Tema: Densidad normal multivariante y sus propiedades

1. Considere una distribución normal bivariada con $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1$ y $\rho_{12} = -.8$

   (a) Escriba la densidad normal bivariada.

   (b) Escriba la expresión de distancia estadística al cuadrado $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ como una función cuadrática de x_1 y x_2.

2. Sea $\mathbf{X}$ $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu}' = [-3, 1, 4]$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   ¿Cuáles de las siguientes variables aleatorias son independientes? Explique.

   (a) X_1 y X_2

   (b) X_2 y X_3

   (c) (X_1, X_2) y X_3

   (d) $\frac{X_1+X_2}{2}$ y X_3

   (e) X_2 y $X_2 - \frac{5}{2}X_1 - X_3$

   (f) Especifique la distribución condicional de X_2, dado que $X_1 = x_1$ y $X_3 = x_3$

3. Sea $\mathbf{X}$ $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu}' = [2, -3, 1]$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Encuentra la distribución de $3X_1 - 2X_2 + X_3$

   (b) Vuelva a etiquetar las variables si es necesario, y encuentre un vector 2×1 tal que X_2 y

$$X_2 - \mathbf{a}' \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} \text{ son independientes.}$$

4. Sea $\mathbf{X}$ distribuido como $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $\boldsymbol{\mu}' = [1, -1, 2]$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   especifique cada uno de los siguientes:

   (a) La distribución condicional de X_1, dado que $X_3 = x_3$

   (b) La distribución condicional de X_1, dado que $X_2 = x_2$ y $X_3 = x_3$

5. Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$, y $\mathbf{X}_4$ vectores aleatorios independientes $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

   (a) Encuentre las distribuciones marginales para cada uno de los vectores aleatorios

   $$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$$

   y

   $$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$$

   (b) Encuentre la densidad conjunta de los vectores aleatorios $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ definidos en (a).