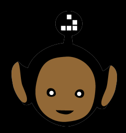
Ejercicos monitoría semana 4

Rodrigo Castillo

2 de septiembre de 2020



1. Sea R un anillo, demuestre que

1.1. si existe la identidad 1 es única

Demostracion:
Supongamos que existen 1 y $1'$.
por lo tanto, para cada $a \in R$ existe $b \in R$ tal que $ab = 1$ y $ab = 1'$.
por lo tanto $1 = 1'$ luego la identidad es única.

1.2. si un elemento a tiene inverso multiplicativo este es único

Supongamos que un elemento $a \in R$ tiene múltiples inversos multiplicativos, es decir que para todo $a \in R$ existen $b, b' \in R$ tales que $ab = 1$ y $ab' = 1$. por lo tanto
$b = \frac{1}{a}$
$b' = \frac{1}{a}$
$b = b'$
luego el inverso multiplicativo en un anillo es único
(no sé que tanto sentido tenga esta demostración jaja, preguntar)

2. Demuestre que los siguientes son subanillos de C

2.1. Los enteros de Gauss

$$Z[i] = \{a + bi, a, b \in Z\} \tag{1}$$

Demostración: sean $a, a' \in Z[i]$, por, por lo anto $a = a + bi, a, b \in Z$ y $a' = a' + b'i, a', b' \in Z$.

2.2. Los enteros de einstein

$$Z[w] = \{a + bw, a, b \in Z\} \tag{2}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}$

3. **Demuestre que si $\theta : R \to S$ es un homomorfismo invertible de anillos $\Rightarrow \theta^{-1} : R \to S$ también es un homomorfismo de anillos**

4. **Encuentre el nucleo de los siguientes homomorfismos**

- $\theta : [x, y] \to R$
  $f(x, y) \to f(0, 0)$
  donde $R[x, y]$ es el anillo de los polinomios en dos indeterminadas x y y , es decir: cada monomio tiene la forma $a_{ij}x^i y^j$ con $a_{ij} \in R$y $i, j \in N$

- $\theta : R[x] \to C$,
  $f(x) \to f(2 + i)$

sugerencia , encuentre el polinomo $p(x)$ de grado minimo en $ker(\theta)$ y después muestre que cualquier elemento de $ker(\theta)$ es de la forma $p(x)q(x)$ por algún $q(x) \in R[x]$.