Primer Parcial

8 de Septiembre 2020

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **110 minutos: de 9:00 a 10:50**. Los diez minutos entre las 10:50 y 11:00 se destinarán a subir la información de forma correcta.
- Debe entrar al aula virtual del curso (por zoom) y encender la cámara web (puede ser mediante el celular).
- Sólo se contestarán preguntas sobre los enunciados del parcial, durante los primeros 10 minutos.
- Unicamente puede utilizar R como calculadora para resolver los problemas, exceptuando los procedimientos del punto 4.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- En todos los puntos que use `R`, debe justificar el procedimiento tanto en papel (no el código) y debe colocar el código usado en un archivo Rmarkdown (o archivo .R) con nombre `NombreApellido.Rmd`, y posteriormente adjuntarlo en `e-aulas`.
- Puede enviar fotos rápidas de los procesos de cada punto al acabar el parcial. Posteriormente, puede enviar las imágenes escaneadas (o foto) con buena calidad de los procedimientos detallados de forma clara y ordenada. El archivo .Rmd (o .R) deben adjuntarlo al acabar el parcial.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.

1. [20 ptos.] Determine la distribución del vector aleatorio $Y = \mathcal{A}X$ con $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $X = (X_1, X_2)'$ tiene una distribución normal estándar bidimensional.

   a) [10 ptos.] Demuestre que las variables aleatorias transformadas Y_1 y Y_2 son independientes.

   b) [10 ptos.] Dé una interpretación geométrica de este resultado basada en los contornos de densidad constante.

2. [10 ptos.] Muestre que $|\mathbf{S}| = (s_{11}s_{22}\cdots s_{pp})\,|\mathbf{R}|$. Donde $\mathbf{S}$ es la matriz de covarianza y $\mathbf{R}$ es la matriz de correlación. Sugerencia: recuerde que $\mathbf{S} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{R}\mathbf{D}^{1/2}$, donde $D = \operatorname{diag}(s_{11}, s_{22}, \cdots, s_{pp})$.

3. [40 ptos.] Considere $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$. Una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ independiente e idénticamente distribuida proporciona:

$$\bar{x} = (1, 0, 2)^\top \quad \text{and} \quad \mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Donde $\mathcal{S}_n$ es la matriz de covarianza **sesgada** de la muestra.

   a) [15 ptos.] Sabiendo que los valores propios de S son $(6, 3, 1)'$, describa una región de 95 % de confianza para μ

   b) [15 ptos.] Calcule los intervalos de confianza simultáneos T^2 para μ_1, μ_2 y μ_3

   c) [10 ptos.] ¿Podemos afirmar que μ_1 es un promedio de μ_2 y μ_3?

4. [30 ptos.] Se midieron las longitudes y los anchos del pétalo y sépalo de 4 especies de flores de plantas iris. De tal forma que las variables corresponden a X_1 = Sepal.Length, X_2 = Sepal.Width y X_3 = Petal.Length, X_4 = Petal.Width. Cargue este conjunto de datos en **R** (se encuentra por defecto como `iris`) y seleccione la especie `setosa`.

   a) [15 ptos.] Calcule los intervalos de Bonferroni del 95 % de confianza simultáneos para las cuatro componentes de medias.

   b) [15 ptos.] Proponga un valor del vector de medias que se encuentre dentro de la región de confianza hiper-elipsoidal del 95 %. Compruebe que es así.