Parcial 1 Álgebra Abstracta

Rodrigo Castillo

10 de septiembre de 2020

1. Punto 1

1. **1 punto**. Sea

$$R^* = R \times \mathbb{Z} = \{(r, n) : r \in R, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definamos las operaciones en R^* de la siguiente manera

$$(r_1, n_1) + (r_2, n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2),$$
$$(r_1, n_1) \cdot (r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_2 r_1 + n_1 r_2, n_1 n_2).$$

Demuestre que:

a) la multiplicación en R^* es cerrada y asociativa, y que las dos operaciones distribuyen[1];

b) $(0, 1)$ es la identidad de R^*;

c) $S = \{(r, 0) : r \in R\}$ es un subanillo de R^* (de hecho es un ideal);

d) $\theta \colon R \to R^*$, definida por $\theta(r) = (r, 0)$ es un isomorfismo desde R a S.

Figura 1: Punto 1

1.1. a

1.1.1. la multiplicacion es cerrada y asociativa

demostración :
sean $(x_1, m_1), (x_2, m_2) \in R*$, por lo tanto $(x_1, m_1)(x_2, m_2) = (x_1x_2 + x_1m_2 + x_2m_1, m_1m_2)$
note que $x_1, x_2 \in R$ y que $m_1, m_2 \in Z$, por lo tanto, tenemos que
$x_1x_2 \in R$, $x_1m_2 \in R$, $x_2m_1 \in R$, $m_1m_2 \in Z$, luego $(x_1x_2 + x_1m_2 + x_2m_1) \in R$ y $(m_1m_2) \in Z$, como así lo definimos, entonces tenemos que ...
$(x_1, m_1)(x_2, m_2) \in R \times Z$
$(x_1, m_1)(x_2, m_2) \in R*$
como $(x_1, m_1), (x_2, m_2)$ son elementos cualesquiera de $R*$, entonces tenemos que para cualquier elementos en $R*$, la multiplicación es cerrada

1.1.2. la suma distribuye

sean $(x_1, m_1), (x_2, m_2)(x_3, m_3) \in R$, por lo tanto
$((x_1, m_2) + (x_2, m_2)) + (x_3, m_3) = (x_1 + x_2, m_1 + m_2) + (x_3, m_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3, m_1 + m_2 + m_3)$
$= (x_1 + (x_2 + x_3), m_1 + (m_2 + m_3))$
$= (x_1, m_1) + (x_2 + x_3, m_2 + m_3)$
$= (x_1, m_1) + ((x_2, m_2) + (x_3, m_3))$
por lo tanto la suma distribuye en $R*$

1.1.3. la multiplicación distribuye en $R*$

demostración :
sean $(x_1, m_1), (x_2, m_2)(x_3, m_3) \in R$, por lo tanto
$((x_1, m_1)(x_2, m_2))(x_3, m_3) = (x_1x_2 + m_2x_1 + m_1x_2, m_1m_2)(x_3, m_3)$
$= (x_1x_2x_3 + m_3m_2x_1 + x_3x_2m_2, m_3m_2m_1)$
$= (x_1(x_2x_3) + (m_3m_2)x_1 + (x_3x_2)m_2, (m_3m_2)m_1)$
$= (x_1, m_1)((x_2, m_2)(x_3, m_3))$
por lo tanto el producto distribuye en $R*$

1.2. $(0, 1)$ es la identidad de R

demostración:
sea (x_1, m_1) un elemento arbitrario de $R*$, por lo tanto ...
$(0, 1)(x_1, m_1) = (x_1 \cdot 0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot m_1, 1 \cdot m_1)$
$= (0 + x_1 + 0, m_1)$
$= (x_1, m_1)$
acá podemos ver que se cumple que es identidad en este sentido, ahora procederemos a ver que es identidad en el otro sentido también :
$(x_1, m_1) \cdot (0, 1) = (x_1 \cdot 0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot m_1, 1 \cdot m_1)$
$= (x_1, m_1)$
como se cumple en ambos sentidos, entonces tenemos que $(0, 1) \in R*$ es una identidad.

1.3. $\theta : R \to R*$ definida como $\theta(x) = (x, 0)$ es un subanillo de $R*$

1.3.1. cerrado bajo la multiplicación

sean $(x_1, 0), (x_1, 0) \in R*$, por lo tanto...
$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 + 0 + 0, 0)$
$= (x_1x_2, 0)$
note que $x_1, x_2 \in R$, por lo tanto $(x_1x_2, 0)$ está en el subanillo, luego la multiplicación es cerrada .

1.3.2. la resta es cerrada

sean $(x_1, 0), (x_1, 0) \in R*$, por lo tanto...
$(x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0 - 0)$
$= (x_1 - x_2, 0)$
note que $x_1 - x_2 \in R$, luego $(x_1 - x_2, 0)$ está en el subanillo , luego la resta también es cerrada.

1.4. $\theta : R \to R*$ definida por $\theta(x) = (x, 0)$ es un isomorfismo de R a S

1.4.1. es un homomorfismo :

- sean $x, y \in R$, luego $\theta(x + y) = (x + y, 0)$
  mientras que $\theta(x) + \theta(y) = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$
  luego $\theta(x) + \theta(y) = \theta(x + y) = (x + y, 0)$
- sean $x, y \in R$, luego $\theta(xy) = (xy, 0)$
  mientras que $\theta(x)\theta(y) = (x, 0) \cdot (y, 0)$
  $= (xy + 0 + 0, 0)$
  $= (xy, 0)$
  luego $\theta(x)\theta(y) = \theta(xy) = (xy, 0)$

1.4.2. es sobreyectivo

debo probar que para todo $x \in R$ existe un $y \in R*$ tal que $\theta(x) = y$:
demostración:
sea $y \in R* = (x, 0)$, tenemos que para cualquier x arbitrario en R se tiene que $\theta(x) = (x, 0) = y$.

1.4.3. es inyectivo

debo probar que si $\theta(x) = \theta(y) \Rightarrow x = y$
demostración por contrarrecíproca:
supongamos que $x \neq y$, por lo tanto $(x, 0) \neq (y, 0)$
note que $\theta(x) = (x, 0)$
note que $\theta(y) = (y, 0)$
por lo que , por transitividad tenemos que $\theta(x) \neq \theta(y)$

1.4.4. conclusión

como existe un homomorfismo y la transformación es biyectiva, entonces es un isomorfismo de $R \to S$

2. Sea $\theta R \to S$ un homomorfismo de anillos Demuestre

2.1. si R es conmutativo entonces $\theta(R)$ es conmutativo

demostración:
Supongamos que R es un anillo conmutativo, es decir que para todo $x, y \in R$ se tiene que $(xy) = (yx)$.
por lo tanto $\theta(xy) = \theta(yx)$
como θ es un homomorfismo entonces tengo que $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$
y similarmente tengo que $\theta(yx) = \theta(y) + \theta(x)$
pero note que $\theta(xy) = \theta(yx)$, luego por transitividad se tiene que $\theta(x)\theta(y) = \theta(y)\theta(x)$, luego $\theta(R)$ es conmutativo .

2.2. si R tiene elemento identidad 1 , $S \neq 0$ y θ es sobreyectiva entonces $\theta(1)$ es la identidad de S

demostración por contradicción :
supongamos que R tiene elemento identidad 1 , $S \neq 0$ y θ es sobreyectiva pero $\theta(1)$ no es la identidad .
sea $s \in R$, como R tiene elemento identidad 1 entonces $\theta(s \cdot 1) \in S$. note que , θ es un homomorfismo, por lo que $\theta(1 \cdot s) = \theta(1) \cdot \theta(s)$ y además note que θ es sobreyectiva .
luego $\theta(1 \cdot s)$
$= \theta(1)\theta(s)$
$= \theta(s)$
sin embargo supusimos que 1 no es la identidad de S , luego
$\theta(1) \cdot \theta(s) \neq \theta(s)$
luego tenemos que $\theta(s) \neq \theta(s)$, y esto es una contradicción clara.

2.3. Punto C

supongamos que I está contenido en S , por lo tanto $\theta^{-1}(I_S)$ son los $a \in R$ tales que $\theta(a) \in I$
$\theta(x) + \theta(y) = \theta(x + y)$ porque θ es un homomorfismo. Por lo tanto, $x + y \in \theta^{-1}$.

ahora, supongamos que $a \in \theta^{-1}$ y $r \in R$, por lo tanto se tiene que
$\theta(ar) = \theta(a)\theta(r)$ pero $\theta(a) \in I$, por lo tanto, por definición de I se tiene que
$\theta(ar) \in I$, por lo tanto $ar \in \theta^{-1}$, luego θ^{-1} es un ideal para R .

3. Punto 3

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $I \subseteq R$ el conjunto formado por las matrices con $a = c = 0$. Sea S el conjunto de las matrices con $b = 0$. Demuestre que:

Figura 2: Punto 3 enunciado

Definimos I

$$I = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in R \tag{1}$$

Definimos S

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{2}$$

3.1. Es I un ideal de R ?

Demostración , sea $A \in R$ y $B \in I$, por lo tanto $A \cdot B =$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

solucionando esta multiplicación tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (a \cdot 0) + (b \cdot 0) & (a \cdot b) + (0) \\ (0 \cdot 0) + (c \cdot 0) & (0 - \cdot b) + (0 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (ab) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ahora, , análogamente pasa lo mismo para el caso contrario $B \cdot A$ note que el polinomio $(ab) \in R$, por lo tanto $A \cdot B \in I$, luego I es un ideal de R

3.2. S es un subanillo de R , es un ideal?

3.2.1. S es un subanillo de R

demostración para la Multiplicación ...
sean $A \in S$ y $B \in S$, luego tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & (a \cdot 0) + (0 \cdot c) \\ (0 \cdot a) + (0 \cdot c) & c_1 c_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} = C \tag{6}$$

como $a_1 a_2, c_1 c_2 \in R$ tengo que la multiplicación es cerrada pues $C \in S$
Demostración para la resta ...
Sean $A_1 \in S, B_2 \in S$, por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

por lo tanto $A_1 - A_2$ se define como

$$C = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

note que $C \in S$, luego , al cumplir la cerradura de la resta y de la multiplicación, se tiene que S es un subanillo de R

3.2.2. S es un ideal para R?

no es un ideal...
prueba: Sea $A \in R$ y $B \in S$, al multiplicar $A \cdot B$ obtengo la siguiente matrix

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a^2 & bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = C \tag{10}$$

note que el elemento $C_{12} \neq 0$ si $b, c \neq 0$, luego la matriz C no pertenece al subanillo S , luego no es un ideal de S

3.3. R/I es isomorfo a S

3.3.1. $\theta R \to S$ es un homomorfimsmo

sean $A, B \in R$, por lo tanto luego

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

entonces $\theta(A + B) =$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

ahora ,

$$\theta(A + B) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

por lo tanto tenemos que $\theta(A) + \theta(B) = \theta(A + B)$
Ahora para la multiplicación tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

luego

$$\theta(A \cdot B) = \begin{pmatrix} a_2 a_2 & 0 \cdot c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Ahora, por otro lado, tenemos que

$$\theta(A) \cdot \theta(B) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

por lo tanto $\theta(A \cdot B) = \theta(A) \cdot \theta(B)$

3.3.2. $ker(\theta) = I$

$ker(\theta)$ se define como todos los elementos $s \in R$ tales que $\theta(s) = 0$, por lo tanto, en este caso, $ker(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ isomorfismo entonces R/I es isomorfo a S , por lo tanto $ker(\theta) \in I$.
Ahora veremos que $I \in ker(\theta)$, sea $s \in I$, por lo tanto s es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo tanto $\theta(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo tanto $I \in ker(\theta)$
por doble contenencia sabemos que $ker(\theta) = I$

3.3.3. $img(\theta) = S$

sobreyectividad :
tengo que probar que para todo $s \in S$ existe un $x \in R$ tal que $\theta(x) = s$.
sabemos que s es de la forma $\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$ por lo tanto, sea $x \in R$ tq $x = \begin{pmatrix} s_2 & b \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$ se tiene que $\theta(x) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = s$ por lo tanto $img(\theta) = S$

3.3.4. conclusión

como se cumplen estas tres condiciones, por el teorema del isomorfismo sabemos que R/I es isomorfo a S .