Colle n°11

Automatismes

cf: fichiers `Dérivées et primitives usuelles.pdf` , `Développement limites.pdf` ,`Graphes des fonctions usuelles pdf` `Inégalités et Inéquations.pdf` , `Nombres complexes.pdf` , `Trigo ou équivalent usuelles.pdf` , `Limites.pdf` prévu à cet effet

Récitations (les nouvelles questions)

- Énoncé et démonstration du théorème de comparaison des séries à termes positifs (version $\leq$). *(Chap.6 Théorème B2)*

Théorème 1 : Comparaison des séries à termes positifs (version $\leq$)

Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors:

1) $\sum_n v_n$ converge $\Rightarrow \sum_n u_n$ converge $\& \ 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

2) $\sum_n u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n v_n$ diverge

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Si (w_n) est croissante:
- (w_n) majorée $\Rightarrow (w_n)$ converge vers $\sup(w_n), \forall n \in \mathbb{N}$
- Sinon, $\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

DÉMONSTRATION:

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

1) Supposons que $\sum_n v_n$ **converge**

Posons $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^{N}$

But: Appliquer le thm de la limite monotone

Mq (S_N) est croissante

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^{N} v_n$$
$$= u_{n+1} \geq 0$$

donc: (S_N) est croissante

Soit $N \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$$
$$\leq \sum_{n=0}^{N} v_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n \qquad \sum_n v_n \textbf{ conv. et } \forall n \geq N+1, N_N \geq 0$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Donc (S_N) est majorée
- D'après le théorème de la limite monotone, (S_N) converge

Donc: $\boxed{\sum_n u_n \text{ converge}}$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
Donc:

$$\boxed{\sum_n u_n \text{ diverge} \implies \sum_n v_n \text{ diverge}}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$
ceci en posant $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^{N}$
et ce en supposant que $\sum_n v_n$ converge

2) Il s'agit de la contraposée du **1)**, donc:

$$\boxed{\sum_n u_n \text{ diverge} \implies \sum_n v_n \text{ diverge}}$$

et ce en supposant $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

-Énoncer et démontrer le critère de Riemann pour les séries. *(Chap.6 Théorème B8)*

Théorème 3 : Critère de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

DÉMONSTRATION:

Soit $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$

f_α est continue et positive sur $[1, +\infty[$
f_α est dérivable sur $[1, \infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[, f_\alpha(t) = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$

Si $\alpha \geq 0$:

f_α est décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc d'après le **théorème de comparaison série / intégrale**.

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Si $\alpha < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to+infty} e^{-\alpha \ln(n)} = +\infty$$

Donc $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement

Pour conclure: $\boxed{\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$

et ce pour $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$

-Déterminer un équivalent de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $N \to +\infty$. *(Chap.6 Exemple B7)*

Déterminons un équivalent de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $N \to +\infty$

Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$

On choisit $n_0 = 1$

- f est continue sur $[1, +\infty[$
- f est positive sur $[1, +\infty[$
- f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \geq 1, f'(t) = \frac{-1}{2t^{3/2}} \leq 0$

Donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$

f est continue, positive et décroissante donc: $\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$ et $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n)$

donc: $\int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

Ainsi,

$$\forall n \leq 2, \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Soit $N \in [2, +\infty[$ ***(ou*** $N \geq 2$***)***

En sommant les inégalités précédentes,

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

D'après la relation de Chasles,

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_1^{N} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{dt}{\sqrt{n}}$

Donc: **(Problème au niveau des indices)**

$$1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \underbrace{\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1}_{S_N} \leq 1 + \int_n^{N} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Ainsi, **Calcul**

$$1 + \left[2\sqrt{t}\right]_2^{N+1} \leq S_N \leq 1 + \left[2\sqrt{t}\right]_1^{N}$$

Donc,

$$2\sqrt{N+1} + 1 - 2\sqrt{2} \leq S_N \leq 2\sqrt{N} - 1$$

On sent bien que l'équivalent est $2\sqrt{N}$ *(thm qui $\nexists$: thm des gendarmes versions $\sim$)*

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N}} + \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{N}} \leq \frac{S_N}{2\sqrt{N}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

D'une part, $\lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 1$

Théorème 4 : Théorème de comparaison série/intégrale (juste pour info..)

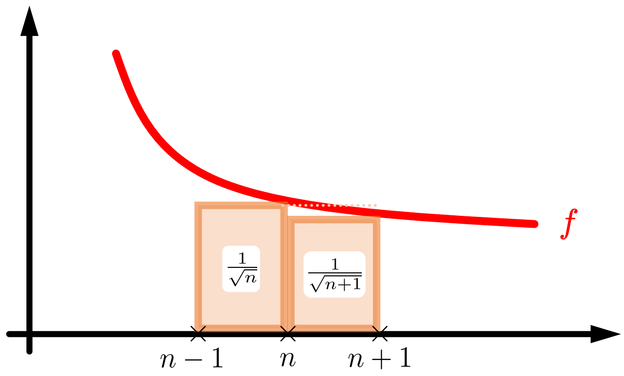
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$

Soit f **continue** sur $[n_0, +\infty[$

Si f est **positive** et f est **décroissante**.

Alors:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge} \iff \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge}$$



D'autre part $\lim_{N \to +\infty} \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} = 0$

et $\lim_{N \to +\infty} \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N}} = \lim_{N \to +\infty} \sqrt{\frac{N+1}{N}} = 1$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{S_N}{2\sqrt{N}} = 1$$

Donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{N \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{N}}$$

pour tout $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$