ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 14

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 12 Noviembre 2020.

Ejercicios

Solo uno entre los ejercicios **2**, **3** y **4** será calificado.

1. Demuestre que la distancia de Hamming es una distancia, es decir:
   a) Para todas palabras v y w tenemos $d(v, w) \geq 0$ y, además, $d(v, w) = 0$ si y solo si $v = w$;
   b) Para todas palabras v y w, tenemos $d(v, w) = d(w, v)$;
   c) Para todas palabras u, v y w tenemos
   $$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$
2. Sea $F = \{1, 2, 3\}$ y considere el código
   $$C = \{112233, 223311, 331122, 123123, 231231, 312312\}.$$
   Calcule la distancia mínima de C.
3. Sea $F = \{0, 1\}$. Considere el código $C = \{0^n, 1^n\}$, donde
   $$0^n = \underbrace{00 \cdots 0}_{n \text{ veces}}.$$
   Demuestre que C realiza la acotación del singulete y que, si $n = 2m + 1$ es impar, es también un código perfecto.
4. Sea $F = \{1, 2\}$. Considere el código
   $$C = \{000000, 001111, 110011, 111100, 101010\}.$$
   a) Demuestre que C no es un código lineal.
   b) Añada palabras a C para formar un nuevo código C' que sea lineal.
   c) Encuentre una base de C'.

Date: 6 Noviembre 2020.

5. Sea F un campo y sean $x_1, \ldots, x_n \in F$. Considere la siguiente matriz $n \times n$, llamada *matriz de Vandermonde*:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Sugerencia: Trate por inducción y utilice operaciones de columnas.