ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 12

MAURO ARTIGIANI

Estos ejercicios no serán calificados

Ejercicios

1. Sea G un grupo. Fijamos un elemento $g \in G$ y definamos $I = \{n \in \mathbb{Z}, g^n = e\}$, donde e es la identidad en G. Demuestre que I es un ideal en $\mathbb{Z}$.
2. Sea F un campo. Definamos
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in F, a \neq 0 \right\}.$$
Sean $N \subseteq G$ el subconjunto formado por las matrices con $a = 1$ y $H \subseteq G$ el subconjunto formado por las matrices con $b = 0$. Demuestre que
   a) G es un grupo;
   b) N es un subgrupo normal de G, isomorfo al grupo aditivo del campo F;
   c) H es un subgrupo de G isomorfo al grupo multiplicativo del campo F. ¿Es normal?;
   d) $G/N \cong H$.
3. Sean N un subgrupo normal de un grupo G y H un subgrupo cualquiera. Definamos $NH = \{nh, n \in N, h \in H\}$. Demuestre que NH es un subgrupo de G. Además demuestre o falsifique los siguientes enunciados:
   a) Si H es un subgrupo normal, entonces NH es un subgrupo normal.
   b) Si NH es un subgrupo normal, entonces H es un subgrupo normal.
4. Sea m un entero positivo. Acuérdese que la función φ de Euler es definida como
$$\varphi(m) = \{0 \leq n \leq m-1, \gcd(m,n) = 1\}.$$
Hemos visto que hay $\varphi(m)$ unidades en $\mathbb{Z}_m$. Demuestre
   a) Si $\gcd(n,m) = 1$ entonces $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$;
   b) En particular, si p es un número primo y $p \nmid n$ tenemos $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{m}$;
   c) Si p es un primo $n^p \equiv n$ para todos n. Esto resultado se conoce como el *Pequeño teorema de Fermat*.
5. Sea G un grupo. Para cada elemento $g \in G$ definamos la aplicación
$$\begin{aligned} \iota_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$
   a) Demuestre que, para todos $g \in G$, la aplicación ι_g es un automorfismo[1] de G. Este automorfismo se llama *automorfismo interno inducido por g*.

Date: 22 Octubre 2020.

[1]Es decir: un homomorfismo invertible de G en sí.

b) Demuestre que el conjunto $\{\iota_g, g \in G\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$, el grupo de los automorfismos de G. Este subgrupo se llama el *subgrupo de los automorfismos internos* y se denota $\mathrm{Inn}(G)$.

c) Demuestre que la aplicación $g \mapsto \iota_g$ es un homomorfismo desde G en $\mathrm{Aut}(G)$ cuya imagen es $\mathrm{Inn}(G)$ y cuyo núcleo es el conjunto de los elementos de G que conmutan con todos los elementos en G:

$$Z(G) = \{g \in G, gh = hg \text{ para todos } h \in G\}.$$

Este subgrupo se llama el *centro* de G.

d) Deduzca desde el punto precedente que $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$. Demuestre ahora que $\mathrm{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$. Por definición el cociente $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ es el grupo de los *automorfismos externos* y se denota $\mathrm{Out}(G)$.