# ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 4

MAURO ARTIGIANI

## Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

**Importante:** Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

**Fecha de entrega:** 03 Septiembre 2020.

## Ejercicios

1. Sea $R$ un anillo. Demuestre
   *a*) Si existe la identidad 1 es única;
   *b*) Si un elemento $a$ tiene un inverso múltiplicativo este es único.
2. Demuestre que los siguientes son subanillos de $\mathbb{C}$:
   *a*) Los *enteros de Gauss*:
   $$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
   *b*) Los *enteros de Eisenstein*:
   $$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega, a, b \in \mathbb{Z}\},$$
   donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
3. Demuestre que si $\theta \colon R \to S$ es un homomorfismo invertible de anillos, entonces también $\theta^{-1} \colon S \to R$ es un homomorfismo de anillos.
4. Encuentre el núcleo de los siguientes homomorfismos
   *a*)
   $$\begin{aligned} \theta \colon \mathbb{R}[x, y] &\to \mathbb{R}, \\ f(x, y) &\mapsto f(0, 0). \end{aligned}$$
   Donde $\mathbb{R}[x, y]$ es el anillo de los polinomio en *dos* indeterminadas $x$ y $y$, es decir: cada monomio tiene la forma $a_{ij}x^i y^j$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}$.

*Date*: 28 Agosto 2020.

*b)*

$$\theta\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C},$$
$$f(x) \mapsto f(2+i).$$

[*Sugerencia: encuentre el polinomio* $p(x)$ *de grado mínimo en* $\ker(\theta)$ *y después muestre que cualquier elemento de* $\ker(\theta)$ *es de la forma* $p(x)q(x)$ *por algún* $q(x) \in \mathbb{R}[x]$.]