ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: PRIMER PARCIAL

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios se solucionarán en la clase del viernes 09 de Septiembre. Se aconseja solucionar estos ejercicios en grupos pequeños, de **máximo** 4 **personas**. Es posible trabajar con estudiantes de la otra sección del mismo curso. Todos los estudiantes deben entregar su propria versión de los ejercicios, escribiendo claramente los nombres con quiénes trabajaron. De no anotar los nombres de sus compañeros habrá penalidades según el caso. La idea es desarrollar los ejercicios juntos, pero **escribir soluciones de manera individual**. Si revisaron libros deben escribir las referencias de manera clara, dando la referencia del resultado utilizado y la página.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculadas) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 10 Septiembre 2020 a la medianoche.

Ejercicios

1. **1 punto**. Sea
$$R^* = R \times \mathbb{Z} = \{(r, n) : r \in R, n \in \mathbb{Z}\}.$$
Definamos las operaciones en R^* de la siguiente manera
$$(r_1, n_1) + (r_2, n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2),$$
$$(r_1, n_1) \cdot (r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_2 r_1 + n_1 r_2, n_1 n_2).$$
Demuestre que:
   a) la multiplicación en R^* es cerrada y asociativa, y que las dos operaciones distribuyen[1];
   b) $(0, 1)$ es la identidad de R^*;
   c) $S = \{(r, 0) : r \in R\}$ es un subanillo de R^* (de hecho es un ideal);
   d) $\theta\colon R \to R^*$, definida por $\theta(r) = (r, 0)$ es un isomorfismo desde R a S.
2. **2 puntos**. Sea $\theta\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos. Demuestre
   a) Si R es conmutativo entonces $\theta(R)$ es conmutativo;

Date: 03 Septiembre 2020.

[1]Esto es suficiente para mostrar que R^* sea un anillo, porque la suma claramente satisface los axiomas de anillo que le compiten.

b) Si R tiene elemento identidad 1, $S \neq 0$ y θ es sobreyectiva, entonces $\theta(1)$ es la identidad de S;

c) Si $I \subset S$ es un ideal entonces $\theta^{-1}(I) = \{a \in R : \theta(a) \in I\}$ es un ideal de R.

3. **2 puntos**. Sea

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $I \subseteq R$ el conjunto formado por las matrices con $a = c = 0$. Sea S el conjunto de las matrices con $b = 0$. Demuestre que:

a) I es un ideal de R;

b) S es un subanillo de R. ¿Es un ideal?

c) $R/I \cong S$.