Axioma de Completitud de los números Reales

Análisis Real

Axioma de Completitud de los números Reales

El axioma de completitud, entre otras cosas, nos permitirá introducir cierto subconjunto de lo números Reales: los Irracionales, además de proporcionar a los Reales de una propiedad de "densidad" que es fundamental en muchos teoremas del Análisis

Conjuntos Acotados

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se dice que es:

1. Acotado superiormente si existe un número $u \in \mathbb{R}$ tal que

   $$x \leq u \text{ para todo } x \in S.$$

   En este caso u se denomina cota superior de S

Conjuntos Acotados

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se dice que es:

1. Acotado superiormente si existe un número $u \in \mathbb{R}$ tal que
$$x \leq u \text{ para todo } x \in S.$$
En este caso u se denomina cota superior de S
2. Acotado inferiormente si existe un número $w \in \mathbb{R}$ tal que
$$w \leq x \text{ para todo } x \in S.$$
En este caso w se denomina cota inferior de S

Conjuntos Acotados

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se dice que es:

1. Acotado superiormente si existe un número $u \in \mathbb{R}$ tal que
$$x \leq u \text{ para todo } x \in S.$$
En este caso u se denomina cota superior de S
2. Acotado inferiormente si existe un número $w \in \mathbb{R}$ tal que
$$w \leq x \text{ para todo } x \in S.$$
En este caso w se denomina cota inferior de S
3. Acotado si es acotado superior e inferiormente, en caso contrario se dice que es no acotado

Ejemplos de subconjuntos acotados y no acotados en $\mathbb{R}$

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ está acotado inferiormente pero no superiormente.

Ejemplos de subconjuntos acotados y no acotados en $\mathbb{R}$

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ está acotado inferiormente pero no superiormente.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ está acotado superior e inferiormente.

Ejemplos de subconjuntos acotados y no acotados en $\mathbb{R}$

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ está acotado inferiormente pero no superiormente.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ está acotado superior e inferiormente.

Ejemplos de subconjuntos acotados y no acotados en $\mathbb{R}$

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ está acotado inferiormente pero no superiormente.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ está acotado superior e inferiormente.

Si un conjunto es acotado, ¿Cuántas cotas puede tener?

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \max S$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \max S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \min S$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \max S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \min S$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \max S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \min S$

De los siguientes conjuntos, ¿cuál posee máximo? ¿cuál posee mínimo?

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \max S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \min S$

De los siguientes conjuntos, ¿cuál posee máximo? ¿cuál posee mínimo?

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \text{máx}\, S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \text{mín}\, S$

De los siguientes conjuntos, ¿cuál posee máximo? ¿cuál posee mínimo?

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

Máximo y mínimo de un conjunto

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Si u es una cota superior de S y $u \in S$ entonces se dice que u es el máximo de S, lo cual se denota por; $u = \text{máx}\, S$
2. Si w es una cota inferior de S y $w \in S$ entonces se dice que w es el mínimo de S, lo cual se denota por; $w = \text{mín}\, S$

De los siguientes conjuntos, ¿cuál posee máximo? ¿cuál posee mínimo?

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

Ejercicio: Demostrar que el máximo y el mínimo de un conjunto, en caso de que existan, son únicos

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente. Un número real b se denomina supremo de S, lo cual se denota por $b = \sup S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. b es cota superior de S

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente. Un número real b se denomina supremo de S, lo cual se denota por $b = \sup S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. b es cota superior de S
2. Si u es otra cota superior de S entonces $b \leq u$

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente. Un número real b se denomina supremo de S, lo cual se denota por $b = \sup S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. b es cota superior de S
2. Si u es otra cota superior de S entonces $b \leq u$

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente. Un número real b se denomina supremo de S, lo cual se denota por $b = \sup S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. b es cota superior de S
2. Si u es otra cota superior de S entonces $b \leq u$

Lo anterior nos dice que el supremo de un conjunto es la menor de las cotas superiores

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado inferiormente. Un número real a se denomina ínfimo de S, lo cual se denota por $b = \text{ínf}\, S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. a es cota inferior de S

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado inferiormente. Un número real a se denomina ínfimo de S, lo cual se denota por $b = \text{ínf } S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. a es cota inferior de S
2. Si w es otra cota inferior de S entonces $w \leq a$

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado inferiormente. Un número real a se denomina ínfimo de S, lo cual se denota por $b = \text{ínf}\, S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. a es cota inferior de S
2. Si w es otra cota inferior de S entonces $w \leq a$

Supremos e ínfimos

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado inferiormente. Un número real a se denomina ínfimo de S, lo cual se denota por $b = \text{ínf}\, S$, si satisface las siguientes dos condiciones:

1. a es cota inferior de S
2. Si w es otra cota inferior de S entonces $w \leq a$

Lo anterior nos dice que el ínfimo de un conjunto es la mayor de las cotas inferiores

Ejercicio: Muestre que el ínfimo y el supremo de un conjunto, si existen, son únicos

Axioma de Completitud

Todo subconjunto **no vacío** de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente tiene supremo

Axioma de Completitud

Todo subconjunto **no vacío** de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente tiene supremo

Como consecuencia del axioma de completitud se deduce que: Todo subconjunto **no vacío** de $\mathbb{R}$ que esté acotado inferiormente tiene ínfimo

Propiedad de Aproximación

Sea S un subconjunto no vacío y acotado de números reales

1. $b = \sup S$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in S$ tal que:
$$b - \epsilon < x_\epsilon$$

Propiedad de Aproximación

Sea S un subconjunto no vacío y acotado de números reales

1. $b = \sup S$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in S$ tal que:
$$b - \epsilon < x_\epsilon$$
2. $a = \inf S$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in S$ tal que:
$$x_\epsilon < a + \epsilon$$

Propiedad Aditiva

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, se define el conjunto:

$$C = \{x + y : x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Si A y B están acotados superiormente entonces C está acotado superiormente y $\sup C = \sup A + \sup B$

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene mínimo.

El Axioma de Completitud, entre otras cosas, se usa para demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos no es un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Esto es lo que se denomina propiedad Arquimedeana

Propiedad Arquimedeana

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n_x \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x < n_x$

Consecuencias de la Propiedad Arquimedeana

1. El conjunto de los enteros positivos no está acotado superiormente
2. Si $S\,\{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ entonces $\inf S = 0$
3. Si $x > 0$ entonces existe $n_x \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\dfrac{1}{n_x} < x$
4. Si $x > 0$ entonces existe $n_x \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n_x - 1 \leq x < n_x$

Otra consecuencia del Axioma de Completitud

Existe un número real b tal que $b^2 = 2$

Sean x, y números reales tales que $x < y$ entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$

Sean x, y números reales tales que $x < y$ entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$

Sean x, y números reales tales que $x < y$ entonces existe un número irracional w tal que $x < w < y$

Ejercicios

1. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Muestre que si $A \subset B$ y y B está acotado entonces $\inf B \leq \inf A$ y $\sup A \leq \sup B$
2. Sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Defina el conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$. Muestre que A está acotado inferiormente
3. Muestre que todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente de $\mathbb{R}$ tiene ínfimo
4. Muestre que todo subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{Z}$ tiene máximo
5. Encontrar el supremo y el ínfimo del conjunto $A = \left\{\dfrac{3+2n}{3-2n} : n \in \mathbb{Z}_+\right\}$

Ejercicios

1. Encontrar el supremo y el ínfimo, si existen, del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 12 < 0\}$
2. Hallar un número racional entre $\sqrt{10}$ y $\sqrt{11}$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación