Notación asintótica

Carlos E. Alvarez[1].

[1]Dep. de Matemáticas aplicadas y Ciencias de la Computación, Universidad del Rosario

2019-II

Notación asintótica

Recuerde la notación

$$f : A \to B, \tag{1}$$

en donde:

I) f es función
II) Dom $f = A$
III) Im $f = B$

Notación asintótica

Sea $N \in \mathbb{R}^+$ y

$$T : [0, \infty) \to [0, \infty), \tag{2}$$

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \tag{3}$$

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty), \tag{4}$$

$$h : [0, \infty) \to [0, \infty), \tag{5}$$

$$p : [0, \infty) \to [0, \infty), \tag{6}$$

$$q : [0, \infty) \to [0, \infty). \tag{7}$$

Notación asintótica

Definición 1:

Decimos que

Big-Oh

$$T(N) = O(f(N)) \tag{8}$$

si existen constantes $c, n_o \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n_o$

$$T(N) \leq cf(N). \tag{9}$$

Notación asintótica

Definición 2:

Decimos que

Big-Omega

$$T(N) = \Omega(g(N)) \tag{10}$$

si existen constantes $c, n_o \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n_o$

$$T(N) \geq cf(N). \tag{11}$$

Notación asintótica

Definición 3:

Decimos que

Theta

$$T(N) = \Theta(h(N)) \tag{12}$$

si y solo si

$$T(N) = O(h(N)) \ \text{ y } \ T(N) = \Omega(h(N)). \tag{13}$$

Definición 4:

Decimos que

Small-Oh

$$T(N) = o(p(N)) \tag{14}$$

si existen constantes $c, n_o \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n_o$

$$T(N) < cp(N). \tag{15}$$

Definición 5 (Small-Omega):

Decimos que

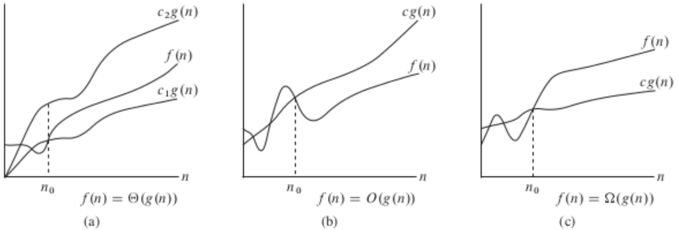
Small-Omega

$$T(N) = \omega(q(N)) \tag{16}$$

si existen constantes $c, n_o \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n_o$

$$T(N) > cq(N). \tag{17}$$

Notación asintótica



Notación asintótica

Note que en la notación asintótica el signo $=$ significa pertenencia a un conjunto. Por ejemplo:

$$T(N) = O(N^2) \tag{18}$$

y

$$T(N) \in O(N^2) \tag{19}$$

son equivalentes.

Notación asintótica

Regla 1:

Si $T_1(N) = O(f_1(N))$ y $T_2(N) = O(f_2(N))$, entonces

a. $T_1(N) + T_2(N) = O(f_1(N) + f_2(N))$

Regla 1 (prueba):

Dem: Suponga que $T_i(N) = O(f_i(N))$, para $i = 1, 2$. Luego

$$\exists \quad c_1, n_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.q.} \quad T_1(N) \leq c_1 f_1(N) \quad \forall \quad N \geq n_1 \quad (20)$$
$$\exists \quad c_2, n_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.q.} \quad T_2(N) \leq c_2 f_2(N) \quad \forall \quad N \geq n_2 \quad (21)$$

Notación asintótica

Sean $c = \max\{c_1, c_2\}$ y $n = \max\{n_1, n_2\}$, y sea $N \geq n$. Observe que

$$T_1(N) + T_2(N) \leq c_1 f_1(N) + c_2 f_2(N) \leq c f_1(N) + c f_2(N). \tag{22}$$

Es decir que existen $c, n \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n$

$$T_1(N) + T_2(N) \leq c(f_1(N) + f_2(N)). \tag{23}$$

Notación asintótica

Regla 2:

Si $T_1(N) = O(f_1(N))$ y $T_2(N) = O(f_2(N))$, entonces

1. $T_1(N)T_2(N) = O(f_1(N)f_2(N))$

Regla 2 (prueba):

Dem: Suponga que $T_i(N) = O(f_i(N))$, para $i = 1, 2$. Luego

$$\exists \quad c_1, n_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.q.} \quad T_1(N) \leq c_1 f_1(N) \quad \forall \quad N \geq n_1 \tag{24}$$
$$\exists \quad c_2, n_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.q.} \quad T_2(N) \leq c_2 f_2(N) \quad \forall \quad N \geq n_2 \tag{25}$$

Sean $c = c_1c_2$ y $n = \max\{n_1, n_2\}$, y sea $N \geq n$. Observe que

$$T_1(N)T_2(N) \leq c_1c_2f_1(N)f_2(N). \tag{26}$$

Es decir que existen $c, n \in \mathbb{R}^+$ t.q. para todo $N \geq n$

$$T_1(N)T_2(N) \leq c(f_1(N)f_2(N)). \tag{27}$$

Notación asintótica

Regla 3:

Sea $T(N)$ un polinomio de grado k, entonces

$$T(N) = O(N^k) \tag{28}$$

Notación asintótica

Regla 2 (prueba):

Prop:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i N^i = O(N^k),\ \ a_i > 0 \tag{29}$$

Notación asintótica

Dem: Por inducción sobre k

- Caso $k = 0$:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i N^i = a_0 = O(N^0) \tag{30}$$

- Caso inductivo: Suponga que $\sum_{i=0}^{k} a_i N^i = O(N^k)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} a_i N^i &= \sum_{i=0}^{k} a_i N^i + a_{k+1} N^{k+1} \\ &= O(N^k + N^{k+1}) \\ &= O(N^{k+1}) \end{aligned} \tag{31}$$

Notación asintótica

Por lo tanto $\sum_{i=0}^{k+1} a_i N^i = O(N^{k+1})$, y hemos demostrado que para todo $k \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k} a_i N^i = O(N^k) \tag{32}$$

Notación asintótica

Regla 4:

$(\ln N)^k = O(N)$ para todo $k \geq 0$.

Regla 4 (prueba):

Prop: Para todo $k \geq 0$

$$(\ln N)^k = O(N). \tag{33}$$

Lemma: Por regla de l'Hopital

$$\lim_{N \to \infty} \frac{(\ln N)^k}{N} = 0 \tag{34}$$

Notación asintótica

Por lo tanto, existe $c, n \in \mathbb{R}^+$ t.q. si $N \geq n$

$$\frac{(\ln N)^k}{N} \leq c, \tag{35}$$

es decir

$$(\ln N)^k \leq cN. \tag{36}$$