# Repaso de Álgebra

## Vectores Media y Matrices de Covarianza
## Desigualdades y Maximización de Matrices

Santiago Alférez

Agosto de 2020

Análisis Estadístico de Datos
MACC

Universidad del Rosario

# Contenidos


Ejercicio de la clase pasada

Vectores y matrices aleatorios

Vectores Media y Matrices de Covarianza

Partición de la Matriz de Covarianzas

Vector de Media y Matriz de Covarianzas para Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias

Desigualdades y Maximización de Matrices

# Ejercicio de la clase pasada

### Ejercicio 3

Sea $\underset{(m\times m)}{\mathbf{A}^{1/2}} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i' = \mathbf{P}\Lambda^{1/2}\mathbf{P}'$, donde $\mathbf{PP}' = \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}$. (Los $\lambda_i$ 's y los $\mathbf{e}_i$ 's son los valores propios y vectores propios de la matriz A). Demuestre las 4 propiedades de la raíz cuadrada de una matriz.

# Vectores y matrices aleatorios

**Vector aleatorio**

Es un vector cuyos elementos son variables aleatorias

**Matriz aleatoria**

Es una matriz cuyos elementos son variables aleatorias

**Valor esperado de una matriz aleatoria**

El valor esperado de una matriz (o vector) aleatoria es la matriz (o vector) compuesta de los valores esperados de cada uno de sus elementos.

## Valor esperado de una matriz aleatoria

Sea $\mathbf{X} = \{X_{ij}\}$ una matriz aleatoria de $n \times p$. Entonces, el valor esperado $\mathbf{X}$, denotado por $E(\mathbf{X})$, es la matriz de números de tamaño $n \times p$:

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1p}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(X_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{np}) \end{bmatrix}$$

## Donde cada elemento de la matriz es

$$E(X_{ij}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_{ij} f_{ij}(x_{ij})\, dx_{ij} & \text{si } X_{ij} \text{ es una variable continua con función de densidad de probabilidad } f_{ij}(x_{ij}) \\ \displaystyle\sum_{\text{todo } x_{ij}} x_{ij} p_{ij}(x_{ij}) & \text{si } X_{ij} \text{ es una variable discreta con función de probabilidad } p_{ij}(x_{ij}) \end{cases}$$

**Valor esperado de sumas y productos de matrices**

Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ matrices aleatorias de la misma dimensión, y sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices conformadas por constantes. Entonces

$$E(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y})$$
$$E(\mathbf{AXB}) = \mathbf{A}E(\mathbf{X})\mathbf{B}$$

## Ejemplo 3

Calcule los valores esperados para las siguientes matrices aleatorias, formando el vector de valores esperados.

| $x_1$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $p_1(x_1)$ | $.3$ | $.3$ | $.4$ |

| $x_2$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_2(x_2)$ | $.8$ | $.2$ |

# Vectores Media y Matrices de Covarianza

# Vectores media y matrices de covarianza

Sea $\mathbf{X}' = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_p]$ un vector aleatorio de $p \times 1$. Donde cada elemento de $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria con su propia distribución de probabilidad marginal.

**Medias $\mu_i$ y varianzas $\sigma_i^2$ marginales**

$\mu_i = E\left(X_i\right) \qquad \sigma_i^2 = E\left(X_i - \mu_i\right)^2$ para $i = 1, 2, \ldots, p$.

# Vectores media y matrices de covarianza

$\mu_i = E\left(X_i\right) \qquad \sigma_i^2 = E\left(X_i - \mu_i\right)^2$ para $i = 1, 2, \ldots, p$.

## Medias marginales

$$\mu_i = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i\left(x_i\right) dx_i & \text{si } X_i \text{ es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad } f_i\left(x_i\right) \\ \displaystyle\sum_{\text{todo } x_i} x_i p_i\left(x_i\right) & \text{si } X_i \text{ es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad } p_i\left(x_i\right) \end{cases}$$

## Varianzas marginales

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(x_i - \mu_i\right)^2 f_i\left(x_i\right) dx_i & \text{si } X_i \text{ es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad } f_i\left(x_i\right) \\ \displaystyle\sum_{\text{todo } x_i} \left(x_i - \mu_i\right)^2 p_i\left(x_i\right) & \text{si } X_i \text{ es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad } p_i\left(x_i\right) \end{cases}$$

# Vectores media y matrices de covarianza

## Notación

$$\sigma_i^2 \longrightarrow \sigma_{ii}$$

## Covarianza

$\sigma_{ik} = E\left(X_i - \mu_i\right)\left(X_k - \mu_k\right)$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_k - \mu_k\right) f_{ik}\left(x_i, x_k\right) dx_i dx_k & \text{si } X_i, X_k \text{ son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta } f_{ik}\left(x_i, x_k\right) \\ \displaystyle\sum_{\text{todo } x_i}\sum_{\text{todo } x_k}\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_k - \mu_k\right) p_{ik}\left(x_i, x_k\right) & \text{si } X_i, X_k \text{ son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta } p_{ik}\left(x_i, x_k\right) \end{cases}$$

# Vectores media y matrices de covarianza

## Función de densidad multivariable

El comportamiento colectivo de las $p$ variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_p$ o el vector aleatorio $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \ldots, X_p]$, se describe mediante una función de densidad de probabilidad conjunta

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = f(\mathbf{x}).$$

$f(x)$ muchas veces es la función de densidad normal multivariada.

# Vectores media y matrices de covarianza

**$X_i$ y $X_k$ (discretas) son estadísticamente independientes**

Si la probabilidad conjunta $P\left[X_i \leq x_i \text{ y } X_k \leq x_k\right]$ puede escribirse como el producto de las probabilidades marginales correspondientes, entonces

$$P\left[X_i \leq x_i \text{ y } X_k \leq x_k\right] = P\left[X_i \leq x_i\right] P\left[X_k \leq x_k\right]$$

para todos los pares de valores $x_i, x_k$.

**$X_i$ y $X_k$ (continuas) son estadísticamente independientes**

Si la densidad conjunta $f_{ik}\left(x_i, x_k\right)$ puede escribirse como el producto de las densidades marginales correspondientes, entonces

$$f_{ik}\left(x_i, x_k\right) = f_i\left(x_i\right) f_k\left(x_k\right)$$

para todos los pares de valores $x_i, x_k$.

**Independencia estadística para $p$ variables**

Las $p$ variables aleatorias continuas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son mutuamente independientes si su densidad conjunta puede factorizarse como

$$f_{12\cdots p}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = f_1\left(x_1\right) f_2\left(x_2\right) \cdots f_p\left(x_p\right)$$

para todas las $p$ tuplas $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$

**Implicación de la independencia en la covarianza**

Si $X_i$ y $X_k$ son independientes entonces $\operatorname{Cov}\left(X_i, X_k\right) = 0$

Lo contrario de la afirmación anterior no es generalmente cierto.

# Vectores media y matrices de covarianza

## Variables aleatorias, esperanzas y covarianzas como matrices

- $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio de $p \times 1$.
- El vector de medias de $\mathbf{X}$ es $\mu = E(\mathbf{X})$, que contiene el valor esperado de cada elemento.
- Las $p(p-1)/2$ covarianzas diferentes $\sigma_{ik}(i < k)$ están contenidas en la matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{\Sigma} = E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$.

## Vector de medias

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

# Vectores media y matrices de covarianza

## Matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} [X_1 - \mu_1, X_2 - \mu_2, \ldots, X_p - \mu_p]\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

# Vectores media y matrices de covarianza

## Matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$= \begin{bmatrix} E\left(X_1 - \mu_1\right)^2 & E\left(X_1 - \mu_1\right)\left(X_2 - \mu_2\right) & \cdots & E\left(X_1 - \mu_1\right)\left(X_p - \mu_p\right) \\ E\left(X_2 - \mu_2\right)\left(X_1 - \mu_1\right) & E\left(X_2 - \mu_2\right)^2 & \cdots & E\left(X_2 - \mu_2\right)\left(X_p - \mu_p\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left(X_p - \mu_p\right)\left(X_1 - \mu_1\right) & E\left(X_p - \mu_p\right)\left(X_2 - \mu_2\right) & \cdots & E\left(X_p - \mu_p\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Encuentre la matriz de covarianza para las dos variables aleatorias $X_1$ y $X_2$, junto con sus probabilidades marginales y conjuntas, mostradas en la siguiente tabla:

| $x_1$ \ $x_2$ | 0 | 1 | $p_1(x_1)$ |
|---|---|---|---|
| -1 | .24 | .06 | .3 |
| 0 | .16 | .14 | .3 |
| 1 | .40 | .00 | .4 |
| $p_2(x_2)$ | .8 | .2 | 1 |

# Vectores media y matrices de covarianza

## Matriz de covarianzas simétrica

Dado que $\sigma_{ik} = E\left(X_i - \mu_i\right)\left(X_k - \mu_k\right) = \sigma_{ki}$, la matriz de covarianzas se puede reescribir como:

$$\mathbf{\Sigma} = E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

- Llamamos a $\mu$ (el vector de) la media poblacional y a $\mathbf{\Sigma}$ la (matriz de) varianza-covarianza poblacional.
- el vector de medias y la matriz de covarianzas juegan un papel importante en los procedimientos multivariables. Por ejemplo, la distribución normal multivariable está completamente especificada con éstas dos cantidades.

## Coeficiente de correlación poblacional

- Separar la información contenida en las varianzas $\sigma_{ii}$ respecto a las medidas de asociación es informativo.
- El coeficiente de correlación poblacional $p_{ik}$ se define cómo:

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$$

  donde $\sigma_{ik}$ son las covarianzas, $\sigma_{ii}$ y $\sigma_{kk}$ son las varianzas.
- Mide la asociación lineal entre las variables aleatorias $X_i$ y $X_k$.

## Matriz de correlación

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Vectores media y matrices de covarianza

## Matriz de correlación

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

## Desviación estándar matricial

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Se puede mostrar que:

$$\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$$

y

$$\boldsymbol{\rho} = \left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ puede obtenerse a partir de $\mathbf{V}^{\mathbf{1/2}}$ y $\rho$, mientras que $\rho$ puede encontrarse a partir de $\boldsymbol{\Sigma}$

### Ejemplo

Calcule la matriz de correlación a partir del a siguiente matriz de covarianzas y calcule $\mathbf{V}^{1/2}$ y $\boldsymbol{\rho}$.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

# Partición de la Matriz de Covarianzas

# Partición de la matriz de covarianzas

Podemos partir las $p$ características del vector aleatorio $\mathbf{X}$ de $p \times 1$, por ejemplo en dos tamaños: $q$ y $p - q$.

## Partición de las características

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_q \\ \hdashline X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{array}}\right\} q \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{array}}\right\} p - q \end{array} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^{(1)} \\ \hdashline \mathbf{X}^{(2)} \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \hdashline \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \hdashline \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{array}\right]$$

# Partición de la matriz de covarianza

Realizando las multiplicaciones respecto a las partes diferentes del vector aleatorio y la esperanza:

## Partición de las características

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)\left(\mathbf{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)' \\
&=\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_q-\mu_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{q+1}-\mu_{q+1}, X_{q+2}-\mu_{q+2}, \ldots, X_p-\mu_p \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix}
(X_1-\mu_1)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_1-\mu_1)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\
(X_2-\mu_2)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_2-\mu_2)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(X_q-\mu_q)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_q-\mu_q)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_q-\mu_q)(X_p-\mu_p)
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# Partición de la matriz de covarianza

$$\left(\mathbf{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)\left(\mathbf{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)' = \begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_1-\mu_1)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_2-\mu_2)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_q-\mu_q)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & (X_q-\mu_q)(X_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & (X_q-\mu_q)(X_p-\mu_p) \end{bmatrix}$$

Ahora tomamos el valor esperado de la expresión anterior:

$$E\left(\mathbf{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)\left(\mathbf{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)' = \begin{bmatrix} \sigma_{1,q+1} & \sigma_{1,q+2} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{2,q+1} & \sigma_{2,q+2} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q,q+1} & \sigma_{q,q+2} & \cdots & \sigma_{qp} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$$

- Esto produce las covarianzas $\sigma_{ij}, i=1,2,\ldots,q, j=q+1,q+2,\ldots,p$, entre una componente de $\mathbf{X}^{(1)}$ y una componente de $\mathbf{X}^{(2)}$.
- La matriz $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ no es necesariamente simétrica o incluso cuadrada.

# Partición de la matriz de covarianzas

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \\ \hdashline X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{matrix}}\right\} q \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{matrix}}\right\} p-q \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \hdashline \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \hdashline \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \hdashline \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

A través de la partición anterior, se puede mostrar que:

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{(\mathbf{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})} \underset{(1\times q)}{(\mathbf{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'} & \underset{(q\times 1)}{(\mathbf{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})} \underset{(1\times(p-q))}{(\mathbf{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'} \\ \underset{((p-q)\times 1)}{(\mathbf{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})} \underset{(1\times q)}{(\mathbf{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'} & \underset{((p-q)\times 1)}{(\mathbf{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})} \underset{(1\times(p-q))}{(\mathbf{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'} \end{bmatrix}$$

# Partición de la matriz de covarianzas

Así,

$$\underset{(p\times p)}{\boldsymbol{\Sigma}} = E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} & \underset{(p\times p)}{\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}\right]} \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} & \sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q1} & \cdots & \sigma_{qq} & \sigma_{q,q+1} & \cdots & \sigma_{qp} \\ \hdashline \sigma_{q+1,1} & \cdots & \sigma_{q+1,q} & \sigma_{q+1,q+1} & \cdots & \sigma_{q+1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pq} & \sigma_{p,q+1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{array}\right]$$

# Partición de la matriz de covarianzas

## Observaciones

- $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21}$.
- La matriz de covarianza de $\mathbf{X}^{(1)}$ es $\Sigma_{11}$, la de $\mathbf{X}^{(2)}$ es $\Sigma_{22}$, y el de los elementos combinados de $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ es $\mathbf{\Sigma}_{12}$ (or$\mathbf{\Sigma}_{21}$)
- A veces es conveniente usar la notación de $\mathrm{Cov}\left(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}\right)$ donde

$$\mathrm{Cov}\left(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}\right) = \mathbf{\Sigma}_{12}$$

  es una matriz que contiene todas las covarianzas entre una componente de $\mathbf{X}^{(1)}$ y una componente de $\mathbf{X}^{(2)}$

# Vector de Media y Matriz de Covarianzas para Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias

# Media y covarianza (matrices) para combinaciones lineales de variables aleatorias

**Media y covarianza para una combinación lineal de $p$ variables aleatorias**

La combinación lineal $\mathbf{c}'\mathbf{X} = c_1X_1 + \cdots + c_pX_p$ tiene

$$\text{media} = E\left(\mathbf{c}'\mathbf{X}\right) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\mu}$$
$$\text{varianza} = \text{Var}\left(\mathbf{c}'\mathbf{X}\right) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}$$

donde $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \text{Cov}(\mathbf{X})$

# Media y covarianza (matrices) para combinaciones lineales de variables aleatorias

**Media y covarianza para $q$ combinaciones lineales de $p$ variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_p$**

$$\mathbf{Z} = \underset{q\times 1}{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix}} = \underset{q\times p}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix}} \underset{p\times 1}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}} = \mathbf{CX}$$

Las combinaciones lineales $\mathbf{Z} = \mathbf{CX}$ tienen

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}} = E(\mathbf{Z}) = E(\mathbf{CX}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{CX}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}\mathbf{C}'$$

donde $\mu_{\mathbf{X}}$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ son el vector media y la matriz de varianza-covarianza de $\mathbf{X}$.

# Media y covarianza (matrices) para combinaciones lineales de variables aleatorias

## Ejemplo

Con el vector aleatorio $X' = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ con vector de media $\mu_x' = [3, 2, -2, 0]$ y matriz de varianza-covarianza

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

a Encuentre $E(AX)$, la media de $AX$.

b Determine Cov $(AX)$, las varianzas y covarianzas de $AX$.

c ¿Cuáles pares de combinaciones lineales tienen covarianza cero?

# Desigualdades y Maximización de Matrices

### Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea $\mathbf{b}$ y $\mathbf{d}$ cualesquiera vectores de tamaño $p \times 1$. Entonces

$$\left(\mathbf{b}'\mathbf{d}\right)^2 \leq \left(\mathbf{b}'\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{d}'\mathbf{d}\right)$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{b} = c\mathbf{d}$ (o $\mathbf{d} = c\mathbf{b}$ ) para alguna constante $c$.

### Desigualdad extendida de Cauchy-Schwarz

Sean $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{b}}$ y $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{d}}$ cualesquiera dos vectores, y sea $\underset{(p\times p)}{\mathbf{B}}$ una matriz definida positiva. Entonces

$$\left(\mathbf{b}'\mathbf{d}\right)^2 \leq \left(\mathbf{b}'\mathbf{B}\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{d}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}\right)$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{b} = c\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$( o $\mathbf{d} = c\mathbf{B}\mathbf{b}$) para alguna constante $c$.

## Lema de Maximización

Sea $\underset{(p\times p)}{\mathbf{B}}$ definida positiva y $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{d}}$ un vector dado. Entonces, para un vector arbitrario $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{x}}$ no cero,

$$\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{x}'\mathbf{d})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}} = \mathbf{d}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$$

con el máximo alcanzado cuando $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{x}} = \underset{(p\times p)(p\times 1)}{c\mathbf{B}^{-1}} \underset{(p\times p)(p\times 1)}{\mathbf{d}}$ para cualquier constante $c \neq 0$

# Maximización de matrices

## Maximización de formas cuadráticas para puntos sobre una esfera unitaria

Sea $B$ una matriz definida positiva de dimensión $(p \times p)$, con valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ y vectores propios normalizados $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$. Entonces

$$\max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1 \quad (\text{ alcanzado cuando } \mathbf{x} = \mathbf{e}_1)$$

$$\min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_p \quad (\text{ alcanzado cuando } \mathbf{x} = \mathbf{e}_p)$$

Además, $\displaystyle\max_{\mathbf{x} \perp \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_{k+1}$

( alcanzado cuando $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}, k = 1, 2, \ldots, p-1$)