ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 10

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 15 Octubre 2020.

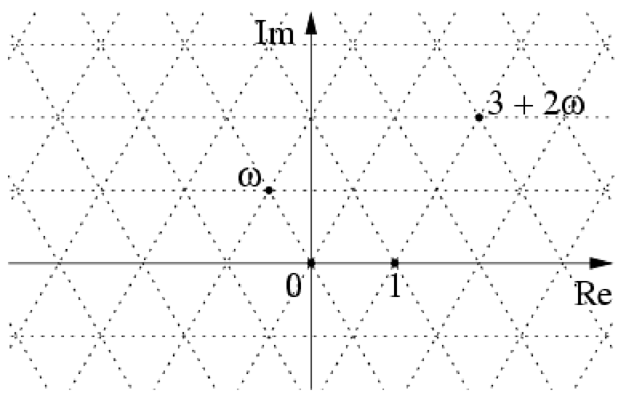

FIGURA 1. Los puntos de $\mathbb{Z}[\omega]$ forman un retículo con triángulos equiláteros en $\mathbb{C}$.

Ejercicios

1. Sea R un dominio euclidiano con función euclidiana d. Demuestre que $a \in R$ es una unidad si y solo si $d(a) = d(1)$.
2. Sea R un dominio de integridad.
   a) Sea $S = \{(a, b), a, b \in R, b \neq 0\}$. Definamos la relación $\sim$ sobre S como $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $ad = bc$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Date: 09 Octubre 2020.

   b) Demuestre que las operaciones definidas en el campo de fracciones F de R están bien definidas (es decir: son independientes del representante) y que con estas operaciones F es un campo.

3. Sea R un dominio de integridad y sean $a, b \in R$. Supongamos que si $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ *coprimos* (i.e.: $\gcd(n, m) = 1$). Demuestre que $a = b$.
   [*Sugerencia: Utilice el campo de fracciones.*]
4. Demuestre que los enteros de Eisenstein
   $$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega, a, b \in \mathbb{Z}\},$$
   donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, son un dominio euclidiano con la función euclidiana:
   $$d(a + b\omega) = |a + b\omega|^2 = a^2 + b^2 - ab.$$
   [*Sugerencia: razone como en el caso de los enteros de Gauss, aprovechando que los puntos de $\mathbb{Z}[\omega]$ forman un retículo en triángulos equiláteros en $\mathbb{C}$, ver Figura 1. Además, note que si $x = qy + r$, con $x, y, q \in \mathbb{Z}[\omega]$, necesariamente $r \in \mathbb{Z}[\omega]$ también, siendo los enteros de Eisenstein un anillo.*]