Todas las propiedades

lunes, 24 de agosto de 2020 21:23

Propiedades de la distribución normal multivariante.

Si X es un vector aleatorio que tiene una distribución normal multivariante:

i Combinaciones lineales de las componentes de X están distribuidas normalmente

ii Todos los subconjuntos de las componentes de X tienen una distribución normal (multivariante).

iii Una covarianza cero implica que las componentes correspondientes se encuentran distribuidas independientemente.

iv Las distribuciones condicionales de las componentes son normales (multivariantes).

Formalizando (un poco) las propiedades

P1. Una combinación lineal

Si $\mathbf{X}$ está distribuido mediante $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces cualquier combinación lineal de las variables $\mathbf{a}'\mathbf{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p$ esta distribuida como $N(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$. También, si $\mathbf{a}'\mathbf{X}$ está distribuida como $N(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$ para cada $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{X}$ debe seguir a $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

P2. Varias combinaciones lineales

Si X esta distribuida con $N_p(\mu, \Sigma)$, las q combinaciones

$$\underset{(q\times p)}{A}\ \underset{(p\times 1)}{X} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \dots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \dots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + \dots + a_{qp}X_p \end{bmatrix}$$

se encuentran distribuidas con $N_q(A\mu, A\Sigma A')$.

También, $\underset{(p\times 1)}{X} + \underset{(p\times 1)}{d}$, donde d es un vector constante, se distribuye como $N_p(\mu + d, \Sigma)$.

P3. Subconjunto de una variable aleatoria

Todos los subconjuntos de X están normalmente distribuidos.

Si particionamos X, su vector medio $\overline{X}$ y su matriz de covarianza son:

$$\underset{p\times 1}{X} = \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{X_1} \\ \underset{(p-q)\times 1}{X_2} \end{bmatrix} \qquad \underset{p\times 1}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{\mu_1} \\ \hline \underset{(p-q)\times 1}{\mu_2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(p\times p)}{\Sigma} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{(q\times q)}{\Sigma_{11}} & \underset{(q\times(p-q))}{\Sigma_{12}} \\ \hline \underset{((p-q)\times q)}{\Sigma_{21}} & \underset{((p-q)\times(p-q))}{\Sigma_{22}} \end{array}\right)$$

Entonces X_1 está distribuido como $N_q(\mu_1, \Sigma$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$
$((p-q)\times q)$ $((p-q)\times(p-q))$

Entonces X_1 está distribuido como $N_q(\mu_1, \Sigma_{11})$

P4. Independencia estadística a través de la correlación nula entre variables aleatorias normales o conjuntos de V.A.N.

a) Si $\underset{(q_1\times 1)}{X_1}$ y $\underset{(q_2\times 1)}{X_2}$ independientes, entonces $\text{Cov}(X_1, X_2) = \underset{(q_1\times q_2)}{0}$

b) Si $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ es $N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$, entonces

X_1 y X_2 son independientes si y sólo si $\Sigma_{12} = 0$

c) Si X_1 y X_2 son independientes y están distribuidos como $N_{q_1}(\mu_1, \Sigma_{11})$ y $N_{q_2}(\mu_2, \Sigma_{22})$, respectivamente, entonces $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ tiene distribución normal multivariante

$$N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0' & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$$

P5. Distribución condicional

Sea $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ distribuido como $N_p(\mu, \Sigma)$ con $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ y $|\Sigma_{22}| > 0$. Entonces la distribución condicional de X_1 dado que $X_2 = x_2$, es normal y tiene

$$\text{Media} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)$$

y

$$\text{Covarianza} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

La covarianza no depende del valor de x_2 de la variable condicionante.

P6. Contenido de probabilidad para elipsoides de probabilidad constante

Sea X distribuida como $N_p(\mu, \Sigma)$ con $|\Sigma| > 0$. Entonces

a) $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$ está distribuida como χ^2_p donde χ^2_p denota la distribución chi-cuadrada con p grados de libertad.

b) La distribución $N_p(\mu, \Sigma)$ asigna una probabilidad $1-\alpha$ al elipsoide sólido $\{x : (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \le \chi^2_p(\alpha)\}$ donde $\chi^2_p(\alpha)$ denota el (100α) percentil superior de la distribución χ^2_p.

P7. Distribución de combinación lineal de observaciones

P7. Distribución de combinación lineal de observaciones

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ mutuamente independientes con $\mathbf{X}_j$ distribuidos como $N_p(\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\Sigma})$. (Cada $\mathbf{X}_j$ tiene la misma matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$.). Entonces

$$\mathbf{V}_1 = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n$$

está distribuido cómo $N_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{\mu}_j, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma}\right)$

Además, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2 = b_1\mathbf{X} + b_2\mathbf{X}_2 + \ldots + b_n\mathbf{X}_n$ están distribuidos conjuntamente de forma normal multivariante con matriz de covarianza:

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} & (\mathbf{b}'\mathbf{c})\boldsymbol{\Sigma} \\ (\mathbf{b}'\mathbf{c})\boldsymbol{\Sigma} & \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son independientes si $\mathbf{b}'\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j = 0$