circ \rho^{-1}(x).$$

注记 2.25. 回忆测度论的一些基本知识: 给定某个集合 \mathcal{A} , 以 \mathcal{A} 中元素为指标的随机过程为定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一组随机变量 $(X_i, i \in \mathcal{A})$ 。这个随机过程的分布即 $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ 上的一个概率测度 (乘积 σ 代数)。这个概率测度由其有限维分布唯一确定。反之, 如果给定一组相容的有限维分布, 则可以定义一个概率空间以及此空间上的一组随机变量 $(X_i, i \in \mathcal{A})$, 使得其有限维分布为给定的分布。而如果要要求这组随机变量服从均值为零的正态分布, 那么有限维分布完全由其协方差决定。而高斯自由场正是给定了协方差矩阵和集合 $\mathcal{A} = H(D)$ 所得到的随机过程。

定义 2.15. 给定函数 $h_\alpha : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 D 上以 h_α 为边界的高斯自由场可定义为

$$h = h_1 + h_2,$$

其中 h_1 为 D 上的零边界高斯自由场, 而 h_2 为 D 上以 h_α 为边值的调和函数 (这里将 h_2 看成一个分布)。

如果 $H'(D)$ 为 $H(D)$ 的一个闭子空间, 那么也可定义正交投影。假定 $P : H(D) \rightarrow H'(D)$ 为正交投影, $\{f_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ 为 $H(D)$ 的一组标准正交基, $h = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ 为 D 上的高斯自由场, 那么有随机分布序列 $h_n = \sum_{k=1}^n P(\alpha_k f_k)$ 。事实上我们有:

定理 2.56 (Schramm, Sheffield[47]). 对任意的 $a > 0$, 依概率 1, 随机序列 h_n 在 $H^{-a}(D)$ 中收敛, 记极限为 h' 。

特别依概率 1, 对任意的 $\rho \in H_s(D)$, 随机变量序列 $(h_n, -2\pi\Delta^{-1}\rho)_{\nabla}$ 收敛到一个正态随机变量, 其分布为 $N(0, \|P(-2\pi\Delta^{-1}\rho)\|^2)$ 。

如果假定单连通区域 D 如 2.5.5 节, 记 $H'(D)$ 为将 2.5.5 节的空间 $\Omega := \{h : V \rightarrow \mathbb{R}, h|_{\partial D} = 0\}$ 中的函数在三角形面上经过线性扩充后的函数组成的空间, 则可知 $H'(D)$ 是有限维的并且与 Ω 的维数一样。事实上:

定理 2.57 (Schramm, Sheffield[47],[46]). 假定 h 为 D 上的高斯自由场, 其中 D 与其边值条件如 2.5.5 小节, 则 h 在 $H'(D)$ 上的投影为 D 上的离散高斯自由场。并且定理 2.52 的收敛在依概率意义下也成立。从而 SLE(4) 由高斯自由场完全确定

事实上这加强了定理 2.52 的结论, 因为弱收敛是依分布收敛, 而依概率收敛比依分布收敛更强。对于其他 SLE(κ) 与高斯自由场的关系, 可参见 Sheffield 的文章 [48] 以及一系列文章 [45] [49][51][50]。

2.5.7 离散全纯函数与 SLE

Smirnov 获得菲尔兹奖的主要结果是来自他在渗流等统计物理模型方面的研究。他巧妙地构造了离散全纯函数, 这些离散全纯函数收敛到连续的全纯函数, 从而可以得到关于离散模型的尺度极限的许多信息。在这一小节, 我们主要介绍离散全纯函数及其应用。本小节内容可参见书本 [44] 第八章或者文章 [43]。

2.5.7.1 离散调和函数

考虑格子点 $\mathbb{Z}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ 。如果函数 $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$(\Delta f)(x) := \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] = 0.$$

则称 f 在 x 处调和, 其中 $y \sim x$ 表示 y 与 x 相邻。这是连续调和函数的均值公式的离散情形。如果 f 在 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 中的任一点调和, 则称 f 为 D 上的调和函数。

如果 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个子图，记

$$\partial D := \{x \in \mathbb{Z}^2 : d(x, D) = 1\},$$

这里 d 是 \mathbb{Z}^2 上的图距离。如果对任意的 $x, y \in D$ ，都存在 D 中从 x 到 y 的路径，则称 D 为连通的。

定理 2.58. 如果 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个连通的有限子图。 $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ，则存在唯一的函数 $f : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\Delta f(x) = 0, \forall x \in D \quad f|_{\partial D} = g.$$

证明. 记 $\Omega = \{f|f : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R} \text{ 且 } f|_{\partial D} = g\}$ ，于是 $\Omega \simeq \mathbb{R}^{\#D}$ 。容易看出 $\Delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\#D}$ 为线性映射。

若 $\delta f_1(x) = \Delta f_2(x), \forall x \in D$ ，则 $\Delta(f_1 - f_2) \equiv 0$ 且 $(f_1 - f_2)|_{\partial D} \equiv 0$ 。由于对任意的 $x \in D$ ，有 $f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} [f_1(y) - f_2(y)]$ ，结合 D 的连通性，可知 $f_1 - f_2$ 在 ∂ 上取最大值和最小值。从而 $f_1 \equiv f_2$ 。

于是 Δ 为 Ω 上的单射。再由 $\mathbb{R}^{\#D}$ 是有限维的，从而 Δ 也是满射。于是存在唯一的 $f \in \Omega$ ，使得 $\Delta f(x) = 0, \forall x \in D$ 。 \square

注记 2.26. 事实上也可用简单随机游动的方法来证明：假定 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是从 $X_0 = x$ 出发的简单随机游动，

$$\tau := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\},$$

可验证 $f(x) := \mathbb{E}[g(X_\tau)]$ 便是所求的函数。

注记 2.27. 对任意的 $\delta > 0$ ，同样可定义 $\delta\mathbb{Z}^2$ 上的调和函数。可用线性插值的方法将 $\delta\mathbb{Z}^2$ 上的函数连续扩充到整个平面上，如无特别说明，我们将二者等价。

定理 2.59 (参见 [43] Theorem 4.7 或者 [44] Theorem 8.9). 假定 D 为一个 Jordan 区域， $D_\delta = D \cap \delta\mathbb{Z}^2$ 。 g 为 ∂D 的某个小邻域上的连续函数，如果记 $g_\delta = g|_{\partial D_\delta}$ ，由前一定理知存在 D_δ 上以 g_δ 为边值的调和函数 f_δ 。则当 $\delta \rightarrow 0$ 时， f_δ 在 D 中内闭一致收敛到 D 上以 g 为边值的调和函数。

2.5.7.2 离散格林函数

假定 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个连通子图。固定 $x \in D$ ，则存在唯一的函数 $G_D(x, \cdot) : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足

$$\Delta G_D(x, \cdot)(y) = -\delta_x(y) \quad G_D(x, \cdot)|_{\partial D} \equiv 0,$$

这可由算子 Δ 的单射性直接得到。称 $G_D(x, y)$ 为 D 上的离散格林函数。

注记 2.28. 假定 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是从 $X_0 = x$ 出发的简单随机游动,

$$\tau := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\}.$$

则利用随机游动的马尔可夫性质可证明

$$G_D(x, y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{n=0}^{\tau-1} 1_{\{X_n=y\}} \right].$$

引理 2.16.

$$G_D(x, y) = G_D(y, x).$$

证明.

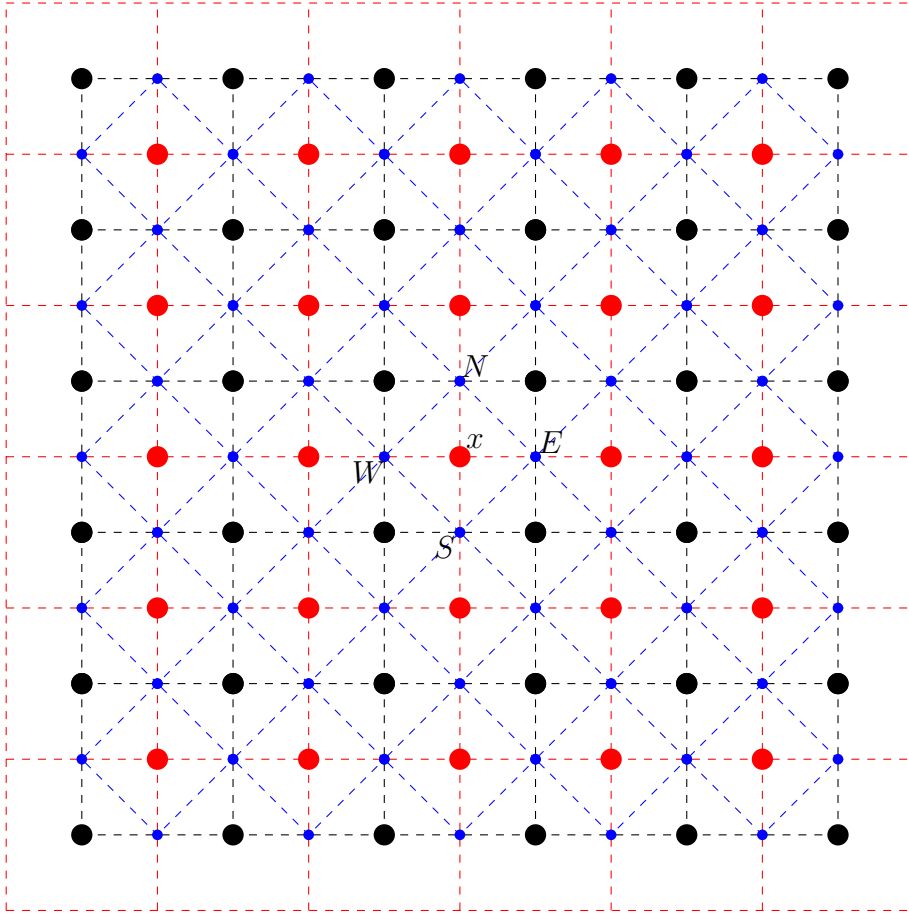
$$\begin{aligned} G_D(x, y) &= \mathbb{E}^x [\sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n=y, n < \tau\}}] \\ &= \mathbb{P}^x \{X_n = y, n < \tau\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \#\{\gamma : \gamma \text{ 是 } D \text{ 中从 } x \text{ 到 } y \text{ 的长度为 } n \text{ 的路径}\} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \#\{\gamma : \gamma \text{ 是 } D \text{ 中从 } y \text{ 到 } x \text{ 的长度为 } n \text{ 的路径}\} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= G_D(y, x). \end{aligned}$$

□

采用如下记号

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &= \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}, \\ (\mathbb{Z}^2)^* &= \{(x, y) : x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, y \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}, \\ (\mathbb{Z}^2)^\diamond &= \{(x, y) : x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, y \in \mathbb{Z} \text{ 或 } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

其中上述三个图中的边均由欧氏距离最近的顶点连接而成。可以看出 $(\mathbb{Z}^2)^*$ 是 \mathbb{Z}^2 的对偶图, 而 $(\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 是将 \mathbb{Z}^2 旋转 45 度再平移所得。称这三个图为本原图、对偶图和中间图。将本原图中顶点染为黑色, 对偶图中的顶点染为红色。如果中间图的面包含一个黑色顶点, 则将其按逆时针定向; 如果中间图的面包含一个红色的顶点, 则将其按顺时针定向。



在复变函数中, 如果 f 为 \mathbb{C} 上的全纯函数, 则对任意的单位向量 α , 有

$$\partial_{i\alpha} f = i\partial_{\alpha} f.$$

类似地, 对函数 $f : (\mathbb{Z}^2)^{\diamond} \rightarrow \mathbb{C}$, 以及 $x \in \mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$. 按上北、下南、左西、右东给 x 所在的 $(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 中的面四个顶点标记为 N, S, W, E (如上图所示)。

定义

$$\bar{\partial}f(x) := \frac{1}{2}[f(E) - f(W) + i(f(N) - f(S))].$$

如果 $\bar{\partial}f(x) = 0$, 则称 f 在 x 处为离散全纯的。如果对任意的 $x \in \mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$, $\bar{\partial}f(x) = 0$, 则称 f 为 $(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 上的离散全纯函数。

注记 2.29. 由于 $(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 的图结构与 $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$ 一样, 类似可以定义 $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$ 上的离散全纯函数。同样对任意的 $\delta > 0$, 可定义 $\delta(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 上的离散全纯函数。

定理 2.60 (参见 [44] Proposition 8.5). 如果 $f, g : (\mathbb{Z}^2)^{\diamond} \rightarrow \mathbb{C}$ 上的离散全纯函数, 则

- (1) 对任意的 $a, b \in \mathbb{C}$, $af + bg$ 为 $(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 上的离散全纯函数;

(2) 在一种新的算子 $\tilde{\Delta}$ 下, f 为离散调和的;

(3) 如果 \mathcal{C} 为 \mathbb{Z}^2 或者 $(\mathbb{Z}^2)^*$ 上的多边形, $\mathcal{C} = z_0 \sim z_1 \sim z_2 \dots \sim z_n = z_0$, 则

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right)(z_{i+1} - z_i) = 0$$

(4) 如果 f_δ 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 上的离散全纯函数, 且内闭一致收敛到 f , 则 f 为连续全纯函数。

证明. (1) 是显然的。

(2) 任取 $x \in \delta(\mathbb{Z}^2)^\diamond$, 记 nw, ne, se, sw 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 中与 x 相邻的四个顶点, 而 n, e, s, w 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 中与 x 距离为 1 的四个顶点 (自然方向)。于是

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}f(x) &:= \frac{1}{4}([f(n) - f(x)] + [f(w) - f(x)] + [f(e) - f(x)] + [f(s) - f(x)]) \\ &= \frac{i}{4}([f(ne) - f(nw)] + [f(nw) - f(sw)] + [f(se) - f(ne)] + [f(sw) - f(se)]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) 由离散全纯函数的定义可得在 \mathbb{Z}^2 或者 $(\mathbb{Z}^2)^*$ 上的任意一个面 $\mathcal{C} = z_0 \sim z_1 \sim z_2 \sim z_3 \sim z_4 = z_0$ 上有 $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz := \sum_{i=0}^3 f\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right)(z_{i+1} - z_i) = 0$ 从而由于任意的多边形可表示为有限个面的并, 从而 (3) 对任意的面成立。

(4) 由 (3) 知, 对任意的多边形 γ , 有 $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$, 从而由复分析中的知识知 f 为全纯的。 \square

除了离散全纯函数, Smirnov 还引入了**旋-全纯函数** (spin-holomorphic function)。具体定义如下:

对中间图的任意一条边 e , 此时由于已经定向, 可将 e 看成一个复数。记 $l(e)$ 为经过原点和 \sqrt{e} 的直线, 以 $P_{l(e)}$ 表示直线 $l(e)$ 上的投影映射: $P_l(x) = \alpha \operatorname{Re}(\bar{\alpha}x) = \frac{1}{2}(x + \alpha^2 \bar{x})$, 其中 α 为直线 l 所对应的单位向量。

定义 2.16. 如果函数 $f: (\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond \rightarrow \mathbb{C}$ 满足对任意的边 $e = [xy]$ 有

$$P_{l(e)}f(x) = P_{l(e)}f(y).$$

则称 f 为**旋-全纯函数**或者 s -全纯函数。同样可定义 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 的子图上的 s -全纯函数。

性质 2.6. 任意 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 上的 s -全纯函数也是离散全纯的。

证明. 记 $x \in (\delta\mathbb{Z}^2)$, 其所在的 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\circ$ 中的面的四个顶点为 N, W, E, S 。则由于 f 是 s -全纯的, 对四条边有:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(E) + e^{-i\frac{\pi}{4}}\overline{f(E)} = f(S) + e^{-i\frac{\pi}{4}}\overline{f(S)}, \\ (2) \quad & f(S) + e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{f(S)} = f(W) + e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{f(W)}, \\ (3) \quad & f(W) + e^{i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(W)} = f(N) + e^{i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(N)}, \\ (4) \quad & f(N) + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(N)} = f(E) + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(E)}. \end{aligned}$$

(1) $\times i$ - (2) 得:

$$(5) \quad (i-1)f(S) = if(E) + e^{-i\frac{\pi}{4}}\overline{f(E)} - f(W) - e^{-i\frac{\pi}{4}}\overline{f(W)};$$

(4) $\times (-i)$ - (3) 得

$$(6) \quad f(N)(-i-1) = -if(E) + e^{i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(E)} - f(W) - e^{i\frac{3\pi}{4}}\overline{f(W)};$$

(6) - $i \times$ (5) 得到:

$$f(N) - f(S)(-i-1) = (1-i)(f(E) - f(W)).$$

从而得到 $f(N) - f(S) = i[f(E) - f(W)]$ 。 \square

s -全纯函数的引入很大程度上是因为积分 $\int^z f^2$ 有对应的离散化表示。 s -全纯函数与三类边值问题有着很大的联系, 同时像离散调和函数那样, 满足一定的条件下, 其收敛的连续情形的边值问题。为了直接介绍 s -全纯函数在 SLE 中的应用, 我们此处略过这部分的说明, 具体可参见 [44] 的第 8.3 小节。

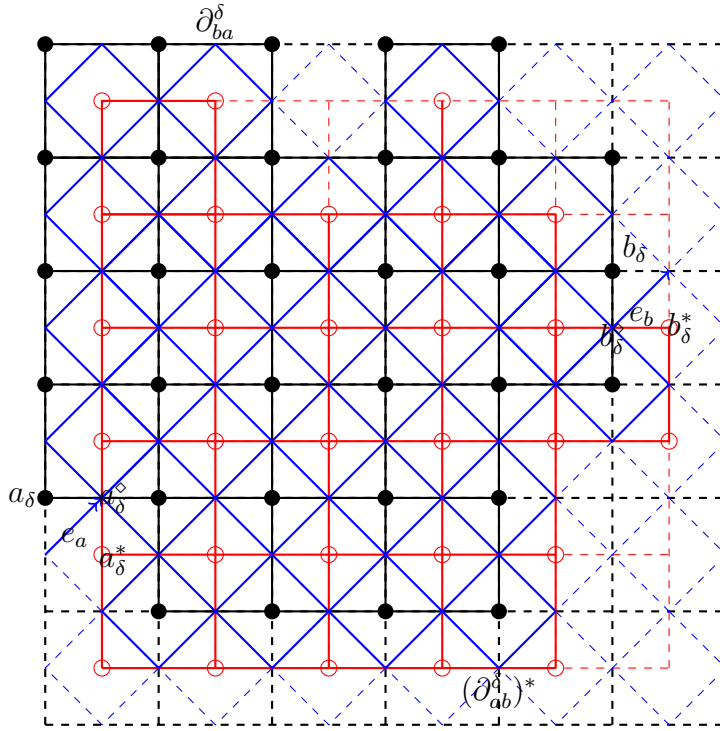
2.5.7.3 FK-Ising 模型

在本小节, 我们主要介绍 FK-Ising 模型与 SLE 的关系。FK-Ising 模型是随机簇模型的一种特殊情况。对随机簇模型的详尽描述可参见书本 [59]。假定 Ω 是一个 Jordan 区域, $a \neq b \in \partial\Omega$, 记 ∂_{ab} 为 $\partial\Omega$ 上从 a 沿着逆时针方向到 b 的弧, ∂_{ba} 为 $\partial\Omega$ 上从 a 沿着顺时针方向到 b 的弧。定义 $\Omega_\delta = (V_\delta, E_\delta)$ 为 $\delta\mathbb{Z}^2$ 的如下子图: $V_\delta = V_1 \cup V_2$, 其中 $V_1 = \Omega \cap \delta\mathbb{Z}^2$, V_2 为与 ∂_{ba} 距离最近的并且不在 Ω 中的顶点; E_δ 为连接 V_δ 中的顶点的边。记 a_δ, b_δ 分别为距离 a, b 最近的并且不在 Ω 中的 $\delta\mathbb{Z}^2$ 中的点。当 δ 足够小时, 可知 $\partial\Omega_\delta$ 为一条闭的简单折线并且 $a_\delta, b_\delta \in \partial\Omega_\delta$ 。记 ∂_{ab}^δ 为 $\partial\Omega_\delta$ 上的从 a_δ 按逆时针方向到 b_δ 的边, ∂_{ba}^δ 为 $\partial\Omega_\delta$ 上的从 a_δ 按顺时针方向到 b_δ 的边。

同样可定义对偶图 $\Omega_\delta^* = (V_\delta^*, E_\delta^*)$ 为 $(\delta\mathbb{Z}^2)^*$ 的如下子图: $V_\delta^* = V_1^* \cup V_2^*$, 其中 $V_1^* = \Omega \cap (\delta\mathbb{Z}^2)^*$, V_2^* 为与 ∂_{ab} 距离最近的并且不在 Ω 中的顶点; E_δ^* 为连接 V_δ^* 中的顶点的边。记 a_δ^*, b_δ^* 分别为距离 a, b 最近的并且不在 Ω 中的 $(\delta\mathbb{Z}^2)^*$ 中的点。当 δ 足够小时, 可知 $\partial\Omega_\delta^*$ 为一条闭的简单折线并且 $a_\delta^*, b_\delta^* \in \partial\Omega_\delta^*$ 。记 $(\partial_{ab}^\delta)^*$ 为 $\partial\Omega_\delta^*$ 上的从 a_δ^* 按逆时针方向到 b_δ^* 的边, $(\partial_{ba}^\delta)^*$ 为 $\partial\Omega_\delta^*$ 上的从 a_δ^* 按顺时针方向到 b_δ^* 的边。

同样可定义中间图 $\Omega_\delta^\diamond = (V_\delta^\diamond, E_\delta^\diamond)$, 其中 $V_\delta^\diamond = \Omega \cap (\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$, E_δ^\diamond 为连接 V_δ^\diamond 中的顶点的边。记 $a_\delta^\diamond, b_\delta^\diamond$ 分别为距离 a, b 最近的并且不在 Ω 中的 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 中的点。当 δ 足够小时, 可以得到存在 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 中的边 e_a 指向 a_δ^\diamond , 并且 a_δ 和 a_δ^* 分别位于以 e_a 为边的 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 的面中, 存在 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 中的边 e_b 从 b_δ^\diamond 出发, 并且 b_δ 和 b_δ^* 分别位于以 e_b 为边的 $(\delta\mathbb{Z}^2)^\diamond$ 的面中。

以上三个图的构造通过如下示意图可清晰看出:



上图中, 黑色、红色、蓝色的边为实线的图分别为 $\Omega_\delta, \Omega_\delta^*, \Omega_\delta^\diamond$ 。

采用以上记号, δ 足够小, 定义 $\Omega_\delta = (V_\delta, E_\delta)$ 上的以 $(p, q)_{0 \leq p \leq 1, q > 0}$ 为参数的随机簇模型如下: 记

$$\mathcal{S} := \{\omega : E_\delta \rightarrow \{0, 1\}, \omega|_{\partial_{ba}^\delta} = 1\},$$

对任意的 $\omega \in \mathcal{S}$, 记 $o(\omega) = \#\{e \in E_\delta : \omega(e) = 1\}$, $c(\omega) = \#\{e \in E_\delta : \omega(e) = 0\}$, 通常如果 $\omega(e) = 1$, 则称 e 是开的, 如果 $\omega(e) = 0$, 则称 e 是闭的。 $(V_\delta, \{e \in E_\delta :$

$\omega(e) = 1\}$ 为 Ω_δ 的子图，其连通分支数记为 $k(\omega)$ 。定义 \mathcal{S} 上的如下概率测度为参数为 (p, q) 的随机簇模型：

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{Z_{p,q}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)},$$

其中

$$Z_{p,q} = \sum_{\omega \in \mathcal{S}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)}.$$

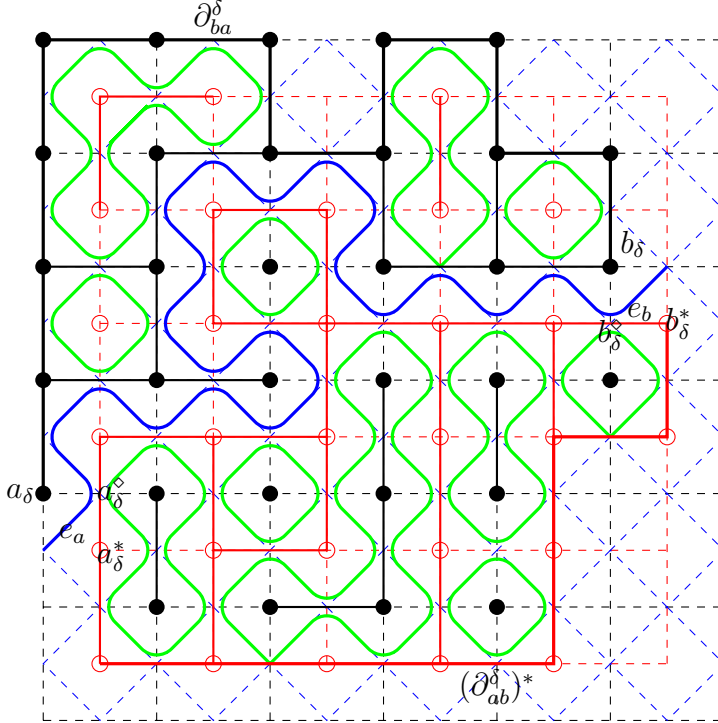
同样定义

$$\mathcal{S}^* := \{\omega : E_\delta^* \rightarrow \{0, 1\}, \omega|_{(\partial_{ab}^\delta)^*} = 1\}.$$

在给定 $\omega \in \mathcal{S}$ 之后，对应地可定义 $\omega^* \in \mathcal{S}^*$ 如下：

如果 $e^* \notin (\partial_{ab}^\delta)^*$ ，定义 $\omega^*(e^*) = 1 - \omega(e)$ ，这里 e 是与 e^* 对偶的边；如果 $e^* \in (\partial_{ab}^\delta)^*$ ，定义 $\omega^*(e^*) = 1$ 。

在给定 $\omega \in \mathcal{S}$ 后，存在唯一的由 E_δ° 中的定向线段组成的折线 γ_δ 连接 a_δ° 和 b_δ° ，并且将 $\{V_\delta, \{e \in E_\delta : \omega(e) = 1\}\}$ 中 ∂_{ba}^δ 所在的连通分支和 $V_\delta^* \{e^* \in E_\delta^* : \omega^*(e^*) = 1\}$ 中 $(\partial_{ab}^\delta)^*$ 所在的连通分支分离开。具体看参见如下示意图，图中蓝色的折线即为 γ_δ 。



定义 2.17. 任取 $e \in E_\delta^\circ$ ，定义自旋函数如下：

$$F_\delta(e) := \mathbb{E}[1_{\{e \in \gamma_\delta\}} e^{i\frac{1}{2}W_\delta(e, e_b)}],$$

其中 \mathbb{E} 是对随机簇模型的概率 \mathbb{P} 求期望, $W_{\gamma_\delta}(e, e_b)$ 是 e 沿着 γ_δ 到 e_b 的环绕数 (winding number)。

以下假定 $q = 2, p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$, 此时称对应的随机簇模型为 FK-Ising 模型。

对任意的 $v \in V_\delta^\circ \setminus \partial\Omega_\delta^\circ$, 定义

$$F_\delta(v) := \frac{1}{2} \sum_{u \sim v} F_\delta([uv]),$$

对任意的 $v \in \partial\Omega_\delta^\circ$, 定义

$$F_\delta(v) := \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \sum_{u \sim v} F_\delta([uv]),$$

这里 $u \sim v$ 表示 u 和 v 相邻, $[uv]$ 表示以 u, v 为端点的边。

证明离散的模型收敛到 SLE 一般有两种方法, 一种是直接证明离散的随机曲线的驱动函数收敛到布朗运动, LERW 和一致生成树就是采用这种方法; 另外一种, 先说明离散的曲线是胎紧的 (即任意的随机曲线子列都有收敛的子列), 然后证明所有的极限都是同一个 SLE, 此时只需借助一些特定的参数收敛就可证明所得到的极限即为 SLE, 临界逾渗就是采用这种方法。

Smirnov 正是基于构造的自旋函数的收敛利用上述第二种方法证明了 FK-Ising 模型收敛到 $\text{SLE}(\frac{16}{3})$ 。我们将结果陈述如下:

定理 2.61 (参见 [44])。采用如上记号, 则有:

- (1) $\frac{1}{\sqrt{e_b}} F_\delta$ 为 Ω_δ° 上的 s -全纯函数;
- (2) 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{e_b}} F_\delta$ 在 Ω 上内闭一致收敛到 $\sqrt{\phi'}$, 其中 $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times (0, 1), \phi(a) = -\infty, \phi(b) = +\infty$;
- (3) 同上一章的弱收敛的定义一样, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, γ_δ 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的 $\text{SLE}(\frac{16}{3})$

注记 2.30. Smirnov 同样在 Ising 模型中发展了同以上关于 FK-Ising 模型一样的方法, 从而证明了临界 Ising 模型的临界曲线收敛到 $\text{SLE}(3)$, 具体可书本 [44]。

第三章 共形限制测度

在这一章我们主要介绍作者的工作之一——带型区域上的共形限制测度。此测度满足共形不变性和限制性。这个测度是带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的推广。首先介绍在上半平面和单位圆盘中的共形限制测度。

3.1 上半平面上的共形限制测度

记 $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ 为上半平面， Ω 为 \mathbb{H} 的满足如下条件的子集 K 的集合：

- (1) K 是连通闭集， $K \cap \mathbb{R} = \{0\}$ ；
- (2) $\mathbb{H} \setminus K$ 有两个无界连通分支。

记 \mathcal{A}_h 为 \mathbb{H} 上的紧致包的集合，并且 $\mathcal{A}_h^* := \{A \in \mathcal{A}_h : 0 \notin A\}$ 。假定 \mathcal{F}_h 为 Ω 上由以下集合生成的 σ 代数：

$$\{\{K : K \cap A = \emptyset\} : A \in \mathcal{A}_h^*\}.$$

如果 (Ω, \mathcal{F}_h) 上的概率测度 \mathbf{P} 满足：对任意的 $A \in \mathcal{A}_h^*$ ，在已知 $K \cap A = \emptyset$ 的条件下， $\Phi_A(K)$ 同 K 有相同的分布，这里 K 服从 \mathbf{P} 下的分布，我们称 \mathbf{P} 为上半平面上的**共形限制测度**。注意到如果 (Ω, \mathcal{F}_h) 上的概率测度 \mathbf{P}, \mathbf{P}' 满足对任意的 $A \in \mathcal{A}_h^*$ ， $\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \mathbf{P}'[K \cap A = \emptyset]$ ，则 $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ 。事实上我们有如下。

定理 3.1. \mathbb{H} 上的共形限制测度有如下刻画。

- (1) 如果 \mathbf{P} 是 \mathbb{H} 上的共形限制测度，则存在唯一的 $\beta \geq \frac{5}{8}$ ，使得对任意的 $A \in \mathcal{A}_h^*$ 有

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta,$$

于是共形限制测度可由唯一的参数 β 来刻画，记为 $\mathbf{P}(\beta)$ 。

- (2) $\mathbf{P}(\beta)$ 存在当且仅当 $\beta \geq \frac{5}{8}$ 。

注意到弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的分布即为 $\mathbf{P}(\frac{5}{8})$ 。

3.2 单位圆盘上的共形限制测度

类似地我们可以研究单位圆盘中的满足共形限制性的测度。记 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 单位圆盘， Ω 为 \mathbb{D} 的满足如下条件的子集 K 的集合：

- (1) K 是连通闭集， $K \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$ ；
- (2) $0 \in K$ 并且 $\mathbb{D} \setminus K$ 连通。

记 \mathcal{A}_d 为 \mathbb{D} 上的紧致包的集合，并且 $\mathcal{A}_d^* := \{A \in \mathcal{A}_d : 0 \notin A\}$ 。假定 \mathcal{F}_d 为 Ω 上由以下集合生成的 σ 代数：

$$\{\{K : K \cap A = \emptyset\} : A \in \mathcal{A}_d^*\}.$$

如果 (Ω, \mathcal{F}_d) 上的概率测度 \mathbf{P} 满足：对任意的 $A \in \mathcal{A}_d^*$ ，在已知 $K \cap A = \emptyset$ 的条件下， $\Phi_A(K)$ 同 K 有相同的分布，这里 K 服从 \mathbf{P} 下的分布，我们称 \mathbf{P} 为单位圆盘上的**共形限制测度**。注意到如果 (Ω, \mathcal{F}_d) 上的概率测度 \mathbf{P}, \mathbf{P}' 满足对任意的 $A \in \mathcal{A}_d^*$ ， $\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \mathbf{P}'[K \cap A = \emptyset]$ ，则 $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ 。同样我们有如下结论。

定理 3.2. \mathbb{D} 上的共形限制测度有如下刻画。

- (1) 如果 \mathbf{P} 是 \mathbb{D} 上的共形限制测度，则存在一组参数 (α, β) ，使得对任意的 $A \in \mathcal{A}_d^*$ 有

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = |\Phi'_A(0)|^\alpha |\Phi'_A(1)|^\beta,$$

于是共形限制测度可由唯一的一组参数 (α, β) 来刻画，记为 $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ 。

- (2) $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ 存在当且仅当 $\beta \geq \frac{5}{8}$ 并且 $\alpha \leq \frac{1}{48}((\sqrt{24\beta+1}-1)^2-4)$ 。

3.3 带型上的共形限制测度

在这一节，我们主要详细介绍带型区域上的共形限制测度，这也是作者的工作之一。

记 $\mathcal{S}_\pi := \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < \pi\}$ 记 \mathcal{A}_s 为 \mathcal{S}_π 上的紧致包的集合， $\mathcal{A}_s^* := \{A \in \mathcal{A}_s : 0 \notin A\}$ 。对给定的 $A \in \mathcal{A}_s^*$ ，记 Φ_A 为唯一的从 $\mathcal{S}_\pi \setminus K$ 到 \mathcal{S}_π 并且固定 $0, +\infty$ 和 $-\infty$ 的共形映射。

类似上半平面和单位圆盘，我们想定义 \mathcal{S}_π 的一个随机子集 K ，其满足如下条件：

- (1) K 是 $\overline{\mathcal{S}}_\pi$ 的紧致子集, $K \cap \mathbb{R} = \{0\}$, 并且 $\mathcal{S} \setminus K$ 有两个连通分支;
- (2) 对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*$, 在已知 $K \cap A = \emptyset$ 的条件下, $\Phi_A(K)$ 同 K 有相同的分布。

称 K 的分布为带型区域上的**共形限制测度**。此时的可测空间 Ω 为满足上面条件 (1) 的所有 $\overline{\mathcal{S}}_\pi$ 的子集的集合, 对应的 σ 代数为由如下集合生成的 σ 代数 \mathcal{F}_s :

$$\{\{K : K \cap A = \emptyset\} : A \in \mathcal{A}_s^*\}. \quad (3.1)$$

同样由于 (3.1) 中的集合族是一个代数, (Ω, \mathcal{F}_s) 上的概率测度由其在 (3.1) 上的限制所唯一确定。

定理 3.3. 带型区域上的共形限制测度有如下刻画:

- (1) 如果 \mathbf{P} 是 \mathcal{S}_π 上的共形限制测度, 则存在一组参数 (α, β) , 使得对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*$ 有

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = |\Phi'_A(0)|^\beta \exp\{-\alpha S(A)\},$$

这里的 $S(A)$ 为 A 的容度。记此测度为 $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ 。

- (2) 对任意的 $\beta \geq \frac{5}{8}$, 共形限制测度 $\mathbf{P}(\frac{\beta(1-\beta)}{2\beta+1}, \beta)$ 存在, 并且如果 K 是其样本, 则 $K \cap \mathbb{R}_\pi = X + i\pi$, 其中 X 有密度函数

$$\rho(x) = (\cosh \frac{x}{2})^{-\frac{2}{3}(2\beta+1)}.$$

注记 3.1. 我们不能像上半平面和单位圆盘中一样, 给出使得 $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ 的存在的 (α, β) 应该满足的条件, 这也是下一步的工作之一。

接下来我们逐步证明定理 3.3。首先我们先给出满足共形限制性的两个例子。

3.3.0.1 带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的限制性

在这一节我们主要证明带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 也满足限制性。在 [54] 中, 作者采用共形场论的方法构造一个鞅来证明这个结论, 在这里我们将采用 [2] 中的方法, 其本质是需要确定 \mathcal{S}_π 中的紧致包的容度在共形映射下的变化规律。

假定 $A \in \mathcal{A}_s^*$ 是一个紧致包, Φ_A 是与其对应的唯一的从 $\mathcal{S}_\pi \setminus K$ 到 \mathcal{S}_π 并且固定 $0, +\infty$ 和 $-\infty$ 的共形映射。假定 $(K_t : t \geq 0)$ 是由 $(W_t : t \geq 0)$ 驱动的 Loewner

链。记 $\tau_A := \inf\{t \geq 0 : K_t \cap A \neq \emptyset\}$ 。则对任意的 $t < \tau_A$, $\Phi_A(K_t)$ 是一个紧致包, 记与 $\Phi_A(K_t)$ 对应的正则映射为 \tilde{g}_t , 即 $\tilde{g}_t : \mathcal{S}_\pi \setminus \Phi_A(K_t) \rightarrow \mathcal{S}_\pi$, 并且

$$\tilde{g}_t(\pm\infty) = \pm\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} (\tilde{g}_t(z) - z) = - \lim_{z \rightarrow -\infty} (\tilde{g}_t(z) - z) \geq 0.$$

记 $\Phi_A(K_t)$ 的容量为 $S(t)$, 则 \tilde{g}_t 满足

$$\partial_t \tilde{g}_t(z) = \partial_t S(t) \coth \frac{\tilde{g}_t(z) - \tilde{W}_t}{2} \quad \tilde{g}_0(z) = z.$$

其中 $\tilde{W}_t = h_t(W_t)$ 为一个连续函数。记 $h_t(z) := \tilde{g}_t \circ \Phi_A \circ g_t^{-1}(z)$, $A_t := g_t(A)$ 。由 Schwarz 反射定理知 $h_t(z)$ 可全纯扩充到 W_t 的邻域。于是有

引理 3.1. 对任意的 $0 \leq t < T_A$,

$$S(A_t) = S(t) + S(A) - t,$$

$$\partial_t S(t) = h'_t(W_t)^2,$$

$$\partial_t h_t(W_t) = -3h''_t(W_t),$$

$$\partial_t h'_t(W_t) = \frac{1}{2} \frac{(h''_t(W_t))^2}{h'_t(W_t)} - \frac{4}{3} h'''_t(W_t) + \frac{(h'_t(W_t))^3 - h'_t(W_t)}{6}.$$

证明. 由 h_t 的定义,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} (h_t(z) - z) &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} (h_t(z) - \Phi_A \circ g_t^{-1}(z)) + \lim_{z \rightarrow \pm\infty} (\Phi_A \circ g_t^{-1}(z) - g_t^{-1}(z)) \\ &+ \lim_{z \rightarrow \pm\infty} (g_t^{-1}(z) - z) = \pm S(t) \pm S(A) - g_A(0) \mp t. \end{aligned}$$

从而 $h_t(z) + g_A(0)$ 是与 A_t 对应的正则共形映射并且 $S(A_t) = S(t) + S(A) - t$ 。

对 $h_t(z)$ 求关于 t 的导数可得

$$\partial_t h_t(z) = [\partial_t S(t)] \coth \frac{h_t(z) - h_t(W_t)}{2} - h'_t(z) \coth \frac{z - W_t}{2}. \quad (3.2)$$

对上式两边同时乘以 $\frac{z - W_t}{2}$ 再令 $z \rightarrow W_t$ 便有 $0 = \partial_t S(t) \frac{1}{h'_t(W_t)} - h'_t(W_t)$, 于是 $\partial_t S(t) = h'_t(W_t)^2$ 。

在 (3.2) 中取 $z \rightarrow W_t$ 便可得到第三个式子。对 (3.2) 的两边关于 z 求导可知

$$\partial_t h'_t(z) = -\frac{1}{2} \frac{h'_t(z)(h'_t(W_t))^2}{\sinh \frac{(h_t(z) - h_t(W_t))^2}{2}} - h''_t(z) \coth \frac{z - W_t}{2} + \frac{1}{2} h'_t(z) \frac{1}{(\sinh \frac{z - W_t}{2})^2}. \quad (3.3)$$

令 $z \rightarrow W_t$ 便得到第四个式子。 □

利用引理 3.1 便可以证明带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的限制性。

性质 3.1. 假定 $W_t = \sqrt{\frac{8}{3}}B_t$ 是带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的驱动过程, γ 对应的带型 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线采用引理 3.1 相同的记号, 则

$$Y_t = 1_{\{t < T_A\}} h'_t(W_t)^{\frac{5}{8}} \exp\{-\frac{5}{48}S(A_t)\},$$

是一个鞅。并且

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = |\Phi'_A(0)|^{\frac{5}{8}} \exp\{-\frac{5}{48}S(A)\}.$$

其中 $A_t = g_t(A)$, $S(A)$ 和 $S(A_t)$ 是容度。

证明. 记 $N_t = \log Y_t = \frac{5}{8} \log h'_t(W_t) - \frac{5}{48}S(A_t)$ 。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} dh'_t(W_t) &= \partial_t h'_t(W_t)dt + h''_t(W_t)dW_t + \frac{1}{2}h'''_t(W_t)d\langle W, W \rangle_t \\ &= [\frac{1}{2} \frac{(h''_t(W_t))^2}{h'_t(W_t)} + \frac{(h'_t(W_t))^3 - h'_t(W_t)}{6}]dt + h''_t(W_t)\sqrt{\frac{8}{3}}dB_t, \end{aligned}$$

并且

$$dS(A_t) = (h'_t(W_t)^2 - 1)dt.$$

从而

$$\begin{aligned} dN_t &= \frac{5}{8}d \log h'_t(W_t) - \frac{5}{48}dS(A_t) \\ &= \frac{5}{8}[-\frac{5}{6} \frac{(h''_t(W_t))^2}{(h'_t(W_t))^2} + \frac{(h'_t(W_t))^2 - 1}{6}]dt - \frac{5}{48}(h'_t(W_t)^2 - 1)dt + \frac{5}{8} \frac{h''_t(W_t)}{h'_t(W_t)}\sqrt{\frac{8}{3}}dB_t \\ &= -\frac{25}{48} \frac{(h''_t(W_t))^2}{(h'_t(W_t))^2} + \frac{5}{8} \frac{h''_t(W_t)}{h'_t(W_t)}\sqrt{\frac{8}{3}}dB_t \end{aligned}$$

于是有

$$dY_t = Y_t(dN_t + \frac{1}{2}d\langle N, N \rangle_t) = \sqrt{\frac{25}{24}}Y_t \frac{h''_t(W_t)}{h'_t(W_t)}dB_t.$$

由于 $S(A_t) \geq 0$ 并且 $h'_t(W_t) \leq 1$, 我们可以得到 Y_t 是一个鞅. 注意到 $\lim_{t \rightarrow \tau_A} Y_t = 1_{\{\tau_A = \infty\}}$ 。于是根据停止定理便可得到

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \mathbf{E}[M_{\tau_A}] = \mathbf{E}[M_0] = |\Phi'_A(0)|^{\frac{5}{8}} \exp\{-\frac{5}{48}S(A)\}.$$

□

由此定理, 我们便可得到 $\mathbf{P}(\frac{5}{48}, \frac{5}{8})$ 。

3.3.1 带型区域上的布朗桥

在这一小节，我们定义 \mathcal{S}_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的布朗桥，并且验证其分布即为 $\mathbf{P}(0, 1)$ 。具体定义如下：

假定 μ_ϵ 为从 $i\epsilon$ 出发的布朗运动限制在从 \mathbb{R}_π 走出 \mathcal{S}_π 的分布律。根据停止定理，从 μ_ϵ 为从 $i\epsilon$ 出发的布朗运动从 \mathbb{R}_π 走出 \mathcal{S}_π 的概率是 ϵ/π ，因此当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时， $\frac{\pi}{\epsilon}\mu_\epsilon$ 收敛到一个概率测度（弱收敛），记为 $\mu_{0, \mathbb{R}_\pi}^{exc}$ ，称为 \mathcal{S}_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的**布朗溢出**或者**布朗桥**。事实上， $\mu_{0, \mathbb{R}_\pi}^{exc}$ 就是 \mathcal{S}_π 上的布朗溢出测度限制在从 0 到 \mathbb{R}_π 的路径上并且正规化以后得到的（参见 [13] 的第五章）。我们可以证明 $\mu_{0, \mathbb{R}_\pi}^{exc}$ 满足共形限制性质。

性质 3.2. 假定 K 服从 $\mu_{0, \mathbb{R}_\pi}^{exc}$ 的分布，则对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*$,

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0). \quad (3.4)$$

并且 K 以概率 1 与 \mathbb{R}_π 相交于 $X + i\pi$ ， X 的密度函数为 $\rho(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ 。

证明. 记 $P(\epsilon)$ 为从 $i\epsilon$ 出发的布朗运动先于 $\mathbb{R} \cup A$ 碰到 \mathbb{R}_π 的概率。则有

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{\epsilon} P(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{\epsilon} \frac{\text{Im } \Phi_A(i\epsilon)}{\pi} = \Phi'_A(0).$$

注意到 \mathcal{S} 上的 Poisson 核为 $H(z, x + i\pi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{e^x}{e^x + e^z}$ ，则

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[B_t \text{ from } i\epsilon \text{ hits } \mathbb{R}_\pi \text{ at } (-\infty, x + i\pi) | B_t \text{ from } i\epsilon \text{ hits } \mathbb{R}_\pi \text{ before } \mathbb{R}] \\ &= \frac{\pi}{\epsilon} \int_{-\infty}^x \frac{-1}{\pi} \text{Im} \frac{e^t}{e^{i\epsilon} + e^t} dt = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x \frac{e^t \sin \epsilon}{e^{2t} + 2e^t \cos \epsilon + 1} dt. \end{aligned}$$

于是 X 有分布函数

$$\mathbf{P}[X \leq x] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x \frac{e^t \sin \epsilon}{e^{2t} + 2e^t \cos \epsilon + 1} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} dt.$$

□

3.3.2 带型共形限制测度的刻画

在这一节，我们证明带型限制测度由两个参数确定，所采用的方法结合和，固定 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 。假定 $(K_t(x))_{t \geq 0}$ 是 \mathcal{S}_π 上由 $W_t = x - \coth \frac{\pi}{2} t$ 驱动的 Loewner 链， g_t 为与之对应的共形映射。称这一列紧致包 $(K_t(x))_{t \geq 0}$ 为从 x 出发的**完美紧致包**。我们可以直接验证得到 $g_t(0) = -\coth \frac{\pi}{2} t$ 。

引理 3.2. 采用以上记号。

(1) 定义 $h_t(z) = g_t(z) - g_t(0) = g_t(z) + \coth \frac{x}{2}t$, 则 $h_{t+s} = h_t \circ h_s$ 。

(2) 如果 K 满足共形限制性质, 则存在常数 $\nu(x)$ 使得

$$\mathbf{P}[K \cap K_t = \emptyset] = \exp\{-\nu(x)t\} \quad \forall t \geq 0.$$

证明. 对固定的 $s \geq 0$, 根据如下常微分方程解的唯一性:

$$\partial_t f_t(z) = \coth \frac{f_t(z) - x}{2} + \coth \frac{x}{2}, \quad f_0(z) = h_s(z),$$

并且可以验证 h_{t+s} 和 $h_t \circ h_s$ 同时满足以上 ODE, 这便得到 (1)。

由 (1) 可知 $h_t(K_{s+t}(x) \setminus K_t(x)) = (K_s(x))$ 对任意的 $t, s \geq 0$ 成立。从而任取 $t, s \geq 0$, 根据共形限制性质有

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[K \cap K_{t+s}(x) = \emptyset | K \cap K_t(x) = \emptyset] \\ &= \mathbf{P}[K \cap h_t(K_{s+t}(x) \setminus K_t(x)) = \emptyset] = \mathbf{P}[K \cap K_s(x) = \emptyset]. \end{aligned}$$

于是对任意的 $t, s \geq 0$,

$$\mathbf{P}[K \cap K_{t+s}(x) = \emptyset | K \cap K_t(x) = \emptyset] = \mathbf{P}[K \cap K_t(x) = \emptyset] \times \mathbf{P}[K \cap K_s(x) = \emptyset].$$

结合映射 $t \rightarrow K_t(x)$ 的连续性可得到存在 $\nu(x) \geq 0$ 使得

$$\mathbf{P}[K \cap K_t(x) = \emptyset] = \exp\{-t\nu(x)\}.$$

□

在上半平面的情形, 由于 K 同 rK 有相同的分布, 从而 $\nu(x)$ 是常数。但是, 在单位圆盘和带型区域中, 情形就不一样了。事实上, $\nu(x)$ 是一个连续函数。

性质 3.3. 如果 K 满足共形限制性质, 则存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}. \quad (3.5)$$

首先对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 最多存在一个概率测度满足 (3.5)。这里我们的证明策略同一样, 即先证明 (3.5) 对所有的完美紧致包成立。再结合由完美紧致包生成的紧致包 Hausdorff 度量下在 \mathcal{A}_s^* 中稠密 (由紧致包 A_1, A_2 生成的紧致包定义为 $A_1 \cup g_{A_1}^{-1}(A_2)$) 以及 $A \rightarrow \mathbf{P}[K \cap A = \emptyset]$ 的连续性便可证明以上性质。接下来, 我

们证明(3.5) 对所有的完美紧致包成立。首先我们证明 $x \rightarrow \nu(x)$ 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的光滑函数，再利用 [3] 中的 Lemma 9 给出的交互关系完成证明。

记 $\varphi_0(z) = e^z - 1$ 为从 \mathcal{S} 到 \mathbb{H} 的共形映射，并且分别将 $+\infty, 0, -\infty$ 映为 $-1, 0, \infty$ 。假定 K 为服从 \mathcal{S}_π 上的共形限制分布，定义 $\tilde{K} := \varphi_0(K)$ ，称为上半平面上的从 0 到 $(-\infty, -1)$ 的限制测度。对 $x \in \mathbb{C}$ ，记 $B(x, r)$ 为以中心 z ， r 为半径的圆。

对足够小的 $\epsilon > 0$ 以及 $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ ，映射

$$g_{x,\epsilon}(z) := z + \frac{\epsilon^2}{z - x}$$

是从 $\mathbb{H} \setminus B(x, \epsilon)$ 到 H 固定 ∞ 的共形映射。定义

$$f_{x,\epsilon}(z) = \frac{1}{1 - \frac{\epsilon^2}{x(1+x)}}(g_{x,\epsilon}(z) + \frac{\epsilon^2}{x}) = \frac{1}{1 - \frac{\epsilon^2}{x(1+x)}}(z + \frac{\epsilon^2}{z - x} + \frac{\epsilon^2}{x}).$$

这是从 $\mathbb{H} \setminus B(x, \epsilon)$ 到 H 并且固定 $-1, 0, \infty$ 的唯一的共形映射。记

$$p_\epsilon(x) = \mathbf{P}[\tilde{K} \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset].$$

同 [3] 中的引理 5，我们可得

引理 3.3. 如果 \tilde{K} 为 \mathbb{H} 上的从 0 到 $(-\infty, -1)$ 的限制测度，则对任意的 $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ ，以下极限存在

$$\lambda(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} p_\epsilon(x).$$

并且 $\lambda(x) \in (0, \infty)$ 。

证明. 固定 $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ ，记 $(\tilde{K}_t(x) : t \geq 0)$ 为从 x 出发的完美紧致包。这是说 $\tilde{K}_t(x) = \varphi_0(K_t(\varphi_0^{-1}(x)))$ ，其中 $K_t(\varphi_0^{-1}(x))$ 是 \mathcal{S} 上从 $\varphi_0^{-1}(x) = \log(x+1)$ 出发的完美紧致包（参见 3.2）。取 $\epsilon > 0$ 足够小，定义 $N(\epsilon) = [\epsilon^{-2}]$ 为 ϵ^{-2} 的整数部分。定义 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_N = f_{x,\epsilon}$ 。令 $\Phi_\epsilon = \phi_{N(\epsilon)} \circ \phi_{N(\epsilon)-1} \circ \dots \circ \phi_1$ 为从 $H := \phi_1^{-1} \circ \dots \circ \phi_{N(\epsilon)}^{-1}(\mathbb{H})$ 到 \mathbb{H} 固定 $-1, 0, \infty$ 的共形映射。定义 $A_\epsilon(x) = \overline{\mathbb{H} \setminus H}$ ，则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时， $A_\epsilon(x) \rightarrow \tilde{K}_{t_x}(x)$ （Hausdorff 意义下），并且 $K_{t_x}(x) \subset A_\epsilon(x)$ 。这里通过计算容度，我们可以得到 $t_x = \frac{1}{2(1+x)^2}$ 。事实上，

$$S(\varphi^{-1}(B(x, \epsilon) \cap \mathbb{H})) = \frac{1}{2} \log f'_{x,\epsilon}(\infty) - \frac{1}{2} \log f'_{x,\epsilon}(-1) = -\frac{1}{2} \log[1 - \frac{\epsilon^2}{(1+x^2)}],$$

因此

$$t_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S(A_\epsilon(x)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{N(\epsilon)}{2} \log[1 - \frac{\epsilon^2}{(1+x^2)}] = \frac{1}{2(1+x)^2}.$$

根据共形限制性质,

$$\mathbf{P}[K \cap A_\epsilon(x) = \emptyset] = (1 - p_\epsilon(x))^{N(\epsilon)}.$$

另一方面, 由引理 3.2 知

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[K \cap A_\epsilon(x) = \emptyset] \rightarrow \mathbf{P}[\tilde{K} \cap \tilde{K}_{t_x}(x) = \emptyset] \\ &= \mathbf{P}[K \cap K_{t_x}(\varphi_0^{-1}(x)) = \emptyset] = \exp\{-\nu(\log(x+1))t_x\}, \text{ as } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \log(1 - p_\epsilon(x)) = -\frac{1}{2(1+x)^2} \nu(\log(x+1)).$$

这便完成了此引理的证明, 同时我们还得到

$$\lambda(x) = \frac{1}{2(1+x)^2} \nu(\log(x+1)). \quad (3.6)$$

□

事实上, 上述引理中的 $\lambda(x)$ 有一个更好的表达式。为了得到 $\lambda(x)$ 的具体表达式, 我们需要找到 $\lambda(x)$ 满足的泛函关系式。接下来我们能给出 $\lambda(x)$ 满足的两个关系式: 一个是对称关系, 一个是交互关系。

引理 3.4 (对称关系). 对任意的 $x > 0$, λ 满足

$$\lambda(x) = \frac{1}{(1+x)^4} \lambda\left(-\frac{x}{1+x}\right). \quad (3.7)$$

证明. 令 $E(x, \epsilon) := \varphi_0^{-1}(B(x, \epsilon))$ 。记 $I(z) = -\bar{z}$ 为关于 y 轴的对称映射, 共形限制测度在 I 的作用下不变, 则

$$\mathbf{P}[K \cap E(x, \epsilon) \neq \emptyset] = \mathbf{P}[K \cap I(E(x, \epsilon)) \neq \emptyset].$$

注意到 $\psi := \varphi_0 \circ I \circ \varphi^{-1}(z) = -\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}$, 于是

$$\mathbf{P}[\tilde{K} \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset] = \mathbf{P}[\tilde{K} \cap \psi(B(x, \epsilon)) \neq \emptyset].$$

从而

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{P}[\tilde{K} \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}[\tilde{K} \cap \psi(B(x, \epsilon)) \neq \emptyset] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\psi'(x)|^2 \frac{1}{\epsilon^2 |\psi'(x)|^2} \mathbf{P}[\tilde{K} \cap B(\psi(x), |\psi'(x)|\epsilon) \neq \emptyset] \\ &= \frac{1}{(1+x)^4} \lambda\left(-\frac{x}{1+x}\right). \end{aligned}$$

□

固定 $x, y \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, 定义

$$F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (f_{x, \epsilon}(y) - y), \quad G(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (f'_{x, \epsilon}(y) - 1).$$

由直接计算可得

$$F(x, y) = \frac{1}{y-x} + \frac{1}{x} + \frac{y}{x(1+x)}, \quad G(x, y) = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{(y-x)^2}.$$

采用同 [3] 中的引理 6, 引理 7 和引理 8 完全一样的方法, 我们可得到 $\lambda(x)$ 满足的第二个泛函关系式, 由于证明过程完全同, 我们这里只给出叙述, 不给出证明过程。

引理 3.5 (交互关系). 函数 λ 在 $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ 光滑, 并且满足对任意的 $x, y \in (-1, 0)$ 或者 $x, y \in (0, \infty)$, 有

$$\lambda'(y)F(x, y) + 2\lambda(y)G(x, y) = \lambda'(x)F(y, x) + 2\lambda(x)G(y, x). \quad (3.8)$$

结合引理 3.4 和引理 3.5, 我们便可得到 $\lambda(x)$ 的具体形式。

引理 3.6. 存在常数 c_1 和 c_2 使得

$$\lambda(x) = \frac{c_1(1+x) + c_2x^2}{x^2(1+x)^2}. \quad (3.9)$$

证明. 固定 x , 对 (3.8) 两边关于 y 展开, 再令 $y \rightarrow x$ 可得到

$$x^2(1+x)^2\lambda'''(x) + 6x(1+x)(2x+1)\lambda''(x) + 6(1+6x+6x^2)\lambda'(x) + 12(1+2x)\lambda(x) = 0.$$

以上常微分方程的解有以下形式:

$$\lambda(x) = \frac{c_1 + c_3x + c_2x^2}{x^2(1+x)^2}$$

又由于 $\lambda(x)$ 满足 (3.7), 我们可得到 $c_1 = c_3$. □

性质 3.3 的证明 注意到从 x 出发的完美紧致包 $K_t(x)$, 与之对应的共形映射 $h_t(z)$ 满足

$$\partial_t h_t(z) = \coth \frac{h_t(z) - x}{2}, \quad h_0(z) = z.$$

根据 $h_t(0) = 0$, 对以上方程两边关于 z 求导并且取 $z = 0$ 可得到

$$h'_t(0) = \exp\left\{-\frac{1}{4} \frac{1}{(\sinh \frac{x}{2})^2} t\right\}.$$

结合 $\mathbf{P}[K \cap K_t(x) = \emptyset] = \exp\{-\nu(x)t\}$ 以及 $S(K_t(x)) = t$ 和 (3.6), 有

$$\nu(x) = 2c_2 + 2c_1 \frac{1}{4(\sinh \frac{x}{2})^2}.$$

因此如果令 $\alpha = 2c_2$ 以及 $\beta = 2c_1$, 则

$$\mathbf{P}[K \cap K_t(x) = \emptyset] = \exp\{-\nu(x)t\} = |h'_t(0)|^\beta \exp\{-\alpha S(K_t(x))\}.$$

于是我们已经证明了 (3.5) 对完美紧致包成立。采用同 [2] 中性质 3.3 相同的方法可以证明由完美紧致包生成的紧致包在 \mathcal{A}_s^* 中稠密, 再结合 $A \rightarrow \mathbf{P}[K \cap A = \emptyset]$ 的连续性便可证明性质 3.3 对所有的 $A \in \mathcal{A}_s^*$ 成立。

3.3.3 共形限制测度的构造

在这一节我们将利用同 [2] 类似的方法利用布朗气泡测度和带型 SLE($\frac{8}{3}$) 来构造共形限制测度 $\mathbf{P}(\frac{\beta(1-\beta)}{2\beta+1}, \beta)$ 。对共形映射 f , 定义 **修正 Schwarzian 导数** 如下:

$$\tilde{S}f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 + \frac{1 - f'(z)^2}{2}. \quad (3.10)$$

定义

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}, \quad \alpha = \alpha(\kappa) = \frac{(\kappa - 2)(6 - \kappa)}{8\kappa}, \\ \lambda &= \lambda(\kappa) = \frac{(6 - \kappa)(8 - 3\kappa)}{2\kappa}. \end{aligned}$$

于是有

引理 3.7. 假定 $W_t = \sqrt{\kappa}B_t$ 为带型 SLE(κ) 的驱动过程, K 为对应的紧致包。采用同引理 3.1 相同的记号以及令 $\alpha(\kappa), \beta(\kappa), \lambda(\kappa)$ 同上。则

$$Y_t = 1_{\{t < T_A\}} h'_t(W_t)^\beta \exp\{-\alpha S(A_t)\} \exp\left\{\lambda \int_0^t \tilde{S}h_s(W_s) ds\right\},$$

是一个局部鞅。特别地, 当 $\kappa \leq \frac{8}{3}$ 时, Y_t 是一个鞅并且

$$\mathbf{E}[1_{\{\tau_A = \infty\}} \exp\left\{\lambda \int_0^\infty \tilde{S}h_s(W_s) ds\right\}] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}.$$

证明. 利用 Itô 公式即可证明。 □

引理 3.8. 假定 $K \sim \mu_S^{bub}(0)$ 为 \mathcal{S}_π 上 0 处的布朗气泡, 则

$$\mu_S^{bub}(0)[K \cap A \neq \emptyset] = -\frac{1}{6} \tilde{S}\Phi_A(0), \quad \forall A \in \mathcal{A}_s^*. \quad (3.11)$$

证明. 记 $\tilde{A} = \varphi_0(A)$, 则 \tilde{A} 为 \mathbb{H} 上的紧致包. 由布朗气泡的定义 (参见 [13] 的第五章)

$$\mu_S^{\text{bub}}(0)[K \cap A \neq \emptyset] = \frac{1}{|\varphi'_0(0)|^2} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)[K \cap \tilde{A} \neq \emptyset] = -\frac{1}{6} Sg_{\tilde{A}}(0).$$

这里 Sg_A 为 Schwarzian 导数. 可以验证与 \tilde{A} 对应的正则映射为

$$g_{\tilde{A}}(z) = e^{-S(A)} [e^{g_A(\log(z+1))} - 1].$$

直接计算可得 $Sg_{\tilde{A}}(0) = \tilde{S}g(0)$. □

现在我们可以利用上面两个引理来构造共形限制测度. 同 [2], 我们有如下分析: 假定 $\kappa \leq 8/3$, 考虑 $\Omega \times [0, \infty)$ 上强度为 $\lambda \mu \times dt$ 的 Poisson 点过程, 记为 X . 这里 dt 为 Lebesgue 测度, μ 为 \mathcal{S}_π 上 0 处的布朗气泡. 记 γ 为带型 SLE(κ) 曲线, g_t 为对应的共形映射, W_t 为对应的驱动过程. 取 γ 和 X 彼此独立.

令

$$\hat{X} := \{g_t^{-1}(K + W_t) : (K, t) \in X, t \in [0, \infty)\},$$

Ξ 为 \hat{X} 与 γ 所围成的区域即 Ξ 为 \hat{X} 与 γ 之间的区域的闭包.

取 $A \in \mathcal{A}_s^*$, h_t 为从 $\mathcal{S} \setminus g_t(A)$ 到 \mathcal{S} 的正则映射. 由引理 3.8, 对任意的 $t > 0$, 在事件 $\gamma[0, t] \cap A = \emptyset$ 上

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\{K : g_t^{-1}(K + W_t) \cap A \neq \emptyset\} \mid g_t] \\ &= \mathbf{P}[\{K : (K + W_t) \cap g_t(A) \neq \emptyset\} \mid g_t] \\ &= -\tilde{S}h_t(W_t)/6, \end{aligned}$$

这里 K 与 γ 独立, 并且服从分布 $\mu_S^{\text{bub}}(0)$. 因此在事件 $\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset$ 上,

$$\mathbf{P}[\Xi \cap A = \emptyset \mid \gamma] = \exp\left(\lambda \int_0^\infty \frac{\tilde{S}h_t(W_t)}{6} dt\right).$$

通过取期望和利用引理 3.7, 我们得到

$$\mathbf{P}[\Xi \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}, \quad (3.12)$$

利用 [2] 中同样的方法便可得到

性质 3.4. 对任意的 $\kappa \in [0, 8/3]$, $\gamma \cap \Xi(\kappa)$ 的分布为 $\mathbf{P}(\alpha(\kappa), \beta(\kappa))$.

注意到 $\beta(\kappa) \geq \frac{5}{8}$ 以及 $\alpha(\kappa) = \alpha(\beta) = \frac{\beta(1-\beta)}{2\beta+1}$. 因此对 $\beta \geq \frac{5}{8}$ 我们便构造出了 $\mathbf{P}(\beta, \frac{\beta(1-\beta)}{2\beta+1})$.

3.3.4 单边共形限制测度

事实上，我们也可以通过上一节中的 Poisson 点过程来构造一种单边限制测度。在这一节主要介绍这一测度。如果随机集合 $K \subset \overline{\mathcal{S}}$ 满足如下条件：

- (1) K 是连通闭集， $K \cap \mathbb{R} = (-\infty, 0]$ ， $\mathcal{S} \setminus K$ 是单连通的并且 $+\infty \in \partial(\mathcal{S} \setminus K)$ ；
- (2) 对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*(+) := \{A \in \mathcal{A}_s^* : A \cap (-\infty, 0]\}$ ，在已知 $A \cap K = \emptyset$ 的条件下， $\Phi_A(K)$ 与 K 有相同的分布，

我们称 K 满足 **(右) 单边共形限制性质**。同样的方法可以证明，如果 K 满足单边共形限制性质，则存在常数 α, β ，使得 $\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}$ 对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*(+)$ 成立。

下面我们通过 $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ 来构造单边限制测度。首先我们回顾 $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ 的定义。假定 (W_t, V_t) 是如下随机微分方程的解

$$\begin{cases} dW_t = \frac{\rho}{2} \coth \frac{W_t - V_t}{2} dt + \sqrt{\kappa} dB_t \\ dV_t = \coth \frac{V_t - W_t}{2} dt \\ W_0 = 0, V_0 = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{W_t - V_t}{W_0 - V_0} > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

那么由 W_t 作为驱动过程得到的带型 Loewner 链称为 **带有驱动点 x 的 $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ 过程**。同弦 $\text{SLE}(\kappa)$ 一样，可以证明当 $\kappa > 0$ 和 $\rho > -2$ 时， $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ 以概率 1 由一条从 0 到 \mathbb{R}_π 的曲线生成 (参见 [17])。如果取 $x \rightarrow 0^+$ (或者 0^-)，则 $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ 收敛，称其极限为带有驱动点 0^+ (或者 0^-) 的 $\text{SLE}(\rho)$ 。

下面从 $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ ($\kappa \in [0, \frac{8}{3}]$) 出发来构造单边限制测度。

固定 $\rho > 0$ ，记 $g_t(z)$ 为带有驱动点 0^+ 的 $\text{SLE}(\frac{8}{3}; \rho)$ 过程，驱动函数记为 $(W_t : t \geq 0)$ 。这里 (W_t, V_t) 为随机微分方程系统 (3.13) 的解。记 γ 为对应的生成曲线。对任意的 $A \in \mathcal{A}_s^*(+)$ ，记 τ_A 为 γ 第一次碰到 A 的时间。对任意的 $t < \tau_A$ ，记 \tilde{g}_t 为紧致包 $\Phi_A(\gamma(t))$ 的正则映射。令 $h_t(z) = \tilde{g}_t \circ \Phi_A \circ g_t^{-1}(z)$ 为从 $\mathcal{S} \setminus g_t(A)$ 到 \mathcal{S} 并且固定 $\pm\infty$ 的共形映射。则

引理 3.9.

$$M_t = |h'_t(W_t)|^{\frac{5}{8}} |h'_t(V_t)|^\lambda \exp\{-\alpha S(A_t)\} Z_t^{\frac{3}{8}\rho}$$

是一个局部鞅。这里

$$Z_t = \sinh \frac{Y_t}{2} / \sinh \frac{X_t}{2},$$

$$Y_t = h_t(V_t) - h_t(W_t), \quad X_t = V_t - W_t,$$

$$\alpha = \frac{5}{48} + \frac{3}{64}\rho(\rho+4), \quad \lambda = \frac{1}{32}\rho(3\rho+4),$$

并且 $A_t = g_t(A)$, $S(A_t)$ 为 A_t 的容度。

证明. 利用 Itô 公式, 结合引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} d \log \sinh \frac{Y_t}{2} = & \left[\frac{1}{6} (\coth \frac{Y_t}{2})^2 (h'_t(W_t))^2 + \frac{5}{6} \coth \frac{Y_t}{2} h''_t(W_t) \right. \\ & \left. - \frac{\rho}{4} h'_t(W_t) \coth \frac{Y_t}{2} \coth \frac{X_t}{2} + \frac{1}{3} (h'_t(W_t))^2 \right] dt - \frac{1}{2} \coth \frac{Y_t}{2} h'_t(W_t) \sqrt{\frac{8}{3}} dB_t, \end{aligned}$$

$$d \log \sinh \frac{X_t}{2} = \frac{3\rho+2}{12} (\coth \frac{X_t}{2})^2 dt + \frac{1}{3} dt - \frac{1}{2} \coth \frac{X_t}{2} \sqrt{\frac{8}{3}} dB_t,$$

$$\begin{aligned} d \log h'_t(W_t) = & \left(-\frac{5}{6} \frac{(h''_t(W_t))^2}{(h'_t(W_t))^2} + \frac{(h'_t(W_t))^2 - 1}{6} \right. \\ & \left. + \frac{h''_t(W_t)}{h'_t(W_t)} \frac{\rho}{2} \coth \frac{W_t - V_t}{2} \right) dt + \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{h''_t(W_t)}{h'_t(W_t)} dB_t, \end{aligned}$$

$$d \log h'_t(V_t) = \frac{dh'_t(V_t)}{h'_t(V_t)} = \frac{1}{2} [(\coth \frac{X_t}{2})^2 - 1] dt - \frac{1}{2} [h'_t(W_t)]^2 [(\coth \frac{Y_t}{2})^2 - 1] dt,$$

$$d \log S(A_t) = ([h'_t(W_t)]^2 - 1) dt.$$

令 $N_t = \log M_t$, 则 $dM_t = M_t(dN_t + \frac{1}{2}d\langle N, N \rangle_t)$, 利用以上结果可知 dM_t 的时间驱动项为 0, 从而 M_t 是一个局部鞅。□

利用上面的引理可以得到。

引理 3.10. 假定 γ 为带有驱动点 0^+ (或者 0^-) 的 $SLE(\frac{8}{3}; \rho)$ 曲线, 则对任意的 $A \in \mathcal{A}_s$ 满足 $A \cap (0, \infty) = \emptyset$ (或者 $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$), 有

$$\mathbf{P}[\gamma \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\},$$

这里 $\alpha = \alpha(\rho)$ 同引理 3.9,

$$\beta = \beta(\rho) = \frac{5}{8} + \lambda + \frac{3}{8}\rho = \frac{1}{32}(\rho+2)(3\rho+10).$$

证明. 采用和引理 3.9 一样的记号. 根据 [2] 一样的讨论, $0 < h'_t(W_t) \leq 1$ 并且 $h'_t(V_t), Z_t$ 为一致有界的, 因此 M_t 是一个鞅. 我们可以将 $h'_t(W_t)$ 看作 \mathcal{S} 上从 W_t 出发的布朗桥与 $g_t(A)$ 不相交的概率.

因此当 $\tau_A < \infty$ 时, 当 $t \rightarrow \tau_A$ 时, $h'_t(W_t) \rightarrow 0$. 于是当 $t \rightarrow \tau_A$ 时, $M_t \rightarrow 0$.

如果 $\tau_A = \infty$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $h'_t(W_t) \rightarrow 1$. 由于 $V_t \geq W_t$, 如果从 W_t 出发的布朗桥不与 $g_t(A)$ 相交, 那么从 V_t 出发的布朗桥自然不与 $g_t(A)$ 相交. (这里我们利用了 $A \cap (0, \infty) = \emptyset$). 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, $h'_t(V_t) \rightarrow 1$. 另一方面, 如果 $\gamma \cap A = \emptyset$, 则当 $t \rightarrow \infty$, $h_t(z)$ 收敛到恒等映射, 从而 $S(A_t) \rightarrow 0$. 通过和 Bessel 过程比较可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $Z_t \rightarrow 1$. 因此,

$$\lim_{t \rightarrow \tau_A} M_t = 1_{\{\gamma \cap A = \emptyset\}}.$$

根据停止定理可得

$$\mathbf{P}[\gamma \cap A = \emptyset] = \mathbf{E}[M_{\tau_A}] = M_0 = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}.$$

当驱动点为 0^- 时, 方法完全一样. □

性质 3.5. 当 $\beta \in (\frac{5}{8}, 2)$ 时, 令 $\rho = \frac{2}{3}(\sqrt{24\beta + 1} - 1) - 2 > 0$. 记 γ^R 为带有驱动点 0^- 的带型 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ (定义参见 [2]). 记 X 为 γ^R 与 \mathbb{R}_π 的交点. 给定 γ^R , 令 γ^L 为 $\mathcal{S} \setminus \gamma^R$ 的左连通分支中从 0 到 X 的带有驱动点 0^+ 的弦 $SLE(\frac{8}{3}, \rho - 2)$ 曲线. 记 K 为 γ^R 和 γ^L 之间的区域的闭包. 则 K 服从带型限制测度 $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, 这里 α 同引理 3.9 一样, 即

$$\alpha = \alpha(\beta) = \frac{5}{48} + \frac{3}{64}\rho(\rho + 4) = \frac{1}{48}((\sqrt{24\beta + 1} - 1)^2 - 4).$$

证明. 我们只需证明

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \Phi'_A(0)^\beta \exp\{-\alpha S(A)\}.$$

由于 γ^R 为带有驱动点 0^- 的带型 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ 根据引理 3.10, 其满足单边共形限制性质. 我们已经知道这对 $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ 成立. 注意到任意的紧致包 $A \in \mathcal{A}_s$ 可以由分别仅与正负半轴相交的紧致包生成, 因此我们只需正面此性质对任意的 $A \in \mathcal{A}_s$ 并且 $A \cap (0, \infty) = \emptyset$ 成立即可.

采用和引理 3.9 一样的记号. 由于 $\rho > 0$, M_t 是一个鞅. 根据引理 3.10 的证明, 注意到如果 $\tau_A < \infty$, 则当 $t \rightarrow \tau_A$ 时, $M_t \rightarrow 0$. 如果 $\tau_A = \infty$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $h'_t(W_t) \rightarrow 1$, $S(A_t) \rightarrow 0$ 并且 $Z_t \rightarrow 1$. 但是对于 $h'_t(V_t)$, 这里情形有点不一样. 由带型 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ 的单边限制性质 (参见 [2]), 我们有

$$h'_t(V_t)^\lambda \rightarrow \mathbf{P}[\gamma^L \cap A = \emptyset | \gamma^R], \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

因此根据停止定理我们有,

$$\mathbf{P}[K \cap A = \emptyset] = \mathbf{E}[1_{\{\tau_A=\infty\}} \mathbf{E}[\gamma^L \cap A = \emptyset | \gamma^R]] = \mathbf{E}[M_{\tau_A}] = M_0.$$

□

注记 3.2. 事实上, 上面的性质需要一个前提, 即带有驱动点 0^- 的带型 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ 与 \mathbb{R}_π 相交。根据 [49] 中的讨论, 只有当 $\rho \in (-2, 2)$ 时, 带型 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ 才会与 \mathbb{R}_π 相交, 因此我们需要加上 $\rho \in (0, 2)$, 此时 $\beta \in (\frac{5}{8}, 2)$ 。于是对 $\beta \in (\frac{5}{8}, 2)$, 我们构造了 $\mathbf{P}(\alpha(\beta), \beta)$, 这里 $\alpha(\beta) = \frac{1}{48}((\sqrt{24\beta+1}-1)^2-4)$ 。

注记 3.3. 我们还可以通过布朗气泡来构造单边共形限制测度。采用和引理 3.9 一样的记号。将 $SLE(\frac{8}{3}, \rho)$ 代替为 $SLE(\kappa; \rho)$ 过程, 定义

$$a(\kappa, \rho) = \frac{6-\kappa}{2\kappa}, \quad b(\kappa, \rho) = \frac{\rho}{4\kappa}(\rho+4-\kappa), \quad c(\kappa, \rho) = \frac{\rho}{\kappa}.$$

$$\lambda(\kappa) = \frac{(8-3\kappa)(6-\kappa)}{2\kappa}, \quad \alpha(\kappa, \rho) = \frac{(6-\kappa)(\kappa-2)+\rho(\rho+4)}{8\kappa}.$$

则有

引理 3.11.

$$M_t = 1_{\{t < \tau_A\}} (h'_t(W_t))^a (h'_t(V_t))^b \exp\{-\alpha S(A_t)\} Z_t^c \exp\{\lambda \int_0^t \tilde{S} h_s(W_s) ds\}$$

是一个局部鞅

利用 *Ito's* 公式便可证明此引理。同样的方法, 通过添加布朗气泡到 $SLE(\kappa; \rho)$ (带有驱动点 0^+ 或者 0^- , 对任意的 $\kappa \leq \frac{8}{3}$, 我们就可得到参数为 $(a(\kappa, \rho)+b(\kappa, \rho)+c(\kappa, \rho), \alpha(\kappa, \rho))$ 的单边共形限制测度。

第四章 关于布朗环测度

在第2.4章中，我们已经见到以 SLE 为工具，可以解决许多物理上解决不了的问题。在这一章里，我们将利用 SLE 作为工具来证明物理学家 Cardy 用共形场论的方法预测的一个关于布朗环测度的一个公式。这可以看作是 SLE 的又一应用。

在 2003 年，Lawler 和 Werner 引入布朗环测度（参见 [57]）并研究了其一部分性质（也可参见本论文第 B 章节。由于布朗环测度在理论上应为随机不交环路模型的尺度极限，Cardy 和 Gamsa 利用物理上的方法预测出了上半平面的布朗环将任意给定两个点与 \mathbb{H} 的边界值分开的总测度的公式（参见 [4]）。最近 Beliaev and Viklund [56] 得到了弦 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 经过给定两个点的左边的概率的公式并且用利用此公式研究了与 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 气泡相关的一些问题，并重新构造了一个 Lawler, Werner and Schramm 在 [2] 定义的共形限制测度。

受到 [56] 和 [4] 的启发，本作者发现可以利用 Beliaev 和 Viklund 的结果来严格证明 Cardy 和 Gamsa 给出的公式（事实上，Cardy 和 Gamsa 在 [4] 中得到的公式有一点错误，本论文作者在这里得到的公式修正了 Cardy 和 Gamsa 的公式）。接下来，我们陈述并一步步证明本作者得到的公式。主要结论如下：

定理 4.1. 记 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}$ 为上半平面上的布朗环测度， γ 为其对应的样本。给定 $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{H}$ ，记 $E(z, w)$ 为 γ 将 z 和 w 同时与 $\partial\mathbb{H}$ 分开的事件。则

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}[E(z, w)] = & -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{10}\eta {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; \eta) - \frac{1}{10} \log(\eta(\eta - 1)) \\ & + \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{5\Gamma(\frac{4}{3})}(\eta(\eta - 1))^{\frac{1}{3}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \eta). \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里

$$\eta = \eta(z, w) = -\frac{(x - u)^2 + (y - v)^2}{4yv}, \quad (4.2)$$

并且 ${}_3F_2, {}_2F_1$ 为超几何函数（定义参见 [5]）。

事实上 (4.1) 有一个更好的形式：

$$\mu^{\text{loop}}[E(z, w)] = -\frac{1}{10}[\log \sigma + (1 - \sigma) {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1 - \sigma)], \quad (4.3)$$

其中

$$\sigma = \sigma(z, w) = \frac{|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2} = \frac{(x - u)^2 + (y - v)^2}{(x - u)^2 + (y + v)^2}, \quad (4.4)$$

并且 ${}_3F_2$ 为超几何函数。

注记 4.1. 由布朗环测度的共形不变性 (参见 [57] 或者本论文的附录的定理 B.1), 对任意的单连通区域 $D \subset \mathbb{C}$ 以及 $z, w \in D$, 我们可以得到 D 上的布朗环测度同时将 z 和 w 与 ∂D 分离的总测度。特别地, 当 $D = \mathbb{D}$ 时, 选取从 \mathbb{D} 到 \mathbb{H} 的共形映射 $\phi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$, 则 \mathbb{D} 上的布朗环将 $z, w \in \mathbb{D}$ 同时于 $\partial\mathbb{D}$ 分离的总测度是

$$-\frac{1}{10}[\log \tilde{\sigma} + (1 - \tilde{\sigma}) {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1 - \tilde{\sigma})],$$

这里 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(z, w) = \frac{|z-w|^2}{|1-z\bar{w}|^2}$ 。

4.1 SLE 气泡

定理4.1 的证明需要 SLE 气泡作为工具。在这一节, 我们给出 SLE 气泡的定义以及 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 气泡测度与布朗气泡的关系。

取 $\kappa \in (0, 4], \epsilon > 0$, γ^ϵ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ϵ 的 $\text{SLE}(\kappa)$ 曲线。回忆第2.2章性质 2.2.2, γ^ϵ 是 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的 SLE 在映射 $F_\epsilon(z) = \frac{\epsilon z}{z+1}$ 下的像。这里 $F_\epsilon(z) = \frac{\epsilon z}{z+1}$ 将 ∞ 映为 ϵ 并且固定 0。记 γ^ϵ 的分布为 μ^ϵ 。我们有

引理 4.1. 如下极限存在:

$$\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{bub}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-\frac{8}{\kappa}} \mu^\epsilon. \quad (4.5)$$

称 $\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{bub}(0)$ 为 $\text{SLE}(\kappa)$ -气泡 (测度)。这里的极限是在弱收敛或者 Prokhorov 度量下的意义下的收敛 (参见 [13] 或者本文的附录)。

证明. 我们只需证明对任意的生成环路空间的 σ 代数的子代数上对应的极限存在即可。这里我们选择生成代数 $\{\{\gamma : \gamma \text{ disconnects } z \text{ from } \infty\} : z \in \mathbb{H}\}$ 。接下来需要证明对任意给定的 z , 限制在集合 $\{\gamma : \gamma \text{ disconnects } z \text{ from } \infty\}$, 对应的极限存在。

根据从 0 到 ϵ 的 $\text{SLE}(\kappa)$ 的定义, 选取 $F_\epsilon(z) = \frac{\epsilon z}{z+1}$, 则有

$$\mathbf{P}[\gamma \text{ disconnects } z \text{ from } \infty] = p(F_\epsilon^{-1}(z)),$$

这里

$$p(z) = C \int_{-\infty}^{\frac{x}{y}} (1+t^2)^{-\frac{4}{\kappa}} dt,$$

为点 z 位于从 0 到 ∞ 的 SLE 曲线的右边的概率 ($C = C(\kappa)$ 使上面的积分为 1, 参见定理2.30)。于是

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-\frac{8}{\kappa}} p(F_\epsilon^{-1}(z)) = \frac{\Gamma(\frac{4}{\kappa})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{8-\kappa}{2\kappa})(\frac{8}{\kappa}-1)} \left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)^{1-\frac{8}{\kappa}} \quad (4.6)$$

因此对固定的 $z \in \mathbb{H}$, 如果记 $\mu^\epsilon(z)$ 为 μ^ϵ 在将 z 和 ∞ 的路径上的限制, 则下面的极限存在

$$\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0, z) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-\frac{8}{\kappa}} \mu^\epsilon(z)$$

于是, 我们可定义 $\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0)$ 为 $\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0, z)$ 在 z 趋于 0 时的极限。□

如果 $\kappa = \frac{8}{3}$, 根据 (4.6) 可知 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ -气泡限制在将给定的 $z = x + iy \in \mathbb{H}$ 和 ∞ 分离的环路上的总测度为 $\frac{1}{4}(\frac{y}{x^2+y^2})^2 = \frac{1}{4}(\text{Im} \frac{1}{z})^2$ 。这与 [56] 中的性质 3.1 的 (a) 相对应。事实上, [56] 也给出了 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ -气泡将 $z, w \in \mathbb{H}$ 同时与 ∞ 分离的总测度。我们陈述为如下引理:

引理 4.2 (参见 [56]). 记 $E(z, w)$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ϵ 的 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线同时将 $z, w \in \mathbb{H}$ 和 ∞ 分离的事件, 则

$$\mu^\epsilon[E(z, w)] = \frac{1}{4} \text{Im} \left(\frac{1}{z} \right) \text{Im} \left(\frac{1}{w} \right) G(\sigma(z, w)) \epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (4.7)$$

其中 σ 的定义同 (4.4), 并且

$$G(t) = 1 - t {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 1-t). \quad (4.8)$$

这里 ${}_2F_1$ 为超几何函数。

注意到当 $\kappa = \frac{8}{3}$ 时, $1 - \frac{8}{\kappa} = -2$ 。于是

$$\mu_{\text{SLE}}^{\text{bub}}(0)[E(z, w)] = \frac{1}{4} \text{Im} \left(\frac{1}{z} \right) \text{Im} \left(\frac{1}{w} \right) = \frac{1}{4} \frac{yv}{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} G(\sigma(z, w)). \quad (4.9)$$

$\text{SLE}(\frac{8}{3})$ -气泡和布朗气泡有着深刻的联系, 事实上二者仅相差一个常数。

引理 4.3.

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \frac{8}{5} \mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0).$$

证明. 由 0 处布朗气泡的定义 0 (参见 [13] 的第五章或者本文的第 B 章), 其为定义以 0 为根的环路空间上唯一满足 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)[E(r)] = \frac{1}{r^2}$ 对任意的 $r > 0$ 都成立的测度。这里 $E(r)$ 为所有与 $|z| = r$ 相交的环路的集合。因此我们只需证明 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ -气泡在所有与 $|z| = r$ 相交的环路上的总测度为 $\frac{5}{8r^2}$ 。定义 $F_\epsilon(z) = \frac{z}{\epsilon-z}$, 圆周 $|z| = r$ 在 F_ϵ 下的像为以 $c_0 = -\frac{r^2}{r^2-\epsilon^2}$ 圆心, 以 $\rho = \frac{\epsilon r}{r^2-\epsilon^2}$ 为半径的圆。定义从 $\mathbb{H} \setminus B(c_0, \rho)$ 到 \mathbb{H} 的共形映射 $\phi_\epsilon(z) = z - c_0 + \frac{\rho^2}{z-c_0}$ 。由 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 的限制性 (参见定理 2.20) 可得

$$\mu^\epsilon[\gamma \cap |z| = r = \emptyset] = \mu^\infty[\gamma \cap B(c_0, \rho) = \emptyset] = \phi'_\epsilon(0)^{\frac{5}{8}}.$$

于是

$$\mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0)[\gamma \cap |z| = r \neq \emptyset] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \phi'_\epsilon(0)^{\frac{5}{8}}) = \frac{5}{8r^2}.$$

□

4.2 主要定理的证明

在这一节我们给出主要定理的证明。

4.2.1 公式 (4.3) 的证明

给定两点 $z_0 = x_0 + iy_0, w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{H}$ 。由布朗环测度的对称性，我们可以假定 $y_0 \leq v_0, u_0 \geq x_0$ 。由(B.25)可得

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}[E(z_0, w_0)] &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy)[E(z_0, w_0)] dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{y_0} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy)[E(z_0, w_0)] dx dy.\end{aligned}\tag{4.10}$$

这里 $E(z_0, w_0)$ 为布朗环将 z_0 和 w_0 同时与 $\partial\mathbb{H}$ 分离的事件。

由布朗气泡的平移不变性，

$$\mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy)[E(z_0, w_0)] = \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)[E(z_0 - x - iy, w_0 - x - iy)].$$

通过引理 4.3 可知 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \frac{8}{5} \mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0)$ 。因此结合(4.9) 可得

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}[E(z_0, w_0)] &= \frac{8}{5\pi} \int_0^{y_0} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\text{SLE}(\kappa)}^{\text{bub}}(0)[E(z_0 - x - iy, w_0 - x - iy)] dx dy \quad (4.11) \\ &= \frac{8}{5\pi} \int_0^{y_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4} \text{Im} \left(\frac{1}{z_0 - x - iy} \right) \text{Im} \left(\frac{1}{w_0 - x - iy} \right) G(\sigma(z_0 - x - iy, w_0 - x - iy)) dx dy.\end{aligned}\tag{4.12}$$

所以为了证明定理 4.1，我们只需计算上面的积分。定义如下两个函数：

$$\begin{aligned}f(x, y) &:= \frac{(y_0 - y)(v_0 - y)}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \times [(u_0 - x)^2 + (v_0 - y)^2]}.\tag{4.13} \\ g(y) &:= \frac{(x_0 - u_0)^2 + (y_0 - v_0)^2}{(x_0 - u_0)^2 + (y_0 + v_0 - 2y)^2} {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4(y_0 - y)(v_0 - y)}{(x_0 - u_0)^2 + (y_0 + v_0 - 2y)^2}\right).\end{aligned}\tag{4.14}$$

引理 4.4. 采用以上记号，对固定的 $y > 0$ ，有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \frac{2(y_0 - y) + v_0 - y_0}{(x_0 - u_0)^2 + (2(y_0 - y) + v_0 - y_0)^2} \pi.\tag{4.15}$$

证明. 固定 $y > 0$ ，记

$$a = y_0 - y, \quad b = v_0 - y, \quad c = u_0 - x_0, \quad d = v_0 - y_0.\tag{4.16}$$

则

$$f(x, y) = \frac{ab}{[(x_0 - x)^2 + a^2][(u_0 - x)^2 + b^2]}.$$

作如下计算

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{[(x_0 - x)^2 + a^2][(u_0 - x)^2 + b^2]} dx \\ &= ab \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{[x^2 + a^2][(x + c)^2 + b^2]} dx \\ &= \frac{ab\pi}{ab(a^4 - 2a^2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)^2)} \left(b(b^2 + c^2 - a^2) \arctan\left[\frac{x}{a}\right] \right. \\ &\quad \left. + a[(a^2 + c^2 - b^2) \arctan\left[\frac{c + x}{b}\right] + bc \log \frac{b^2 + (c + x)^2}{a^2 + x^2}] \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pi \frac{b(b^2 + c^2 - a^2) + a(a^2 + c^2 - b^2)}{a^4 - 2a^2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)^2}. \end{aligned}$$

用 $a + d$ 替代 b 可得

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \frac{(2a + d)\pi}{c^2 + (2a + d)^2}.$$

这正是我们需要的结果。 □

由 (4.11), 我们有

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}[E(z_0, w_0)] &= \frac{8}{5\pi} \int_0^{y_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4} f(x, y) (1 - g(y)) dx dy \\ &= \frac{8}{5\pi} \int_0^{y_0} \frac{\pi}{4} \frac{2a + d}{c^2 + (2a + d)^2} [1 - g(y)] dy = \frac{2}{5} (A - B), \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中

$$A = A(z_0, w_0) = \int_0^{y_0} \frac{2(y_0 - y) + v_0 - y_0}{(x_0 - u_0)^2 + (2(y_0 - y) + v_0 - y_0)^2} dy, \quad (4.18)$$

$$B = B(z_0, w_0) = \int_0^{y_0} \frac{2(y_0 - y) + v_0 - y_0}{(x_0 - u_0)^2 + (2(y_0 - y) + v_0 - y_0)^2} g(y) dy. \quad (4.19)$$

引理 4.5.

$$A = \frac{1}{4} \log \frac{1}{\sigma}.$$

这里 σ 的定义同 (4.4).

证明. 由(4.18) 知

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{y_0} \frac{2(y_0 - y) + d}{c^2 + (2(y_0 - y) + d)^2} dy = \int_0^{y_0} \frac{2y + d}{c^2 + (2y + d)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{d/c}^{\frac{2y_0+d}{c}} \frac{y}{1 + y^2} dy = \frac{1}{4} \log \frac{c^2 + (2y_0 + d)^2}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

第二等式用到变量代换 $y \rightarrow y_0 - y$, 最后的等式用到了变量代换 $y \rightarrow \frac{2y+d}{c}$. 注意到

$$\frac{c^2 + (2y_0 + d)^2}{c^2 + d^2} = \frac{(u_0 - x_0)^2 + (y_0 + v_0)^2}{(u_0 - x_0)^2 + (v_0 - y_0)^2} = \frac{1}{\sigma}.$$

便可得证. □

引理 4.6.

$$B = \frac{1}{4}(1 - \sigma) {}_3F_2\left(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1 - \sigma\right),$$

这里 σ 的定义同 (4.4).

证明. 由 (4.19)和 $g(y)$ 的定义知

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{y_0} \frac{2(y_0 - y) + d}{c^2 + (2(y_0 - y) + d)^2} \cdot \frac{c^2 + d^2}{c^2 + (2(y_0 - y) + d)^2} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4(y_0 - y)((y_0 - y) + d)}{c^2 + (2(y_0 - y) + d)^2}\right) dy \\ &= \int_0^{y_0} \frac{2y + d}{c^2 + (2y + d)^2} \cdot \frac{c^2 + d^2}{c^2 + (2y + d)^2} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4y(y + d)}{c^2 + (2y + d)^2}\right) dy \\ &= \int_{\frac{d}{c}}^{\frac{2y_0+d}{c}} \frac{cy}{c^2 + c^2y^2} \cdot \frac{c^2 + d^2}{c^2 + c^2y^2} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{c^2y^2 - d^2}{c^2 + c^2y^2}\right) \cdot \frac{c}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^2 + d^2}{c^2} \int_{\frac{d}{c}}^{\frac{2y_0+d}{c}} \frac{y}{(1 + y^2)^2} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{c^2y^2 - d^2}{c^2 + c^2y^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{4y_0(y_0+d)}{c^2+(2y_0+d)^2}} {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; y\right) dy \\ &= \frac{1}{4} \frac{4y_0(y_0 + d)}{c^2 + (2y_0 + d)^2} \cdot {}_3F_2\left(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; \frac{4y_0(y_0 + d)}{c^2 + (2y_0 + d)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(1 - \sigma) {}_3F_2\left(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1 - \sigma\right). \end{aligned}$$

这里第二个等式用到变量代换 $y \rightarrow y_0 - y$, 第三个等式用到变量代换 $y \rightarrow \frac{2y+d}{c}$, 第五个等式用到变量代换 $\frac{c^2y^2-d^2}{c^2+c^2y^2} \rightarrow y$, 第六个等式是用到了如下关于超几何函数的等式:

$$\int_0^x {}_2F_1(a, b; c; y) dy = x {}_3F_2(a, b, 1; c, 2, x).$$

□

于是根据 (4.17) 和引理 4.5 与引理 4.6 便得到 (4.3)。

4.2.2 Cardy-Gamsa 公式的证明

在这一节我们主要证明 (4.1) 和 (4.3) 的等价, 从而便完成定理 4.1 的证明。首先我们回顾一些将要用到的与超几何函数的等式 (我们假定所有出现的超几何函数都是定义好的, 参见 [5] 的第八章):

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-b} {}_2F_1(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}). \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; x) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b+1-c; 1-x) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-x). \end{aligned} \quad (4.21)$$

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; x). \quad (4.22)$$

注意到 $\eta = \frac{\sigma}{\sigma-1}$ 以及 $\sigma \in (0, 1)$ 。定义 $[0, 1]$ 上的函数 ϕ 如下:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{t}{t-1} {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; \frac{t}{t-1}) - (1-t) {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1-t) \\ &- 2\log(1-t) - 2\frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{t}{(t-1)^2}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{t}{t-1}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

欲证 (4.1) 和 (4.3) 相等, 只需证明 $\phi(t) \equiv 0$ 。注意到 $\phi(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1) = 0$, 因此只需证明 $\phi'(t) \equiv 0$ 。采用如下记号:

$$I(t) := \frac{t}{t-1} {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; \frac{t}{t-1}) - 2\log(1-t),$$

$$J(t) := -(1-t) {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; 1-t),$$

$$K(t) := -2\frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{t}{(t-1)^2}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{t}{t-1}).$$

定义函数 $f(x) = x {}_3F_2(1, \frac{4}{3}, 1; \frac{5}{3}, 2; x)$ 。容易验证

$$f'(x) = {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; x).$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{2}{1-t} + f'\left(\frac{t}{t-1}\right) \frac{-1}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{t}{t-1}) \\ &= \frac{2}{1-t} - \frac{1}{1-t} {}_2F_1(1, \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

最后的等式是根据 (4.20) 中令 $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = \frac{5}{3}$ 。同样可以得到

$$\frac{dJ(t)}{dt} = f'(1-t) = {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 1-t).$$

利用 (4.21), 令 $a = 1, b = \frac{4}{3}, c = \frac{5}{3}$ 可得

$${}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 1-t) = -{}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t) + \frac{2}{3} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{-\frac{2}{3}} {}_2F_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; t)$$

在 (4.22) 中, 令 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{3}$ 可得到

$${}_2F_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; t) = (1-t)^{-\frac{2}{3}} {}_2F_1(0, -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; x) = (1-t)^{-\frac{2}{3}}.$$

于是

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -{}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t) + \frac{2}{3} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} (t(1-t))^{-\frac{2}{3}}. \quad (4.25)$$

最后我们处理 $K(t)$ 关于 t 的导数。在 (4.20) 中令 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{4}{3}$ 可得

$${}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{t}{t-1}) = (1-t)^{\frac{2}{3}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; t).$$

因此

$$K(t) = -2 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{\frac{1}{3}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; t).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dK(t)}{dt} &= -2 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left[\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; t) + t^{\frac{1}{3}} \frac{(1-t)^{-\frac{2}{3}} - {}_2F_1(1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; t)}{3t} \right] \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})^2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

结合 (4.24), (4.25) 和 (4.26) 有

$$\phi'(t) = \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{dK(t)}{t} = \frac{2}{1-t} - \frac{1}{1-t} {}_2F_1(1, \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; t) - {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t).$$

引理 4.7.

$$2 - {}_2F_1(1, \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; t) - (1-t) {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t) = 0.$$

证明. 根据超几何函数的定义 (参见 [5] 的第八章)

$${}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{4}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(n + \frac{5}{3})} t^n.$$

于是

$$t {}_2F_1(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(n + \frac{2}{3})} t^n.$$

同样有

$${}_2F_1(1, \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(n + \frac{5}{3})} t^n.$$

利用等式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 我们可以发现上面求和中 t^n 的系数为

$$\frac{\Gamma(n + \frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(n + \frac{2}{3})} - \frac{\Gamma(n + \frac{4}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(n + \frac{5}{3})} - \frac{\Gamma(n + \frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(n + \frac{5}{3})} = 0.$$

□

由引理 4.7 知 $\phi'(t) \equiv 0$, 因此 $\phi \equiv \phi(0) = 0$, 这便证明了 (4.1) 和 (4.3) 是相等的。

4.3 剩余的情形

给定 $z, w \in \mathbb{H}$, 令 γ 为上半平面上的布朗环。由二维布朗运动的性质, $z, w \notin \gamma$ 。因此除了 γ 同时将 z 和 w 同 \mathbb{R} 分离, 还有三种情形:

- (1) γ 将 z 同 \mathbb{R} 分离, 但是没有将 w 同 \mathbb{R} 分离;
- (2) γ 将 w 同 \mathbb{R} 分离, 但是没有将 z 同 \mathbb{R} 分离;
- (3) γ 既不将 z 也不将 w 同 \mathbb{R} 分离。

我们将要证明以上三个事件的总测度为无穷。事实上, 运用同 [56] 一样的方法, 我们可以证明如下引理:

引理 4.8. 假定 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ϵ 的 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线, 记以上三种事件为 $E_1(z, w), E_2(z, w)$ 何 $E_3(z, w)$, 则

$$\mathbf{P}[E_1(z, w)] = \frac{1}{4}\epsilon^2 \left(\left(\text{Im} \frac{1}{z} \right)^2 - \text{Im} \frac{1}{z} \text{Im} \frac{1}{w} G(\sigma) \right) + O(\epsilon^3), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{P}[E_2(z, w)] = \frac{1}{4}\epsilon^2 \left[\left(\text{Im} \frac{1}{w} \right)^2 - \text{Im} \frac{1}{z} \text{Im} \frac{1}{w} G(\sigma) \right] + O(\epsilon^3), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{P}[E_3(z, w)] = 1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 \left[\left(\text{Im} \frac{1}{w} \right)^2 + \left(\text{Im} \frac{1}{z} \right)^2 - \text{Im} \frac{1}{z} \text{Im} \frac{1}{w} G(\sigma) \right] + O(\epsilon^3), \quad (4.29)$$

上面引理的证明同 [56]。事实上，我们只需证明对 \mathbb{H} 上从 0 到 ϵ 的 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线，有以下结论成立：

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\gamma \text{ passes the left of } z \text{ and the right of } w] \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{|z|}\right) \left(1 + \frac{u}{|w|}\right) \left(1 - \frac{y}{|z| - x} \frac{v}{|w| + u} G(\sigma)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\gamma \text{ passes the left of } w \text{ and the right of } z] \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{|z|}\right) \left(1 - \frac{u}{|w|}\right) \left(1 - \frac{y}{|z| + x} \frac{v}{|w| - u} G(\sigma)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\gamma \text{ passes the right of both } z \text{ and } w] \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{|z|}\right) \left(1 - \frac{u}{|w|}\right) \left(1 + \frac{y}{|z| - x} \frac{v}{|w| - u} G(\sigma)\right). \end{aligned}$$

其中 $G(\sigma)$ 的定义同 (4.8)。利用共形映射 $F_\epsilon(z) = \frac{\epsilon z}{1+z}$ 将从 0 到 ∞ 的 $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线转换为从 0 到 ϵ $\text{SLE}(\frac{8}{3})$ 曲线。结合以上引理以及布朗气泡的定义以及引理 4.3，可得到

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)(E_1(z, w)) &= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{v}{u^2 + v^2} G(\sigma(z, w)) \right]. \\ \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)(E_2(z, w)) &= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)^2 - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{v}{u^2 + v^2} G(\sigma(z, w)) \right]. \\ \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)(E_3(z, w)) &= \infty. \end{aligned}$$

由 (B.25)，在上半平面积分便可证明其他三种情形下的布朗环的总测度为无穷。事实上，直观上可以发现其余三种情形都包含直径可以任意小的布朗环，而事件定理 4.1 中的 $E(z, w)$ 排除了任意小的布朗环。

第五章 全平面 SLE 的谱

在单页函数的理论中，谱问题的研究一直是一个重要的课题。在这一章，我们主要介绍单页函数的谱的定义，并且引入 Michel-Zinsmeister 定义的广义谱以及如何计算全平面 SLE 的谱。一般来说，对任意给定的单连通区域 D ，很难计算从单位圆盘到 D 的共形映射的谱。但是对于随机单连通区域，有时候可以借助求解偏微分方程来得到其积分平均谱（定义参见(5.4)）。

5.1 单页函数与 SLE 的谱问题

记 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{D}_- := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ 。为在单页函数的研究中，有两类重要的函数类 \mathcal{S} 和 Σ ，定义如下：

$$\mathcal{S} := \{\phi(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \text{ 为 } \mathbb{D} \text{ 上的单页函数}\}, \quad (5.1)$$

$$\Sigma := \{\psi(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \text{ 为 } \mathbb{D}_- \text{ 上的单页函数}\}, \quad (5.2)$$

这里单页函数是指全纯并且是一一映射。 a_n 和 b_n 为对应的 Taylor 展开和 Laurent 展开的系数。

一个很自然的问题是，这些系数 a_n 和 b_n 在所有的单页函数中能取到哪些值？首先关于 \mathcal{S} ，定义 Koebe 函数如下

$$k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad (5.3)$$

则可验证 $\phi \in \mathcal{S}$ ，并且 $a_n = n$ 。事实上，Bieberbach 于 1916 年猜想在 \mathcal{S} 中，Koebe 函数是使得 $|a_n|$ 取最大值的唯一的函数，也即对任意的 $\phi(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{S}$ 有 $|a_n| \leq n$ 对任意的 n 成立。并且等号成立当且仅当 $\phi(z)$ 是 Koebe 函数。这个猜想由 De Branges 在 1985 年证明（参见 [9]）。对于 Σ ，至今也没有人给出所对应的结论，甚至连 b_n 的渐进性质也是一个公开问题。

另一个关于单页函数极值问题便是谱问题。给定 $p \in \mathbb{R}$ ， $\phi \in \Sigma$ ，定义 $\beta_\phi(p)$ 如下

$$\beta_\phi(p) := \limsup_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_0^{2\pi} |\phi'(re^{i\theta})|^p d\theta}{|\log |r - 1||}.$$

称 $\beta_\phi(p)$ 为 ϕ 或者对应的区域 $\phi(\mathbb{D}_-)$ 的积分平均谱。定义 $B(p) := \sup_{\phi \in \Sigma} \beta_\phi(p)$ ，称

$B(p)$ 为 **万有积分平均谱**。关于 $B(p)$ ，有如下猜想：

$$B(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{4} & \text{当 } p^2 < 4 \\ |p| - 1 & \text{当 } |p| \geq 2. \end{cases}$$

注意到当 $p = 1$ 时， $\int_0^{2\pi} |\phi'(re^{i\theta})| d\theta$ 在 $r \rightarrow 1$ 时趋近于 $|\partial\phi(\Sigma)|$ 。因此 $\beta_\phi(p)$ 某种程度上衡量了 $\phi(\Sigma)$ 的边界的规则程度。

对于 $\phi \in \mathcal{S}$ ，也有谱的定义。这里我们采用 Michel-Zinsmeister（参见 [8]）引入的广义积分平均谱的定义。给定 $p, q \in \mathbb{R}$ ， $\phi \in \mathcal{S}$ ，定义 $\beta_\phi(p, q)$ 如下

$$\beta_\phi(p, q) := \limsup_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{\phi(z)} \right|^q |\phi'(re^{i\theta})|^p d\theta}{|\log |r - 1||}.$$

称 $\beta_\phi(p, q)$ 为 ϕ 或者对应的区域 $\phi(\mathbb{D})$ 的**广义积分平均谱**。注意到对 $\phi \in \Sigma$ ，有

$$\beta_\phi(p) = \beta_\psi(p, 2p), \text{ 这里 } \psi(z) = \frac{1}{\phi(1/z)}$$

通常来说，对任意的给定的单连通区域 D ，由于我们很难写出从 \mathbb{D} 或者 \mathbb{D}_- 到 D 的共形映射， D 的积分平均谱很难计算。但是对于随机单连通区域 D ，我们可以借助于一些工具来计算其期望的积分平均谱，也即

$$\beta_\phi(p) := \limsup_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_0^{2\pi} \mathbf{E}[|\phi'(re^{i\theta})|^p] d\theta}{|\log |r - 1||}. \quad (5.4)$$

$$\beta_\phi(p, q) := \limsup_{r \rightarrow 1^+} \frac{\log \int_0^{2\pi} \mathbf{E}\left[\left|\frac{z}{\phi(z)}\right|^q |\phi'(re^{i\theta})|^p\right] d\theta}{|\log |r - 1||}.$$

接下来，为了方便陈述我们用“谱”来代表积分平均谱。

对于全平面的 $\text{SLE}(\kappa)$ ($g_t : t \in \mathbb{R}$)（参见定义 2.7）， $f_t(z) := g_t^{-1}(z)$ 是从 \mathbb{D}_- 到 $\mathbb{C} \setminus K_t$ 的共形映射并且 $f_t(\infty) = \infty, f_t'(\infty) = e^t$ 。于是 $e^{-t}f_t(z) \in \Sigma$ 。自然可考虑 $e^{-t}f_t(z)$ 的谱。由全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 的尺度不变性（参见 [13] 引理 6.29），只需考虑 f_0 的谱。在文章 [6] 和 [7] 中，作者通过寻找偏微分方程的特解方法得到了全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 的谱。我们叙述为如下结果

定理 5.1 (参见 [7] 和 [6]). 全平面 SLE_κ 的谱为

$$\begin{aligned} \beta_{\text{tip}}(t) &= -t - 1 + \frac{1}{4}(4 + \kappa - \sqrt{(4 + \kappa)^2 - 8\kappa t}), & t \leq t_2, \\ \beta_0(t) &= -t + \frac{4 + \kappa}{4\kappa}(4 + \kappa - \sqrt{(4 + \kappa)^2 - 8\kappa t}), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ \beta_{\text{lin}}(t) &= t - \frac{(4 + \kappa)^2}{16\kappa} & t_3 \leq t. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{1}{128}(4+\kappa)^2(8+\kappa), \\ t_2 &= -1 - \frac{3\kappa}{8}, \\ t_3 &= \frac{3(4+\kappa)^2}{32\kappa}. \end{aligned}$$

在文章 [8] 中, 作者分析了全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 的广义积分平均谱, 并且对一些特殊值 (p, q) 给出了广义谱的具体值。

5.2 Lévy 过程驱动的 SLE 的谱

在这一节我们研究 Lévy 过程驱动的 SLE 的谱问题。我们首先回顾与 Lévy 过程相关的结论。一个随机过程 (L_t) 如果满足

- (1) (平稳性): 如果 $0 \leq s \leq t$, 则 $L_t - L_s$ 与 L_{t-s} 有相同的分布;
- (2) (马尔可夫性质): 如果 $0 \leq s \leq t$, 则 $L_t - L_s$ 与 L_s 独立。

则称 (L_t) 为 Lévy 过程。布朗运动和泊松过程是两个典型的 Lévy 过程, 其中泊松过程是纯跳跃的随机过程。

对于 Lévy 过程, 其生成算子 (参见 [19]) Λ 定义为

$$\Lambda f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}^x[f(L_t)] - f(x)}{t}. \quad (5.5)$$

如果 $\Lambda f \equiv 0$, 则 $f(L_t)$ 为局部鞅; 反之如果对 C^2 函数 $f(t, x)$ 满足 $f(t, L_t)$ 是局部鞅, 则 $\partial_t f = \Lambda f$ (参见 [19] 第七章)。取 $n \in \mathbb{N}$, Lévy 过程 L_t 的 Lévy 标记 η_n 定义为 $e^{-t\eta_n} = \mathbf{E}[e^{inL_t}]$ (参见 [19])。

由于布朗运动是一种特殊的 Lévy 过程, 很自然的问题就是考虑在更一般的过程驱动下的 SLE 的谱问题。这里我们考虑全平面的 SLE 另一版本, 定义如下 Loewner 微分方程

$$\begin{cases} \partial_t f_t(z) = z f'_t(z) \frac{\lambda_t + z}{\lambda_t - z} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(e^{-t}z) = z, \forall z \in \mathbb{D}. \end{cases} \quad (5.6)$$

其中 $\lambda_t = \exp\{i\sqrt{\kappa}B_t\}$, B_t 为标准的一维布朗运动。我们仍旧称以上方程的解为全平面 $\text{SLE}(\kappa)$ 。事实上, 这仅仅是定义 2.7 中的 SLE 在变换 $z \rightarrow \frac{1}{z}$ 下的像。注意到此时, $f_t(z)$ 是从 \mathbb{D} 到 $f_t(D)$ 的共形映射, 并且 $f_t(0) = 0, f'_t(0) = e^t$ 。

接下来我们主要考虑当 $\lambda_t = \exp\{i\sqrt{\kappa}L_t\}$ 时, 所得到 SLE 的谱。

5.2.1 带驱动的布朗运动

在这一节，我们假定 $L_t = at + \sqrt{\kappa}B_t$ 是带驱动的布朗运动，其中 $a \neq 0$ 。则有如下定理：

定理 5.2. 假定 $f = f_0$ ，其中 (f_t) 是由 $\lambda_t = \exp\{i(at + \sqrt{\kappa}B_t)\}$ 驱动的 *Loewner* 方程(5.6)的解。如果取

$$\begin{cases} p = p(\kappa, a) = \frac{(\kappa+4)^2}{8\kappa} \left(1 + \frac{4a^2}{(\kappa+2)^2}\right) \\ q = q(\kappa, a) = \frac{\kappa+4}{2\kappa} \left(1 + \frac{4a^2}{(\kappa+2)^2}\right) \end{cases}$$

则 f 的广义积分平均谱 $\beta(p, q)$ 为 p 。

接下来我们一步一步证明定理 5.2。

注记 5.1. 当 $\kappa = 0$ 时，对应的驱动过程为 $\exp\{iat\}$ 。事实上，此时我们得到的是螺旋线。定义参数为 $a \in \mathbb{R}$ 的螺旋线为如下曲线

$$\gamma(t) = e^{(1+ia)t}, t \in \mathbb{R}.$$

记 $\Omega_t = \mathbb{C} \setminus \gamma[t, +\infty)$ ， $f_t(z) : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_t$ 为对应的共形映射，即

$$f_t : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_t, f_t(0) = 0, f'_t(0) > 0. \quad (5.7)$$

由 *Koebe-1/4* 引理， $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'_t(0) = 0$ 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} f'_t(0) = \infty$ 。于是存在 t_0 使得 $f'_{t_0}(0) = 1$ 。假定 $f_{t_0}(e^{i\theta_0}) = \gamma(t_0) = e^{(1+ia)t_0}$ 对某个 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ 成立。定义

$$\tilde{f}_t(z) = e^{(1+ia)t} f_{t_0}(e^{-iat} z).$$

则有 $\tilde{f}_t(0) = 0, \tilde{f}'_t(0) = e^t$ ，并且

$$\tilde{f}_t(e^{i(\theta_0+at)}) = e^{(1+ia)(t+t_0)} = \gamma(t+t_0).$$

因此 $\tilde{f}_t : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_{t+t_0}$ 是与曲线

$$\tilde{\gamma}(t) = e^{(1+ia)(t+t_0)}, t \in \mathbb{R}.$$

对应的 *Loewner* 映射。由于 $\tilde{f}_t(e^{i(\theta_0+at)}) = \tilde{\gamma}(t)$ ，则对应的驱动过程为 $\tilde{\lambda}(t) = e^{i(\theta_0+at)}$ ，即 \tilde{f}_t 满足

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}_t(z) = z \tilde{f}'_t(z) \frac{\tilde{\lambda}_t + z}{\tilde{\lambda}_t - z} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}_t(e^{-t} z) = z, \forall z \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

定义曲线

$$\eta(t) = e^{-i\theta_0} \tilde{\gamma}(t), t \in \mathbb{R},$$

和函数

$$h_t(z) = e^{-i\theta_0} \tilde{f}_t(e^{i\theta_0} z).$$

由于 $h_t(e^{iat}) = \eta(t)$, h_t 是与 η 对应的 *Loewner* 映射, 对应的驱动过程是 $\lambda(t) = e^{iat}$. 注意到 η 可以由 γ 经过旋转和参数时间平移得到, 于是这并不改变对应的共形映射 h_0 和 f_0 的谱。

下面计算 f_0 的广义积分谱。定义函数 Φ 如下

$$\Phi(z) := e^{(1+ia)\frac{2}{1+a^2} \log(i\frac{1-z}{1+z})} = \left(i\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{2(1+ia)}{1+a^2}}, z \in \mathbb{D}.$$

注意到映射 $z \rightarrow \log(z)$ 将 \mathbb{H} 映为带型 \mathbb{S}_π , $z \rightarrow e^{(1+ia)z}$ 将 $\mathbb{S}_{2\pi/(1+a^2)} := \{x + iy : 0 < y < 2\pi/(1+a^2)\}$ 映为 $\mathbb{C} \setminus \gamma[-\infty, \infty]$ 。于是 Φ 是从单位圆盘到 $\mathbb{C} \setminus \gamma[-\infty, \infty]$ 的共形映射并且 $\Phi(1) = 0$, $\Phi(-1) = \infty$ 。

假定 $f_0(z)$ 是由 e^{iat} 驱动的 *Loewner* 映射在 $t = 0$ 时的映射, 此时对赢得区域为半螺旋线 ($\gamma(t) = e^{(1+ia)t}, t \geq 0$)。在无穷远点, 圈螺旋线和版螺旋线有相同的性质, 因此可以利用 Φ 来计算半螺旋线在 ∞ 处的谱。

由于 $|\Phi(z)| = e^{\frac{2}{1+a^2}(\operatorname{Re} \log \frac{i(1-z)}{1+z} - a \operatorname{Im} \log \frac{i(1-z)}{1+z})}$ 并且 $\operatorname{Im} \log \frac{i(1-z)}{1+z} \in [0, 2\pi]$ 有界, 只需研究 $e^{\frac{2}{1+a^2}(\operatorname{Re} \log \frac{i(1-z)}{1+z})}$ 。于是 $|\Phi(z)| \sim \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^{\frac{2}{1+a^2}}$, $|\Phi'(z)| \sim |1+z|^{-\frac{3+a^2}{1+a^2}} |1-z|^{\frac{1-a^2}{1+a^2}}$ 。因此

$$\frac{|\Phi'(z)|^p}{|\Phi(z)|^q} \sim |1+z|^{-p\frac{3+a^2}{1+a^2} + \frac{2q}{1+a^2}} |1-z|^{p\frac{1-a^2}{1+a^2} - \frac{2}{1+a^2}q}.$$

在 $z = -1$, $|1+z|^2 = (r^2 + 2r \cos \theta + 1)$ 同 $(\pi - \theta)^2$ 有相同的表现, 因此在 π 附近的积分同 $\theta^{-p + \frac{2(q-p)}{1+a^2} + 1} \sim (1-r)^{-p + \frac{2(q-p)}{1+a^2} + 1}$ 。于是可得到在无穷处, $\beta_1(p, q) = -p + \frac{2(q-p)}{1+a^2} + 1$ 。假定 $\phi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (0, -\frac{1}{4}]$ 为 *Koebe* 函数。 $\phi(0) = 0, \phi(1) = \infty, \phi(-1) = -\frac{1}{4}$ 。记 g 为从 $\mathbb{C} \setminus (0, -\frac{1}{4}]$ 到 $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \gamma[0, \infty]$ 的共形映射, 并且 $g(0) = 0, g(-\frac{1}{4}) = 1$ 。则 $f_0 = g \circ \phi$ 。注意到 g 和 g' 在 $-\frac{1}{4}$ 处有界, 因此在 -1 附近, $\int \frac{|f'_0(z)|^p}{|f(z)|^q} \sim \int |\phi'(z)|^p$ 。于是一条射线的端点处的谱为 $-p-1$, 于是在半螺旋线的起始点 1 附近, 谱为 $\beta_{tip} = -p-1$ 。由于远离 ∞ 和 1 , 半螺旋线是可求长的, 对应的谱应为 $\beta_0 := 0$ 。综上所述我们得到:

定理 5.3. 由 $\lambda(t) = e^{iat}$ 驱动的全平面 *Loewner* 过程的在 $t = 0$ 处的映射 f_0 的广义积分谱为

$$\beta(p, q) = \max\{\beta_{tip}, \beta_0, \beta_1\}.$$

这里

$$\beta_{tip} = -p - 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = p + \frac{2(p-q)}{1+a^2} - 1.$$

因此我们可以将由 $\lambda_t = \exp\{i(at + \sqrt{\kappa}B_t)\}$ 驱动的 Loewner 方程得到的曲线看作在螺旋线上添加了随机扰动而得到的。

记 $f := f_0(z)$, 根据定义, 欲计算

$$\mathbb{E}[|f'(z)|^p] = \mathbb{E}[f'(z)^{\frac{p}{2}} \overline{f'(z)^{\frac{p}{2}}}]$$

这里我们假定 $p \in \mathbb{C}$ 。事实上, 我们可以假定更一般的情形

$$G(z_1, \overline{z_2}) := \mathbb{E}[z_1^{\frac{q}{2}} \frac{f'(z_1)^{\frac{p}{2}}}{f(z_1)^{\frac{q}{2}}} \overline{z_2^{\frac{q}{2}} \frac{f'(z_2)^{\frac{p}{2}}}{f(z_2)^{\frac{q}{2}}}}]$$

其中 $p, q \in \mathbb{C}$, $\lambda_t = \exp\{i(at + \sqrt{\kappa}B_t)\}$, $a \in \mathbb{R}$, B_t 为标准的一维布朗运动。定义 $g_t(z) := f_t^{-1}(z)$, 其中 $f_t(z)$ 定义同 (5.6)。则有

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{g_t(z) + \lambda_t}{g_t(z) - \lambda_t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^t g_t(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (5.8)$$

如果定义 $g_t^{(s)}(z)$ 如下: 当 $t > s$ 时, $g_t^{(s)} = e^{-t}(z)$; 当 $t \leq s$ 时, $g_t^{(s)}$ 是下面微分方程的解。

$$\begin{cases} \partial_t g_t^{(s)}(z) = g_t^{(s)}(z) \frac{g_t^{(s)}(z) + \lambda_t}{g_t^{(s)}(z) - \lambda_t} \\ g_s^{(s)}(z) = e^{-s}z \end{cases} \quad (5.9)$$

引理 5.1. 采用以上记号, 则

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g_t^{(s)}(z) = g_t(z) \quad (5.10)$$

这里的 $g_t(z) = f_t^{-1}(z)$, $f_t(z)$ 同 (5.6)。事实上, 这个引理对于定义 2.7 中的全平面 SLE 也有一个对应的陈述 (参见 [13] 性质 4.20)。

引理 5.2. 如果 $\tilde{g}_t(z)$ 为如下微分方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{g}_t(z) = \tilde{g}_t(z) \frac{\tilde{\lambda}_t + \tilde{g}_t(z)}{\tilde{\lambda}_t - \tilde{g}_t(z)} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \tilde{g}_t(z) = z, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (5.11)$$

对任意固定的 s , 定义 $\tilde{g}_t^{(s)}(z)$ 为: 当 $t \leq -s$ 时, $\tilde{g}_t^{(s)}(z) = e^{-t}z$; 当 $t \geq -s$ 时 $\tilde{g}_t^{(s)}(z)$ 上面微分方程的解, 但是初值条件是 $\tilde{g}_{-s}^{(s)} = e^s z$ 。则 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{g}_t^{(s)}(z) = \tilde{g}_t(z)$ 。

现在利用上述引理可证明引理 5.1。事实上，只需注意到如果定义 $\tilde{g}_t^{(s)}(z) = \frac{1}{g_t^{(s)}(\frac{1}{z})}$ ， $\tilde{\lambda}_t = \frac{1}{\lambda_{-t}}$ 其中 $g_t^{(s)}(z)$ 同 (5.9)。则 $\tilde{g}_t^{(s)}$ 满足引理 5.2。于是当 $s \rightarrow +\infty$ 时， $\tilde{g}_t^{(s)}$ 收敛到一个极限 \tilde{g}_t 。接下来只需验证 $g_t(z) := \frac{1}{\tilde{g}_t(\frac{1}{z})}$ 满足 (5.8) 即可。

定义修正的射线型 SLE(κ) 如下

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}_t = \tilde{f}_t(z) \frac{\tilde{f}_t'(z) + \lambda_t}{\tilde{f}_t(z) - \lambda_t} \\ \tilde{f}_0(z) = z, \forall z \in \mathbb{D} \end{cases} \quad (5.12)$$

则有

引理 5.3.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t \tilde{f}_t(z) \stackrel{(d)}{=} f_0(z)$$

证明. 固定 $s > 0$ ， $g_t^{(s)}$ 同上。则

$$g_t^{(s)}(z) \stackrel{(d)}{=} \tilde{f}_t(g_0^{(s)}(z)).$$

。于是 $e^t \tilde{f}_t(z) \stackrel{(d)}{=} e^t g_t^{(s)}((g_0^{(s)})^{-1})$ 。令 $t = s$ ，则有

$$e^t \tilde{f}_t(z) \stackrel{(d)}{=} (g_0^{(t)})^{-1}(z).$$

令 $t \rightarrow +\infty$ ，由引理 5.1 便得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t \tilde{f}_t(z) \stackrel{(d)}{=} f_0(z)$ 。 □

$$\text{定义 } G(z_1, \bar{z}_2, t) := \mathbb{E}\left[z_1^{\frac{q}{2}} \frac{\tilde{f}_t'(z_1)^{\frac{p}{2}}}{\tilde{f}_t(z_1)^{\frac{q}{2}}} \overline{z_2^{\frac{q}{2}} \frac{\tilde{f}_t'(z_2)^{\frac{p}{2}}}{\tilde{f}_t(z_2)^{\frac{q}{2}}}}\right]$$

考虑

$$X_t(z_1) = \frac{\tilde{f}_t'(z_1)^{\frac{p}{2}}}{\tilde{f}_t(z_1)^{\frac{q}{2}}} \quad Y_t(z_2) = \frac{\overline{\tilde{f}_t'(z_2)^{\frac{p}{2}}}}{\overline{\tilde{f}_t(z_2)^{\frac{q}{2}}}}$$

则 $\mathcal{M}_s := \mathbb{E}[X_t(z_1)Y_t(z_2)]$ 是一个局部鞅。事实上根据 Lévy 过程的马尔可夫性质有，

$$\tilde{f}_t(z) \stackrel{(d)}{=} \tilde{f}_{t-s}(\tilde{f}_s(z)/\lambda_s)\lambda_s, \forall s < t$$

于是 $\mathcal{M}_s = X_s(z_1)Y_s(z_2)G(z_{1,s}, \overline{z_{2,s}}, t-s), \forall s < t$ ，这里

$$z_{1,s} = \frac{\tilde{f}_s(z_1)}{\lambda_s} \quad z_{2,s} = \frac{\tilde{f}_s(z_2)}{\lambda_s}.$$

根据 Itô 公式计算如下：

$$\begin{aligned}
dX_s(z_1) &= X_s(z_1) \left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - \frac{p}{(1-z_{1,s})^2} + \frac{q}{1-z_{1,s}} \right], \\
dY_s(z_2) &= Y_s(z_2) \left[\frac{\bar{p}}{2} - \frac{\bar{q}}{2} - \frac{\bar{p}}{(1-\bar{z}_{1,s})^2} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{z}_{1,s}} \right], \\
dz_{1,s} &= z_{1,s} \left(\frac{z_{1,s}+1}{z_{1,s}-1} - \frac{\kappa}{2} - ia \right) ds - iz_{1,s} \sqrt{\kappa} dB_s, \\
d\bar{z}_{2,s} &= \bar{z}_{2,s} \left(\frac{\bar{z}_{2,s}+1}{\bar{z}_{2,s}-1} - \frac{\kappa}{2} + ia \right) ds + i\bar{z}_{2,s} \sqrt{\kappa} dB_s.
\end{aligned}$$

$d\mathcal{M}_s$ 中 ds 项的系数为

$$\begin{aligned}
& Y_s(z_2) G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) X_s(z_1) F_1(z_{1,s}) \\
& + X_s(z_1) G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) Y_s(z_2) F_2(z_{2,s}) \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \partial_1 G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) z_{1,s} \left(\frac{z_{1,s}+1}{z_{1,s}-1} - \frac{\kappa}{2} - ia \right) \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \partial_1^2 G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) \left(-\frac{\kappa}{2} \right) z_{1,s}^2 \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \bar{\partial}_2 G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) \bar{z}_{2,s} \left(\frac{\bar{z}_{2,s}+1}{\bar{z}_{2,s}-1} - \frac{\kappa}{2} + ia \right) \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \bar{\partial}_2^2 G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) \left(-\frac{\kappa}{2} \right) \bar{z}_{2,s}^2 \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \partial_s G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) \\
& + X_s(z_1) Y_s(z_2) \partial_1 \bar{\partial}_2 G(z_{1,s}, \bar{z}_{2,s}, t-s) z_{1,s} \bar{z}_{2,s} \kappa,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= \frac{p}{2} - \frac{q}{2} - \frac{p}{(1-z)^2} + \frac{q}{1-z}, \\
F_2(z) &= \frac{\bar{p}}{2} - \frac{\bar{q}}{2} - \frac{\bar{p}}{(1-\bar{z})^2} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{z}}.
\end{aligned}$$

由于 M_s 是一个局部鞅， ds 的系数为 0。于是可以得到 $G(z_1, \bar{z}_2, t)$ 满足如下微分方程 $\tilde{\mathcal{P}}(D)G = 0$ ，这里

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}(D) &= \frac{p-q+\bar{p}-\bar{q}}{2} - \frac{p}{(1-z_{1,s})^2} + \frac{q}{1-z_{1,s}} - \frac{\bar{p}}{(1-\bar{z}_{2,s})^2} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{z}_{2,s}} \\
& - \frac{\kappa}{2} z_{1,s}^2 \partial_1^2 - \frac{\kappa}{2} \bar{z}_{2,s}^2 \bar{\partial}_2^2 + z_{1,s} \left(\frac{z_{1,s}+1}{z_{1,s}-1} - \frac{\kappa}{2} - ia \right) \partial_1 \\
& + \bar{z}_{2,s} \left(\frac{\bar{z}_{2,s}+1}{\bar{z}_{2,s}-1} - \frac{\kappa}{2} + ia \right) \bar{\partial}_2 - \partial_s + z_{1,s} \bar{z}_{2,s} \partial_1 \bar{\partial}_2.
\end{aligned}$$

通过乘以 $e^{\frac{p+\bar{p}-q-\bar{q}}{2}}$ 再令 $t \rightarrow \infty$ 可得到 $G(z_1, \bar{z}_2)$ 满足 $\mathcal{P}(D)G(z_1, \bar{z}_2) = 0$, 其中

$$\mathcal{P}(D) = -\frac{\kappa}{2}(z_1\partial_1 - \bar{z}_2\bar{\partial}_2)^2 + z_1\left(\frac{z_1+1}{z_1-1} - ia\right)\partial_1 \quad (5.13)$$

$$+ \bar{z}_2\left(\frac{\bar{z}_2+1}{\bar{z}_2-1} + ia\right)\bar{\partial}_2 + p + \bar{p} - q - \bar{q} \quad (5.14)$$

$$+ \frac{q}{1-z_1} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{z}_2} - \frac{p}{(1-z_1)^2} - \frac{\bar{p}}{(1-\bar{z}_2)^2}. \quad (5.15)$$

注意到这里 $\partial_1 := \partial_{z_1}, \bar{\partial}_2 := \partial_{\bar{z}_2}$.

接下来, 我们寻找 $\mathcal{P}(D)G(z_1, \bar{z}_2) = 0$ 的特殊解. 假定 $G(z_1, \bar{z}_2)$ 有如下形式

$$G(z_1, \bar{z}_2) = (1-z_1)^\alpha(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}}P(z_1\bar{z}_2)$$

则计算可知

$$\mathcal{P}(D)[(1-z_1)^\alpha(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}}P(z_1\bar{z}_2)] = I + II + III.$$

其中

$$I = z_1\bar{z}_2(1-z_1)^{\alpha-1}(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}-1}(\kappa|\alpha|^2P(z_1\bar{z}_2) + 2(z_1\bar{z}_2 - 1)P'(z_1\bar{z}_2)),$$

$$II = [\mathcal{P}(\alpha)(1-z_1)^\alpha](1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}}P(z_1\bar{z}_2),$$

$$III = [\mathcal{P}(\bar{\alpha})(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}}](1-z_1)^\alpha P(z_1\bar{z}_2).$$

并且

$$\mathcal{P}(\partial) := -\frac{\kappa}{2}(z_1\partial_1)^2 + z_1\left(\frac{z_1+1}{z_1-1} - ia\right)\partial_1 + p - q + \frac{q}{1-z_1} - \frac{p}{(1-z_1)^2},$$

$$\mathcal{P}(\bar{\partial}) := -\frac{\kappa}{2}(\bar{z}_2\bar{\partial}_2)^2 + \bar{z}_2\left(\frac{\bar{z}_2+1}{\bar{z}_2-1} - ia\right)\bar{\partial}_2 + \bar{p} - \bar{q} + \frac{\bar{q}}{1-\bar{z}_2} - \frac{\bar{p}}{(1-\bar{z}_2)^2}.$$

注意到 $\mathcal{P}(\alpha)(1-z_1)^\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}(\bar{\alpha})(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}} = 0$, 因此如果 $\mathcal{P}(\alpha)(1-z_1)^\alpha = 0$ 则

$$\mathcal{P}(D)[(1-z_1)^\alpha(1-\bar{z}_2)^{\bar{\alpha}}P(z_1\bar{z}_2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa|\alpha|^2P(z_1\bar{z}_2) + 2(z_1\bar{z}_2 - 1)P'(z_1\bar{z}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(z_1\bar{z}_2) = (1-z_1\bar{z}_2)^{-\frac{\kappa|\alpha|^2}{2}}$$

接下来只需找到 α 使得 $(1-z)^\alpha$ 满足 $\mathcal{P}(\partial)(1-z)^\alpha = 0$. 经过计算可得

$$\mathcal{P}(\alpha)(1-z)^\alpha = A(1-z)^\alpha + B(1-z)^{\alpha-1} + C(1-z)^{\alpha-2},$$

这里

$$\begin{cases} A = -\frac{\kappa}{2}\alpha^2 + (1-ia)\alpha + p - q, \\ B = \kappa\alpha^2 - (\frac{1}{2}\kappa + 3)\alpha + ia\alpha + q, \\ C = -\frac{\kappa\alpha^2}{2} + (2 + \frac{\kappa}{2})\alpha - p. \end{cases}$$

注意到 $A + B + C = 0$ 。因此如果选取 p, q, α 使得 $A = B = C = 0$, 则

$$\mathbb{E}\left[z_1^{\frac{q}{2}} \frac{f'(z_1)^{\frac{p}{2}}}{f(z_1)^{\frac{q}{2}}} \bar{z}_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \frac{\overline{f'(z_2)^{\frac{p}{2}}}}{\overline{f(z_2)^{\frac{q}{2}}}}\right] = (1 - z_1)^\alpha (1 - \bar{z}_2)^{\bar{\alpha}} (1 - z_1 \bar{z}_2)^{-\frac{\kappa|\alpha|^2}{2}}$$

接下来我们计算, 当 $A = B = C = 0$ 时, 对应的 SLE 的谱。假定 $p, q \in \mathbb{R}$, 我们需要根据 $A = B = C = 0$ 解出 α 。令 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, 由 $C = 0$ 可知 $p = -\frac{\kappa}{2}\alpha^2 + (2 + \frac{\kappa}{2})\alpha$ 。结合 $\text{Im } p = 0$ 可得

$$\alpha_2(-\kappa\alpha_1 + 2 + \frac{\kappa}{2}) = 0$$

因此 $\alpha_2 = 0$ 或者 $\alpha_1 = \frac{4+\kappa}{2\kappa}$ 。

由 $B = 0$ 可知 $q = -\kappa\alpha^2 + (3 + \frac{\kappa}{2})\alpha - ia\alpha$ 。于是结合 $\text{Im } q = 0$ 可得到

$$2\kappa\alpha_1\alpha_2 - (\frac{\kappa}{2} + 3)\alpha_2 + a\alpha_1 = 0.$$

如果 $\alpha_2 = 0$, 则 $a = 0$, 与假设矛盾。于是

$$\alpha_1 = \frac{\kappa + 4}{2\kappa} \quad \alpha_2 = -\frac{a(\kappa + 4)}{\kappa(\kappa + 2)}.$$

从而

$$\alpha = \frac{4 + \kappa}{2\kappa} (1 - i \frac{2a}{\kappa + 2}).$$

于是

$$\begin{cases} p = p(\kappa, a) = \frac{(\kappa+4)^2}{8\kappa} (1 + \frac{4a^2}{(\kappa+2)^2}) \\ q = q(\kappa, a) = \frac{\kappa+4}{2\kappa} (1 + \frac{4a^2}{(\kappa+2)^2}). \end{cases}$$

注意到 $\frac{\kappa}{2}|\alpha|^2 = p$ 。因此当 p, q 取以上特殊值得时候,

$$\mathbb{E}\left[|z|^q \frac{|f'(z)|^p}{|f(z)|^q}\right] = \frac{|(1 - z)^\alpha|^2}{(1 - |z|^2)^{\frac{\kappa|\alpha|^2}{2}}}.$$

而 $\text{Re } \alpha > 0$, 则

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} \frac{|(1 - z)^\alpha|^2}{(1 - |z|^2)^{\frac{\kappa|\alpha|^2}{2}}} |dz| \asymp (1 - r^2)^{-\frac{\kappa|\alpha|^2}{2}}$$

根据谱的定义, 便可知此时 (p, q) -谱为 $\beta(p, q) = p$ 。这便完成了定理5.2 的证明。

5.2.2 对称 Lévy 过程

在这一节们研究驱动过程是对称 Lévy 过程下的 SLE 的谱。如果 Lévy 过程 L_t 满足 $\eta_n = \eta_{-n}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 则称 L_t 是对称的。这里 η_n 是

Lévy 标记。采用和5.2.1节一样的记号。当驱动过程为 Lévy 过程时，仍旧有 $\mathcal{M}_s = X_s(z)Y_s(z)G(z_s, \bar{z}_s, t-s), \forall s < t$ 是一个局部鞅，这里

$$X_t(z) = \frac{\tilde{f}'_t(z)^{\frac{p}{2}}}{\tilde{f}_t(z)^{\frac{q}{2}}}, \quad Y_t(z) = \frac{\overline{\tilde{f}'_t(z)^{\frac{p}{2}}}}{\overline{\tilde{f}_t(z)^{\frac{q}{2}}}}$$

于是利用 Lévy 过程的 Itô 公式可以得到 $G(z, \bar{z}) = \frac{|z|^q |f'(z)|^p}{|f(z)|^q}$ 满足 $\mathcal{P}(D)G = 0$ ，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D) = & -\Lambda + \frac{z+1}{z-1}z\partial_z + \frac{-p}{(1-z)^2} + \frac{q}{1-z} \\ & + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \frac{-p}{(1-\bar{z})^2} + \frac{q}{1-\bar{z}} + (2p-2q) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

这里 Λ 为 L_t 的生成算子， $p, q \in \mathbb{R}$ 。

接下来假定 $p \equiv 2$ ，假定 $G(z, \bar{z})$ 有如下形式

$$G(z, \bar{z}) = (1-z)(1-\bar{z})h(z, \bar{z}),$$

代入 (5.16) 可得

$$\begin{aligned} & -\Lambda[(1-z)(1-\bar{z})h(z, \bar{z})] + (z+1)(\bar{z}-1)z\partial_z h \\ & + (\bar{z}+1)(z-1)\bar{z}\partial_{\bar{z}} h + (3-q)(2z\bar{z}-z-\bar{z})h = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

再假定

$$h(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\chi)(z^n + \bar{z}^n), \quad \chi := z\bar{z}.$$

则我们通过比较 z^n 之前的系数可以得到 $\theta_n(\chi)$ 满足的递推关系 (L_t 的对称性保证了只需对 $n \in \mathbb{N}$ 比较 z^n 的系数即可) 如下:

$$\begin{aligned} & 2\chi(\chi-1)\theta'_n(\chi) - (\eta_n + n + (\eta_n + 2q - n - 6)\chi)\theta_n \\ & + \chi(\eta_n + n - 2 + q)\theta_{n+1}(\chi) + (\eta_n - n - 2 + q)\theta_{n-1}(\chi) = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

因此可以得到，

(a) 如果 $\eta_1 = 3 - q$ ，只有 θ_0 这一项不为零。于是

$$\theta_0(\chi) = \frac{1}{2(1-\chi)^{3-q}}, \quad G(z, \bar{z}) = \frac{|1-z|^2}{(1-|z|^2)^{3-q}}.$$

则

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} \frac{|1-z|^2}{(1-|z|^2)^{3-q}} |dz| \asymp (1-r^2)^{q-3}.$$

从而对应的谱为 $\beta(2, q) = 3 - q$ 。

(b) 如果 $\eta_1 = 1 - q$, 则只有 θ_0 和 θ_1 不为零, 并且它们满足如下微分方程组:

$$\begin{cases} (\chi - 1)\theta'_0(\chi) + (3 - q)\theta_0(\chi) + (q - 2)\theta_1(\chi) = 0 \\ 2\chi(\chi - 1)\theta'_1(\chi) + (q - 2 + (6 - q)\chi)\theta_1(\chi) - 2\theta_0(\chi) = 0. \end{cases}$$

求解此方程组 (结合初值条件 $G(0) \equiv 1$) 可得

$$\begin{cases} \theta_0(\chi) = \frac{1+\chi}{(1-\chi)^{4-q}} \\ \theta_1(\chi) = -\frac{2}{(2-q)(1-\chi)^{4-q}}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} G(z, \bar{z}) &= |1 - z|^2 \left(\frac{1+|z|^2}{(1-|z|^2)^{4-q}} + \frac{2(z+\bar{z})}{(q-2)(1-|z|^2)^{4-q}} \right) \\ &= \frac{|1-z|^2}{(1-|z|^2)^{4-q}} \left(1 + |z|^2 + \frac{2(z+\bar{z})}{q-2} \right). \end{aligned}$$

由于 $\eta_1 = 1 - q > 0$, 则 $q < 1$ 并且 $1 + |z|^2 + \frac{2(z+\bar{z})}{q-2}$ 一致有界。则

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} \frac{|1-z|^2}{(1-|z|^2)^{4-q}} \left(1 + |z|^2 + \frac{2(z+\bar{z})}{q-2} \right) |dz| \asymp (1-r^2)^{q-4}.$$

从而对应的谱为 $\beta(2, q) = 4 - q$ 。

我们将以上结论总结为如下定理

定理 5.4. 假定 $f = f_0$, 其中 (f_t) 是由 $\lambda_t = \exp\{iL_t\}$ 驱动的 *Loewner* 方程(5.6)的解。这里 L_t 为对称的 *Lévy* 过程。则

(1) 当 $p = 2$, $\eta_1 = 3 - q$ 时, f 的广义积分平均谱为 $\beta(2, q) = 3 - q$;

(2) 当 $p = 2$, $\eta_1 = 4 - q$ 时, f 的广义积分平均谱为 $\beta(2, q) = 4 - q$ 。

注记 5.2. 这里 $p = 2$ 至关重要, 否则便没有比较好的形式 (5.17)。这里我们所能求得的谱都是借助于找到了满足微分方程的特解从而直接计算得到的。目前还没有一个更好的方法来对任意的 (p, q) 得到对应的谱。

附录 A 概率和随机分析

在这一节，我们主要介绍 SLE 所需要的基本的有关概率和随机分析的知识。关于概率的知识可参见 [18]，关于随机分析得知识可参见书本本小节的内容可参见 [19]。

A.1 概率论初步

假定做一个实验，所得到的可能结果组成一个集合 Ω ，通常称之为样本空间。例如抛一枚硬币两次，所得到的所有可能的结果是（正，正）、（正，反），（反，正）、（反，反）。在概率论中，一般感兴趣的是事件，例如抛一枚硬币两次，用 A 表示第二次出现正面的事件，则 A 是 Ω 的一个子集。因此，抽象地说，事件就是样本空间的子集。下面具体用严格抽象的语言表述测度空间。假定 Ω 是一个给定的空间，其上的 σ 代数 \mathcal{F} 为满足如下条件的 Ω 的子集的集合：

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (2) 如果 $A \in \mathcal{F}$ ，则 $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- (3) 如果 $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ ，那么 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 。

如果将 (3) 改为：如果 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ，那么 $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ 。则称 \mathcal{F} 为 Ω 上的一个**代数**。如果 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 均为 Ω 上的 σ 代数，则称 \mathcal{G} 为 \mathcal{F} 的**子 σ 代数**。通常的，给定 Ω 上的 σ 代数，则称 (Ω, \mathcal{F}) 为一个**测度空间**或者**可测空间**。易见如果 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 同为 Ω 上的 σ 代数，则 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ 也是 Ω 上的 σ 代数。如果 \mathcal{A} 为包含 Ω 的某些子集的集合，则称包含 \mathcal{A} 的最小的 σ 代数为**由 \mathcal{A} 生成的 σ 代数**，记为 $\sigma(\mathcal{A})$ 。当 Ω 为一个拓扑空间时，由所有开集生成的 σ 代数称为 Ω 上的 **Borel σ 代数**，记为 $\mathcal{B}(\Omega)$ 。

假定 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 为两个可测空间，如果映射 $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 满足对任意的 $A \in \mathcal{F}_2$ ，有 $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ ，则称 X 为**可测映射**。特别的当 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 时，则称 X 为 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 上的**随机变量**。

如果可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上的映射 $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 满足如下条件：

- (1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ， $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(2) 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ 并且两两不交, 则有

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

则称 \mathbb{P} 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的一个**概率测度**。称三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个**概率空间**。

通过可测映射 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$, 可以诱导 (Ω', \mathcal{F}') 上的概率测度:

$$\mathbb{P}_X(E) := \mathbb{P}(X^{-1}(E)), \text{ 对任意的 } E \in \mathcal{F}'.$$

当 $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 时, 称 \mathbb{P}_X 为随机变量 X 的**分布律**。称 $F(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$ 为 X 的**分布函数**。特别如果 $\frac{d\mathbb{P}_X}{dx} = \rho(x)$ 存在, 其中 dx 为 \mathbb{P} 上的 Lebesgue 测度, 则称 $\rho(x)$ 为随机变量 X 的**密度函数**。当 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 时, 称 X 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

随机变量 X 的**期望**定义为:

$$\mathbb{E} := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x).$$

可以验证 $\{X^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ 是一个 σ 代数, 称为由随机变量 X 生成的 σ 代数, 记为 $\sigma(X)$ 。关于 $\sigma(X)$ 有一个非常重要的性质: 如果 Y 是 Ω 上关于 $\sigma(X)$ 可测的随机变量, 则存在 \mathbb{R} 上的可测映射 f 使得 $Y = f(X)$ 。

如果 \mathcal{F} 的两个子 σ 代数 \mathcal{F}_1 和 \mathcal{F}_2 满足: 对任意的 $E \in \mathcal{F}_1, F \in \mathcal{F}_2$, 有

$$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F).$$

则称 \mathcal{F}_1 和 \mathcal{F}_2 **独立**。对于随机变量 X, Y , 如果 $\sigma(X)$ 和 \mathcal{F}_1 独立, 则称 X 和 \mathcal{F}_1 独立; 如果 $\sigma(X), \sigma(Y)$ 独立, 则称 X 和 Y 独立。

A.2 条件期望

在概率中经常会遇到条件期望这个概念。例如抛一枚硬币两次, 则可以问在知道第一次抛出正面的条件下, 两次均抛出正面的概率。这就引出了条件概率的概念。严格地, 记 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间, $A, B \in \mathcal{F}$, 并且 $\mathbb{P}(B) > 0$, 那么在已知 B 的条件下 A 发生的概率定义为

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}(A|B)$ 也可记做 $\mathbb{E}[1_A|B]$, 称为已知 B 条件下随机变量 1_A 的**条件期望**。对一般的随机变量 X 和 \mathcal{F} 的子 σ 代数也有条件期望的推广:

定理 A.1. 假定 X 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个随机变量, 并且 $\mathbb{E}(X)$ 存在。 \mathcal{G} 是 \mathcal{F} 的一个子 σ 代数, 则存在 Ω 上关于 \mathcal{G} 可测的随机变量 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, 使得对任意的 $E \in \mathcal{G}$,

$$\int_E X d\mathbb{P} = \int_E \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

可以看出当 $X = 1_A, \mathcal{G} = \sigma(B)$ 时, $\mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]|_B = \mathbb{P}(A|B)$, 确实是之前条件概率的推广。实际上 $\mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}] = \mathbb{P}(A|B)1_B + \mathbb{P}(A|B^c)1_{B^c}$ 。关于条件期望有许多性质:

性质 A.1. 假定 X, Y 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量, 并且 $\mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[X]$ 存在。 \mathbb{G}, \mathbb{H} 为 \mathbb{F} 的两个子 σ 代数。则有

- (1) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$;
- (2) 如果 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, 则有 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathbb{G}]$;
- (3) 如果 Y 关于 \mathcal{G} 可测, 并且 $\mathbb{E}[XY]$ 存在, 则有 $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$;
- (4) 如果 X 和 \mathcal{G} 独立, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ 。

A.3 随机过程

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个**随机过程**是指 Ω 上的一组随机变量 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 。对任意的 $\omega \in \Omega$, 有映射 $X_t(\omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为随机过程 X 的**样本轨道**。

如果 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 为 \mathcal{F} 的一组子 σ 代数, 并且满足对任意的 $s \leq t$, 有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, 则称 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 为 (Ω, \mathcal{F}) 的一组**滤子**。

如果可测映射 $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow ([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$ 满足对任意的 $t \geq 0$, 有 $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq t\} \in \mathcal{F}_t$, 则称 T 为关于滤子 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 的**停时**。

称随机过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ **适应**, 如果对任意的 $t \geq 0$, X_t 是关于 \mathcal{F}_t 可测的。

鞅在随机分析中是一个非常重要的概念, 它来源赌博中的公平原则。称满足如下条件的随机过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为关于滤子 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 的**鞅**:

- (1) $(X_t)_{t \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 适应;
- (2) 对任意的 $t \geq 0$ 有: $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;
- (3) 对任意的 $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ 。

如果 \mathcal{F}_t 为关于 X 的自然 σ 代数滤子: $\sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, 则简称 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为鞅。

如果随机过程 $(X)_{t \geq 0}$ 满足: 存在有界的停时序列 $T_n \uparrow \infty$ 并且对任意的 n , $(X_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ 为关于滤子 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 的鞅。则称 X 关于滤子 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 的局部鞅。

定理 A.2 (停止定理). 如果 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为关于滤子 $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ 的鞅, T 是关于自然 σ 代数滤子 $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ 的停时, 并且 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1, \mathbb{E}[|X_T|] < \infty$ 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_s| | T > s] \mathbb{P}(T > s) = 0$, 则有:

$$\mathbb{E}[|X_T|] = \mathbb{E}[X_0].$$

A.4 布朗运动

布朗运动是随机分析中不可或缺的组成部分, 特别是 SLE 的研究正是基于布朗运动进行的。因此有必要给出布朗运动的定义和性质。**标准的一维布朗运动**是满足如下条件的随机过程 $\{B_t : t \geq 0\}$:

- (1) $B_0 = 0$;
- (2) 对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$, $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 为相互独立的;
- (3) 对任意的 $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$;
- (4) 依概率 1, 样本轨道 $t \rightarrow B_t$ 连续。

注记 A.1. 事实上, 由前三条可以推出第四条。证明布朗运动的存在性也是一个复杂的过程, 可参见 [19]。

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 称 $\{x + B_t : t \geq 0\}$ 为从 x 出发的布朗运动。布朗运动有许多性质, 这里列举几条重要的性质:

性质 A.2. 如果 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为标准的布朗运动, T 是关于 B_t 的自然 σ 代数滤子的有界停时, 则有

- (1) 对任意的 $r > 0$, $\{rB_{\frac{t}{r^2}} : t \geq 0\}$ 也是标准的一维布朗运动。
- (2) $\{B_{t+T} - B_T : t \geq 0\}$ 也是标准的一维布朗运动。

事实上可定义 $n \geq 2$ 维的标准布朗运动为 $B_t := (B_t^1, B_t^2, B_t^3, \dots, B_t^n)$, 其中 $\{B_t^i : 1 \leq i \leq n\}$ 为相互独立的一维标准布朗运动。

二维布朗运动满足一条独特的性质—共形不变性。

定理 A.3. 假定 D_1, D_2 为平面上的区域, $f: D_1 \rightarrow D_2$ 为共形映射。 $z \in D_1$, B_t 为从 z 出发的二维布朗运动。记 $\tau_{D_1} := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D_1\}$, $\sigma(t) := \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$ 。则 $\{f(B_{\sigma(t)}) : 0 \leq t < \tau_{D_1}\}$ 以 σ 为时间参数为 D_2 上从 $f(z)$ 出发到 ∂D_2 停止的布朗运动。

这个定理用 Ito 公式来证。参见 [13]。

A.5 Itô 积分

下面介绍关于布朗运动的积分。假定 (B_t) 为标准的一维布朗运动, \mathcal{F}_t 为 B_t 的自然 σ 代数流。 X_t 是关于 \mathcal{F}_t 适应的连续随机过程。记 $a > 0$, 我们的目的是定义 $\int_0^a X_t dB_t$ 。分几个步骤。

- (1) 当 X_t 是一个简单过程时。此时存在随机变量 Y_0, Y_2, \dots, Y_n 以及 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = a$ 满足: Y_k 是 \mathcal{F}_{t_k} 可测的并且当 $t_k < t \leq t_{k+1}, 0 \leq k < n$ 时, 有 $X_t = Y_k$ 。此时定义

$$\int_0^a X_t dB_t := \sum_{k=0}^{n-1} Y_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

此时, 我们得到了关于 \mathcal{F}_a 可测的随机变量。如果对任意的 $0 \leq k \leq n$, 有 $\mathbb{E}|Y_k|^2 < \infty$, 则

$$\mathbb{E}[(\int_0^a X_t dB_t)^2] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbb{E}[|Y_k|^2] = \int_0^a \mathbb{E}[|X_t|^2] dt := \|X\|_{L^2[0,a]}^2.$$

- (2) 当 X_t 一致有界时。即存在 $M > 0$ 使得对任意的 $t \in [0, a]$ 有: $|X_t| < M, a.e.$ 。此时可用简单过程逼近 X_t 。对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 定义随机过程 X_t^n 如下: 当 $t \in (\frac{k}{n}a, \frac{k+1}{n}a]$ 时, $X_t^n := X_{\frac{k}{n}a}, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 。于是 X_t^n 是关于 \mathcal{F}_t 适应的简单过程。并且 X^n 依 $\|\cdot\|_{L^2[0,a]}$ 收敛到 X 。于是可以得到 $\{(\int_0^a X_t^n dB_t)^2 : n\}$ 为 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的 Cauchy 列, 从而存在极限。此时定义

$$\int_0^a X_t dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a X_t^n dB_t.$$

于是 $\int_0^a X_t dB_t$ 是 \mathcal{F}_a 可测的随机变量, 并且位于 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中。

- (3) 当 X 为一般的连续过程时。可采用截断的方法。对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 定义 X_t^n 为

此时依概率 1, 对任意的 $t \in [0, a]$, X_t^n 收敛到 X_t 。并且如果 $\int_0^a \mathbb{E}[X_t^2]dt < \infty$, 则由控制收敛定理可得 X^n 依 $\|\cdot\|_{L^2[0,a]}$ 收敛到 X 。于是可以得到 $\{(\int_0^a X_t^n dB_t)^2 : n\}$ 为 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的 Cauchy 列, 从而存在极限。此时仍定义

$$\int_0^a X_t dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a X_t^n dB_t.$$

于是 $\int_0^a X_t dB_t$ 是 \mathcal{F}_a 可测的随机变量, 并且位于 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中。

当 $a \in (0, \infty)$ 变动时, 我们也可以定义关于布朗运动的不定积分, 即 $Y_t := \int_0^t X_s dB_s$, 具体可参见 [19]。下面列举随机积分的一些性质。需要指出的是, 由于 X_t 连续, 自然可定义 $\int_0^t X_s ds$ 。

性质 A.3. 假定 X_t, Z_t 是关于布朗运动 B_t 的自然 σ 代数流 \mathcal{F}_t 适应的连续随机过程。 $Y_t := \int_0^t X_s dB_s$, 则

$$(1) \int_0^t (aX_s + bZ_s)dB_s = a \int_0^t X_s dB_s + b \int_0^t Z_s dB_s;$$

$$(2) \int_0^{t+t'} X_s dB_s = \int_0^t X_s dB_s + \int_t^{t+t'} X_s dB_s;$$

(3) $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是关于 \mathcal{F}_t 的局部鞅。如果 $\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2]ds < \infty$, 对任意的 $t \geq 0$ 成立, 则 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是关于 \mathcal{F}_t 的鞅。

一般的, 随机积分 $\int_0^t X_s dB_s$ 为鞅; 反过来, 任意的连续鞅可以表示成 $\int_0^t X_s dB_s$ 的形式。参见 [19]。一般将随机积分 $Y_t = \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Z_s ds$ 写成微分方程的形式:

$$dY_t = X_t dB_t + Y_t dt.$$

一般地, 对于随机积分的计算直接利用定义比较难。类似于微积分的牛顿莱布尼兹公式, 随机积分中也有类似的公式—Ito 公式。

定理 A.4 (Ito 公式). 假定 $f(t, x)$ 是关于 $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 的函数, 且关于 t 是 C^1 的, 关于 x 是 C^2 的, 如果 $dY_t = X_t dB_t + Z_t dt$, 则

$$df(t, Y_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, Y_t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t)Z_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, Y_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t)X_t dB_t.$$

定理 A.5 (高维的 Ito 公式). 假定 $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n)$ 为 n 维的标准布朗运动, 并且有随机积分 $dY_t^k = X_t^k dB_t^k + Z_t^k dt, k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。如果函数 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是关于 $t \in [0, \infty)$ 为 C^1 , 关于 $x_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 C^2 的。则有

$$df(t, Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^n) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} Z_t^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} (X_t^k)^2 \right) dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} X_t^k dB_t^k.$$

附录 B 布朗路径测度

由于与二维布朗运动相关的测度在 SLE 的研究中有着非常重要的作用，我们在这一章详细介绍一些与之相关的测度。这一章的内容完全来自于 Lawler 的书 [13] 的第五章，由于作者在学习 SLE 的过程中在这一部分花了大部分时间来学习，并且也得到了自己的一些总结，因此也有必要在本论文中给出来。

B.1 曲线空间

在这一小节，我们主要给出所研究的曲线所在的可测空间以及上面的测度的定义。

记 $C[0, 1]$ 为曲线 $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 的集合。令 $\mathcal{X} := C[0, 1] \times [0, \infty)$ ，在 \mathcal{X} 引入度量

$$\|(\gamma, r)\| := |r| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma(s)|.$$

我们可以验证 $\|(\gamma, r)\|$ 是一个完备度量。

记 \mathcal{K} 为所有满足 $t_\gamma > 0$ 的曲线 $\gamma : [0, t_\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ 的集合。则在 \mathcal{K} 和 $C[0, 1] \times (0, \infty)$ 之间有一一对应：

$$\gamma \leftrightarrow (\tilde{\gamma}, t_\gamma) \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(st_\gamma) \text{ for } s \in [0, 1].$$

记 $d_{\mathcal{X}}$ 为 \mathcal{K} 上由 $\|(\gamma, r)\|$ 和以上对应所诱导的度量。我们应该注意到 $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{X}})$ 并不完备，这是因为 $(C[0, 1] \times (0, \infty), \|(\gamma, r)\|)$ 不完备。但是对任意的 $a > 0$ ，如果定义 $\mathcal{K}^{(a)} := \{\gamma \in \mathcal{K} : t_\gamma \geq a\}$ ，则可以看到 $(\mathcal{K}^{(a)}, d_{\mathcal{X}})$ 是一个完备的度量空间。

我们还可以在 \mathcal{K} 上定义另外一个度量：

$$d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) := \inf_{\theta} d(\gamma_1, \gamma_2; \theta)$$

这里下确界取自所有的 $[0, t_{\gamma_1}]$ 到 $[0, t_{\gamma_2}]$ 的严格单调递增同胚并且

$$d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) = \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |\theta(s) - s| + \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |\gamma_2(\theta(s)) - \gamma_1(s)|.$$

可以验证 $d_{\mathcal{K}}$ 为一个度量。首先 $d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2; \theta) \geq 0$ ；如果 $d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2; \theta) = 0$ ，则存在一组从 $[0, t_{\gamma_1}]$ 到 $[0, t_{\gamma_2}]$ 的严格递增同胚使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |\theta_n(s) - s| + \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |\gamma_2(\theta_n(s)) - \gamma_1(s)| \right] = 0.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(s) = s \text{ 并且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2(\theta_n(s)) = \gamma_1(s) \text{ uniformly on } [0, t_{\gamma_1}].$$

因此 $t_{\gamma_1} = t_{\gamma_2}$ and $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ 对任意的 $s \in [0, t_{\gamma_1}]$ 成立; 最后我们可以验证 $d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) = d_{\mathcal{K}}(\gamma_2, \gamma_1)$ 和 $d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_3) + d_{\mathcal{K}}(\gamma_3, \gamma_2)$ 。

尽管 $d_{\mathcal{K}}$ 和 $d_{\mathcal{X}}$ 不一样, 但是他们诱导的拓扑一样:

引理 B.1. 如果 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$, 则

$$d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) + \text{osc}(\gamma_2, 2d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2)).$$

特别地, $\gamma_n, \gamma \in \mathcal{K}$, $d_{\mathcal{K}}(\gamma_n, \gamma) \rightarrow 0$ 当且仅当 $d_{\mathcal{X}}(\gamma_n, \gamma) \rightarrow 0$ 。

证明. 令 $\theta(s) = \frac{t_{\gamma_2}}{t_{\gamma_1}} s$, 则

$$\begin{aligned} d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) &= \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} \left\{ \left| \frac{t_{\gamma_2}}{t_{\gamma_1}} s - s \right| \right\} + \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |\gamma_1(s) - \gamma_2(\frac{t_{\gamma_2}}{t_{\gamma_1}} s)| \\ &= |t_{\gamma_1} - t_{\gamma_2}| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_1(t_{\gamma_1} s) - \gamma_2(t_{\gamma_2} s)| \\ &= d_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

于是 $d_{\mathcal{K}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) = d_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2)$ 。另一方面,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2) &= |t_{\gamma_1} - t_{\gamma_2}| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_1(t_{\gamma_1} s) - \gamma_2(t_{\gamma_2} s)| \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t_{\gamma_1}} |s - \theta(s)| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_1(t_{\gamma_1} s) - \gamma_2(\theta(t_{\gamma_1} s))| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_2(\theta(t_{\gamma_1} s)) - \gamma_2(t_{\gamma_2} s)| \\ &= d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) + \sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_2(\theta(t_{\gamma_1} s)) - \gamma_2(t_{\gamma_2} s)| \\ &\leq d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) + \text{osc}(\gamma_2, d(\gamma_1, \gamma_2; \theta)) \end{aligned}$$

最后一个等式运动到了如下估计:

$$|\theta(t_{\gamma_1} s) - t_{\gamma_2} s| \leq |\theta(t_{\gamma_1} s) - t_{\gamma_1} s| + |t_{\gamma_2} s - t_{\gamma_1} s| \leq d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) + |t_{\gamma_2} - t_{\gamma_1}| \leq 2d(\gamma_1, \gamma_2; \theta).$$

因此

$$d_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d(\gamma_1, \gamma_2; \theta) + \text{osc}(\gamma_2, d(\gamma_1, \gamma_2; \theta)),$$

并且我们可以对所有的 θ 取下确界。 □

因此当我们用到 \mathcal{K} 上的关于 $d_{\mathcal{K}}$ 或者 $d_{\mathcal{X}}$ 地收敛或者连续性, 上面的引理显示, 二者是等价的。

事实上, 尽管 $\mathcal{K}^{(a)}$ 在 $d_{\mathcal{X}}$ 下是完备的, 其在 $d_{\mathcal{K}}$ 下并不完备。例如曲线族 $\gamma_n(t) = t^n, 0 \leq t \leq 1$ 为 $(\mathcal{K}^{(1)}, d_{\mathcal{K}})$ 的 Cauchy 列, 但是并没有极限。

这是因为如果 γ_n 在 $(\mathcal{K}^{(1)}, d_{\mathcal{K}})$ 中收敛到 γ , 则 γ_n 在 $(\mathcal{K}^{(1)}, d_{\mathcal{X}})$ 中收敛到 γ 。因此对任意的 $t \in [0, 1]$, $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma(t)$ 。于是对任意的 $t \in [0, 1)$, $\gamma(t) = 0$ 并且 $\gamma(1) = 1$, 显然不连续! 但是 γ_n 为 $(\mathcal{K}^{(1)}, d_{\mathcal{K}})$ 中的 Cauchy 列, 这是因为对任意的 $\epsilon > 0$ 和 $n \leq m$, 如果定义严格单调增的同胚 $\theta_{\epsilon}^{n,m}$ 如下:

$$\theta_{\epsilon}^{n,m}(s) = \begin{cases} \epsilon^{1-\frac{n}{m}} s^{\frac{n}{m}} & \text{if } s \in [0, \epsilon] \\ s & \text{if } s \in [\epsilon, 1]. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} d(\gamma_n, \gamma_m; \theta_{\epsilon}^{n,m}) &= \sup_{0 \leq s \leq 1} |\theta_{\epsilon}^{n,m}(s) - s| + \sup_{0 \leq s \leq 1} |(\theta_{\epsilon}^{n,m}(s))^m - s^n| \\ &\leq 2\epsilon + \sup_{0 \leq s \leq \epsilon} |(\theta_{\epsilon}^{n,m}(s))^m - s^n| + \sup_{\epsilon \leq s \leq 1} |(\theta_{\epsilon}^{n,m}(s))^m - s^n| \\ &\leq 2\epsilon + \sup_{0 \leq s \leq \epsilon} |\epsilon^{n-m} - 1|s^n + \sup_{\epsilon \leq s \leq 1} |s^m - s^n| \end{aligned}$$

前一引理表明如果 γ_n 为 $(\mathcal{K}^{(a)}, d_{\mathcal{K}})$ 中的 Cauchy 列并且等度连续, 则其也为 $(\mathcal{K}^{(a)}, d_{\mathcal{X}})$ 中的 Cauchy 列并且极限存在。

记 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_d$ 为 \mathcal{K} 上由度量 d 所诱导的 Borel σ -代数, 由于 $d = d_{\mathcal{X}}$ 和 $d = d_{\mathcal{K}}$ 诱导的拓扑一样, 二者诱导的 Borel σ -代数也一样。我们定义可测空间 $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ 上的测度指 $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ 上的 σ -有限测度。记 $\mathcal{M} (\mathcal{M}_a)$ 为 $\mathcal{K} (\mathcal{K}^{(a)})$ 上的有限测度的集合。如果 $\mu \in \mathcal{M}$ 是一个非零测度, 则可以记

$$\mu = |\mu| \mu^{\#},$$

这里 $|\mu|$ 为总测度, $\mu^{\#}$ 为概率测度 $\mu/|\mu|$ 。如果 $d = d_{\mathcal{X}}$ 或者 $d = d_{\mathcal{K}}$, 定义 \mathcal{M} 上的 Prohorov 度量如下:

$$d(\mu, \nu) := \inf\{\epsilon > 0 : \mu(V) \leq \epsilon + \nu(V^{\epsilon}), \nu(V) \leq \epsilon + \mu(V^{\epsilon}) \text{ for all } V \in \mathcal{G}\},$$

这里 V^{ϵ} 为 V 的 ϵ -邻域, 即 $V^{\epsilon} := \{x \in \mathcal{K} : d(x, V) < \epsilon\}$ 。我们可以验证这是一个度量并且

引理 B.2.

$$||\mu| - |\nu|| \leq d(\mu, \nu) \leq \max\{|\mu|, |\nu|\}, \quad d(\mu, (1 + \epsilon)\nu) \leq \epsilon|\mu|,$$

$$d(\mu, \nu) \leq d((1 + \epsilon)\mu, (1 + \epsilon)\nu) \leq (1 + \epsilon)d(\mu, \nu).$$

因此 $\mu_n \rightarrow \mu$ 当且仅当 $|\mu_n| \rightarrow |\mu|$ 并且 $\mu_n^\# \rightarrow \mu^\#$ 。(如果 μ 为零测度, 则充要条件是 $|\mu_n| \rightarrow 0$ 。) 如果 μ, ν 为 \mathcal{K} 上的概率测度, 并且存在定义在某一个概率空间 (Ω, \mathbb{P}) 并取值于 \mathcal{K} 中的随机变量 X, Y 使得 X 有分布 μ , Y 有分布 ν , 并且

$$\mathbb{P}[d(X, Y) \geq \epsilon] \leq \epsilon.$$

则有 $d(\mu, \nu) < \delta$ 。再者, 对概率测度 μ, ν , $d(\mu, \nu)$ 等于满足 $\mu(V) \leq \epsilon + \nu(V^\epsilon)$ 对任意的 Borel 集合 V 成立的所有的 ϵ 的下确界。这是因为由于 $[K \setminus V^\epsilon]^\epsilon \subset K \setminus V$, 于是由 $\mu(K \setminus V^\epsilon) \leq \nu([K \setminus V^\epsilon]^\epsilon) + \epsilon$ 可得到 $\nu(V) \leq \mu(V^\epsilon) + \epsilon$ 。这是因为

$$\mu(K \setminus V^\epsilon) \leq \nu(K \setminus V) + \epsilon,$$

因此

$$1 - \mu(K \setminus V^\epsilon) \geq 1 - \nu(K \setminus V) - \epsilon.$$

注意到由于 V^ϵ 的定义取决于所用到的度量, 我们得到了两种 Prohorov 度量: d_K, d_X 下面的引理显示二者在 \mathcal{M} 上定义了相同的拓扑。

引理 B.3. 如果 $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}$, 则 $d_X(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ 当且仅当 $d_K(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ 。

证明. 只需对概率测度证明。对两种不同的度量, 我们记 V_X^ϵ 和 V_K^ϵ 来表示 V^ϵ 。由于 $d_X \geq d_K$, $V_X^\epsilon \subset V_K^\epsilon$ 。因此

$$\{\epsilon : \mu(V) \leq \epsilon + \nu(V^\epsilon)\mathcal{K}\} \subset \{\epsilon : \mu(V) \leq \epsilon + \nu(V^\epsilon)\mathcal{X}\}.$$

于是根据定义 $d_K(\mu_n, \mu) \leq d_X(\mu_n, \mu)$ 。

下面证明另一方向。注意到对 $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{\delta > 0} \{\gamma \in \mathcal{K} : \text{osc}(\gamma, \delta) \leq \frac{1}{2^n}\} = \mathcal{K}$$

以及 $\{\gamma \in \mathcal{K} : \text{osc}(\gamma, \delta_1) \leq \frac{1}{2^n}\} \subset \{\gamma \in \mathcal{K} : \text{osc}(\gamma, \delta_2) \leq \frac{1}{2^n}\}$ if $\delta_1 \geq \delta_2$ 。则对任意的 $u > 0$, 存在 $\delta_n(u) > 0$ 使得

$$\mu(\gamma \in \mathcal{K} : \text{osc}(\gamma, \delta_n) \geq \frac{1}{2^n}) \leq \frac{u}{2^n}.$$

我们可以选取 $\delta_n(u)$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\delta_n(u) \downarrow 0$ 。因此对任意的 $u > 0$ 存在一列 $\delta_n(u) \downarrow 0$ 使得

$$\mu[E] = \mu[\gamma \in \mathcal{K} : \text{osc}(\gamma, \delta_n) \geq \frac{1}{2^n} \text{ for some } n] \leq u.$$

取 n 足够大并且 $\epsilon < \delta_n$ 使得 $\epsilon + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}u$, 则如果 $\gamma \in E^C$ and $d_K(\gamma, V) \leq \epsilon$, 由引理B.1 可得

$$d_X(\gamma, V) \leq \epsilon + \text{osc}(\gamma, 2\epsilon) \leq \epsilon + \text{osc}(\gamma, \delta_n) \leq \epsilon + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}u.$$

从而

$$\mu(V_K^\epsilon \setminus V_X^u) = \mu(V_K^\epsilon \setminus V_X^u, E) + \mu(V_K^\epsilon \setminus V_X^u, E^C) = \mu(V_K^\epsilon \setminus V_X^u, E) \leq u.$$

于是我们证明了对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $0 < \epsilon(u) < u$ 使得

$$\mu(V_K^\epsilon \setminus V_X^u) \leq u.$$

选取 n 足够大使得 $d_K(\mu_n, \mu) < \epsilon$, 便可得到

$$\mu_n(V) \leq \mu(V_K^\epsilon) + \epsilon \leq \mu(V_X^u) + \epsilon + u < 2u + \mu(V_X^u),$$

于是 $\text{dist}(\mu, \mu_n) < 2u$ 。 □

由于 $(K^{(a)}, d_X)$ 是一个完备的度量空间, 则 (\mathcal{M}_a, d_X) 也完备。但是 (\mathcal{M}_a, d_K) 不完备。在接下来的讨论中, \mathbb{M} 上的连续函数指在 d_K 下从 \mathbb{M} 到 \mathbb{R} 或者 \mathbb{C} 的连续函数。假定 $t \rightarrow \mu_t$ 为从 $[a, b]$ 到 \mathcal{M} 的连续函数, 我们可以定义如下积分

$$\mu = \int_a^b \mu_t dt.$$

以上积分可以理解为黎曼和的极限。可以证明任何两个黎曼和形成 Cauchy (\mathcal{M}, d_K) 和 (\mathcal{M}, d_X) 中的 Cauchy 列。因此由于 (\mathcal{M}, d_X) 是完备的, 我们知道黎曼和的极限存在, 记为 μ 。同样对从平面上的区域 D 到 \mathcal{M} 的连续函数 $z \rightarrow \mu_z$, 我们也可验证积分

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} \mu_z dA(z)$$

存在。其中 dA 为 Lebesgue 测度, D_n 为一列单调增的区域, 并且收敛到 D 。当然左边的测度可能是一个无穷测度。

B.2 一维布朗溢出测度

在这一节我们主要介绍一位布朗溢出测度, 它在我们接下来要定义的布朗气泡测度中有着很大的作用。

记 \mathcal{X} 为如下曲线的集合: $\gamma: [0, t_\gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ 。令

$$\mathcal{X}_+ := \{\gamma \in \mathcal{X} : \gamma(0, t_\gamma) \subseteq (0, \infty)\}.$$

记

$$\mathcal{X}(x, y) := \{\gamma \in \mathcal{X} : \gamma(0) = x, \gamma(t_\gamma) = y\}.$$

$$\mathcal{X}_+(x, y) := \{\gamma \in \mathcal{X}(x, y) : \gamma(0, t_\gamma) \subseteq (0, \infty)\}.$$

类似于第一小节，我们通过赋予以上集合合适的度量（细节这里不再给出）。记 $\nu(x, \cdot; t)$ 为 \mathcal{X} 上由从 x 出发的一维布朗运动 $(B_s : 0 \leq s \leq t)$ 诱导的概率测度。则 $\nu(x, \cdot; t)$ 可以记作

$$\nu(x, \cdot; t) = \int_{\mathbb{R}} \nu(x, y; t) dy$$

这里 $\nu(x, \cdot; t)$ 是 $\mathcal{X}(x, y)$ 上的测度，并且总测度为 $\sqrt{2\pi t} \exp\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\}$ 。事实上，

$$\nu(x, y; t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}^x(\cdot; B_t \in (y - \delta, y + \delta)).$$

由布朗运动的马尔可夫性质，

$$\nu(x, y; t + s) = \int_{\mathbb{R}} \nu(x, z; t) \oplus \nu(z, y; s) dz$$

称为 **Chapman-Kolmogorov** 等式。

如果 $x, y > 0$ ，定义 $\nu_+(x, y; t)$ 和 $\nu_+(x, y)$ 分别为 $\nu(x, y; t)$ 与 $\nu(x, y)$ 在 $\mathcal{X}_+(x, y)$ 上的限制。由于布朗运动是自反的，那么 $\nu(y, x; t)$ 和 $\nu_+(y, x; t)$ 可由 $\nu(x, y; t)$ 与 $\nu_+(x, y; t)$ 经过时间反转得到。称 $\nu(0, 0; t)$ 为时间长度为 t 的**一维的布朗环测度**。

注意到 $|\nu(0, 0; t)| = 1/\sqrt{2\pi t}$ 。记 $\theta_r : \mathcal{X}(0, 0) \rightarrow \mathcal{X}(0, 0)$ 为时间与空间平移变换，

$$t_{\theta_r(\gamma)} = t_\gamma, \quad \theta_r(\gamma)(t) = \gamma(t + r) - \gamma(r).$$

这里 γ 与 $\theta_r(\gamma)$ 看作是 \mathbb{R} 上以 t_γ 为周期的周期函数。对任意的 r 和任意的 t ， $\nu(0, 0; t)$ 在 $\theta_r(\gamma)$ 的作用下不变。这是因为 $B(t + r) - B(r)$ 与 $B(t)$ 同分布。因此 $\nu(0, 0; t)$ 在 θ_r 作用下不变。

如果 $B_0 = \epsilon > 0$ ，定义事件 V_t 为

$$V_t := \{\omega \in \Omega : B_s(\omega) > 0 \ \forall 0 \leq s \leq t\}.$$

记 $q(\epsilon, y; t) = |\nu_+(\epsilon, y; t)|$ 为 B_t 限制在 V_t 上地密度函数，即

$$\mathbb{P}[V_t] = \int_0^\infty q(\epsilon, y; t) dy.$$

事实上，

$$q(\epsilon, y; t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}^\epsilon\{V_t; B_t \in (y - \delta, y + \delta)\}.$$

当然，很容易看出上面的极限存在。

引理 B.4. 对任意的 $r > 0$,

$$q(\epsilon, y; t) = r \cdot q(r\epsilon, ry; r^2t).$$

证明. 首先, 由布朗运动的尺度不变性知 $\frac{1}{r}B_{r^2t}$ 与 Y_t 有相同的分布, 这里 Y_t 为从 $\frac{\epsilon}{r}$ 出发的布朗运动。因此

$$\begin{aligned} q(\epsilon/r, y; t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}(Y_s > 0, \forall s \in [0, t]; |Y_t - y| \leq \delta) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}(\frac{1}{r}B_{r^2s} > 0, \forall s \in [0, t]; |\frac{1}{r}B_{r^2t} - y| \leq \delta) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}(B_s > 0, \forall s \in [0, r^2t]; |B_{r^2t} - ry| \leq r\delta) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} r \frac{1}{2r\delta} \mathbb{P}(B_s > 0, \forall s \in [0, r^2t]; |B_{r^2t} - ry| \leq r\delta) \\ &= r \cdot q(\epsilon, ry; r^2t). \end{aligned}$$

□

引理 B.5. 以下极限存在:

$$q(y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} q(\epsilon, y; t).$$

事实上, $q(y, t)$ 为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \mathbb{P}^0(B_s > 0, \forall s \in (0, t]; |B_t - y| \leq \delta).$$

引理 B.6.

$$q(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-3/2} y e^{-\frac{y^2}{2t}}. \quad (\text{B.1})$$

事实上, 我们可以证明

$$q(\epsilon, y; t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \left[\exp\left\{-\frac{(\epsilon - y)^2}{2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(\epsilon + y)^2}{2t}\right\} \right].$$

这可以分三步证明:

第一步: 定义过程 B_t^a 如下:

$$B_t^a = \begin{cases} B_t & \text{if } t < T_a \\ 2a - B_t & \text{if } t \geq T_a. \end{cases}$$

这里 $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ 。

由反射定理（参见 [19]）可知 $(B_t^a : t \geq 0)$ 与 $(B_t : t \geq 0)$ 同分布。

第二步: 对 $a \leq b, b > 0$, 我们有

$$\mathbb{P}[S_t > b, B_t < a] = \mathbb{P}[B_t < a - 2b] = \mathbb{P}^{2b}[B_t < a].$$

其中 $S_t := \sup\{B_s : s \in [0, t]\}$ 。

证明. 由第一步知,

$$\mathbb{P}[S_t > b, B_t < a] = \mathbb{P}[B_t^b > 2b - a].$$

这是因为如果 $t < T_b$, 则 $B_t^b = B_t > 2b - a > b$ 。因此 $T_b \leq t$, 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_t^b > 2b - a] &= \mathbb{P}[B_t^b > 2b - a, t < T_b] + \mathbb{P}[B_t^b > 2b - a, t \geq T_b] \\ &= \mathbb{P}[B_t^b > 2b - a, t \geq T_b] = \mathbb{P}[B_t < a, t \geq T_b] = \mathbb{P}[S_t > b, B_t < a]. \end{aligned}$$

由于 B_t^b 与 B_t 同分布,

$$\mathbb{P}[S_t > b, B_t < a] = \mathbb{P}[B_t < a - 2b] = \mathbb{P}^{2b}[B_t < a].$$

□

第三步: 记 $s_t := \inf\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ 。假定布朗运动从 ϵ 出发, 则 $V_t = \{s_t > 0\}$ 。我们需要计算 $\mathbb{P}[s_t > 0, B_t \geq y]$ 。令 $\tilde{B}_t = -B_t$, 由布朗运动的对称性, \tilde{B}_t 是从 $-\epsilon$ 出发的布朗运动。同第二步一样, 定义 $\tilde{S}_t := \sup\{\tilde{B}_s : s \in [0, t]\}$, 则

$$\mathbb{P}[s_t > 0, B_t \geq y] = \mathbb{P}[\tilde{S}_t < 0, \tilde{B}_t \leq -y].$$

由第二步,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tilde{S}_t < 0, \tilde{B}_t \leq -y] &= \mathbb{P}^0[S_t < \epsilon, B_t \leq \epsilon - y] \\ &= \mathbb{P}^0[B_t \leq \epsilon - y] - \mathbb{P}^0[S_t > \epsilon, B_t \leq \epsilon - y] \\ &= \mathbb{P}^0[B_t \leq \epsilon - y] - \mathbb{P}^{2\epsilon}[B_t < \epsilon - y] \\ &= \int_0^{\epsilon-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx - \int_0^{\epsilon-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-2\epsilon)^2}{2t}} dx. \end{aligned}$$

通过对 $\mathbb{P}[s_t > 0, B_t \geq y]$ 关于 y 求导便可得到

$$q(\epsilon, y; t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \left[\exp\left\{-\frac{(\epsilon-y)^2}{2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(\epsilon+y)^2}{2t}\right\} \right].$$

由以上 $q(\epsilon, y; t)$ 的确切表达式便可得到

$$q(y, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(\epsilon, y; t)}{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

对任意的 $x > 0$, 令 $\nu_+(x, 0)$ 为由 $(B_t : 0 \leq t \leq \tau)$ 诱导的测度, 这里 $B_0 = x$, $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}$ 为第一次碰到 0 的时间。

注意到 $\nu_+(x, 0)$ 的支集包含在 $\mathcal{X}_+(x, 0)$ 中。 $\nu_+(x, 0)$ 还可以写作,

$$\nu_+(x, 0) = \int_0^\infty \nu_+(x, 0; t) dt,$$

其中 ν 为支撑在 $\{\gamma \in \mathcal{X}_+(x, 0) : t_\gamma = t\}$ 上的测度。事实上, 我们有

引理 B.7.

$$|\nu_+(x, 0; t)| = \mathbb{P}^x[\tau = t] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

即 $|\nu_+(x, 0; t)|$ 是 τ 的密度函数。

证明. 我们欲计算 $\mathbb{P}^x[\tau < t]$ 。注意到 $\tau < t$ 当且仅当 $s_t \leq 0$ 当且仅当 $S_t \geq 0$ 对从 $-x$ 出发的布朗运动成立。

$$\mathbb{P}^{-x}[S_t > 0] = \mathbb{P}^0[S_t > x].$$

事实上, 由于 $B_{T_x} = x$,

$$\mathbb{P}^0[S_t \geq x, B_t < x] = \mathbb{P}^0[T_x \leq t, B_{T_x+(t-T_x)} - B_{T_x} < 0].$$

又因为 $B_{s+T_x} - B_{T_x}$ 为与 \mathcal{F}_{T_x} 独立的布朗运动, 我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^0[T_x \leq t, B_{T_x+(t-T_x)} - B_{T_x} < 0] \\ &= \mathbb{P}^0[T_x \leq t] \mathbb{P}^0[B_{T_x+(t-T_x)} - B_{T_x} < 0] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}^0[T_x \leq t]. \end{aligned}$$

于是 $\mathbb{P}^0[S_t \geq x, B_t < x] = \frac{1}{2} \mathbb{P}^0[S_t \geq x]$ 。结合以下事实

$$\mathbb{P}^0[S_t \geq x] = \mathbb{P}^0[B_t \geq x] + \mathbb{P}^0[S_t \geq x, B_t < x],$$

可知

$$\mathbb{P}^x[\tau < t] = \mathbb{P}^0[S_t \geq x] = 2\mathbb{P}^0[B_t \geq x] = 2 \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy.$$

对 $2 \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ 关于 t 求导数便可得到 τ 的密度函数为

$$|\nu_+(x, 0; t)| = \mathbb{P}^x[\tau = t] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (\text{B.2})$$

□

固定 $x > 0$, 定义 $\nu_+(0, x; t)$ 为

$$\nu_+(0, x; t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \nu_+(\epsilon, x; t).$$

注意到 $|\nu_+(\epsilon, x; t)| = q(\epsilon, x; t)$, 因此 $|\nu_+(0, x; t)| = q(x, t)$ 。于是 $\nu_+(0, x; t) = 2\nu_+(x, 0; t)$. 定义

$$\nu_+(0, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \nu_+(\epsilon, x) = \int_0^\infty \nu_+(0, x; t) dt.$$

便有

$$\nu_+(0, x) = 2\nu_+(x, 0), \quad |\nu_+(0, x)| = 2|\nu_+(x, 0)| = 2.$$

一维的布朗溢出测度 可定义如下:

$$\nu_+(0, 0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \nu_+(\epsilon, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \nu_+(0, \epsilon). \quad (\text{B.3})$$

$\nu_+(0, 0)$ 是一个支集为 $\mathcal{X}(0, 0)$ 的 σ -有限测度。对任意的 $x > 0$, 由 gambler's ruin (参见 [19]) 可得到

$$\nu_+(0, 0)[\gamma : \gamma \cap [x, \infty) \neq \emptyset] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}^\epsilon[B_t \text{ hits } x \text{ before } 0] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\epsilon}{x} = \frac{1}{x}.$$

并且

$$\nu_+(0, 0)[\gamma : t_\gamma \geq t] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}^\epsilon[\tau \geq t] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} 2 \int_0^{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}. \quad (\text{B.4})$$

$\nu_+(0, 0)$ 在集合 $\{\gamma : t_\gamma \geq t\}$ 上的限制为

$$\int_0^\infty \nu_+(0, x; t) \oplus \nu_+(x, 0) dx,$$

其总测度为

$$\int_0^\infty |\nu_+(0, x, t)| dx = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

定义 $\nu_{+,t}(0, 0)$ 为 $\nu_+(0, 0)$ 在介于 t 和 t_γ 之间的路径上的限制。换句话说, 定义如下映射

$$\pi_t : \{\gamma \in \mathcal{X}(0, 0) : t_\gamma \geq t\} \rightarrow \{\gamma \in \mathcal{X} : \gamma(t_\gamma) = 0\}$$

其中 $\pi_t(\gamma) = \gamma|_{[t, t_\gamma]}$, 则 $\nu_{+,t}(0, 0) = \pi_t^*(\nu_+(0, 0))$ 。这里 $\pi_t^*(\nu_+(0, 0))$ 为 $\nu_+(0, 0)$ 在映射 π_t^* 作用下的像。我们可以得到

$$\nu_{+,t} = \int_0^\infty |\nu_+(0, x, t)| \nu_+(x, 0) dx = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} \nu_+(x, 0) dx.$$

也可记作

$$\nu_+(0, 0) = \int_0^\infty \nu_+(0, 0; t) dt$$

其中 $\nu_+(0, 0; t)$ 定义如下

$$\nu_+(0, 0; t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \nu_+(\epsilon, 0; t).$$

也可证明

$$\nu_+(0, 0; t + s) = \int_0^\infty \nu_+(0, x; t) \oplus \nu_+(x, 0; s) dx. \quad (\text{B.5})$$

这是因为根据布朗运动的马尔科夫性质,

$$\nu_+(\epsilon, 0; t + s) = \int_0^\infty \nu_+(\epsilon, x; t) \oplus \nu_+(x, 0; s) dx.$$

除以 ϵ , 令 $\epsilon \rightarrow 0$ 便可得到 (B.5)。结合 (B.2) 有

$$|\nu_+(0, 0; t)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} |\nu_+(\epsilon, 0; t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}}. \quad (\text{B.6})$$

根据 (B.5), (B.2) and (B.1) 有

$$\begin{aligned} |\nu_+(0, 0; t + s)| &= \int_0^\infty |\nu_+(0, x; t)| |\nu_+(x, 0; s)| dx \\ &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-3/2} x e^{-\frac{x^2}{2t}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} s^{-\frac{3}{2}} x e^{-\frac{x^2}{2s}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t + s)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

我们可以看到这与 (B.6) 相对应。同时在 $\nu_+(0, 0)$ 下, 集合 $\{\gamma \in \mathcal{X}(0, 0) : t_\gamma \geq t\}$ 的测度为

$$\int_t^\infty |\nu_+(0, 0; s)| ds = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-\frac{3}{2}} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

这与 (B.4) 对应。

记 $\mathcal{X}^*(0, 0)$ 为如下集合

$\{\gamma \in \mathcal{X}(0, 0) : \text{存在唯一的 } t_\gamma^- \in [0, t_\gamma] \text{ 使得 } \gamma(t) > \gamma(t_\gamma^-) \text{ 对任意的 } t \in [0, t_\gamma] \setminus \{t_\gamma^-\} \text{ 成立}\}.$

则 $\nu(0, 0)$ 的支集为 $\mathcal{X}^*(0, 0)$ 。对任意的 $\epsilon > 0$, 定义 $T_\epsilon : \mathcal{X}^*(0, 0) \rightarrow [0, \infty)$ 如下

$$T_\epsilon(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{t_\gamma} & \text{if } t_\gamma < \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} 1_{\{t_\gamma^- < \epsilon\}} & \text{if } t_\gamma \geq \epsilon. \end{cases}$$

注意到对任意的 $\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0)$,

$$\int_0^{t_\gamma} T_\epsilon(\theta_t(\gamma)) dr = 1. \quad (\text{B.7})$$

定义测度 $\nu^\epsilon(0, 0; t)$ 如下:

$$\frac{d\nu^\epsilon(0, 0; t)}{d\nu(0, 0; t)}(\gamma) = T_\epsilon(\gamma).$$

即 $\nu^\epsilon(0, 0; t)$ 关于 $\nu(0, 0; t)$ 的 Radon- Nikodym 导数为 $T_\epsilon(\gamma)$ 。则由 (B.7) 和 $\nu(0, 0; t)$ 在映射 θ_r 下的不变性可得

$$\begin{aligned} |\nu^\epsilon(0, 0; t)| &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) \int_0^\infty 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} dr \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \int_0^\infty \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\gamma) dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\theta_r(\gamma)) dr \\ &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} \int_0^\infty T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} dr \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} \int_0^{t_\gamma} T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) dr \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X}^*(0, 0): t_\gamma = t\}} \frac{1}{t} \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\ &= \frac{1}{t} |\nu(0, 0; t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

其中第四个等式用到了 $\nu(0, 0; t)$ 在 θ_r 下的不变性。

引理 B.8.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu^\epsilon(0, 0; t) = \nu_+(0, 0; t).$$

只需注意到首先 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\nu^\epsilon(0, 0; t)| = |\nu_+(0, 0; t)|$ 。其次 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu^\epsilon(0, 0; t)$ 的支集是那些除了端点处均大于零的曲线的集合。接下来, 我们将要证明如何用一维的布朗溢出测度来描述溢出测度 $\mu_{\mathbb{H}}(0)$ 。首先

$$\mu_{\mathbb{H}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}}(0, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}}(0, x; t) dt dx.$$

测度 $\mu_{\mathbb{H}}(0, x; t)$ 支撑在集合 $\mathcal{K}_0^x(\mathbb{H}) \cap \{t_\gamma = t\}$ 上并且可以表达为

$$\mu_{\mathbb{H}}(0, x; t) = \nu(0, x; t) \times \nu_+(0, 0; t). \quad (\text{B.8})$$

因此有

$$\mu_{\mathbb{H}}(0, x) = \int_0^\infty \nu(0, x; t) \times \nu_+(0, 0; t) dt.$$

这里需要注意我们**不能**表达为

$$\mu_{\mathbb{H}}(0, x) = \nu(0, x) \times \nu_+(0, 0),$$

这是因为我们要保证 x -坐标和 y -坐标随着时间同时变化。注意到

$$|\mu_{\mathbb{H}}(0, x; t)| = |\nu(0, x; t)| \times |\nu_+(0, 0; t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\pi t^2} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

于是 Poisson 核 $H_{\mathbb{H}}(0, x)$ 为

$$H_{\mathbb{H}}(0, x) = \int_0^\infty |\mu_{\mathbb{H}}(0, x; t)| dt = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi t^2} e^{-\frac{x^2}{2t}} dt = \frac{1}{\pi x^2}.$$

B.3 布朗气泡

布朗气泡 (\mathbb{H} 上位于 0 处) 是一个定义在 $\{\gamma \in \mathcal{K} : \gamma(0) = 0, \gamma(t_\gamma) = 0\}$ σ -有限测度。它有很多种定义方法, 下面是一种:

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) := \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi \mu_{\mathbb{H}}(0, x). \quad (\text{B.9})$$

这里需要使上面的极限有意义。取 $r > 0$, 记 $\mu_{\mathbb{H}}(0, x; r)$ 为 $\mu_{\mathbb{H}}(0, x)$ 在那些与 $\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}$ 相交的曲线上的限制。定义

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; r) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi \mu_{\mathbb{H}}(0, x; r). \quad (\text{B.10})$$

注意到

$$\mu_{\mathbb{H}}(0, x; r) = r \int_0^\pi \mu_{r\mathbb{D}^+}(0, re^{i\theta}) \oplus \mu_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, x) d\theta,$$

于是

$$\begin{aligned} |\mu_{\mathbb{H}}(0, x; r)| &= r \int_0^\pi |\mu_{r\mathbb{D}^+}(0, re^{i\theta})| |\mu_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, x)| d\theta \\ &= r \int_0^\pi \frac{2}{\pi r^2} \sin \theta \cdot \frac{1}{\pi} \frac{r \cos \theta}{(r \sin \theta - x)^2 + r^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

因此 $|\mu_{\mathbb{H}}(0, x; r)|$ 一致有界, (B.10) 中的极限存在。同时

$$\begin{aligned} |\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; r)| &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi r \int_0^\pi \frac{2}{\pi r^2} \sin \theta \cdot \frac{1}{\pi} \frac{r \sin \theta}{(r \sin \theta - x)^2 + r^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^\pi 2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; r) = \pi r \int_0^\pi \mu_{r\mathbb{D}^+}(0, re^{i\theta}) \oplus \mu_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, 0) d\theta.$$

我们也可以如下表达：

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{\epsilon} \mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2\epsilon^2} \mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, \epsilon i). \quad (\text{B.11})$$

第一个等式是因为 $\mu_{\mathbb{H}}(0, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, x)$ 。第二个等式是因为对任意的 $r > 0$,

$$|\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, \epsilon i; r)| = 2\epsilon |\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, 0; r)|.$$

另一个验证 (B.11) 的方法是将这些测度限制在与 $\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}$ 相交的曲线上，再验证限制后的测度一样。因此，我们只需验证

$$[\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; r)]^{\#} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, 0; r)]^{\#} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, \epsilon i; r)]^{\#}.$$

而这是显然的。我们还需验证当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时，

$$\begin{aligned} |\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, 0; r)| &= r \int_0^{\pi} H_{r\mathbb{D}^+}(\epsilon i, re^{i\theta}) \cdot H_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, 0) d\theta \\ &= r \int_0^{\pi} \frac{2\epsilon}{\pi r^2} \sin \theta [1 + O(\frac{\epsilon}{r})] \frac{\sin \theta}{r\pi} d\theta \\ &\asymp \frac{\epsilon}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} |\mu_{\mathbb{H}}(\epsilon i, \epsilon i; r)| &= r \int_0^{\pi} H_{r\mathbb{D}^+}(\epsilon i, re^{i\theta}) \cdot H_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, \epsilon i) d\theta \\ &= r \int_0^{\pi} \frac{2\epsilon}{\pi r^2} \sin \theta [1 + O(\frac{\epsilon}{r})] G_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, \epsilon i) d\theta \\ &= r \int_0^{\pi} \frac{2\epsilon}{\pi r^2} \sin \theta [1 + O(\frac{\epsilon}{r})] \frac{2\epsilon \sin \theta}{\pi r} [1 + O(\frac{\epsilon}{r})] d\theta \\ &\asymp \frac{2\epsilon^2}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

由 (B.8),

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \pi \int_0^{\infty} [\nu(0, 0; t) \times \nu_+(0, 0; t)] dt.$$

这里 $\nu(0, 0; t)$ 和 $\nu_+(0, 0; t)$ 为定义的一维布朗环测度 (参见小节B.2)。特别地，由 (B.6)， $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)$ 限制在 $t_{\gamma} \geq t$ 的曲线上的总测度为：

$$\pi \int_t^{\infty} |\nu(0, 0; s)| |\nu_+(0, 0; s)| ds = \pi \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-\frac{3}{2}} ds = \frac{1}{2t}. \quad (\text{B.12})$$

给定一个 C^3 函数 f ，其 **Schwarzian derivative** 定义为

$$Sf(z) = \left[\frac{f''(z)}{f'(z)} \right]' - \frac{1}{2} \left[\frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2$$

假定 D 是 \mathbb{H} 上的单连通域, 并且存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\epsilon\mathbb{D}^+ \subset D$ 。对任意的 $0 < r < \epsilon$,

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)\{\gamma : \gamma(0, t_\gamma) \not\subset D\} = \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; r)\{\gamma : \gamma(0, t_\gamma) \not\subset D\} < \infty. \quad (\text{B.13})$$

性质 B.1. D 是 \mathbb{H} 上的单连通域, 并且存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\epsilon\mathbb{D}^+ \subset D$ 。 f 为 D 到 \mathbb{H} 的共形映射并且 $f(0) = 0$ 。记 A 为 $\mathbb{H} \setminus D$ 在 $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ 下的向。则

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)\{\gamma : \gamma(0, t_\gamma) \not\subset D\} = \text{hcap}(A) = -\frac{1}{6}Sf(0). \quad (\text{B.14})$$

这里 $\text{hcap}(A)$ 是 A 的容量。

证明. 不失一般性, 假定 $f'(0) = 1$ (否则令 $\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$)。注意到 $\phi(z) := -\frac{1}{z}$ 是从 $\mathbb{H} \setminus A$ 到 \mathbb{H} 的共形映射, 并且 $\phi(\infty) = \infty, \phi'(\infty) = 1$ 。于是存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(z) = -\frac{1}{g_A(-1/z) + x}.$$

这里 g_A 是与 A 对应的正则映射。 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)$ 在 ϕ 下的像是 ∞ 处的布朗气泡 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty)$ 。由引理 B.10

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)\{\gamma : \gamma(0, t_\gamma) \not\subset D\} = \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty)\{\gamma : \gamma \cap A \neq \emptyset\} = \text{hcap}(A).$$

由于当 $z \rightarrow \infty$ 时, $g_A(z) = z + \text{hcap}(A)/z + O(|z|^{-2})$ 。则

$$f(z) = z + xz^2 + (x^2 - \text{hcap}(A))z^3 + \dots,$$

即 $f''(0) = 2x, f'''(0) = 6[x^2 - \text{hcap}(A)]$ 。因此 $Sf(0) = -6 \text{hcap}(A)$ 。 \square

引理 B.9.

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\text{Im}(z)} \mu_{\mathbb{H}}(z, 0) |dz|. \quad (\text{B.15})$$

证明. 对任意的 $r > 0$, 我们只需验证

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\text{Im}(z)} \mu_{\mathbb{H}}(z, 0) |dz| [\gamma : \gamma \cap (\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}^+) \neq \emptyset] = \frac{1}{r^2}.$$

事实上, 首先

$$\begin{aligned} & \mu_{\mathbb{H}}(z, 0) [\gamma : \gamma \cap (\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}^+) \neq \emptyset] \\ &= r \int_0^\pi |\mu_{r\mathbb{D}^+}(z, re^{i\theta})| |\mu_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, 0)| d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{\text{Im}(z)}{r} \sin \theta [1 + O(|z|/r)] \cdot \frac{\sin \theta}{\pi r} d\theta \\ &\asymp \frac{\text{Im}(z)}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\text{Im}(z)} \mu_{\mathbb{H}}(z, 0) |dz| [\gamma : \gamma \cap (\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}^+) \neq \emptyset] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\text{Im}(z)} \mu_{\mathbb{H}}(z, 0) [\gamma : \gamma \cap (\mathbb{H} \setminus r\mathbb{D}^+) \neq \emptyset] |dz| \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\text{Im}(z)} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{\text{Im}(z)}{r} \sin \theta [1 + O(|z|/r)] \cdot \frac{\sin \theta}{\pi r} d\theta d|z| \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\pi r^2} d|z| \\
&= \frac{1}{r^2}.
\end{aligned}$$

□

由B.9可得

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|z|^2} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(z, 0) |dz|.$$

结合 $\mu_{\mathbb{H}}^{\#}(z, 0)$ 的共形不变性便得到

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty) &:= \phi(\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|z|^2} \phi(\mu_{\mathbb{H}}^{\#}(z, 0)) |dz| \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{|z-i\epsilon|=\epsilon} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|z|^2} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(-1/z, \infty) |dz| \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\epsilon^2(1+\sin \theta)} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}\left(-\frac{1}{\epsilon(i+e^{i\theta})}, \infty\right) \epsilon d\theta.
\end{aligned}$$

记 $x + iy = -\frac{1}{i\epsilon + \epsilon e^{i\theta}}$, 这里 $\epsilon > 0, \theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 。则有

$$x = -\frac{y \cos \theta}{1 + \sin \theta}, \quad y = \frac{1}{2\epsilon}.$$

从而

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1 + \sin \theta}{y}.$$

利用此变量替换

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\epsilon^2(1+\sin \theta)} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}\left(-\frac{1}{\epsilon(i+e^{i\theta})}, \infty\right) \epsilon d\theta \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{y} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(x + iy, \infty) dx \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(x + iy, \infty) dx \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{exc}}(x + iy) dx.
\end{aligned}$$

这里 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{exc}}(x + iy) = \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(x + iy, \infty)$ 为从 $x + iy$ 出发的 \mathbb{H} -**溢出测度**。这个测度由过程 $Z_t = B_t + iW_t$ 诱导, 其中 B_t 为从 x 出发的 3- 维 Bessel 过程, W_t 为从 y 出发的 1- 维标准布朗运动。

为什么 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{exc}}(x+iy) = \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(x+iy, \infty)$? 这是因为 $\mu_{\mathbb{H}}^{\#}(x+iy, \infty)$ 是由从 $x+iy$ 出发的 2-维布朗运动限制在上半平面上得到的, 而这恰与 $X_t = B_t + iW_t$ 同分布。

引理 B.10. 对任意的 \mathbb{H} 上的紧致包,

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty)[\gamma : \gamma \cap A \neq \emptyset] = \text{hcap}(A).$$

证明. 首先我们需要计算 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{exc}}(x+iy)[\gamma : \gamma \cap A \neq \emptyset]$. 可以如下得到:

记 $\Phi = \Phi_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ 使得 $\Phi(\infty) = \infty$ 并且 $\Phi'_A(\infty) = 1$. 假定 W 为二维的布朗运动, Z 是 \mathbb{H} -溢出. 二者均从 $z = x+iy \in \mathbb{H} \setminus A$ 出发. 当 $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$ 时, $\text{Im}(\Phi^{-1}(z)) = \text{Im}(z) + o(1)$. 因此当 R 足够大时, 从 $z \in \mathcal{I}_R := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = R\}$ ($z \in \Phi^{-1}(\mathcal{I}_R)$) 出发的布朗运动会以足够大的概率碰到 $\Phi^{-1}(\mathcal{I}_R)$ (\mathcal{I}_R) before \mathbb{R} . 由布朗运动的强马尔可夫性质可得当 $R \rightarrow \infty$ 时

$$\mathbb{P}[W \text{ hits } \mathcal{I}_R \text{ before } A \cup \mathbb{R}] \sim \mathbb{P}[W \text{ hits } \Phi^{-1}(\mathcal{I}_R) \text{ before } A \cup \mathbb{R}].$$

由于 $\Phi \circ W$ 也是布朗运动 (重新参数化), $\Phi : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$. 上式得右边等于从 $\Phi(z)$ 出发的布朗运动先于 \mathbb{R} 碰到 \mathcal{I}_R 的概率, 此概率为 $\text{Im}(\Phi(z))/R$. 于是当 $R \rightarrow \infty$ 足够大时.

$$\mathbb{P}[Z \text{ hits } \mathcal{I}_R \text{ before } A] = \frac{\mathbb{P}[W \text{ hits } \mathcal{I}_R \text{ before } A \cup \mathbb{R}]}{\mathbb{P}[W \text{ hits } \mathcal{I}_R \text{ before } \mathbb{R}]} = \frac{\text{Im}[\Phi(z)]}{\text{Im}(z)} + o(1)$$

取极限 $R \rightarrow \infty$ 便得到

$$\mathbb{P}[Z \subset \mathbb{H} \setminus A] = \frac{\text{Im}[\Phi(z)]}{\text{Im}(z)} = \frac{\text{Im}[g_A(z)]}{\text{Im}(z)}. \quad (\text{B.16})$$

由于

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{exc}}(x+iy) dx.$$

结合(B.16) 我们可得到

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(\infty)[\gamma : \gamma \cap A \neq \emptyset] &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 - \frac{\text{Im}[g_A(x+iy)]}{y}) dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{hcap}(A)}{x^2+y^2} dx = \text{hcap}(A). \end{aligned}$$

□

给定区域 D (不需要单连通), $z \in \partial D$. 假定 ∂D 在 z 附近光滑. 则可以定义 $\mu_D^{\text{bub}}(z)$ 如下:

$$\mu_D^{\text{bub}}(z) = \pi \lim_{w \rightarrow z} \mu_D(w, z).$$

假定 $f : \mathbb{H} \rightarrow D$ 为一个共形映射满足 $f(0) = z$ 并且 f 可以解析扩充到 $B(0, \delta)$, 对某个 $\delta > 0$. 则对任意的 $x \in (-\delta, \delta)$,

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}(x, 0) = |f'(x)| |f'(0)| \mu_D(f(x), f(0)).$$

令 $x \rightarrow 0$ 可得

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) = |f'(0)|^2 \mu_D^{\text{bub}}(z). \quad (\text{B.17})$$

布朗气泡也满足限制限制: 如果 $D \subset \mathbb{H}$ 满足 B.1 的条件, 则 $\mu_D^{\text{bub}}(0)$ 是 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)$ 在 $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$ 的限制。性质 B.1 也可以叙述为

$$|\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) - \mu_D^{\text{bub}}(0)| = -\frac{1}{6} S f(0).$$

注记 B.1. 假定 V_n 为一列 \mathbb{H} -紧致包, 满足 $\text{rad}(V_n) \rightarrow 0$. 令 $h_n = \text{hcap}(V_n)$, $r_n = \text{rad}(V_n)$. 由上半平面的 *Loewner* 理论知, 存在常数 c 使得对所有的 $|z| \geq \frac{1}{2}$ 以及满足 $r_n \leq \frac{1}{4}$ 的 n 有

$$|g_{V_n}(z) - z - \frac{h_n}{z}| \leq c h_n r_n.$$

由 *Schwarz* 反射原理, $g_{V_n}(z)$ 可以解析扩充到 $\{z : |z| \geq r_n\}$ 上。对 $p_n(z) := g_{V_n}(z) - z - \frac{h_n}{z}$ 利用 *Cauchy* 积分公式, 可知对足够小的 ϵ ,

$$p'_n(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-1|=\epsilon} \frac{p_n(\zeta)}{1-\zeta} d\zeta = O(h_n r_n).$$

$$p''_n(1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-1|=\epsilon} \frac{p_n(\zeta)}{(1-\zeta)^2} d\zeta = O(r_n h_n).$$

$$p'''_n(1) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-1|=\epsilon} \frac{p_n(\zeta)}{(1-\zeta)^3} d\zeta = O(r_n h_n).$$

于是

$$g'_{V_n}(1) = 1 - h_n + O(r_n h_n), \quad g''_{V_n}(1) = 2h_n + O(r_n h_n)$$

$$g'''_{V_n}(1) = -6h_n + O(r_n h_n).$$

因此

$$|\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(1; V_n)| = -\frac{1}{6} S g_{V_n}(1) = h_n + O(r_n h_n),$$

其中 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(1; V_n)$ 为 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(1)$ 在与 V_n 相交的曲线上的限制。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(1; V_n) = \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(1; 0) \oplus \mu_{\mathbb{H}}^{\#}(0; 1) = \pi^2 \mu_{\mathbb{H}}(1; 0) \oplus \mu_{\mathbb{H}}(0; 1).$$

给定 $f: \mathbb{H} \rightarrow D$ 为一个共形映射, 满足 $f(0) = 0, f(1) = w$ 。假定 f 可解析扩充到 0 和 1 的邻域。如果 $W_n = f(V_n)$, 则 $hcap(W_n) \sim |f'(0)|^2 h_n$ as $n \rightarrow \infty$ 。同时,

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}^{bub}(1; V_n) = |f'(1)|^2 \mu_D^{bub}(z; W_n),$$

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}(1, 0) = |f'(0)| |f'(1)| \mu_D(z, 0),$$

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}(0, 1) = |f'(0)| |f'(1)| \mu_D(0, z)$$

从而我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{hcap(W_n)} \mu_D^{bub}(z; W_n) &= \frac{1}{|f'(0)|^2} \frac{1}{|f'(1)|^2} \pi^2 f \circ \mu_{\mathbb{H}}(1; 0) \oplus \mu_{\mathbb{H}}(0; 1) \\ &= \pi^2 \mu_D(z; 0) \oplus \mu_D(0; z). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

布朗气泡也可由布朗溢出测度给出: 记

$$\mathbb{H}_r = \mathbb{H} \cap \{\text{Im}(z) < r\}, \mathbb{H}^s = \mathbb{H} \cap \{\text{Im}(z) > s\}, \mathbb{H}_r^s = \mathbb{H}_r \cap \mathbb{H}^s.$$

由平面布朗运动的性质可知, $\mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0)$ 的支集包含在如下曲线组成的集合中: 存在唯一的 t_γ^+ 使得 $\text{Im}(\gamma(t)) < \text{Im}(\gamma(t_\gamma^+))$ 对任意的 $t \in [0, t_\gamma] \setminus t_\gamma^+$ 。(这等价于说一维的布朗桥有唯一的最大值)。将 $\gamma[0, t_\gamma]$ 分解为 $\gamma[0, t_\gamma^+]$ 和 $\gamma[t_\gamma^+, t_\gamma]$, 可得到

性质 B.2.

$$\mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0) = \pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0)] dx dy. \quad (\text{B.19})$$

证明. 对任意的 $z \in \mathbb{H}$,

$$\mu_{\mathbb{H}}(z, 0) = \int_{\text{Im}(z)}^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_y}(z, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) dx dy.$$

以及

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu_{\mathbb{H}_y}(i\epsilon, x + iy) = \mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy).$$

于是根据 (B.11) 可得到

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{\epsilon} \int_\epsilon^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_y}(i\epsilon, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) dx dy \\ &= \pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0)] dx dy. \end{aligned}$$

□

性质 B.3.

$$\mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0) = \pi \int_0^\infty \int_{\partial(r\mathbb{D}^+)} [\mu_{r\mathbb{D}^+}(0, z) \oplus \mu_{r\mathbb{D}^+}(z, 0)] |dz|. \quad (\text{B.20})$$

证明. 由于对任意的 $z \in \mathbb{H}$,

$$\mu_{\mathbb{H}}(z, 0) = \int_{|z|}^{\infty} \int_0^{\pi} r \mu_{r\mathbb{D}^+}(z, re^{i\theta}) \oplus \mu_{r\mathbb{D}^+}(re^{i\theta}, 0) d\theta dr.$$

以及

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu_{r\mathbb{D}^+}(i\epsilon, re^{i\theta}) = \mu_{r\mathbb{D}^+}(0, re^{i\theta}).$$

结合 (B.11) 可知

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{\epsilon} \int_{\epsilon}^{\infty} \int_0^{\pi} r \mu_{r\mathbb{D}^+}(i\epsilon, re^{i\theta}) \oplus \mu_{r\mathbb{D}^+}(re^{i\theta}, 0) d\theta dr \\ &= \pi \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} r \mu_{r\mathbb{D}^+}(0, re^{i\theta}) \oplus \mu_{r\mathbb{D}^+}(re^{i\theta}, 0) d\theta dr. \end{aligned}$$

□

最后, 我们介绍另外一种构造 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)$ 的方法. 记 \mathcal{X} 为满足如下条件的曲线的集合: 存在唯一的 $t_{\gamma}^{-} \in [0, t_{\gamma})$, 使得 $\text{Im}(\gamma(t_{\gamma}^{-})) < \text{Im}(\gamma(t))$ for $t \in [0, t_{\gamma}] \setminus \{t_{\gamma}^{-}\}$.

由布朗运动的性质, $\mu(0, 0)$ 的支集包含在 \mathcal{X} 中. 对任意的 $\epsilon > 0$, 定义 $T_{\epsilon} : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ 如下:

$$T_{\epsilon}(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{t_{\gamma}} & \text{if } t_{\gamma} < \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} 1_{\{t_{\gamma}^{-} < \epsilon\}} & \text{if } t_{\gamma} \geq \epsilon. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

注意到对任意的 $\gamma \in \mathcal{X}$,

$$\int_0^{t_{\gamma}} T_{\epsilon}(\theta_t(\gamma)) dt = 1. \quad (\text{B.22})$$

定义 $\nu^{\epsilon}(0, 0)$ 为

$$\frac{d\nu^{\epsilon}(0, 0)}{d\nu(0, 0)}(\gamma) = T_{\epsilon}(\gamma).$$

即 $\nu^{\epsilon}(0, 0)$ 关于 $\mu(0, 0)$ 的 Radon- Nikodym 导数是 $T_{\epsilon}(\gamma)$. 这里 $\mu(0, 0; t)$ 支撑在满足 $t_{\gamma} = t$ 的曲线上并且 $|\mu(0, 0; t)| = \frac{1}{2\pi t}$. 于是我们有

$$\nu^{\epsilon}(0, 0) = \int_0^{\infty} \nu^{\epsilon}(0, 0; t) dt,$$

其中 $\nu^{\epsilon}(0, 0; t)$ 支撑在满足 $t_{\gamma} = t$ 的曲线上并且

$$\frac{d\nu^{\epsilon}(0, 0; t)}{d\mu(0, 0; t)}(\gamma) = T_{\epsilon}(\gamma).$$

于是

$$|\mu^{\epsilon}(0, 0; t)| = \frac{1}{2\pi t^2}.$$

这是因为 (B.22) 以及 $\mu(0, 0; t)$ 在 θ_r 下的不变性。于是

$$\begin{aligned}
|\nu^\epsilon(0, 0; t)| &= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) \mu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) \int_0^\infty 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} dr \mu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \int_0^\infty \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\gamma) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} \mu(0, 0; t)(d\gamma) dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} \frac{1}{t_\gamma} \mu(0, 0; t)(d\theta_r(\gamma)) dr \\
&= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} \int_0^\infty T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) 1_{\{0 \leq r \leq t_\gamma\}} dr \frac{1}{t_\gamma} \mu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} \int_0^{t_\gamma} T_\epsilon(\theta_r(\gamma)) dr \frac{1}{t_\gamma} \mu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} \frac{1}{t_\gamma} \nu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \int_{\{\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma = t\}} \frac{1}{t} \mu(0, 0; t)(d\gamma) \\
&= \frac{1}{t} |\nu(0, 0; t)| = \frac{1}{2\pi t^2}.
\end{aligned}$$

从而

$$\nu^\epsilon(0, 0)[\gamma \in \mathcal{X} : t_\gamma \geq t] = \int_t^\infty |\nu^\epsilon(0, 0; s)| ds = \frac{1}{2\pi t}.$$

注意到当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\mu^\epsilon(0, 0)$ 支撑在集合 $\{\gamma \in \mathcal{X} : \gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}\}$ 上, 结合 (B.12) 可知

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi \nu^\epsilon(0, 0) = \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0).$$

如果令 $\nu^\epsilon(\delta)$ 为 $\nu^\epsilon(0, 0)$ 在满足 $t_\gamma \geq \delta$ 的曲线上的限制, 则对固定的 $\delta > 0$, 当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, $\nu^\epsilon(\delta)$ 趋近于 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0)$ 限制在满足 $t_\gamma \geq \delta$ 的曲线上。

B.4 环测度

在这一小节, 我们将定义布朗环测度 μ_D^{loop} 。这是一个定义在区域 D 上的所有环路组成的空间上的 σ -有限测度, 并且满足限制性和共形不变性。限制性是说如果 $D' \subset D$, 则 $\mu_{D'}^{\text{loop}}$ 等于 μ_D^{loop} 在包含在 D' 中的环路上的限制。于是只需定义 $\mu^{\text{loop}} = \mu_{\mathbb{C}}^{\text{loop}}$ 。给定环路 $\gamma[0, t_\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$, 称 $\gamma(0) = \gamma(t_\gamma)$ 为 γ 的 **根**。定义 $\tilde{\mathcal{C}}$ 为 \mathbb{C} 上的所有带根环路的集合。给定带根环路 γ_1 和 γ_2 , 如果 $t_{\gamma_1} = t_{\gamma_2}$ 并且存在常数 r 使得 $\gamma_1 = \theta_r(\gamma_2)$, 则称 γ_1 和 γ_2 等价。这里 θ_r 定义为 $\theta_r(\gamma)(t) = \gamma(r+t)$, 其中 $\tilde{\mathcal{C}}$ 中的环路看成如下函数: $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t+t_\gamma) = \gamma(t)$ 。记 $\tilde{\mathcal{C}}_U$ 为 \mathbb{C} 上的所有带根环路的等价类的集合, 称 $\tilde{\mathcal{C}}_U$ 中的元素为无根环路。

定义 B.1. 如果可测函数 $T : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow [0, \infty)$ 满足对任意的 $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$,

$$\int_0^{t_\gamma} T(\theta_r(\gamma)) dr = 1.$$

称 T 单位权。

定义 B.2. 带根布朗环测度定义为

$$\mu_D := \int_D \mu_D(z, z) dA(z)$$

这里 $dA(z)$ 为 D 上的 Lebesgue 测度。 μ_D 可以看作定义在位于 D 中的所有带根环路组成的空间 (记为 $\tilde{\mathcal{C}}(D)$) 上的测度。

这里 $\tilde{\mathcal{C}}(D)$ 定义如下:

$$\tilde{\mathcal{C}}(D) := \{\gamma : [0, t_\gamma] \rightarrow D, \gamma(0) = \gamma(t_\gamma) \text{ 为根}\}$$

注意到 μ_D 不是共形不变的。这是因为

$$\begin{aligned} f \circ \mu_D &= \int_D f \circ \mu_D(z, z) dA(z) = \int_D \mu_{f(D)}(f(z), f(z)) dA(z) \\ &= \int_{f(D)} \mu_{f(D)}(w, w) |g'(w)|^2 dA(w) \neq \mu_{f(D)} \end{aligned}$$

这里 $f : D \rightarrow f(D)$ 为一个共形映射, $g = f^{-1}$ 。

定义 B.3. 如果记 $\tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 为 D 中的无根环路的集合, 定义 $\bar{\mu}_D$ 为 $\tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 上由 μ_D 诱导的测度。即对任意的 $\tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 上的可测集合 E ,

$$\bar{\mu}_D(E) := \mu_D(\{\gamma : \gamma \text{ 是一个带根环路} [\gamma] \in E\})$$

这里 $[\gamma]$ 是 γ 的等价类。

定义 B.4. 定义 $\tilde{\mathcal{C}}(D)$ 和 $\tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 上的测度如下:

$$\frac{d\nu_D}{d\mu_D}(\gamma) = \frac{1}{t_\gamma}, \quad \frac{d\bar{\nu}_D}{d\bar{\mu}_D}([\gamma]) = \frac{1}{t_\gamma}. \quad (\text{B.23})$$

引理 B.11. 如果 T 是一个单位权, 则 $\bar{\nu}_D(E) = \delta_D(E)$ 。这里 E 是任何一个 $\tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 上的可测集, δ_D 由 $\tilde{\delta}_D$ 诱导, 其中

$$\frac{d\tilde{\delta}_D}{d\mu_D(\gamma)} = T(\gamma).$$

证明. 定义 $\Phi: \tilde{\mathcal{C}}(D) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_U(D)$ 如下:

$$\gamma \longrightarrow \Phi(\gamma) := [\gamma] \quad (\text{B.24})$$

这里 $[\gamma]$ 是 γ 的等价类。根据定义

$$\bar{\nu}_D(E) = \int_E \frac{1}{t_\gamma} d\bar{\mu}_D = \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{1}{t_\gamma} d\mu_D = \nu_D(\Phi^{-1}(E)).$$

于是

$$\delta_D(E) = \tilde{\delta}_D(\Phi^{-1}(E)) = \int_{\Phi^{-1}(E)} T(\gamma) d\mu_D.$$

因此我们只需证明

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{1}{t_\gamma} d\mu_D = \int_{\Phi^{-1}(E)} T(\gamma) d\mu_D.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\Phi^{-1}(E)} T(\gamma) \frac{1}{t_\gamma} \int_0^\infty 1_{\{s \leq t_\gamma\}} ds d\mu_D = \int_0^\infty \int_{\Phi^{-1}(E)} T(\gamma) \frac{1}{t_\gamma} 1_{\{s \leq t_\gamma\}} d\mu_D ds \\ &= \int_0^\infty \int_{\Phi^{-1}(E)} T(\theta_s(\gamma)) \frac{1}{t_\gamma} 1_{\{s \leq t_\gamma\}} d\mu_D ds = \int_{\Phi^{-1}(E)} \int_0^\infty T(\theta_s(\gamma)) 1_{\{s \leq t_\gamma\}} ds \frac{1}{t_\gamma} d\mu_D \\ &= \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{1}{t_\gamma} d\mu_D = \text{LHS}. \end{aligned}$$

第三个“=” 是因为 $\theta_s(\Phi^{-1}(E)) = \Phi^{-1}(E)$ 对任意的 $\forall s$ 成立, 并且 $\theta_s(\gamma)$ 的时间长度与 γ 一样。 \square

定义 B.5. 如果 T 是 $\tilde{\mathcal{C}}(D)$ 上的一个单位权, 定义

$$\mu^{\text{rooted}}(D, T) = \int_D T(\gamma) \mu_D(z, z) dA(z).$$

定义 $\mu_D^{\text{loop}} := \mu^{\text{rooted}}(D, T) \circ \Phi^{-1}$, 其中 Φ 同 (B.24), 也即 $\mu_D^{\text{loop}}(E) := \mu^{\text{rooted}}(D, T)(\Phi^{-1}(E))$ 。

由上一引理知, μ_D^{loop} 的定义不依赖于 T 的选取。称 μ_D^{loop} 为 D 上的 布朗环测度, 显然其满足限制本小节前提出的限制性质。记 $\mu^{\text{loop}} = \mu_{\mathbb{C}}^{\text{loop}}$ 。

布朗环测度满足共形不变性:

定理 B.1. 如果 $f: D \rightarrow \tilde{D}$ 为一个共形映射, 则

$$f \circ \mu_D^{\text{loop}} = \mu_{f(D)}^{\text{loop}}.$$

证明.

$$\begin{aligned}
f \circ \mu_D^{loop} &= \int_D T(\gamma) f \circ \mu_D(z, z) dA(z) \\
&= \int_D \frac{|f'(z)|^2}{t_{f \circ \gamma}} \mu_{f(D)}(f(z), f(z)) dA(z) \\
&= \int_{f(D)} \frac{1}{t_{f \circ \gamma}} \mu_{f(D)}(w, w) dA(w) \\
&= \mu_{f(D)}^{loop}.
\end{aligned}$$

这是因为 $T(\gamma) := \frac{|f'(\gamma(0))|^2}{t_{f \circ \gamma}}$ 为一个单位权:

$$\int_0^{t_\gamma} T(\theta_s(\gamma)) ds = \int_0^{t_\gamma} \frac{|f'(\gamma(s))|^2}{t_{f \circ (\theta_s \gamma)}} ds = \int_0^{t_\gamma} \frac{|f'(\gamma(s))|^2}{t_\gamma} ds = 1.$$

□

注记 B.2. 还有一种定义 μ_D^{loop} 的方法: 注意到带根的环路 $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$ 可以看作三元组 (z, t, η) , 其中 $z \in \mathbb{C}, t \in (0, \infty)$, $\eta \in \tilde{\mathcal{C}}$ 满足 $t_\eta = 1, \eta(0) = 0$ 。这个对应关系为:

$$z = \gamma(0), \quad t = t_\gamma, \quad \eta(s) = t_\gamma^{-1/2} [\gamma(st_\gamma) - z].$$

假定 $\mu^\# = \mu^\#(0, 0; 1)$ 为 0 处的时间长度为 1 的布朗桥 (环路), 记 $T(\gamma) = \frac{1}{t_\gamma}$, 则作为 $\mathbb{C} \times (0, \infty) \times \tilde{\mathcal{C}}$ 上的测度, $\mu^{rooted}(\mathbb{C}, T)$ 与

$$area \times \frac{dt}{2\pi t^2} \times \mu^\#.$$

一样。通过(B.24) 中的映射 Φ , 便可得到 μ^{loop} 。

利用 (B.21) 中的单位权 T_ϵ , 令 $\epsilon \rightarrow 0$ 可得到布朗环测度的另一种表达式。记 $\mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0)$ 为布朗气泡, $\mu_{\mathbb{H}+z}^{bub}(z)$ 为 $\mu_{\mathbb{H}}^{bub}(0)$ 在平移变换 $w \rightarrow w + z$ 下的像。则

$$\mu^{loop} = \int_{\mathbb{C}} T_-(z, z) \mu(z, z) dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mu_{\mathbb{H}+z}^{bub}(z) dA(z). \quad (\text{B.25})$$

这里我们将 $\mu_{\mathbb{H}+z}^{bub}(z)$ 看作是定义在无根环路上的测度。(B.25) 将环路按其最低点进行拆分。由性质B.2, 我们可得到布朗环测度的另一种表示方法:

性质 B.4. 如果将以下测度

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^{+\infty} [\mu_{\mathbb{H}_s^y}(x + iy, r + is) \oplus \mu_{\mathbb{H}_s^y}(r + is, x + iy)] ds dy dr dx$$

看作是定义在无根环路上的测度, 则其等于布朗环测度 μ^{loop} 。

证明. 由(B.25) 可知

$$\mu^{loop} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}^y}^{\text{bub}}(x + iy) dx dy.$$

结合 (B.19),

$$\mu_{\mathbb{H}^y}^{\text{bub}}(x + iy) = \pi \int_y^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_s^y}(x + iy, r + is) \oplus \mu_{\mathbb{H}_s^y}(r + is, x + iy) dr ds.$$

由以上两个等式便可得证。 \square

定义集合 \mathcal{Y} 为

$\{\gamma \in \tilde{\mathcal{C}} : \text{存在 } t_\gamma^+ \in [0, t_\gamma) \text{ 使得 } \text{Im}(\gamma(t_\gamma^+)) > \text{Im}(\gamma(t)) \text{ 对任意的 } t \in [0, t_\gamma) \setminus \{t_\gamma^+\} \text{ 成立}\}.$

由平面布朗运动的性质知, $\mu(0, 0)$ 支撑在 \mathcal{Y} 上。对任意的 $\epsilon > 0$, 定义 $\tilde{T}_\epsilon : \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty)$ 如下

$$\tilde{T}_\epsilon(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{t_\gamma} & \text{如果 } t_\gamma < \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} 1_{\{t_\gamma^+ < \epsilon\}} & \text{如果 } t_\gamma \geq \epsilon. \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

注意到对任意的 $\gamma \in \mathcal{Y}$ 有

$$\int_0^{t_\gamma} \tilde{T}_\epsilon(\theta_t(\gamma)) dr = 1.$$

于是 \tilde{T}_ϵ 是一个单位权并且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, \tilde{T}_ϵ 收敛到一个单位权 T^+ 。于是

$$\mu^{loop} = \int_{\mathbb{C}} T_+(z, z) \mu(z, z) dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mu_{\mathbb{H}^- + z}^{\text{bub}}(z) dA(z). \quad (\text{B.27})$$

其中 $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$ 。这里我们将 $\mu_{\mathbb{H}^- + z}^{\text{bub}}(z)$ 看作定义在无根环路上的测度。这里将环路按其最高点进行拆分。记 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}$ 为 μ^{loop} 在 \mathbb{H} 上的限制, 则由 (B.27) 可得

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy) dx dy. \quad (\text{B.28})$$

接下来我们证明, 布朗环测度的“导数”为布朗气泡。如果 V, V_1, V_2 为 D 的子集, 记 $\mu^{\text{loop}}(D; V_1, V_2)$ 为 μ_D^{loop} 在与 V_1 和 V_2 都相交的环路组成的集合上的限制。记 $\mu_D^{\text{bub}}(z, V)$ 为 $\mu_D^{\text{bub}}(z)$ 在与 V 相交的环路组成的集合上的限制。则

性质 B.5. 假定 V_n 为一列 \mathbb{H} 上的紧致包, 满足 $h_n = hcap(V_n) > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n = rad(V_n) \rightarrow 0$ 。则对任意的 $r > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \mu^{loop}(\mathbb{H}; \mathcal{I}_r, V_n) = \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; \mathcal{I}_r). \quad (\text{B.29})$$

证明. 令 $f(z) = f_r(z) := rz$, 则

$$f \circ \mu^{\text{loop}}(\mathbb{H}; \mathcal{I}_1, V_n) = \mu^{\text{loop}}(\mathbb{H}; \mathcal{I}_r, rV_n).$$

$$f \circ \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; \mathcal{I}_1) = r^2 \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; \mathcal{I}_r).$$

并且 $\text{hcap}(rV_n) = r^2 \text{hcap}(V_n) = r^2 h_n$. 因此只需对 $r = 1$ 证明此结论。注意到由 (B.28) 可得

$$\mu^{\text{loop}}(\mathbb{H}; \mathcal{I}_1, V_n) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy; V_n) dx dy. \quad (\text{B.30})$$

由 (B.19)

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(0; \mathcal{I}_1) = \pi \int_1^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) dx dy. \quad (\text{B.31})$$

作为无根环路上的测度

$$\mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) = \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy). \quad (\text{B.32})$$

根据(B.18), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \mu_{\mathbb{H}_y}^{\text{bub}}(x + iy; V_n) = \pi^2 \mu_{\mathbb{H}_y}(x + iy, 0) \oplus \mu_{\mathbb{H}_y}(0, x + iy). \quad (\text{B.33})$$

于是结合(B.30),(B.31),(B.32) 和 (B.33) 便完成了证明。 \square

参考文献

- [1] Oded Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel Journal of Mathematics*, 118(1):221–288, 2000.
- [2] Gregory Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal restriction: the chordal case. *Journal of the American Mathematical Society*, 16(4):917–955, 2003.
- [3] Hao Wu. Conformal restriction: the radial case. *Stochastic Processes and their Applications*, 125(2):552–570, 2015.
- [4] Adam Gamsa and John Cardy. Correlation functions of twist operators applied to single self-avoiding loops. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(41):12983, 2006.
- [5] Richard Beals and Roderick Wong. *Special functions: a graduate text*, volume 126. Cambridge University Press, 2010.
- [6] Dmitry Beliaev and Stanislav Smirnov. Harmonic measure and sle. *Communications in Mathematical Physics*, 290(2):577–595, 2009.
- [7] Dmitry Beliaev, Bertrand Duplantier, and Michel Zinsmeister. Integral means spectrum of whole-plane sle. *arXiv preprint arXiv:1605.03112*, 2016.
- [8] Bertrand Duplantier, Xuan Hieu Ho, Thanh Binh Le, and Michel Zinsmeister. Logarithmic coefficients and multifractality of whole-plane sle. *arXiv preprint arXiv:1504.05570*, 2015.
- [9] Louis De Branges. A proof of the bieberbach conjecture. *Acta Mathematica*, 154(1):137–152, 1985.
- [10] John B Conway. *Functions of One Complex Variable II: II*, volume 2. Springer Science & Business Media, 1995.
- [11] Lars Valerian Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [12] 李忠. 复分析导引. 北京大学出版社, 2006.

- [13] Gregory F Lawler. *Conformally invariant processes in the plane*, volume 114. American Mathematical Soc., 2008.
- [14] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Values of brownian intersection exponents, i: Half-plane exponents. In *Selected Works of Oded Schramm*, pages 859–895. Springer, 2011.
- [15] Donald E Marshall and Steffen Rohde. The loewner differential equation and slit mappings. *Journal of the American Mathematical Society*, pages 763–778, 2005.
- [16] Karl Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme abbildungen des einheit-skreises. i. *Mathematische Annalen*, 89(1):103–121, 1923.
- [17] Dapeng Zhan. *Random Loewner chains in Riemann surfaces*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2004.
- [18] 胡太忠. 概率论教程. 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [19] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science & Business Media, 1999.
- [20] Steffen Rohde and Oded Schramm. Basic properties of sle. In *Selected Works of Oded Schramm*, pages 989–1030. Springer, 2011.
- [21] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. *Values of Brownian intersection exponents, II: Plane exponents*. Springer, 2011.
- [22] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. In *Selected Works of Oded Schramm*, pages 931–987. Springer, 2011.
- [23] Marcelo Alvisio and Gregory F Lawler. Note on the existence and modulus of continuity of the sle₈ curve.
- [24] Gregory F Lawler. Fractal and multifractal properties of schramm-loewner evolution. *Preface vii Schramm-Loewner Evolution and other Conformally Invariant Objects 1 Vincent Beffara Noise Sensitivity and Percolation 49*, page 277, 2012.

- [25] Gregory F Lawler. Continuity of radial and two-sided radial sle κ at the terminal point (2011). *arXiv preprint arXiv:1104.1620*.
- [26] Vincent Beffara. The dimension of the sle curves. *The Annals of Probability*, pages 1421–1452, 2008.
- [27] Dapeng Zhan. Reversibility of chordal sle. *The Annals of Probability*, pages 1472–1494, 2008.
- [28] Dapeng Zhan. Duality of chordal sle. *Inventiones mathematicae*, 174(2):309–353, 2008.
- [29] Stanislav Smirnov. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, cardy’s formula, scaling limits. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 333(3):239–244, 2001.
- [30] Oded Schramm. A percolation formula. *Electron. Comm. Probab*, 6:115–120, 2001.
- [31] Geoffrey R Grimmett. Percolation (grundlehren der mathematischen wissenschaften), 2010.
- [32] Federico Camia and Charles M Newman. Critical percolation exploration path and sle 6: a proof of convergence. *Probability theory and related fields*, 139(3-4):473–519, 2007.
- [33] Oded Schramm and Scott Sheffield. Harmonic explorer and its convergence to sle4. *Annals of probability*, pages 2127–2148, 2005.
- [34] Oded Schramm and Scott Sheffield. Contour lines of the two-dimensional discrete gaussian free field. *Acta mathematica*, 202(1):21–137, 2009.
- [35] Gregory F Lawler and Wendelin Werner. Universality for conformally invariant intersection exponents. *Journal of the European Mathematical Society*, 2(4):291–328, 2000.
- [36] Gregory F Lawler, Wendelin Werner, et al. Intersection exponents for planar brownian motion. *The Annals of Probability*, 27(4):1601–1642, 1999.

- [37] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Values of brownian intersection exponents iii: Two-sided exponents. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, volume 38, pages 109–123. Elsevier, 2002.
- [38] Gregory F Lawler. The dimension of the frontier of planar brownian motion. *Electronic Communications in Probability*, 1:29–47, 1996.
- [39] Gregory F Lawler. Hausdorff dimension of cut points for brownian motion. *Electronic Journal of Probability*, 1:2, 1996.
- [40] Gregory F Lawler. Geometric and fractal properties of brownian motion and random walk paths in two and three dimensions. *Random Walks (Budapest, 1998)*, 9:219–258, 1999.
- [41] Bertrand Duplantier and Kyung-Hoon Kwon. Conformal invariance and intersections of random walks. *Physical review letters*, 61(22):2514, 1988.
- [42] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Analyticity of intersection exponents for planar brownian motion. *Acta mathematica*, 189(2):179–201, 2002.
- [43] Hugo Duminil-Copin and Stanislav Smirnov. Conformal invariance of lattice models. *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions, Clay Mathematics Proceedings*, 15:213–276, 2012.
- [44] Hugo Duminil-Copin. Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models. *Ensaïos Matemáticos*, 25:1–371, 2013.
- [45] Jason Miller and Scott Sheffield. Imaginary geometry iii: reversibility of SLE κ for κ in $(4, 8)$. *arXiv preprint arXiv:1201.1498*, 2012.
- [46] Scott Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. *Probability theory and related fields*, 139(3-4):521–541, 2007.
- [47] Oded Schramm and Scott Sheffield. A contour line of the continuum gaussian free field. *Probability Theory and Related Fields*, 157(1-2):47–80, 2013.
- [48] Scott Sheffield. Conformal weldings of random surfaces: Sle and the quantum gravity zipper. *arXiv preprint arXiv:1012.4797*, 2010.

- [49] Jason Miller and Scott Sheffield. Imaginary geometry i: interacting sles. *arXiv preprint arXiv:1201.1496*, 2012.
- [50] Jason Miller and Scott Sheffield. Imaginary geometry iv: interior rays, whole-plane reversibility, and space-filling trees. *arXiv preprint arXiv:1302.4738*, 2013.
- [51] Jason Miller and Scott Sheffield. Imaginary geometry ii: reversibility of $\text{SLE}(\kappa; \rho_1, \rho_2)$ for κ in $(0, 4)$. *arXiv preprint arXiv:1201.1497*, 2012.
- [52] Gregory F Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. *arXiv preprint math/0204277*, 2002.
- [53] Oded Schramm. Conformally invariant scaling limits: an overview and a collection of problems. In *Selected Works of Oded Schramm*, pages 1161–1191. Springer, 2011.
- [54] Nam-Gyu Kang and Hee-Joon Tak. Conformal field theory of dipolar sle with the dirichlet boundary condition. *Analysis and Mathematical Physics*, 3(4):333–373, 2013.
- [55] Wendelin Werner et al. Conformal restriction and related questions. *Probab. Surv.*, 2:145–190, 2005.
- [56] Dmitry Beliaev and Fredrik Johansson Viklund. Some remarks on sle bubbles and schramm’s two-point observable. *Communications in Mathematical Physics*, 320(2):379–394, 2013.
- [57] Gregory F Lawler and Wendelin Werner. The brownian loop soup. *Probability theory and related fields*, 128(4):565–588, 2004.
- [58] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [59] Geoffrey R Grimmett. *The random-cluster model*, volume 333. Springer Science & Business Media, 2006.
- [60] Igor Loutsenko and Oksana Yermolayeva. New exact results in spectra of stochastic loewner evolution. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(16):165202, 2014.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与科研成果

作者基本情况

韩勇，男，河南省内乡县人，1989 年出生，中国科学院数学与系统科学研究院博士研究生。

联系方式

通讯地址：北京市海淀区中关村东路 55 号，中科院数学与系统科学研究院数学所

邮编：100190

E-mail: hanyong@amss.ac.cn

攻读学位期间发表的学术论文及科研成果

[1] 韩勇，王跃飞. SLE 及其应用. 2014.

[2] Bertrand Duplantier, Chi Nguyen, Han Yong, Michel Zinsmeister. Generalized Integral Means Spectrum of Whole Plane SLE with Drift. 2015

[3] Han Yong, Wang Yuefei, Michel Zinsmeister. Conformal restriction: the Strip case. 2016.

[4] Han Yong, Wang Yuefei, Michel Zinsmeister. On the Brownian loop measure. 2016.

项目资助情况

2015-2017 CSC 留学基金委联合培养资助项目.

致 谢

几近而立之年，世间已是诸多繁扰。然而，在读博期间，我深深的享受着科研工作者们所向往的寂静。非淡泊无以明志，非宁静无以致远。每每心绪不宁时，校园里那安静的湖畔，总能带我找回最初的希望。没有都市里的闪烁霓虹，远离城市中汽车轰鸣，让我能够砥砺前行，厚积薄发。在此，必须要向我伟大的祖国鞠上深深一躬，感谢祖国资助我们这样的寒门学子出国留学。身居海外，才更能够感受到祖国母亲的慈爱与深情。

曾记得这样一句话，有时候方向比努力更重要。感谢恩师王跃飞以其广阔的学术视野将我引入 SLE 的大门，并一直鼓励我致力于该方向的研究。恩师事务繁忙，可仍然抽出大量时间与我进行一对一的讨论研究，对于我的个人生活，王老师也是关爱有加，正所谓学高为师，德高是范。还要感谢法国导师 Z 教授，特别是他那一丝不苟的学术作风，讨论问题时，他写在黑板上的一行行演算公式，是我永远无法忘怀的震撼。还要感谢科学院的刘劲松老师和崔贵珍老师，是他们组织的讨论班，丰富了我的视野，拓展了我的知识面。

奋斗路上，灵魂需要独行，可坚深的友谊却能为灵魂带来深深的给养。感谢我的师兄凡石磊、周泽、沈文强、申俊、蔡宏坚和师姐曲静静在学习和生活上的帮助。也感谢我的同学们，李华斌、杨亮国、姚潇、朱中坚、曹文涛、庄源、陈轶骅、李铎、张永明、张鑫、龙洋、吴瑞君、李帅、李露、孟宪奎、门曰阳、魏菲，有了你们，我的科院生活多了许多乐趣。特别要感谢师弟贺杰，在我留学期间，为我奔波各种手续，实属不易。还有我的本科室友，硕子、凯哥，天哥，支书，老张，胡海平，是你们让我有了比肩的对象，同时也让我奋斗的路上不乏稚趣，与你们的嬉戏是我科研路上不可忽视的调皮。还要感谢在法国的廖灵敏老师以及陪我一起奋斗的小伙伴刑冯、张恨水、王逸畅、赵月和师姐魏华影，是他们让我在外感到了家的温暖。

科研生活离不开文献的查找，感谢多年来图书馆的皮老师，陈老师和张老师的帮助，她们不仅在文献资料上为我提供便利，更在日常生活中为我排忧解难。

责任与爱是鞭挞我努力奋进的又一动力，家人的亲情为我的科研道路带来了太多的温暖与热度。感谢他们的鼎力支持，母爱如水，难忘母亲的叮咛，父爱如山，感谢父亲的深沉。还要感谢我的爱人，平淡与自然，是我们许下的承诺。

冯友兰先生认为，人生的最高境界是审美境界，审美，应当成为我们一生的追求。而我特别庆幸的是，自己所从事的是理论数学的研究，因为，数学的一切都是

美的。感谢真理，带我们走向光明。同时，也感谢自己在大千世界中不乱于心，不困于行，执着于理论学科的学习研究，怀抱赤子之心，因为理想一定要有的，努力终将实现。

开始的开始，我们都是学子；最后的最后，渴望成为大师。博士论文在此完结，可学术研究永不止步，路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。