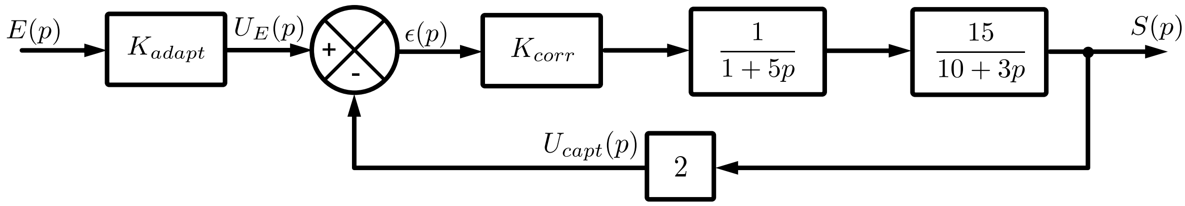
Asservissement

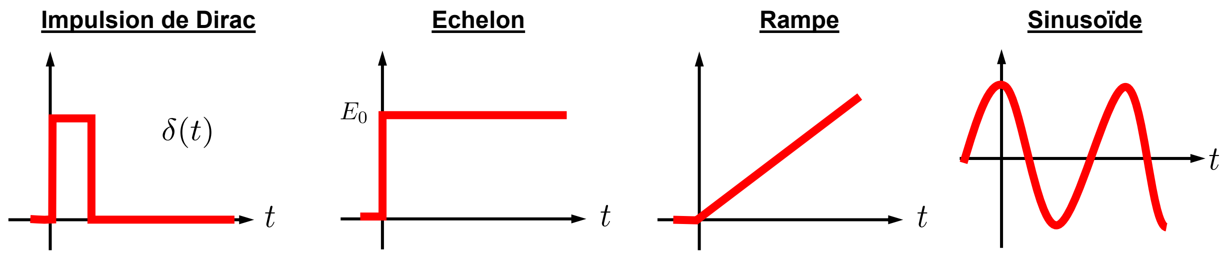
Définition 1: Système asservi

C'est un **type de système automatique** *(intervention humaine limitée)* dans lequel le signal de **sortie est mesuré en permanence** à l'aide d'un **capteur**, comparé à la **consigne**, puis **corrigé**.

Exemple 1: Schéma bloc d'un système asservi



Vocabulaire 1: Types d'entrées



Définition 2: Système linéaire

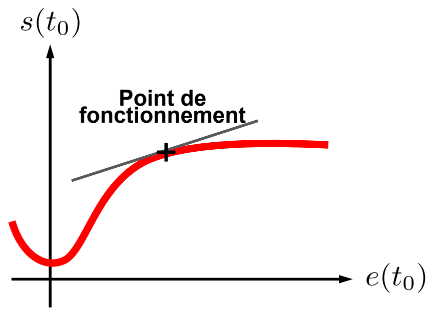
Un système est dit **linéaire** si la sortie est proportionnelle à l'entrée à un instant donné.
Remarque: *La courbe de sortie n'est pas forcément linéaire (en gros rampe), elle peut être non linéaire.*

Méthode 1: Linéarisation d'une courbe

Comment fonctionne le principe de linéarisation?

- Se munir d'un système non linéaire
- Placer le point de fonctionnement souhaité. (prendre le plus intéressant)
- En ce point, tracer la tangente

⇒ Vous avez une approximation linéaire



Définition 3: Transformée de Laplace

C'est un **outil** mathématique qui permet de simplifier les équations différentielles (des systèmes) en équations polynomiales.

Méthode 2: Passer sous Laplace des fonctions usuelles

On remplace la fonction donnée après analyse du système. Voici un tableau des transformées usuelles à savoir:

Domaine temporel $f(t)$	$\delta(t)$	1	t	$f(t-\tau)$ *retard*
Domaine de Laplace $F(p)$	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$e^{-\tau p}$

Propriété 1: Dérivation

Lors d'une dérivation l'expression sous Laplace est:

$$\boxed{f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p \cdot F(p) - f(0)}$$

Avec: $f(0)$, la condition initiale
Remarque: Pour enlever les conditions initiales on se place dans les conditions de Heaviside.

Vocabulaire 2:

- Retard: *écart temporel entre notre réponse et l'axe des ordonnées (ou une autre courbe), noté* τ
- Valeur finale: *état de notre courbe qui se stabilise, notée* s_∞

Propriété 2: Théorème du retard

$$\boxed{g(t) = f(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\tau \cdot p}}$$

Propriété 3: Théorème de la valeur finale

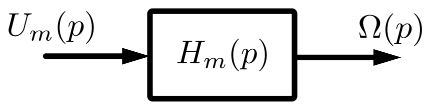
$$\boxed{f_\infty = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} (p \cdot F(p))}$$

Définition 4: Fonction de Transfert

Chaque système admet **une entrée** et **une sortie**. Entre celles-ci une action est réalisée, elle est modélisée par une **fonction de transfert**. Sa formule est:

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}$$

Exemple 2: Bloc, Entrée + Sortie pour moteur



Ici, notre fonction de transfert est $H_m(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U_m(p)}$

Méthode 3: Mettre sous forme canonique une fonction de transfert

- Faire **disparaître** les fractions imbriquées
- **Développer**, **réduire** et **ordonner** par **puissances** de p croissantes, au NUMÉRATEUR et au DÉNOMINATEUR.
- **Factoriser par le plus petit** p
- **Factoriser** le numérateur et le dénominateur par le **terme constant**.

Exemple 3: Forme canonique d'une fonction de transfert

Soit: $X(p)(k + \lambda p + m \cdot p^2) = F(p)$. On prendra $X(p)$ l'entrée et $F(p)$ la sortie.
Donc: $H(p) = \dfrac{X(p)}{F(p)} = \dfrac{1}{k + \lambda \cdot p + mp^2}$
→ Tout est ordonné, on n'a pas besoin de factoriser par p. Alors, on factorise par le terme constant.

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda p}{k} + \frac{mp^2}{k}}}$$

Définition 5: Système d'ordre

Chaque système admet une **réponse temporelle**. Celle-ci peut être de **différents ordres**.
↪ Généralement 1 ou 2.

Vocabulaire 3: Ordre, gain, constante de temps

Ordre: *L'ordre est déterminé par la plus grande présence de* p *au dénominateur d'une forme canonique de* $H(p)$

Gain statique: *Noté généralement* K*, il se situe au numérateur de notre forme canonique*

"Constante de temps": *Notée* τ*, elle varie selon nos fonctions de transfert*

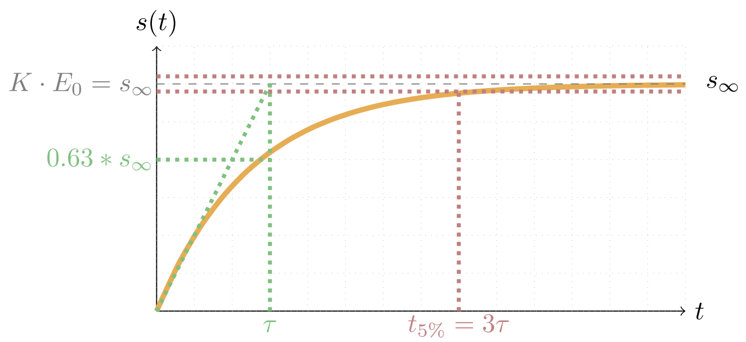
Définition 6: Système d'ordre 1

Voici la forme d'une fonction de transfert d'ordre 1. *(Pour l'allure voir la méthode 4)*:

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}}$$

Méthode 4: Trouver une fonction de transfert d'ordre 1 via graphe

Soit une allure de courbe d'ordre 1:



- On trace l'asymptote à notre valeur finale ; elle vaut $K \cdot E_0$
- Le temps de réponse à 5% ($\pm 5\%$ de s_∞)
- Au croisement on peut lire sur l'axe des abscisses l'équivalent de 3τ
- En 0, on trace une tangente et à l'intersection cela correspond sur l'axe des abscisses à τ.
- De même $\tau = 63\% \cdot s_\infty \Leftrightarrow 63\% \cdot K \cdot E_0$
- On a K, on a τ, donc on remplace pour obtenir: $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$

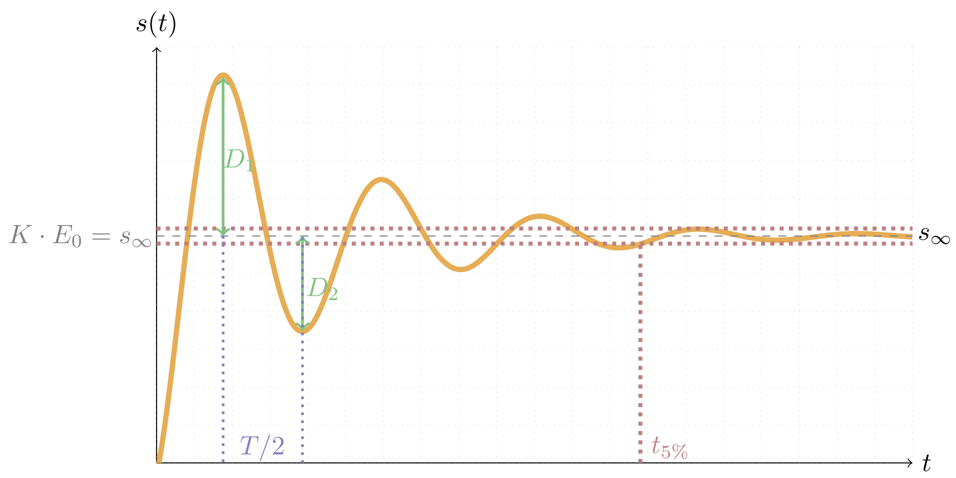
Définition 7: Système d'ordre 2

Voici la forme d'une fonction de transfert d'ordre 2. *(Pour l'allure voir la méthode 5 et pour la retrouver la méthode 6)*:

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

Méthode 5: Trouver graphiquement les valeurs remarquables d'un ordre 2

Soit une allure de courbe d'ordre 2:

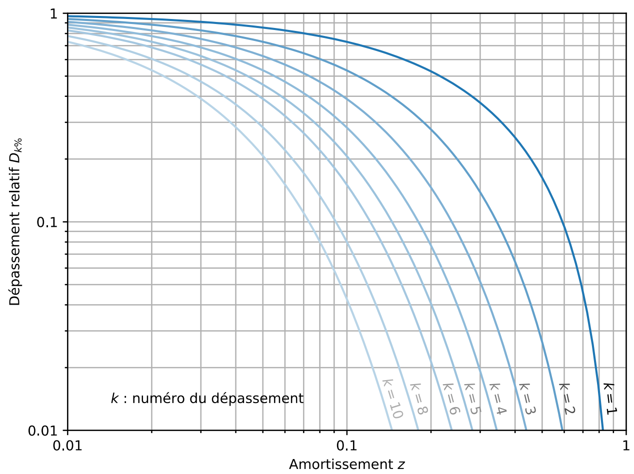


- On lit s_∞ (asymptote horizontale)
- On trace nos 2 axes à $\pm 5\%$ de s_∞
- Au croisement on peut lire sur l'axe des abscisses $t_{5\%}$
- Sur le premier pic de la sinusoïde, tracer le premier dépassement D_1.

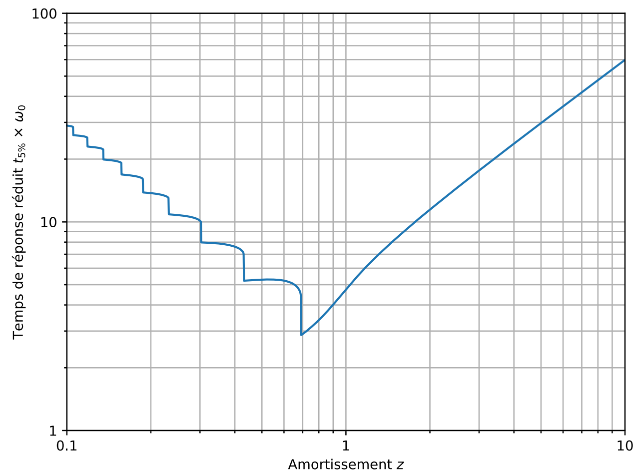
Définition 8: Abaque

Un **abaque** est un graphe fourni dans lequel des données sont mises en relation avec d'autres.

Vocabulaire 4: Abaques des dépassements relatifs



Vocabulaire 5: Abaques du temps de réponse réduit



Méthode 6: Trouver une fonction de transfert d'ordre 2

Pour les valeurs que l'on va utiliser se référer à la méthode 5. Sauf si déjà su dans l'énoncé

Dans un sujet seront toujours donnés des abaques. *(cf: def 8 et voc: 4 & 5)*

- On cherche le **dépassement relatif** $D_{1\%}$

$$\boxed{D_{1\%} = \frac{D_1}{s_\infty}}$$

- Selon ce nombre relatif on cherche notre **coefficient d'amortissement** z
- Selon le temps de réponse à 5% on **cherche** ω_0
- On cherche K, le **gain statique**, tel que $K = s_\infty \cdot E_0$
- Maintenant selon notre **définition 7** on remplace nos valeurs obtenues (K, ω_0, z) dans celle-ci
- Rappel:

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

Définition 9: Adaptateur

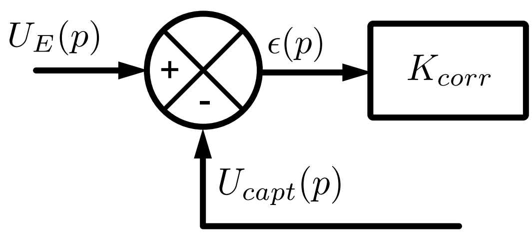
On appelle **adaptateur** le composant permettant de transformer la consigne d'entrée en une grandeur exploitable par le comparateur.

$\rightarrow$ Se situe généralement en début du schéma bloc.

Vocabulaire 6: Comparateur/Sommateur

Le **comparateur** ou **sommateur** est un élément du schéma bloc permettant de faire une opération entre 2 grandeurs.

Remarque: On note généralement la sortie de ce comparateur: $\epsilon(p)$. Celle-ci est souvent dirigée vers un correcteur.



Méthode 7: Détermination du gain K_{adapt}

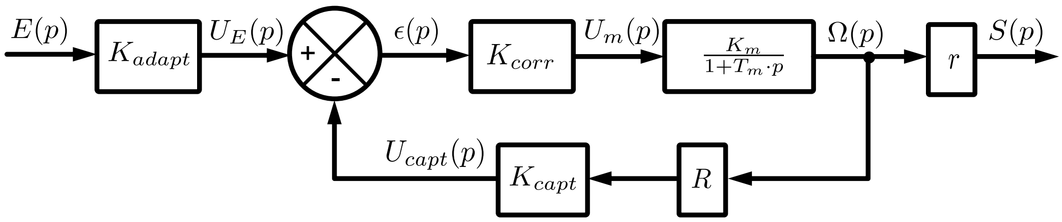
Sur un schéma bloc et des conditions initiales données, déterminons K_{adapt}:

- On **énonce** la différence grâce au **comparateur** des informations envoyées
- On **remplace** par l'expression, depuis le début de cette branche
- **Simplifier** l'information de la **jonction** par ce qui suit à la **sortie**
- Grâce aux **conditions initiales**, simplifier
- Faites les derniers calculs nécessaires pour **exprimer** K_{adapt}

Remarque: Si la chaîne de retour est prélevée sur la sortie, alors l'adaptateur est égal à l'ensemble de la chaîne de retour

Exemple 4: Détermination d'un gain K_{adapt}

Soit le schéma bloc suivant:



↪ On note que $E(p) = S(p)$ quand $\varepsilon(p) = 0$

- Cherchons K_{adapt}

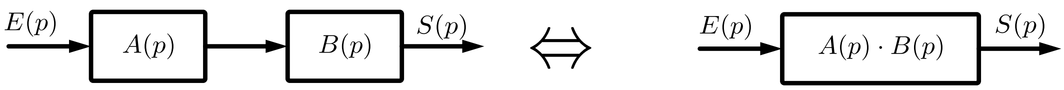
$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= U_E(p) - U_{capt}(p)\\ &= E(p)\cdot K_{adapt} - \Omega(p)\cdot R\cdot K_{capt}\\ &= E(p)\cdot K_{adapt} - S(p)\cdot \frac{1}{r}\cdot R\cdot K_{capt}.\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon(p) = 0$ donc: $\boxed{K_{adapt} = \frac{1}{r}R\cdot K_{capt}}$

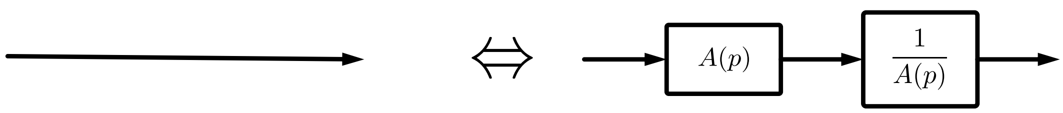
Méthode 8.a: Modification de schéma bloc

Il est possible de modifier notre schéma bloc pour simplifier nos calculs.

1. **Fonction de transfert en série**

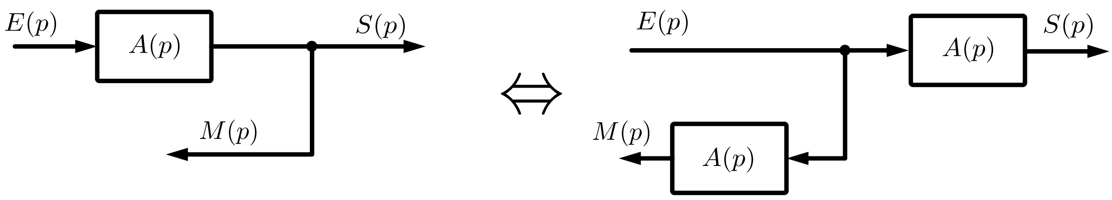


2. **Ajout de fonctions de transfert**

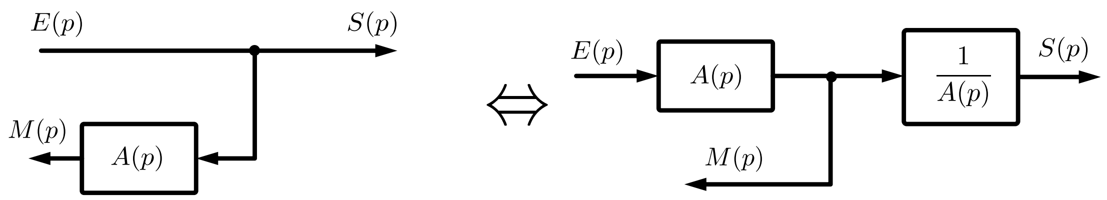


3. **Déplacement d'une jonction**

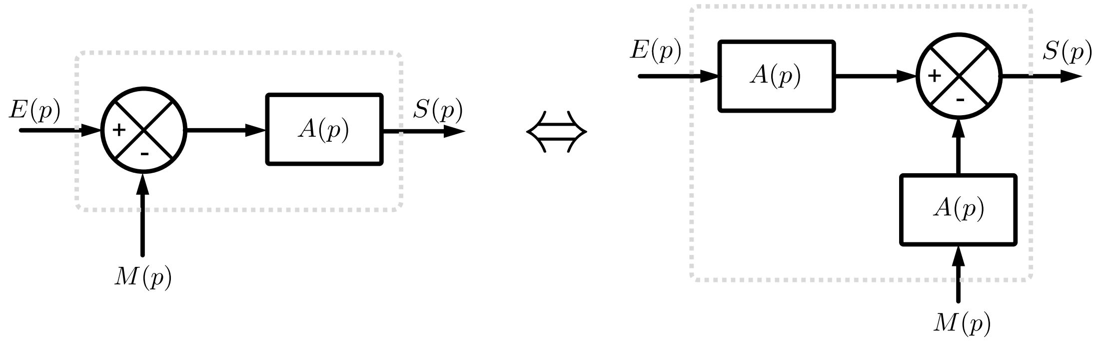
2 possibilités:



Méthode 8.b: Modification de schéma bloc

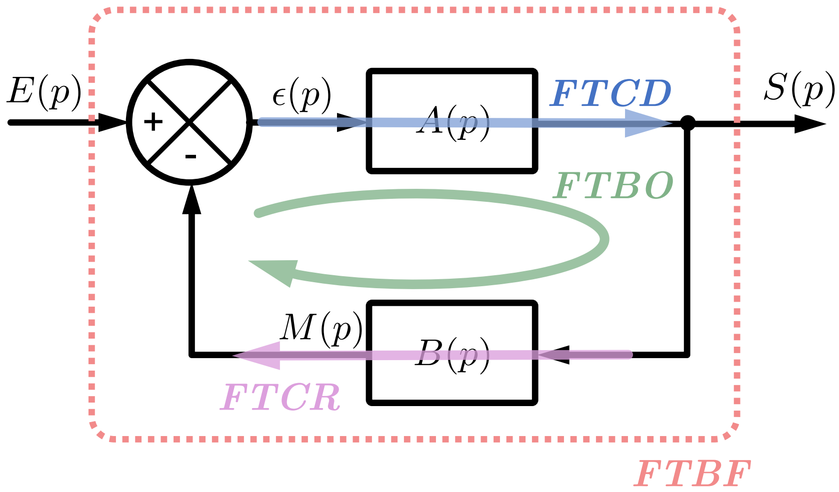


4. **Déplacement d'un sommateur/comparateur**



Vocabulaire 7: Système bouclé et fonctions caractéristiques

Voici la forme générale d'un système bouclé



- $FTCD$ = Fonction de Transfert de la Chaîne Directe
- $FTCR$ = Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour
- $FTBO$= Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

  A savoir, une **FTBO** se résume à aucun retour. C'est-à-dire que la chaîne de retour ne retourne pas dans le circuit !
- $FTBF$ = Fonction de Transfert en Boucle Fermée. C'est l'équivalent de ce circuit:

Propriété 4: Formule de Black

Cette formule permet de connaître la fonction de transfert globale du système:

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}}$$

Démonstration 1: Formule de Black

$$\begin{aligned}
S(p) &= A(p)\cdot\epsilon(p)\\
&= A(p)\cdot(E(p)-M(p))\\
&= A(p)\cdot(E(p)-B(p)\cdot S(p))\\
&= A(p)\cdot E(p)-A(p)\cdot B(p)\cdot S(p)\\
S(p)+A(p)\cdot B(p)\cdot S(p) &= A(p)\cdot E(p)\\
S(p)\,(1+A(p)\cdot B(p)) &= A(p)\cdot E(p)\\
\frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{A(p)}{1+A(p)\cdot B(p)} = \frac{FTCD(p)}{1+FTBO(p)}
\end{aligned}$$

Propriété 5: Théorème de superposition

Lorsqu'on a 2 comparateurs (souvent en cas de perturbations), on **divise notre schéma bloc en deux parties**. Ainsi:

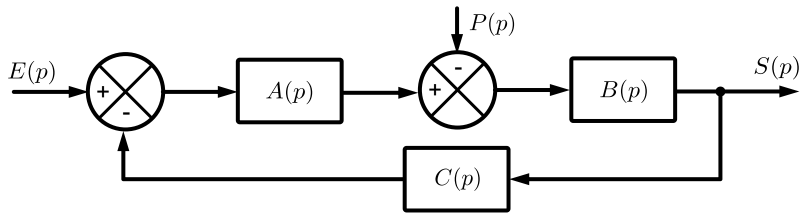
$$\boxed{S(p) = S_E(p) + S_P(p) = H_E(p)\cdot E(p) + H_P(p)\cdot P(p)}$$

Méthode 9: Séparer notre schéma bloc afin d'obtenir 2 fonctions de transferts

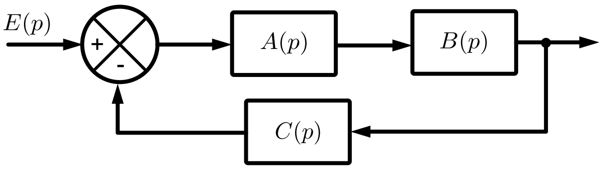
- D'une part, on positionne une **entrée nulle**, d'autre part **l'autre entrée nulle**
- On **redessine** notre nouvelle fonction de transfert
  - L'entrée doit être tout à gauche
  - La sortie tout à droite
  - Le comparateur doit soustraire la chaîne de retour à l'entrée
- On utilise la **formule de Black**

Exemple 5: Décomposition d'un système à plusieurs entrées

Soit ce schéma bloc, décomposons-le en 2 schémas blocs distincts:

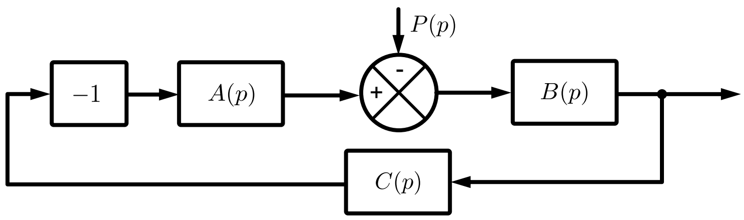


Avec: $E(p) \neq 0$ et $P(p) = 0$

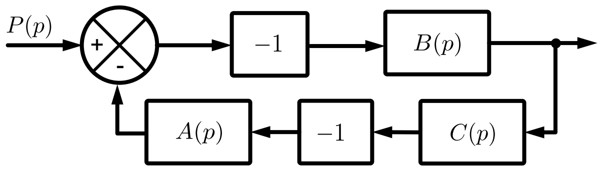


Ici, la fonction de transfert d'entrée est égale à $H(p)$ quand $P(p) = 0$. Ainsi, $\boxed{H_E(p) = \dfrac{A(p)\cdot B(p)}{1+A(p)\cdot B(p)\cdot C(p)}}$

Avec: $E(p) = 0$ et $P(p) \neq 0$



Ce qui revient à:



Ici, la fonction de transfert de perturbation est égale à $H(p)$ quand $E(p) = 0$. Ainsi, $\boxed{H_P(p) = \dfrac{-B(p)}{1+A(p)\cdot B(p)\cdot C(p)}}$