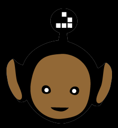
Vectores Aleatorios y Matrices Aleatorias

Rodrigo Castillo

12 de agosto de 2020



1. Ejercicio de la clase pasada

sea

$$A^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda} e_i e_i^{'} = P A^{\frac{1}{2}} P^{'} donde PP^{'} = P^{'} P = 1 \tag{1}$$

demuestre las cuatro propiedades de la raiz cuadrada de una matriz

2. Matrices aleatorias

la idea de las matrices aleatorias es generar unas matrices de distribucion normal y se pone la esperanza.

2.1. Valor esperado de una matriz aleatoria

Valor esperado de una matriz aleatoria

Sea $\mathbf{X} = \{X_{ij}\}$ una matriz aleatoria de $n \times p$. Entonces, el valor esperado $\mathbf{X}$, denotado por $E(\mathbf{X})$, es la matriz de números de tamaño $n \times p$:

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1p}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(X_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{np}) \end{bmatrix}$$

2.2. Valor esperado sumas de matrices aleatorias

Valor esperado de sumas y productos de matrices

Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ matrices aleatorias de la misma dimensión, y sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices conformadas por constantes. Entonces

$$E(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y})$$
$$E(\mathbf{AXB}) = \mathbf{A}E(\mathbf{X})\mathbf{B}$$

2.3. Vectores media y matrices de covarianza

2.3.1. vector de medias

Variables aleatorias, esperanzas y covarianzas como matrices

- $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio de $p \times 1$.
- El vector de medias de $\mathbf{X}$ es $\mu = E(\mathbf{X})$, que contiene el valor esperado de cada elemento.
- Las $p(p-1)/2$ covarianzas diferentes $\sigma_{ik}(i<k)$ están contenidas en la matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{\Sigma} = E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'$.

Vector de medias

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

2.3.2. matriz de covarianzas

Matriz de covarianzas

$$\mathbf{\Sigma} = E(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

2.4. coeficiente correlacional

Matriz de correlación

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Desviación estándar matricial

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Se puede mostrar que:

$$\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$$

y

$$\boldsymbol{\rho} = \left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}$$

3. Preguntas

preguntar el finals sobre la parte de las combinaciones lineales