ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 3

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 27 Agosto 2020.

Ejercicios

1. Escriba un pseudo-código que describa el algoritmo euclidiano para encontrar el máximo común divisor $\gcd(n, m)$ entre dos naturales n y m y para escribir $\gcd(n, m) = nx + my$ con $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Sea $m \geq 2$ un entero y consideramos $\mathbb{Z}_m$. Demuestre que la suma en $\mathbb{Z}_m$ definida como $[x]_m + [y]_m = [x + y]_m$ es *bien definida*, es decir no depende de los representantes elegidos para calcularla.
3. Acuérdese la definición de la función φ de Euler:
$$\varphi(n) = |\{1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|.$$
   a) Demuestre que, si p es un primo, se tiene $\varphi(p) = p - 1$.
   b) Demuestre que, si p es un primo y $k \geq 1$ un natural, se tiene $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$.
   c) Utilize que la función φ de Euler satisface $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos naturales a y b, y que todos los naturales $n \in \mathbb{N}$ se pueden escribir de manera única como producto de sus factores primos: $n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, con $p_1, \dots, p_k$ primos y $n_1, \dots, n_k \geq 1$ naturales, para demostrar que
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Date: 21 Agosto 2020.

4. Solucione el siguiente sistema de congruencias
$$\begin{cases} 6x & \equiv 8 \pmod{10} \\ 9x & \equiv 15 \pmod{21}. \end{cases}$$
5. Sea R un anillo cualquiera. Demuestre que el conjunto $M_2(R)$ de las matrices 2×2 a coeficientes en R es un anillo.
6. Sea R un anillo conmutativo con identidad 1. Demostrar que R es el anillo cero si y solo $1 = 0$.