ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EJERCICIOS SEMANA 11

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios serán resueltos en la monitoria y se evaluará, a todos los estudiantes, el mismo ejercicio elegido al azar (1). Las notas de estas entregas semanales constituirá el 15 % de nota de la monitoria. Se aconseja de solucionar estos ejercicios en grupos pequeños.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 22 Octubre 2020.

Ejercicios

Solo uno entre los ejercicios **2**, **3** y **4** será calificado.

1. Sea G un grupo y sea $H \leq G$. Definamos la relación:
$$g_1 \sim_R g_2 \iff g_2 g_1^{-1} \in H.$$
Demuestre que $\sim_R$ es una relación de equivalencia.
2. Sean G y G' dos grupos. Demuestre que $G \times G'$ con la operación $(g, g') \cdot (h, h') = (gh, g'h')$, es un grupo, llamado *grupo producto*. Además, si G y G' son grupos abelianos, también su grupo producto es abeliano.
3. Sea G un grupo abeliano, y sea $H = \{x \in G, x = y^2, \text{ por algún } y \in G\}$. Demuestre que H es un subgrupo de G. Explique porque esto es falso si G no es abeliano.
4. Sea D_8 el grupo de simetrías del cuadrado. Escriba los elementos de D_8 como permutaciones, enumerando los vértices de 1 hasta 4. Además, considere el subgrupo $H = \{e, (24)\}$ y escriba los laterales izquierdos y derechos de D_8 con respecto a H.
5. Sean G un grupo y X un conjunto cualquiera. Una *acción* de G sobre X es una función: $*\colon G \times X \to X$, denotada $g * x$, tal que
   a) si e es la identidad de G entonces $e * x = x$ para todos $x \in X$;
   b) asociatividad: para todos $g, g' \in G$ y $x \in X$ tenemos $(gg') * x = g * (g'x)$.

   Dada una acción de G sobre X, llamamos el *estabilizador* de un elemento $x \in X$ como
$$\mathrm{stab}_x = \{g \in G, g * x = x\}.$$
   Para todas acciones de G en X y todos $x \in X$ demuestre que

Date: 16 Octubre 2020.

a) stab_x es un subgrupo de G;
b) Si $g, h \in G$, $g * x = h * x$ si y solo si $g^{-1}h \in \operatorname{stab}_x$ y esto pasa si y solo si h está en $g \operatorname{stab}_x$, el lateral izquierdo de g con respecto a stab_x.
c) Si $gx = x'$ entonces:

$$\operatorname{stab}_{x'} = g \operatorname{stab}_x g^{-1} = \{ghg^{-1}, h \in \operatorname{stab}_x\}.$$