ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: EXAMEN FINAL

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

- Está permitido utilizar libros, notas y diapositivas del curso;
- El parcial es un trabajo **autónomo**;
- No está permitido buscar soluciones por internet;

Se deberán subir en e-aulas escaneos o fotografiás de los ejercicios escritos a mano. Se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculados) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada, clara y legible; se puede cambiar el orden de las soluciones. No seguir estas instrucciones conlleva una penalidad.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Ejercicios

1. **2 puntos.** Considere el código C ed Reed-Solomon definido de la siguiente manera. Sea $\mathbb{F}_7$ el campo base y sea $\alpha = 3$.
   a) Escriba el vector $x_i = \alpha^{i-1}$ que define el código C.
   b) Encuentre una matriz generadora del código, asumiendo que $k = 3$.
   c) ¿Cuál es la distancia mínima del código?
   d) ¿Cuáles son los grados l_0 y l_1 de los polinomios $Q_0(x)$ y $Q_1(x)$ necesarios para decodificar palabras? Escriba el sistema de ecuaciones lineales para decodificar la palabra $w = (2, 6, 0, 5, 1, 3)$.
   e) Asumiendo que la matriz del sistema en forma reducida sea
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
   encuentre los polinomios $Q_0(x)$ y $Q_1(x)$.
   f) Encuentre el polinomios $f(x)$ que utilizó quien envió la palabra.
   g) Decodifique la palabra recibida.
2. **1 punto.** Demuestre que cualquier ideal en $\mathbb{Z}[i]$ distinto del ideal 0 contiene un entero.
3. **1 punto.** Sea G un grupo cualquiera y sea $G' = \{xyx^{-1}y^{-1}, x, y \in G\}$.
   a) Demuestre que G' es un subgrupo normal de G.
   b) Demuestre que G/G' es un grupo abeliano.

Date: 03 Diciembre 2020.

4. **1 punto.** Sea $f(x) = x^3 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$.
   a) Demuestre que $f(x)$ es irreducible.
   b) Encuentre el inverso de $g(x) = x^2 + 3x + 2$ en $\mathbb{Z}_7[x]/\langle f(x)\rangle$.
   [Sugerencia: acuérdese del algoritmo euclidiano.]