ÁLGEBRA ABSTRACTA Y CODIFICACIÓN: TERCER PARCIAL

MAURO ARTIGIANI

Reglas del juego

Los ejercicios se solucionarán en la clase del viernes 20 de Noviembre. Se aconseja solucionar estos ejercicios en grupos pequeños, de **máximo** 4 **personas**. Es posible trabajar con estudiantes de la otra sección del mismo curso. Todos los estudiantes deben entregar su propria versión de los ejercicios, escribiendo claramente los nombres con quiénes trabajaron. De no anotar los nombres de sus compañeros habrá penalidades según el caso. La idea es desarrollar los ejercicios juntos, pero **escribir soluciones de manera individual**. Si revisaron libros deben escribir las referencias de manera clara, dando la referencia del resultado utilizado y la página.

Las entregas de ejercicios serán aceptadas en formato `pdf`, escribiendo las soluciones en LaTeX(u otro editor de texto). También se pueden enviar escaneos o fotografiás de ejercicios escritos a mano. En este caso se pide utilizar hojas blancas o con lineas (no cuadriculadas) y escribir con un bolígrafo negro o azul oscuro (para facilitar el contraste). También se pide que las soluciones sean escritas de manera ordenada; se puede cambiar el orden de las soluciones.

Importante: Si las fotos no son legibles los ejercicios **no** serán calificados.

Fecha de entrega: 19 Noviembre 2020 a la medianoche.

Ejercicios

1. **1.5 puntos**. Sea C el código lineal de longitud 9, cuya matriz de control es
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Encuentre la dimensión de C;
   b) Encuentre la distancia mínima de C;
   c) Calcule los síndromes correspondientes a errores que C puede corregir;
   d) Diga si $000110011 \in C$ o no.
   e) Decodifique 110101101.
2. **1 punto**. Sea $g(x)$ el generador de un código cíclico de longitud 15 sobre $\mathbb{Z}_2$. Demuestre que $g(1) = 0$ si y solo si todas las palabras del código tienen un peso par.
3. **1.5 puntos**. Sea $F = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$ el campo finito con 4 elementos. Las operaciones en F siguen de estas reglas:
$$1 + 1 = 0, \qquad 1 + \omega = \omega^2 = \overline{\omega}.$$

Date: 12 Noviembre 2020.

a) Escriba las tablas de las operaciones en F;
b) Sea C el código lineal sobre F cuya matriz generadora es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega & \overline{\omega} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \overline{\omega} & \omega \end{pmatrix}.$$

Encuentre el peso mínimo de C y una matriz de control para C;
c) Demuestre que ningún código (no necesariamente lineal) sobre un alfabeto de 4 símbolos con la misma distancia mínima de C puede tener más palabras códigos que C.

4. **1 punto**. Sea H una matriz de control para el código lineal C sobre $\mathbb{Z}_2$ de longitud n y dimensión k. Construimos un nuevo código C' de longitud $n+1$ en la siguiente manera. Si $c_0c_1\cdots c_{n-1} \in C$ entonces $c_0c_1\cdots c_{n-1}c_n \in C'$, con

$$c_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}.$$

Encuentre la dimensión, distancia mínima y matriz de control de C' en función de los mismos para C.
[Sugerencia: considere dos casos dependiendo si el peso mínimo de C es par o impar. Además, busque una matriz de control para C' a bloque, utilizando H.]