Ejercicios álgebra abstracta semana 7

Rodrigo Castillo

1 de octubre de 2020

1. Sea R un anillo con identidad, Demuestre

1.1. El inverso de un elemento a si existe es único

sea R un anillo y b un elemento en R , sean b, b' elementos inversos de a' , por lo tanto se tiene que $ba = 1$ y que $ba' = 1$, así, se tiene lo siguiente:
$ab = 1$
$ab' = 1$
$ab = 1(ab')b'$
$ab = ab'$
$b = b'$
por lo tanto solamente existe un elemento inverso para b

1.2. la identidad de 1 es una unidad y 1^{-1} =1

1.2.1. la identidad de 1 es una unidad

sea 1 la identidad , por lo tanto se tiene que $1 \cdot 1$ =1 , además, ya sabemos que la identidad es única, por lo tanto es una unidad

1.2.2. $1^{-1} = 1$

sea el elemento 1 , por lo tanto, existe un elemento a tal que $1 \cdot a = 1$, así, tenemos que
$1 \cdot a = 1$
$a = 1$

1.3. si a es una unidad, entonces a^{-1} tambien lo es y $(a^{-1})^{-1} = 1$

sea $a \in R$ tal que a es una unidad, es decir, que existe $b \in R$ tal que $a \cdot b = 1$, de este modo, se tiene que existe a tal que $b \cdot a = 1$, así, podemos decir que b es una unidad en R .

1.4. sean a, b unidades, entonces ab es unidad y $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

sean $a, b \in R$ tales que a, b son unidades , de este modo, existen c, d tales que $ac = 1, bd = 1$.
$ac = 1$
$bd = 1$
$ab \cdot cd = 1$
sea $k = cd$, entonces, se tiene $k \in R$ tal que $(ab) \cdot k = 1$, luego (ab) es una unidad.

2. Sea R un dominio de integridad, Demuestre que las unidades de $R[x]$ son exactamente los polinomios constantes que son unidades de R también

supongamos que R es un dominio de integridad , por lo tanto R es un anillo conmutativo que no tiene divisores de 0 .
luego las unidades de $R[x]$ son $i_1, i_2, i_3...i_x - 1$ pues no hay divisores de 0 , por lo tanto son los polinomios constantes $x_1, x_2, x_3, ...x_n \in R$.

3. Encuentre las unidades del anillo $Z[i]$

sea $a + bi \in Z[i]$, por lo tanto para demostrar la unidad, tomaremos un $a'b'i$ tal que $(a + bi) \cdot (a'b'i) = 1$
por lo tanto :
$(a^2 + b^2) \cdot (a'^2 + b'^2) = 1$
$a^2 + b^2 = 1$
$a = + - 1$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b = + - 1$
$a = + - i$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b = + - i$ luego los unicos elementos invertibles de $Z[i]$ son 1,-1 ,-i, i

4. punto 4

Hecho