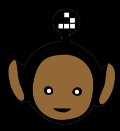
Ejercicos monitoría semana 4

Rodrigo Castillo

3 de septiembre de 2020



1. Sea R un anillo, demuestre que

1.1. si existe la identidad 1 es única

Demostracion:
Supongamos que existen dos indentidades llamados1 y $1'$.
por lo tanto para todo $a \in R$ se tiene que $a \times 1 = a$
tambien se tiene que $a \times 1' = a$, por lo tanto ...
$a \times 1 = a$
$a \times 1' = a$
y por transitividad...
$1 = 1'$
por lo tanto solamente existe un inverso multiplicativo

1.2. si un elemento a tiene inverso multiplicativo este es único

Supongamos que un elemento $a \in R$ tiene múltiples inversos multiplicativos, es decir que para todo $a \in R$ existen $b, b' \in R$ tales que $ab = 1$ y $ab' = 1$. por lo tanto
$b = \frac{1}{a}$
$b' = \frac{1}{a}$
$b = b'$
luego el inverso multiplicativo en un anillo es único
(no sé que tanto sentido tenga esta demostración jaja, preguntar)

2. Demuestre que los siguientes son subanillos de C

2.1. Los enteros de Gauss

$$Z[i] = \{a + bi, a, b \in Z\} \tag{1}$$

Demostracion :
sean $c, c' \in Z[i]$, luego $c - c'$ es de la forma
$a - a' + bb'ia, a', b, b' \in Z$, por lo tanto, note que $a + a' \in Z$ y que $bb' \in Z0$, por lo tanto $c, c' \in Z$
de forma análoga, se tiene que $c * c' \in Z$, luego $Z[i]$ es un subanillo de R .

2.2. Los enteros de einstein

$$Z[w] = \{a + bw, a, b \in Z\} \tag{2}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}$

2.2.1. Demostracion

tengo que $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}$
sean $n, m \in Z[w]$ luego $n - m = a_1 - a_2 - b_1 - b_2 w$
por lo tanto , claramente, $a_1 - a_2 \in Z$, sin embargo falta ver que $b_1 - b_2 - 2w \in Z$, por lo tanto ...
$b_1 b_2 - 2(e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{3})$
note que $b \in Z$, por lo tanto la resta está bien definida por lo tanto la expresion anterior pertenece a Z

3. Demuestre que si $\theta : R \to S$ es un homomorfismo invertible de anillos $\Rightarrow \theta^{-1} : S \to R$ también es un homomorfismo de anillos

3.1. forma de demostracion

$\theta a + b = \theta a + \theta b$ $\theta ab = \theta a \theta b$

3.2. demostracion

supongamos que $\varphi : R \to S$ es un homomorfismo invertible de anillos , por lo tanto , si $phi(p) = s \implies phi^{-1} s = p$.
demostracion de que es un homomorfismo:
$\varphi^{-1} a + \varphi^{-1} b = \varphi^{-1} a + b$
como $\varphi^{-1} a \in R$ y $\varphi^{-1} b \in R$ entonces ..
$\varphi(\varphi^1 a) + \varphi(\varphi^{-1} b) = \varphi^{-1} a + \varphi^{-b}$
.

4. Encuentre el nucleo de los siguientes homomorfismos

4.1. el nucleo es el kernel y es donde llegan todos los 0's

- $\theta : [x, y] \to R$
  $f(x, y) \to f(0, 0)$
  donde $R[x, y]$ es el anillo de los polinomios en dos indeterminadas x y y , es decir: cada monomio tiene la forma $a_{ij} x^i y^j$ con $a_{ij} \in R$y $i, j \in N$
- $\theta : R[x] \to C$,
  $f(x) \to f(2 + i)$

sugerencia , encuentre el polinomo $p(x)$ de grado minimo en $ker(\theta)$ y después muestre que cualquier elemento de $ker(\theta)$ es de la forma $p(x)q(x)$ por algún $q(x) \in R[x]$.