Axiomas de Orden

Análisis Real

Axiomas de Orden

Existe un subconjunto no vacío $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$ llamado el conjunto de los números reales positivos, que satisface las siguientes propiedades:

1. Si $a, b \in \mathbb{P}$ entonces $a + b \in \mathbb{P}$
2. Si $a, b \in \mathbb{P}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{P}$
3. Si $a \in \mathbb{R}$ entonces ocurre una y sólo una de las siguientes proposiciones:

$$a \in \mathbb{P} \quad \text{o} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad -a \in \mathbb{P}$$

De esta manera podemos definir el conjunto de los números reales negativos como el conjunto formado por los opuestos de los positivos, esto es: $\{-a : a \in \mathbb{P}\}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos $a > 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos $a > 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos $a \geq 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos $a > 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos $a \geq 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
3. Escribiremos $a < 0$ para indicar que $-a \in \mathbb{P}$

1. Se dice que un número real a es no negativo si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
2. Se dice que un número real a es no positivo si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Notación:

1. Escribiremos $a > 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P}$
2. Escribiremos $a \geq 0$ para indicar que $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$
3. Escribiremos $a < 0$ para indicar que $-a \in \mathbb{P}$
4. Escribiremos $a \leq 0$ para indicar que $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$

Definición

Sean a, b números reales

1. *Se dice que a es menor que b o que b es mayor que a, lo cual se denota como $a < b$ o $b > a$, si $a - b \in \mathbb{P}$*
2. *Se dice que a es menor o igual que b o que b es mayor o igual que a, lo cual se denota como $a \leq b$ o $b \geq a$, si $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$*

Teorema

1. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $a^2 > 0$
2. $1 > 0$
3. *Si* $n \in \mathbb{Z}_+$ *entonces* $n \geq 1$

Teorema

1. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $a^2 > 0$
2. $1 > 0$
3. *Si* $n \in \mathbb{Z}_+$ *entonces* $n \geq 1$

Teorema (Otras propiedades)

Sean a, b, c, d *números reales*

1. *Si* $a > b$ *entonces* $a + c > b + c$
2. *Si* $a > b$ *y* $c > 0$ *entonces entonces* $a \cdot c > b \cdot c$
3. *Si* $a > b$ *y* $c < 0$ *entonces entonces* $a \cdot c < b \cdot c$
4. *Si* $a > 0$ *entonces* $\dfrac{1}{a} > 0$
5. *Si* $a > b$ *y* $b > c$ *entonces* $a > c$

Ejercicios:

1. Sean a, b números reales tales que $a < b$, muestre que $a < \frac{1}{2}(a+b) < 2$
2. Sea b un número real tal que $b > 0$, muestre que $0 < \frac{1}{2}b < b$
3. Sean a, b números reales tales que $a \cdot b > 0$. Muestre que uno y solo uno de los siguientes casos ocurre
   3.1 $a > 0$ y $b > 0$
   3.2 $a < 0$ y $b < 0$

Teorema (Arbitrariedad de ϵ)

Sea $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leq a < \epsilon$ *para todo* $\epsilon > 0$ *entonces* $a = 0$

Este resultado nos dice que el único número no negativo menor que todo número positivo es 0

Ejercicios: Sean a, b números reales

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ muestre que: $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$
2. Si $a > -1$ muestre que $(1 + a)^n \geq 1 + na$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Desigualdad de Bernoulli

Valor Absoluto

Sea $a \in \mathbb{R}$, por tricotomia ocurre que $a > 0$ o $a = 0$ o $-a > 0$. El valor absoluto de a, denotado por $|a|$, se define como el positivo de los números anteriores si $a \neq 0$ 0 0 si $a = 0$

Teorema (Propiedades del Valor Absoluto)

Sean a, b números reales, entonces

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $|a|^2 = a^2$
3. *Sea* $c \geq 0$, $|a| \leq c$ *si y sólo si* $-c \leq a \leq c$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *si* $a \leq x \leq b$ *entonces* $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$. *Desigualdad triangular*
7. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
8. $|a + b| \geq |a| - |b|$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación