Calculo3: Actividad II

Rodrigo Castillo y Carlos Muñoz

16 Mayo 2020

1 Teorema de Green

1.1 Ejercicio 2

Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de linea a lo largo de la curva dada, positiva orientada:
Primero tendremos en cuenta el siguiente teorema:
Teorema de Green: Sea C una curva suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada del plano y sea R la región delimitada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una region abierta que contiene a R, entonces:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_R (\frac{\partial Q}{\partial x}) - (\frac{\partial P}{\partial y})dA$$

- $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + cosy^2)dy$ donde C es la frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$
  En este primer punto utilizaremos el teorema de Green para evaluar la integral sobre la curva C, primero encontraremos las derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ con $Q = (2x + cosy^2)$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ con $P = y + e^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

  Luego por el Teorema de Green tenemos que:

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + cosy^2)dy = \int\int_R (2-1)dA = \int\int_R dA$$

  Lo siguiente será encontrar la región delimitada por la curva C:

$$R = \{(x, y) \in R^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

  Luego:

$$\int\int_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1dydx$$

Resolviendo:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1dy = y|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x^2$$

Por otra parte:

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

- $\int_C (y^2 - tan^{-1}x)dx + (3x + siny)dy$ donde C es la frontera de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$
A continuación, utilizaremos el teorema de Green para evaluar la integral sobre la curva C, entonces hallaremos las derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ con $Q = 3x + siny$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ con $P = y^2 - tan^{-1}x$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

Por el Teorema de Green tenemos lo siguiente:

$$\int_C (y^2 - tan^{-1}x)dx + (3x + siny)dy = \int\int_R (3 - 2y)dA$$

Ahora, hallaremos la región que esta delimitada por la región C:

$$R = \{(x, y) \in R^2 : x^2 \leq y \leq 4 \wedge -2 \leq x \leq 2\}$$

Luego:

$$\int\int_R (3 - 2y)dA = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (3 - 2y)dydx$$

Primeramente obtenemos que:

$$\int_{x^2}^4 (3-2y)dy = 3\int_{x^2}^4 dy - 2\int_{x^2}^4 ydy = 3y - y^2|_{x^2}^4 = (12-16) - (3x^2 - x^4) = -4 - 3x^2 + x^4$$

Luego:

$$\int_{-2}^2 -4 - 3x^2 + x^4 dx = -4\int_{-2}^2 dx - 3\int_{-2}^2 x^2 dx + \int_{-2}^2 x^4 dx$$

$$= 4x - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = -4x - x^3 + \frac{x^5}{5}\bigg|_{-2}^2 = (-8 - 8 + \frac{32}{5}) - (8 + 8 - \frac{32}{5})$$

$$= 32 + \frac{64}{5} = \frac{-160 + 64}{5} = \frac{-96}{5}$$