# ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 7

MAURO ARTIGIANI

## Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

**Importante:** Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

**Fecha de entrega:** 01 Octubre 2020.

## Ejercicios

1. Sea $R$ un anillo con identidad. Demuestre:
   *a*) El inverso de un elemento $a$, si existe es único, y se denota $a^{-1}$;
   *b*) La identidad 1 es una unidad y $1^{-1} = 1$;
   *c*) Si $a$ es una unidad, también $a^{-1}$ lo es, y $(a^{-1})^{-1} = a$;
   *d*) Si $a$ y $b$ son unidades, también $ab$ lo es y $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
2. Sea $R$ un dominio de integridad. Demuestre que las unidades de $R[x]$ son exactamente los polinomios constantes que son unidades en $R$ también.
3. Encuentre las unidades del anillo $\mathbb{Z}[i]$, los enteros de Gauss.
   [*Sugerencia: si* $z_1z_2 = 1$ *entonces* $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2 = 1$.]
4. **Hecho:** un dominio de integridad *finito* es necesariamente un campo; por definición, cada campo es también un dominio de integridad.
   *a*) Demuestre que todos campos finitos tienen característica distinta de 0 (y entonces igual a un primo $p$);
   [*Sugerencia: por el principio del palomar, si el campo tiene* $n$ *elementos, hay dos elementos iguales entre* $1, 2 \cdot 1, \dots, (n + 1) \cdot 1$.]
   *b*) Sea $F$ un campo finito de característica $p$. Demuestre que la aplicación:
   $$\begin{aligned} f\colon F &\to F \\ a &\mapsto a^p, \end{aligned}$$
   es un automorfismo de $F$: es decir es un isomorfismo de $F$ en sí. Este automorfismo se llama el *automorfismo de Frobenius.*

*Date*: 18 Septiembre 2020.

*c*) Utilice el punto de arriba para demostrar que en un campo finito de característica $p$ cualquier elemento tiene una raíz $p$-esima, es decir, para todos $a$ existe $b$ tal que $b^p = a$.