Teoría de Grafos

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Grafos dirigidos

Grafo dirigido

Un **grafo dirigido** o **digrafo** G es una terna que consiste en un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una función que asigna a cada arista un par ordenado de vértices.

$$\begin{aligned} f : E(G) &\longrightarrow V(G) \times V(G) \\ e &\longmapsto f(e) = (u, v) \end{aligned}$$

Grafos dirigidos

Grafo dirigido

Un **grafo dirigido** o **digrafo** G es una terna que consiste en un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una función que asigna a cada arista un par ordenado de vértices.

$$\begin{aligned} f : E(G) &\longrightarrow V(G) \times V(G) \\ e &\longmapsto f(e) = (u, v) \end{aligned}$$

- El primer vértice se llama **vértice inicial** o **cola** de la arista.
- El segundo vértice se llama **vértice final** o **cabeza** de la arista.
- Los dos vértices se denominan **extremos**.

Bucles

En un digrafo un **bucle** es una arista cuyos extremos son iguales.

Bucles

En un digrafo un **bucle** es una arista cuyos extremos son iguales.

Aristas múltiples

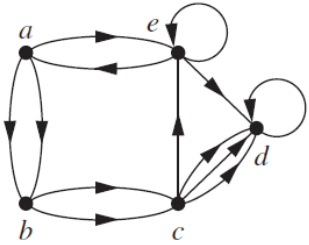
En un digrafo las **aristas múltiples** son aristas cuyos extremos son el mismo par ordenado.

Bucles

En un digrafo un **bucle** es una arista cuyos extremos son iguales.

Aristas múltiples

En un digrafo las **aristas múltiples** son aristas cuyos extremos son el mismo par ordenado.



Digrafo simple

Un digrafo es **simple** si cada par ordenado es cabeza y cola de a lo sumo una arista, un bucle puede estar presente en cada vértice.

Digrafo simple

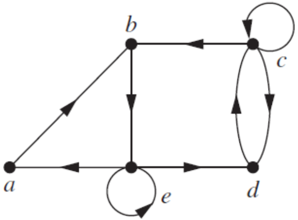
Un digrafo es **simple** si cada par ordenado es cabeza y cola de a lo sumo una arista, un bucle puede estar presente en cada vértice.

- Si el digrafo es simple, se escribe uv para representar la arista con cola u y cabeza v.

Digrafo simple

Un digrafo es **simple** si cada par ordenado es cabeza y cola de a lo sumo una arista, un bucle puede estar presente en cada vértice.

- Si el digrafo es simple, se escribe uv para representar la arista con cola u y cabeza v.
- Si existe una arista de u a v, v es el **sucesor** de u y u es el **predecesor** de v. Se nota $u \to v$.

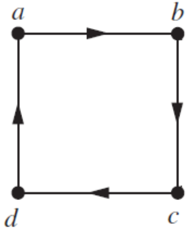


Camino - Ciclo

- Un digrafo es un **camino** si es un digrafo simple cuyos vértices pueden ordenarse linealmente de tal manera que existe una arista con cola u y cabeza v sii v sigue inmediatamente a u en el ordenamiento de los vértices.

Camino - Ciclo

- Un digrafo es un **camino** si es un digrafo simple cuyos vértices pueden ordenarse linealmente de tal manera que existe una arista con cola u y cabeza v sii v sigue inmediatamente a u en el ordenamiento de los vértices.
- Un **ciclo** se define de la misma manera usando el ordenamiento de los vértices en un circulo.



Grafo subyacente

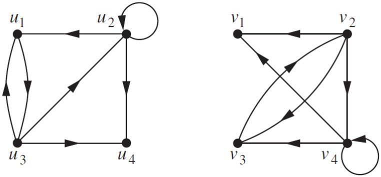
El grafo **subyacente** de un digrafo D es el grafo G obtenido al considerar las aristas de D como pares no ordenados.

Grafo subyacente

El grafo **subyacente** de un digrafo D es el grafo G obtenido al considerar las aristas de D como pares no ordenados.

Nota

La definición de subgrafo, isomorfismo, descomposición y unión es la misma para grafos y digrafos.



Matriz de Adyacencia - Matriz de Incidencia

Sea G un digrafo sin bucles con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

- La **matriz de adyacencia** de G es la matriz $n \times n$, $A(G)$, definida por

$$a_{ij} := \text{número de aristas de } v_i \text{ a } v_j$$

Matriz de Adyacencia - Matriz de Incidencia

Sea G un digrafo sin bucles con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

- La **matriz de adyacencia** de G es la matriz $n \times n$, $A(G)$, definida por

$$a_{ij} := \text{número de aristas de } v_i \text{ a } v_j$$

- La **matriz de incidencia** de G es la matriz $n \times m$, $M(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Matriz de entrada - Matriz de salida

Sea G un digrafo con bucles con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

- La **matriz de entrada** de G es la matriz $n \times m$, $M^{-}(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Matriz de entrada - Matriz de salida

Sea G un digrafo con bucles con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

- La **matriz de entrada** de G es la matriz $n \times m$, $M^{-}(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La **matriz de salida** de G es la matriz $n \times m$, $M^{+}(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Conexión débil

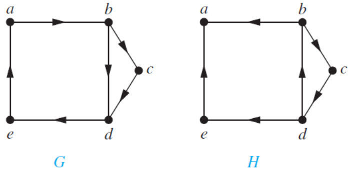
Un digrafo es **débilmente conexo** si su subgrafo subyacente es conexo.

Conexión débil

Un digrafo es **débilmente conexo** si su subgrafo subyacente es conexo.

Conexión fuerte

Un digrafo es **fuertemente conexo** o **fuerte** si para cada par ordenado (u, v) existe un camino de u a v. Las componentes fuertes de un digrafo son sus subgrafos fuertes maximales.



Grados

Sea v un vértice en un digrafo.

- El **grado de salida** $d^+(v)$ es el número de aristas con cola en v.

Grados

Sea v un vértice en un digrafo.

- El **grado de salida** $d^+(v)$ es el número de aristas con cola en v.
- El **grado de entrada** $d^-(v)$ es el número de aristas con cabeza en v.

Grados

Sea v un vértice en un digrafo.

- El **grado de salida** $d^+(v)$ es el número de aristas con cola en v.
- El **grado de entrada** $d^-(v)$ es el número de aristas con cabeza en v.
- El **grado de salida máximo** es $\Delta^+(G)$ y el **grado de salida mínimo** es $\delta^+(G)$.

Grados

Sea v un vértice en un digrafo.

- El **grado de salida** $d^+(v)$ es el número de aristas con cola en v.
- El **grado de entrada** $d^-(v)$ es el número de aristas con cabeza en v.
- El **grado de salida máximo** es $\Delta^+(G)$ y el **grado de salida mínimo** es $\delta^+(G)$.
- El **grado de entrada máximo** es $\Delta^-(G)$ y el **grado de entrada mínimo** es $\delta^-(G)$.

Vecindades

Sea v un vértice en un digrafo.

- La **vecindad de salida** o **conjunto sucesor** $N^+(v)$ es el conjunto

$$N^+(v) = \{x \in V(G) : \; v \longrightarrow x\}$$

Vecindades

Sea v un vértice en un digrafo.

- La **vecindad de salida** o **conjunto sucesor** $N^+(v)$ es el conjunto

$$N^+(v) = \{x \in V(G) : \ v \longrightarrow x\}$$

- La **vecindad de entrada** o **conjunto predecesor** $N^-(v)$ es el conjunto

$$N^-(v) = \{x \in V(G) : \ x \longrightarrow v\}$$

Proposición

En un digrafo G,

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = e(G) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v)$$

Nota

- Las definiciones de caminata, sendero y circuito y la relación de conexión son las mismas en grafos y en digrafos cuando se enlistan las aristas como pares ordenados de vértices.

Nota

- Las definiciones de caminata, sendero y circuito y la relación de conexión son las mismas en grafos y en digrafos cuando se enlistan las aristas como pares ordenados de vértices.
- En un digrafo, las aristas sucesivas deben seguir la dirección de las flechas. En una caminata $v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ la arista e_i tiene cola v_{i-1} y cabeza v_i.

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un digrafo D es un sendero que contiene todas las aristas de D.

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un digrafo D es un sendero que contiene todas las aristas de D.
- Un **circuito Euleriano** en un digrafo D es un circuito que contiene todas las aristas de D.

Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un digrafo D es un sendero que contiene todas las aristas de D.
- Un **circuito Euleriano** en un digrafo D es un circuito que contiene todas las aristas de D.

Digrafo Euleriano

Un **digrafo** D es **Euleriano** si tiene un circuito Euleriano.

Lema

Si G es un digrafo con $\delta^+(G) \geq 1$, entonces G contiene un ciclo. La misma conclusión se cumple cuando $\delta^-(G) \geq 1$.

Lema

Si G es un digrafo con $\delta^+(G) \geq 1$, entonces G contiene un ciclo. La misma conclusión se cumple cuando $\delta^-(G) \geq 1$.

Teorema

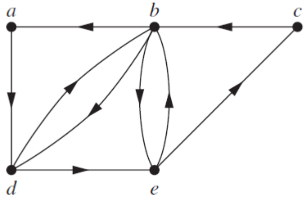
Un digrafo G es Euleriano sii $d^+(v) = d^-(v)$ para cada vértice v y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.

Lema

Si G es un digrafo con $\delta^+(G) \geq 1$, entonces G contiene un ciclo. La misma conclusión se cumple cuando $\delta^-(G) \geq 1$.

Teorema

Un digrafo G es Euleriano sii $d^+(v) = d^-(v)$ para cada vértice v y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.

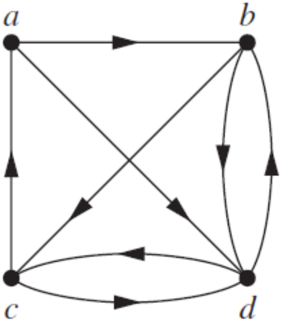


Teorema

Un digrafo G tiene un u, v-sendero Euleriano sii $d^+(w) = d^-(w)$ para cada vértice w excepto para u y v, $d^+(u) = d^-(u) + 1$, $d^-(v) = d^+(v) + 1$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.

Teorema

Un digrafo G tiene un u, v-sendero Euleriano sii $d^+(w) = d^-(w)$ para cada vértice w excepto para u y v, $d^+(u) = d^-(u) + 1$, $d^-(v) = d^+(v) + 1$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.



Orientaciones y torneos

- Si $n(G) = n$, hay n^2 parejas ordenadas de vértices.

Orientaciones y torneos

- Si $n(G) = n$, hay n^2 parejas ordenadas de vértices.
- Como un digrafo simple permite un bucle sobre cada vértice, se usa cada par de vértices a lo sumo una vez como arista. Luego hay n^2 pares ordenados que pueden ser o no aristas de un digrafo simple.

Orientaciones y torneos

- Si $n(G) = n$, hay n^2 parejas ordenadas de vértices.
- Como un digrafo simple permite un bucle sobre cada vértice, se usa cada par de vértices a lo sumo una vez como arista. Luego hay n^2 pares ordenados que pueden ser o no aristas de un digrafo simple.
- Hay 2^{n^2} digrafos simples con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Orientación

Una **orientación** de un grafo G es un digrafo D obtenido a partir de G al seleccionar una orientación ($x \to y$ o $y \to x$) para cada arista $xy \in E(G)$.

Orientación

Una **orientación** de un grafo G es un digrafo D obtenido a partir de G al seleccionar una orientación ($x \to y$ o $y \to x$) para cada arista $xy \in E(G)$.

Grafo orientado

Un **grafo orientado** es una orientación de un grafo simple.

Orientación

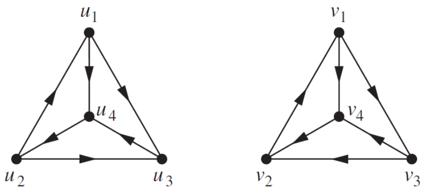
Una **orientación** de un grafo G es un digrafo D obtenido a partir de G al seleccionar una orientación ($x \to y$ o $y \to x$) para cada arista $xy \in E(G)$.

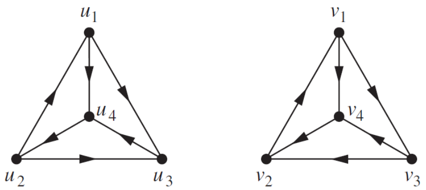
Grafo orientado

Un **grafo orientado** es una orientación de un grafo simple.

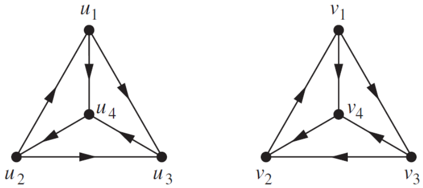
Torneo

Un **torneo** es una orientación de un grafo completo.


u_1
u_4
u_2
u_3
v_1
v_4
v_2
v_3



- Hay $3^{\binom{n}{2}}$ grafos orientados con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.



- Hay $3^{\binom{n}{2}}$ grafos orientados con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ torneos con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ejemplo

- Considere una liga con n equipos en la cual cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los otros equipos.

Ejemplo

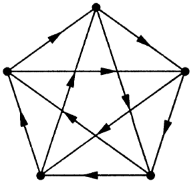
- Considere una liga con n equipos en la cual cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los otros equipos.
- Para cada par x, y se incluye la arista xy si x derrota a y o la arista yx si y derrota a x.

Ejemplo

- Considere una liga con n equipos en la cual cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los otros equipos.
- Para cada par x, y se incluye la arista xy si x derrota a y o la arista yx si y derrota a x.
- El puntaje de un equipo es su grado de salida, que equivale al número de victorias.

Ejemplo

- Considere una liga con n equipos en la cual cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los otros equipos.
- Para cada par x, y se incluye la arista xy si x derrota a y o la arista yx si y derrota a x.
- El puntaje de un equipo es su grado de salida, que equivale al número de victorias.



Rey

Un **rey** es un vértice de un digrafo G para el cual cada vértice es alcanzable por un camino de longitud menor o igual a 2.

Rey

Un **rey** es un vértice de un digrafo G para el cual cada vértice es alcanzable por un camino de longitud menor o igual a 2.

Teorema [Landau]

Todo torneo tiene un rey.

Rey

Un **rey** es un vértice de un digrafo G para el cual cada vértice es alcanzable por un camino de longitud menor o igual a 2.

Teorema [Landau]

Todo torneo tiene un rey.

Nota

- Todo vértice con grado de salida máximo en un torneo es un rey.

Rey

Un **rey** es un vértice de un digrafo G para el cual cada vértice es alcanzable por un camino de longitud menor o igual a 2.

Teorema [Landau]

Todo torneo tiene un rey.

Nota

- Todo vértice con grado de salida máximo en un torneo es un rey.
- Existe al menos un equipo x tal que, para cada equipo z, x derrota a z o x derrota a algún otro equipo que derrota a z.

Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).