Los números Reales, Axiomas de Cuerpo

Análisis Real

Los números Reales

Consideremos un conjunto no vacío, el cual denotaremos por $\mathbb{R}$ y llamaremos el conjunto de los números y el cual satisface un conjunto de axiomas, los cuales hemos separado de forma natural en tres grupos:

1. Axiomas de Cuerpo
2. Axiomas de Orden
3. Axioma de Completitud

Los elementos de $\mathbb{R}$ se denominan números reales

Axiomas de Cuerpo

Junto con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones operaciones binarias llamadas suma y multiplicación, denotadas por $+$ y $\cdot$ respectivamente tales que :

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & +(x,y) = x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \cdot(x,y) = x\cdot y \end{array}$$

$\mathbb{R}$ junto con las operaciones $+$ y $\cdot$ satisface los siguientes axiomas para a, b, c números reales cualesquiera

1. Propiedad Conmutativa: $$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$

1. Propiedad Conmutativa:
$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$

2. Propiedad Asociativa:
$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot (b\cdot c) \end{aligned}$$

1. Propiedad Conmutativa: $$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$
2. Propiedad Asociativa: $$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$
3. Propiedad Distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

1. Propiedad Conmutativa: $$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$
2. Propiedad Asociativa: $$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$
3. Propiedad Distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4. Existencia de neutro: Existe un número real el cual se denomina cero y se denota por 0, el cual satisface: $a+0=0+a=a$ para todo número real a

1. Propiedad Conmutativa:
$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$
2. Propiedad Asociativa:
$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$
3. Propiedad Distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4. Existencia de neutro: Existe un número real el cual se denomina cero y se denota por 0, el cual satisface: $a+0=0+a=a$ para todo número real a
5. Existencia de opuesto: Para todo número real a existe un número real y tal que $a+y=y+a=0$. El número real y se denomina opuesto de a y se denota por $-a$

1. Propiedad Conmutativa: $$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$
2. Propiedad Asociativa: $$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$
3. Propiedad Distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4. Existencia de neutro: Existe un número real el cual se denomina cero y se denota por 0, el cual satisface: $a+0=0+a=a$ para todo número real a
5. Existencia de opuesto: Para todo número real a existe un número real y tal que $a+y=y+a=0$. El número real y se denomina opuesto de a y se denota por $-a$
6. Existencia de identidad: Existe un número real, distinto de cero, el cual se denomina uno y se denota por 1, el cual satisface: $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ para todo número real a

1. Propiedad Conmutativa: $$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned}$$
2. Propiedad Asociativa: $$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned}$$
3. Propiedad Distributiva: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4. Existencia de neutro: Existe un número real el cual se denomina cero y se denota por 0, el cual satisface: $a+0=0+a=a$ para todo número real a
5. Existencia de opuesto: Para todo número real a existe un número real y tal que $a+y=y+a=0$. El número real y se denomina opuesto de a y se denota por $-a$
6. Existencia de identidad: Existe un número real, distinto de cero, el cual se denomina uno y se denota por 1, el cual satisface: $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ para todo número real a
7. Existencia de inverso: Para todo número real a, distinto de cero, existe un número real y tal que $a\cdot y = y\cdot a = 1$. El número real y se denomina inverso de a y se denota por $\dfrac{1}{a}$

Teorema (Unicidad del neutro y de la identidad)

Sean a, b, x números reales

1. *Si $x + a = a$ entonces $x = 0$*
2. *Si $x \cdot b = b$ y $b \neq 0$ entonces $x = 1$*

Teorema (Unicidad del neutro y de la identidad)

Sean a, b, x *números reales*

1. *Si* $x + a = a$ *entonces* $x = 0$
2. *Si* $x \cdot b = b$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $x = 1$

Teorema

Sean a, b *números reales*

1. $a \cdot 0 = 0$
2. *Si* $a \cdot b = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$

Teorema (Unicidad del opuesto y del inverso)

Sean a, b, x *números reales*

1. *Si* $x + a = 0$ *entonces* $x = -a$
2. *Si* $x \cdot b = 1$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $x = \dfrac{1}{b}$

¿Cómo se define la resta o sustracción de números Reales?

Sea a, b números reales, la resta o sustracción se define de la siguiente manera:

$$a - b = a + (-b)$$

¿Cómo se define la resta o sustracción de números Reales?
Sea a, b números reales, la resta o sustracción se define de la siguiente manera:

$$a - b = a + (-b)$$

¿Cómo se define la división o el cociente de números Reales?
Sea a, b números reales, $b \neq 0$, división o el cociente se define de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Ejercicio: Demuestre las siguientes "leyes del álgebra" para $\mathbb{R}$ usando los axiomas. x, y, z representan números reales

1. $-0 = 0$
2. $-(-x) = x$
3. $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$
4. $(-1) \cdot x = -x$
5. Si $x \neq 0$ entonces $x^{-1} \neq 0$
6. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

Los números Enteros

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si satisface las siguientes condiciones

1. $1 \in A$
2. Si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

Los números Enteros

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si satisface las siguientes condiciones

1. $1 \in A$
2. Si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los Enteros Positivos, se define como:

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

Los números Enteros

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si satisface las siguientes condiciones

1. $1 \in A$
2. Si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los Enteros Positivos, se define como:

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

es decir, $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

Los números Enteros

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si satisface las siguientes condiciones

1. $1 \in A$
2. Si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los Enteros Positivos, se define como:

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

es decir, $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los Enteros se define como la unión de los enteros positivos, los opuestos de éstos y el cero

Los números Enteros

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si satisface las siguientes condiciones

1. $1 \in A$
2. Si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los Enteros Positivos, se define como:

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

es decir, $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los Enteros se define como la unión de los enteros positivos, los opuestos de éstos y el cero

Ejercicio: Muestre que $\mathbb{Z}_+$ es el subconjunto inductivo más pequeño de $\mathbb{R}$

Teorema (Principio de Inducción)

Si A es un conjunto inductivo de Enteros Positivos entonces $A = \mathbb{Z}_+$

Teorema (Principio de Inducción)

Si A es un conjunto inductivo de Enteros Positivos entonces $A = \mathbb{Z}_+$

Ejercicios:Muestre que:

1. La suma de enteros positivos es un entero positivo
2. El producto de enteros positivos es un entero positivo
3. La suma de enteros es un entero
4. El producto de enteros es un entero

Teorema (Principio de Inducción)

Si A es un conjunto inductivo de Enteros Positivos entonces $A = \mathbb{Z}_+$

Ejercicios:Muestre que:

1. La suma de enteros positivos es un entero positivo
2. El producto de enteros positivos es un entero positivo
3. La suma de enteros es un entero
4. El producto de enteros es un entero

¿Cómo se definen potencias enteras de números Reales?
Sea a un número real, $n \in \mathbb{Z}_+$ entonces:

1. $a^1 := a$
2. $a^2 := a \cdot a$
3. $a^{n+1} := a^n \cdot a$
4. $a^0 := 1$
5. $a^{-1} := \dfrac{1}{a}$
6. $a^{-n} := \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

Los Números Racionales

El conjunto de los Números Racionales $\mathbb{Q}$ se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} :\; a, b \in \mathbb{Z};\; b \neq 0 \right\}$$

Los Números Racionales

El conjunto de los Números Racionales $\mathbb{Q}$ se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} :\ a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}$$

Ejercicio:Muestre que:

1. La suma de racionales es un racional
2. El producto de racionales es un racional
3. Los racionales son inductivos

Teorema

No existe un número racional r *tal que* $r^2 = 2$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación