

# Axiomas de Orden

## Análisis Real



# Axiomas de Orden

Existe un subconjunto no vacío  $\mathbb{P}$  de  $\mathbb{R}$  llamado el conjunto de los números reales positivos, que satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $a, b \in \mathbb{P}$  entonces  $a + b \in \mathbb{P}$
2. Si  $a, b \in \mathbb{P}$  entonces  $a \cdot b \in \mathbb{P}$
3. Si  $a \in \mathbb{R}$  entonces ocurre una y sólo una de las siguientes proposiciones:

$$a \in \mathbb{P} \quad \text{o} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad -a \in \mathbb{P}$$

De esta manera podemos definir el conjunto de los números reales negativos como el conjunto formado por los opuestos de los positivos, esto es:  $\{-a : a \in \mathbb{P}\}$

1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$



1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$



1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$



1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos  $a > 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P}$

1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos  $a > 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos  $a \geq 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos  $a > 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos  $a \geq 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
3. Escribiremos  $a < 0$  para indicar que  $-a \in \mathbb{P}$



1. Se dice que un número real  $a$  es no negativo si  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real  $a$  es no positivo si  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos  $a > 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos  $a \geq 0$  para indicar que  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
3. Escribiremos  $a < 0$  para indicar que  $-a \in \mathbb{P}$
4. Escribiremos  $a \leq 0$  para indicar que  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

## Definición

*Sean  $a, b$  números reales*

- 1. Se dice que  $a$  es menor que  $b$  o que  $b$  es mayor que  $a$ , lo cual se denota como  $a < b$  o  $b > a$ , si  $a - b \in \mathbb{P}$*
- 2. Se dice que  $a$  es menor o igual que  $b$  o que  $b$  es mayor o igual que  $a$ , lo cual se denota como  $a \leq b$  o  $b \geq a$ , si  $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$*

## Teorema

1. Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$
2.  $1 > 0$
3. Si  $n \in \mathbb{Z}_+$  entonces  $n \geq 1$



## Teorema

1. Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$
2.  $1 > 0$
3. Si  $n \in \mathbb{Z}_+$  entonces  $n \geq 1$

## Teorema (Otras propiedades)

Sean  $a, b, c, d$  números reales

1. Si  $a > b$  entonces  $a + c > b + c$
2. Si  $a > b$  y  $c > 0$  entonces  $a \cdot c > b \cdot c$
3. Si  $a > b$  y  $c < 0$  entonces  $a \cdot c < b \cdot c$
4. Si  $a > 0$  entonces  $\frac{1}{a} > 0$
5. Si  $a > b$  y  $b > c$  entonces  $a > c$

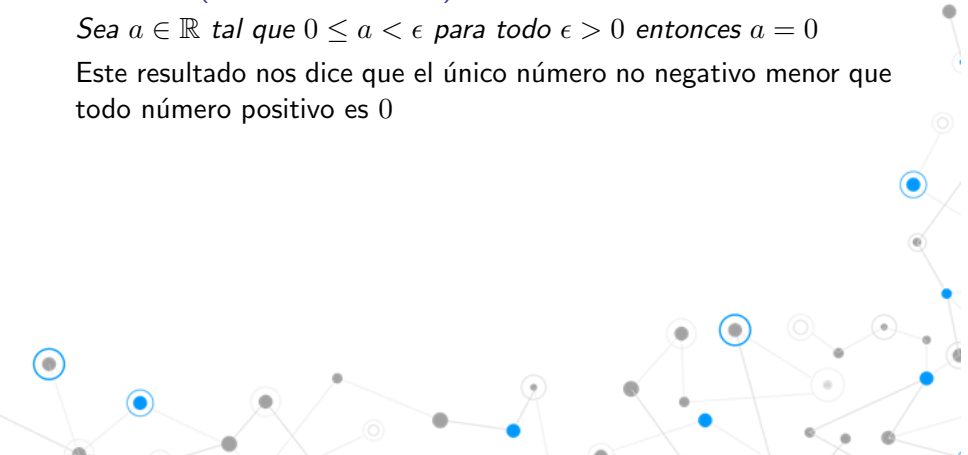
## Ejercicios:

1. Sean  $a, b$  números reales tales que  $a < b$ , muestre que
$$a < \frac{1}{2}(a + b) < b$$
2. Sea  $b$  un número real tal que  $b > 0$ , muestre que  $0 < \frac{1}{2}b < b$
3. Sean  $a, b$  números reales tales que  $a \cdot b > 0$ . Muestre que uno y solo uno de los siguientes casos ocurre
  - 3.1  $a > 0$  y  $b > 0$
  - 3.2  $a < 0$  y  $b < 0$

## Teorema (Arbitrariedad de $\epsilon$ )

*Sea  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq a < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  entonces  $a = 0$*

Este resultado nos dice que el único número no negativo menor que todo número positivo es 0



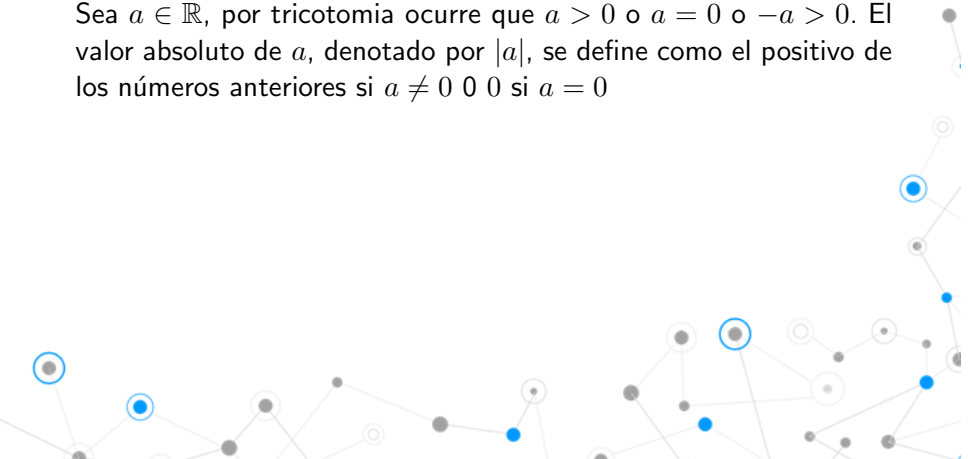
Ejercicios: Sean  $a, b$  números reales

1. Si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$  muestre que:  $a < b$  si y sólo si  $a^2 < b^2$
2. Si  $a > -1$  muestre que  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Desigualdad de Bernoulli

# Valor Absoluto

Sea  $a \in \mathbb{R}$ , por tricotomía ocurre que  $a > 0$  o  $a = 0$  o  $-a > 0$ . El valor absoluto de  $a$ , denotado por  $|a|$ , se define como el positivo de los números anteriores si  $a \neq 0$  o  $0$  si  $a = 0$

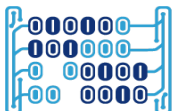




## Teorema (Propiedades del Valor Absoluto)

Sean  $a, b$  números reales, entonces

1.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2.  $|a|^2 = a^2$
3. Sea  $c \geq 0$ ,  $|a| \leq c$  si y sólo si  $-c \leq a \leq c$
4.  $-|a| \leq a \leq |a|$
5. Sea  $x \in \mathbb{R}$  si  $a \leq x \leq b$  entonces  $|x| \leq \max \{|a|, |b|\}$
6.  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . *Desigualdad triangular*
7.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$
8.  $|a + b| \geq |a| - |b|$



**MACC**

Matemáticas Aplicadas y  
Ciencias de la Computación

LO ÚNICO  
IMPOSIBLE  
ES AQUELLO  
QUE NO  
INTENTAS