ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 6

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 17 Septiembre 2020.

Ejercicios

1. Asuma que los ideales de $\mathbb{C}[x]$ son todos de la forma $\langle p(x)\rangle$, con $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. Encuentre todos los ideales de $\mathbb{C}[x]/\langle x^4 - 1\rangle$.
   [*Sugerencia: revise el ejercicio 3 de la semana 2.*]
2. Sea R un anillo y sea $R[x]$ el anillo de los polinomios a coeficientes en R. Demuestre que
   a) $R[x]$ es un anillo conmutativo si y solo si R lo es;
   b) $R[x]$ tiene identidad si y solo si R la tiene;
   c) $R[x]$ nunca es un anillo de división.
3. El *mínimo común múltiplo* $\operatorname{lcm}(a, b)$ de dos enteros a y b es un número natural c tal que $a \mid c$, $b \mid c$ y, si $a \mid x$ y $b \mid x$ entonces $c \mid x$. Demuestre que si $\operatorname{lcm}(a, b) = c$ entonces $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle c\rangle$.
4. Sea R un anillo conmutativo. Un ideal I de R se dice *primo* si
   $$ab \in I \implies a \in I \text{ o } b \in I.$$
   Sea $R = \mathbb{Z}$. Demuestre que
   a) $\langle n\rangle$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}$ si y solo si n es un número primo;
   b) Cualquier ideal primo (distinto de $\langle 0\rangle$) es un ideal maximal[1].
   [*Sugerencia: Sea* $\langle p\rangle \subseteq \langle a\rangle$, *demuestre que entonces* $1 \in \langle a\rangle$ *y concluya* $\langle a\rangle = \mathbb{Z}$.]

Date: 11 Septiembre 2020.

[1] Un ideal I de un anillo R es *maximal* si $I \neq R$ y es maximal respecto a la inclusión, es decir: si existe un ideal J tal que $I \subseteq J \subseteq R$ entonces $J = I$ o $J = R$.