Tarea primera monitoría algebra abstracta

Rodrigo Castillo

20 de agosto de 2020

1. Principio de inducción fuerte:

1.1. Demostración:

Sea S el conjunto de todos los números naturales n con que cumplen que que la propiedad $P(m)$ se cumple en todos los m menores que m $(m < n)$. Ahora, por inducción sobre n tenemos que si $n \in S$ entonces $P(m)$ se cumple para todo $m < n$
por hipotesis de induccion tenemos que $P(n)$ es verdadero. por lo tanto, cualquier numero $m < n+1$ también cumple la propiedad .
por lo tanto $n+1 \in S$

2. si n es un natural que no es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

sea n un natural que no es un cuadrado perfecto , luego no existe $m \in Z$ tal que $n = m^2$
.
supongamos que $\sqrt{n}$ es racional, por lo tanto existen $a, b \in Z$ tales que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ tales que a, b son coprimos y $mcd(a, b) = 1$
por lo tanto $\frac{1}{n} = \frac{a^2}{b^2}$
Ahora veamos que a^2 y b^2 también son coprimos , por lo que por el teorema fundamental de la aritmetica y como consecuencia del lema de euclides, si existiera un primo que dividiera a a y a b entonces también dividiría a a^2 y a b^2 , pero supusimos que a^2 y b^2 eran coprimos, por lo que es una contradicción .

3. Utilice la fórmula de multiplicación entre números complejos en forma polar para encontrar los cuatros números complejos que satisfacen $x^4 = 1$

dibujo para entender un poco :

note que en la forma polar es mas fácil de ver la multiplicación de complejos, pues se suman sus angulos y se multiplican sus radios.
por lo tanto se tiene que :

$$r^4 = 1 \tag{1}$$

$$(\cos\theta \sin\theta)^4 = 1 \tag{2}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} \tag{3}$$

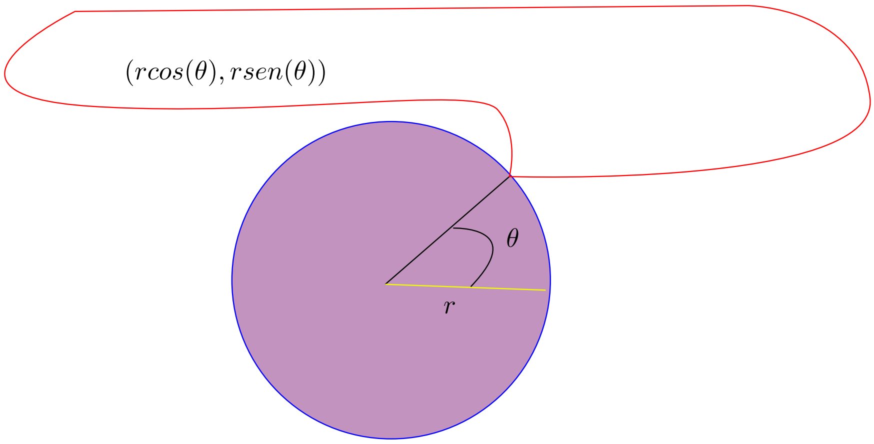

Figura 1: dibujo

3.1. solución

de la ecuacion $\theta = \frac{n\pi}{2}$ se obtienen 4 soluciones , cuando
$n = 0$
$n = 1$
$n = 2$
$n = 3$

de los cuales se obtiene que $theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
por lo que las 4 soluciones son $1, i, -1, -i$

4. Demuestre que un polinomio a coeficientes reales de grado 2 o 3 es irreducible si y solo si no tiene ceros

$\Longrightarrow$
contrarreciprocra
sea x un polinomio de grado 2 o 3 reducible, por lo que existen 2 polinomios b,c tales que tales que $b \times c = x$, también sabemos que uno de los dos polinomios b o c es de grado 1 .
sea b el polinomio de grado 1 , por el teorema del residuo sabemos que es de la forma $a - k$ y y que la ecuacion $a - k = 0$ tiene solución, por lo tanto, k es diferente de 0
$\Leftarrow$ sea x un polinomio de grado 2 o 3 que tiene ceros , por lo tanto es de la forma $x^2 + c$ o $x^3 + c$ luego existe $x - c$ tales que $F(x - c) = 0$, por lo tanto los polinomios son reducibles

5. Demuestre directamente que $x^n - c^n$ es divisible por x - c para cualquier natural n . Deduzca de esto el teorema del residuo visto en clase.

esto por el teorema del residuo es trivial, sin embargo, en internet encontré esta formula :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

acá ver que es divisible por $x-c$ es fácil, pues, sea $k = (a^{n-1} - a^{n-2}b + ... + b^{n-2}a + ... + b^{n-1})$ se tiene que existe k tal que $(x-c)k = x^n - c^n$

ahora deducir el teorema del reciduo basta con dividir toda la expresión sobre $x - c$, por lo que quedaría que $\frac{x^n - c^n}{x-c} = \frac{x-c(k)}{x-c}$ y esa ecuación solamente tiene sentido cuando $F(x-c) = 0$

6. sea $m > 2$ un entero , demuestre que hay m clases de equivalencia por la relacion ser congruente módulo m y que son exactamente las clases $[0], [1], ..., [m-1]$

induccion:

6.1. caso base

sea $m = 2$, luego existe la clase de equivalencia $[1], [2]$, sabemos que no existen mas clases de equivalencia pues suponer que existen mas clases de equivalencias es suponer que existe un número que es par e impar a la vez.

6.2. Caso inductivo

supongamos que para todo conjunto $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...n$ en los enteros se cumple que existen exactamente $[0], [1], [2], ..., [m-1]$ relaciones de equivalencia modulo m , por lo que $m \mid (n-k)$, note que por propiedades de la división, m no divide a $(n+1) - k$, por lo que en el conjunto $0, 1, 2, 3, 4, ..., n+1$ existen las clases de equivalencia $[0], [1], ..., [m]$, luego existen exactamente m clases de equivalencia.

7. aviso

(soy consciente de que las demostraciones están super enredadas y en algunos casos mal elaboradas, sin embargo prometo practicar mas ejercicios de demostraciones en el transcurso de esta semana)