Ejercicios tercera tanda Calculo3

Rodrigo Castillo y Carlos Andres Muñoz

May 2020

1 Primer Punto(Ejercicio 1-b)

Encuentre el rotacional y la divergencia de $(x, y, z) = \frac{x}{z}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$

1.1 Rotacional

El rotacional de un vector $\vec{F}$ perteneciente a R^3 se define como

∇ x $\vec{F} =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + \frac{y}{z^2}) - \vec{j}(0 + \frac{x}{z^2}) + \vec{k}(0 - 0) =< \frac{y}{z^2}, -\frac{x}{z^2}, 0 >$$

1.2 Divergencia

La divergencia es un numero Real que se define como la suma de las derivadas parciales de $\nabla \cdot \vec{F}$

$$= (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})$$

Luego, sea $P = \frac{x}{z}, Q = \frac{y}{z}$ y $R = \frac{1}{z}$ entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{z^2}$$

Como resultado,

$$div\vec{F} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{2z}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{2z+1}{z^2}$$

2 Punto 3

El toro T se puede representar paramétricamente por la función $\phi : D \to R^3$, donde ϕ viene dada por las funciones coordenadas

$$x = (R + cos\phi)cos\theta, y = (R + cos\phi)sen\theta, z = sen\phi$$

D es el rectangulo $[0, 2\pi]x[0, 2\pi]$, y el valor de R es constante y mayor que 1. Demuestre que el área superficial del toro es:

$$A(T) = (2\theta)^2 R$$

Se define como el area de una superfice como la siguiente integral:

$$A(T) = \int\int_D \|T_\theta \times T_\phi\| d\theta d\phi$$

Donde $_\theta$ y T_ϕ son vectores tangentes a la superficie y estos estan definidos como:

$$T_\theta = (\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta})$$

$$T_\phi = (\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi})$$

Luego sus derivadas parcieles son:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = (R + cos\phi)(-sen\theta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = (R + cos\phi)cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = cos\theta(-sen\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = sen\theta(-sen\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = cos\phi$$

Luego:

$$T_\theta = ((R + cos\phi)(-sen\theta), (R + cos\phi)cos\theta, 0)$$

$$T_\phi = (cos\theta(-sen\phi), sen\theta(-sen\phi), cos\phi)$$

Ahora vamos a determinar $T_\theta \times T_\phi =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (R + cos\phi)(-sen\theta) & (R + cos\phi)cos\theta & 0 \\ cos\theta(-sen\phi) & sen\theta(-sen\phi) & cos\phi \end{vmatrix}$

Como resultado tenemos que:

$$T_\theta \times T_\phi = \vec{i}((R + cos\phi)cos\theta(cos\phi) - 0)) - \vec{j}((R + cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi) - 0) +$$

$$\vec{k}((R+cos\phi)(-sen\theta)(sen\theta(-sen\phi)) - (cos\theta(-sen\phi)((R+cos\phi)cos\theta))$$
$$= \vec{i}((R+cos\phi)cos\theta(cos\phi))) - \vec{j}((R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi))+$$
$$\vec{k}((R+cos\phi)(-sen\theta)(-sen\theta(sen\phi)) - (cos\theta(-sen\phi)((R+cos\phi)cos\theta))$$
$$= \vec{i}((R+cos\phi)cos\theta(cos\phi))) - \vec{j}((R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi))+$$
$$\vec{k}((R+cos\phi)(sen^2\theta)((sen\phi)) + (cos^2\theta(sen\phi)((R+cos\phi)))$$
$$= \vec{i}((R+cos\phi)cos\theta(cos\phi))) - \vec{j}((R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi))+$$
$$\vec{k}((sen^2\theta + cos^2\theta)((R+cos\phi)(sen\phi))$$
$$= \vec{i}((R+cos\phi)cos\theta(cos\phi))) - \vec{j}((R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi))+$$
$$\vec{k}((R+cos\phi)(sen\phi))$$

Como resultado obtenemos que:

$T_\theta \times T_\phi = \vec{i}((R+cos\phi)cos\theta(cos\phi))) - \vec{j}((R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi)) + \vec{k}((R+cos\phi)(sen\phi))$

$$< (R+cos\phi)cos\theta(cos\phi), (R+cos\phi)(-sen\theta)(cos\phi), (R+cos\phi)(sen\phi) >$$

Luego $\|T_\theta \times T_\phi\| = (R+cos\phi)$ Al evaluar en la integral tenemos que:

$$A(T) = \int\int_D \|T_\theta \times T_\phi\| d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R + cos\phi d\theta d\phi =$$

Primeramente:

$$\int_0^{2\pi} R + cos\phi d\theta = \theta(R+cos\phi)\mid_0^{2\pi} = 2\pi(R+cos\phi)$$

Y finalmente:

$$\int_0^{2\pi} 2\pi(R+cos\phi)d\phi = 2\pi\int_0^{2\pi} R+cos\phi d\phi = 2\pi(\int_0^{2\pi} Rd\phi + \int_0^{2\pi} cos\phi d\phi) = 2\pi(R\phi + sen\phi)\mid_0^{2\pi} =$$
$$2\pi((R2\pi - 0) - (0-0)) = (2\pi)^2 R$$