Taller #1

1. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?
2. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x+y$, $x-y$, xy, x/y, y/x son todos irracionales.
3. Muestre que la intersección arbitraria de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo
4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un único entero n tal que$n \leq x < n+1$. Este número n se denomina la parte entera de x y se denota por $[|x|]$
5. Muestre que no existe un número racional r tal que $r^2 = 3$
6. Mostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional
7. Sea $x > 0$, muestre que existe un entero positivo n tal que $\dfrac{1}{2^n} < x$
8. Si $c > 1$ y $m, n \in \mathbb{Z}_+$, muestre que $c^m > c^n$ si y sólo si $m > n$
9. Si $0 < c < 1$ y $m, n \in \mathbb{Z}_+$, muestre que $c^m < c^n$ si y sólo si $m > n$
10. Sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Defina el conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$. Muestre que $\inf(-A) = -\sup(A)$
11. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Para $k \in \mathbb{R}$ defina el conjunto $kA = \{kx : x \in A\}$. Muestre que si $k < 0$ entonces $k \inf(A) = \sup(kA)$
12. Encontrar el supremo y el ínfimo del conjunto $A = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} : m, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$. Demuestre formalmente el resultado encontrado.
13. Encontrar el supremo y el ínfimo, si existen, del conjunto $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$. Demuestre formalmente el resultado encontrado.
14. Muestre que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}+} \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right] = \{0\}$
15. Sean A y B conjuntos finitos, muestre que $A \times B$ es finito
16. Muestre que la unión numerables de conjuntos numerables es numerale
17. ¿La unión arbitraria de conjuntos numerables es numerable?
18. Sean A, B cojuntos tales que $A \subset B$, muestre que si A no es finito entonces B no es finito
19. Sea A un conjunto infinito, $B \subset A$ un conjunto finito. Muestre que $A \setminus B$ es infinito y como consecuencia $A \setminus B \neq \emptyset$

20. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Muestre que si B es numerable entonces A es numerable

21. Muestre que ser equipotentes es una relación de equivalencia

22. Mostrar la desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

Esta desigualdad es la desigualdad triángular de la norma Euclídea en $\mathbb{R}^n$, esto es: Si $a = (a_1, ..., a_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n)$ son vectores n-dimensionales entonces $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, donde $\|a\| = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2}$

23. Para $a \geq 0$ se define $\sqrt{a}$ como el único número no negativo b tal que $b^2 = a$. Muestre que $|a| = \sqrt{a^2}$

24. Hacer todos los ejercicios dejados en clase