MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Teoría de Grafos

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Universidad del Rosario

Árboles

Grafo acíclico

Un **grafo acíclico** es un grafo sin ciclos.

Árboles

Grafo acíclico

Un **grafo acíclico** es un grafo sin ciclos.

Bosque

Un **bosque** es un grafo no dirigido acíclico.

Árboles

Grafo acíclico

Un **grafo acíclico** es un grafo sin ciclos.

Bosque

Un **bosque** es un grafo no dirigido acíclico.

Árbol

Un **árbol** es un grafo no dirigido, acíclico y conexo.

Nota

De ahora en adelante vamos a considerar grafos no dirigidos a menos que se indique lo contrario.

Nota

De ahora en adelante vamos a considerar grafos no dirigidos a menos que se indique lo contrario.

Hoja - Rama

Una **hoja** o **vértice colgante** o **terminal** es un vértice de grado 1. Los demás vértices son **ramas** o **vértices internos.**

Nota

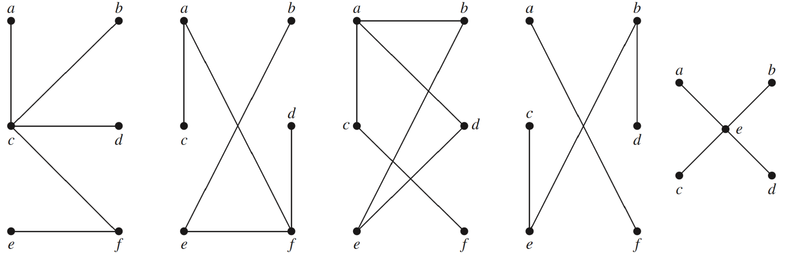
De ahora en adelante vamos a considerar grafos no dirigidos a menos que se indique lo contrario.

Hoja - Rama

Una **hoja** o **vértice colgante** o **terminal** es un vértice de grado 1. Los demás vértices son **ramas** o **vértices internos.**

Estrella

Una **estrella** es un árbol que consiste en un vértice adyacente a los demás. La estrella de n vértices es el biclique $K_{1,n-1}$.



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

Nota

- Un árbol es un bosque conexo y cada componente de un bosque es un árbol.

Nota

- Un árbol es un bosque conexo y cada componente de un bosque es un árbol.
- Los árboles y los bosques son bipartitos.

Nota

- Un árbol es un bosque conexo y cada componente de un bosque es un árbol.
- Los árboles y los bosques son bipartitos. Si G es acíclico, G no tiene ciclos impares.

Nota

- Un árbol es un bosque conexo y cada componente de un bosque es un árbol.
- Los árboles y los bosques son bipartitos. Si G es acíclico, G no tiene ciclos impares.
- Un árbol T es un camino sii $\Delta(T) = 2$.

Subgrafo de expansión

Un **subgrafo de expansión** de un grafo G es un subgrafo con conjunto de vértices $V(G)$.

Subgrafo de expansión

Un **subgrafo de expansión** de un grafo G es un subgrafo con conjunto de vértices $V(G)$.

Árbol de expansión

Un **árbol de expansión** de un grafo G es un subgrafo de expansión que es un árbol.

Nota

- Si G es un árbol, G tiene exactamente un árbol de expansión: el propio G.

Nota

- Si G es un árbol, G tiene exactamente un árbol de expansión: el propio G.
- Un subgrafo de expansión no necesariamente es conexo.

Nota

- Si G es un árbol, G tiene exactamente un árbol de expansión: el propio G.
- Un subgrafo de expansión no necesariamente es conexo.
- Un subgrafo conexo no necesariamente es un subgrafo de expansión.

Lema

Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Al eliminar una hoja de un árbol de n vértices se produce un árbol con $n-1$ vértices.

Lema

Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Al eliminar una hoja de un árbol de n vértices se produce un árbol con $n-1$ vértices.

- Un grafo conexo con al menos dos vértices tiene una arista.

Lema

Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Al eliminar una hoja de un árbol de n vértices se produce un árbol con $n-1$ vértices.

- Un grafo conexo con al menos dos vértices tiene una arista.
- En un grafo acíclico un extremo de un camino maximal no trivial sólo tiene un vecino (en el camino), luego, los extremos del camino son hojas.

Lema

Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Al eliminar una hoja de un árbol de n vértices se produce un árbol con $n-1$ vértices.

- Un grafo conexo con al menos dos vértices tiene una arista.
- En un grafo acíclico un extremo de un camino maximal no trivial sólo tiene un vecino (en el camino), luego, los extremos del camino son hojas.

- Sea v una hoja de un árbol T y sea $T' = T - \{v\}$

- Sea v una hoja de un árbol T y sea $T' = T - \{v\}$
- Como $d(v) = 1$, v no está en un u, w-camino $(u, w \neq v)$, luego para todo par $u, w \in V(T')$ cada u, w-camino en T también es un u, w-camino en T', ed, T' es conexo.
- Al eliminar un vértice en T, no se pueden crear ciclos, luego T' es acíclico.

- Sea v una hoja de un árbol T y sea $T' = T - \{v\}$
- Como $d(v) = 1$, v no está en un u, w-camino $(u, w \neq v)$, luego para todo par $u, w \in V(T')$ cada u, w-camino en T también es un u, w-camino en T', ed, T' es conexo.
- Al eliminar un vértice en T, no se pueden crear ciclos, luego T' es acíclico.
- Por lo tanto, T' es un árbol con $n - 1$ vértices.

- Sea v una hoja de un árbol T y sea $T' = T - \{v\}$
- Como $d(v) = 1$, v no está en un u, w-camino ($u, w \neq v$), luego para todo par $u, w \in V(T')$ cada u, w-camino en T también es un u, w-camino en T', ed, T' es conexo.
- Al eliminar un vértice en T, no se pueden crear ciclos, luego T' es acíclico.
- Por lo tanto, T' es un árbol con $n - 1$ vértices.

Todo árbol con más de un vértice se genera a partir de un árbol más pequeño al agregar un vértice de grado 1.

Teorema

Sea G un grafo con n vértices, $n \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes (y caracterizan los árboles con n vértices):

A. G es conexo y no tiene ciclos.

B. G es conexo y tiene $n-1$ aristas.

C. G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.

D. Para cada par $u, v \in V(G)$, G tiene exactamente un u, v-camino. Existe un único camino entre cada par de vértices.

Corolario

1. Cada arista de un árbol es una arista de corte.
2. Si se agrega una arista a un árbol se forma exactamente un ciclo.
3. Todo grafo conexo contiene un árbol de expansión.

1. Como un árbol no tiene ciclos, cada arista es una arista de corte.

Corolario

1. Cada arista de un árbol es una arista de corte.
2. Si se agrega una arista a un árbol se forma exactamente un ciclo.
3. Todo grafo conexo contiene un árbol de expansión.

1. Como un árbol no tiene ciclos, cada arista es una arista de corte.
2. Como existe un único u, v-camino entre cada par de vértices, si se agrega la arista uv, se forma un ciclo.

Corolario

1. Cada arista de un árbol es una arista de corte.
2. Si se agrega una arista a un árbol se forma exactamente un ciclo.
3. Todo grafo conexo contiene un árbol de expansión.

1. Como un árbol no tiene ciclos, cada arista es una arista de corte.
2. Como existe un único u, v-camino entre cada par de vértices, si se agrega la arista uv, se forma un ciclo.
3. Al eliminar las aristas de los ciclos en un grafo conexo se obtiene un subgrafo acíclico.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ es un árbol de expansión.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ es un árbol de expansión.

- e es una arista de corte de T.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ es un árbol de expansión.

- e es una arista de corte de T.
- Sean H y H' las componentes de $T - e$.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ es un árbol de expansión.

- e es una arista de corte de T.
- Sean H y H' las componentes de $T - e$.
- Como T' es conexo, existe una arista e' con extremos en H y H'.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ es un árbol de expansión.

- e es una arista de corte de T.
- Sean H y H' las componentes de $T - e$.
- Como T' es conexo, existe una arista e' con extremos en H y H'.
- Así $T - e + e'$ es conexo y tiene $n(G) - 1$ aristas.
- Por lo tanto, $T - e + e'$ es un árbol de expansión de G.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T' + e - e'$ es un árbol de expansión.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T' + e - e'$ es un árbol de expansión.

- $T' + e$ contiene un único ciclo C.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T' + e - e'$ es un árbol de expansión.

- $T' + e$ contiene un único ciclo C.
- Como T es acíclico existe una arista $e' \in E(C) - E(T)$.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T' + e - e'$ es un árbol de expansión.

- $T' + e$ contiene un único ciclo C.
- Como T es acíclico existe una arista $e' \in E(C) - E(T)$.
- Al eliminar la arista e' se rompe el único ciclo de $T' + e$.

Proposición

Si T y T' son árboles de expansión de un grafo conexo G y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T' + e - e'$ es un árbol de expansión.

- $T' + e$ contiene un único ciclo C.
- Como T es acíclico existe una arista $e' \in E(C) - E(T)$.
- Al eliminar la arista e' se rompe el único ciclo de $T' + e$.
- Así $T' + e - e'$ es conexo y acíclico.
- Por lo tanto, $T + e - e'$ es un árbol de expansión de G.

Proposición

Si T es un árbol con k aristas y G es un grafo simple con $\delta(G) \geq k$, entonces T es un subgrafo de G.

Proposición

Si T es un árbol con k aristas y G es un grafo simple con $\delta(G) \geq k$, entonces T es un subgrafo de G.

Distancias en árboles y grafos

Circunferencia

La **circunferencia** de un grafo es la longitud de su ciclo más largo.

Distancias en árboles y grafos

Circunferencia

La **circunferencia** de un grafo es la longitud de su ciclo más largo.

Cintura

La **cintura (girth)** de un grafo con ciclos es la longitud de su ciclo más pequeño. Un grafo sin ciclos tiene cintura infinita.

Distancia

Si G tiene un u, v-camino, la **distancia** de u a v notada $d(u, v)$, es la longitud mínima de un u, v-camino. Si G no tiene dicho camino, $d(u, v) = \infty$

Distancia

Si G tiene un u, v-camino, la **distancia** de u a v notada $d(u, v)$, es la longitud mínima de un u, v-camino. Si G no tiene dicho camino, $d(u, v) = \infty$

Diámetro

El **diámetro** de un grafo G es:

$$diam\ G \ = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$$

Excentricidad

La **excentricidad** de un vértice u es:

$$\epsilon(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

Excentricidad

La **excentricidad** de un vértice u es:

$$\epsilon(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

Radio

El **radio** de un grafo G es:

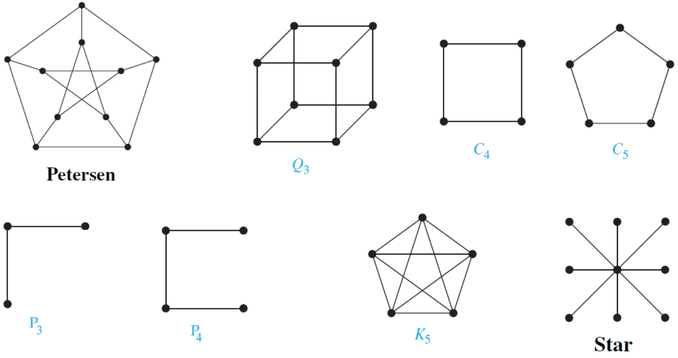
$$rad\ G = \min_{u \in V(G)} \epsilon(u)$$

Nota

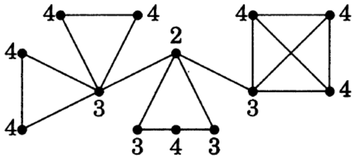
- $diam\ G = \max\limits_{u \in V(G)} \epsilon(u)$
- Si G es disconexo, $diam\ G = rad\ G = \underset{u \in V(G)}{\epsilon(u)} = \infty$

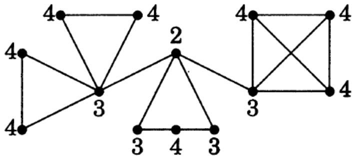
Nota

- $\textit{diam } G = \max_{u \in V(G)} \epsilon(u)$
- Si G es disconexo, $\textit{diam } G = \textit{rad } G = \mathop{\epsilon(u)}_{u \in V(G)} = \infty$


Petersen
Q_3
C_4
C_5
P_3
P_4
K_5
Star

Grafo	Diámetro	Radio
K_n	1	1
Estrella	2	1
P_n	$n-1$	$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$
C_n	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
Q_k	k	k
Petersen	2	2


4
4
4
2
4
4
4
3
3
4
4
3
4
3



Nótese que cada vértice está etiquetado con su excentricidad.

Proposición

Si G es un grafo simple entonces

$$diam\ G \geq 3 \longrightarrow diam\ \overline{G} \leq 3$$

Proposición

Si G es un grafo simple entonces

$$diam\ G\ \geq 3 \longrightarrow diam\ \overline{G}\ \leq 3$$

Centro

El **centro** de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad.

Proposición

Si G es un grafo simple entonces

$$diam\ \ G\ \ \geq 3 \longrightarrow diam\ \overline{G}\ \ \leq 3$$

Centro

El **centro** de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad.

¿Cuándo se tiene que $centro(G) = G$?

Proposición

Si G es un grafo simple entonces

$$diam\ G\ \geq 3 \longrightarrow diam\ \overline{G}\ \leq 3$$

Centro

El **centro** de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad.

¿Cuándo se tiene que $centro(G) = G$? $rad\ G\ =\ diam\ G$

Proposición

Si G es un grafo simple entonces

$$\text{diam } G \geq 3 \longrightarrow \text{diam } \overline{G} \leq 3$$

Centro

El **centro** de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad.

¿Cuándo se tiene que $centro(G) = G$? $rad\ G = diam\ G$

Teorema (Jordan)

El centro de un árbol es un vértice o una arista.

Índice de Wiener

El **índice de Wiener** de un grafo G es la suma

$$D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$$

Índice de Wiener

El **índice de Wiener** de un grafo G es la suma

$$D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$$

Distancia promedio

La **distancia promedio** de un grafo G es

$$\frac{D(G)}{\binom{n}{2}}$$

Teorema

Si T es un árbol con n vértices el índice de Wiener es minimizado por las estrellas de n vértices y maximizado por los caminos P_n, ambos de forma única.

Teorema

Si T es un árbol con n vértices el índice de Wiener es minimizado por las estrellas de n vértices y maximizado por los caminos P_n, ambos de forma única.

Nota

- $D(K_{1,n-1}) = (n-1) + 2\binom{n-1}{2} = (n-1)^2$

Teorema

Si T es un árbol con n vértices el índice de Wiener es minimizado por las estrellas de n vértices y maximizado por los caminos P_n, ambos de forma única.

Nota

- $D(K_{1,n-1}) = (n-1) + 2\binom{n-1}{2} = (n-1)^2$
- $D(P_n) = D(P_{n-1}) + \binom{n}{2} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n+1}{3}$

Teorema

Si T es un árbol con n vértices el índice de Wiener es minimizado por las estrellas de n vértices y maximizado por los caminos P_n, ambos de forma única.

Nota

- $D(K_{1,n-1}) = (n-1) + 2\binom{n-1}{2} = (n-1)^2$
- $D(P_n) = D(P_{n-1}) + \binom{n}{2} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n+1}{3}$

Corolario

Si H es un subgrafo de G entonces $d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$ y $D(G) \leq D(H)$.

Corolario

Si H es un subgrafo de G entonces $d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$ y $D(G) \leq D(H)$.

Corolario

Si G es un grafo conexo con n vértices entonces $D(G) \leq D(P_n)$

Enumeración de árboles

- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples con conjunto de vértices $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ¿Cuántos son árboles?

Enumeración de árboles

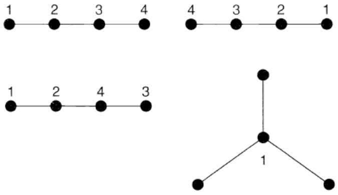
- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples con conjunto de vértices $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ¿Cuántos son árboles?
- $n = 1$ o $n = 2 : |T| = 1$

Enumeración de árboles

- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples con conjunto de vértices $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ¿Cuántos son árboles?
- $n = 1$ o $n = 2$: $|T| = 1$
- $n = 3$: $|T| = 3$ (1 clase de isomorfismo).

Enumeración de árboles

- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples con conjunto de vértices $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ¿Cuántos son árboles?
- $n = 1$ o $n = 2 : |T| = 1$
- $n = 3 : |T| = 3$ (1 clase de isomorfismo).
- $n = 4 : |T| = 16$ (4 estrellas y 12 caminos).



Fórmula de Cayley

Hay n^{n-2} numeraciones de árboles con conjunto de vértices $[n]$.

Fórmula de Cayley

Hay n^{n-2} numeraciones de árboles con conjunto de vértices $[n]$.

- Dado un conjunto S de números, hay n^{n-2} listas de longitud $n-2$ con entradas en S. Este conjunto de listas lo notamos S^{n-2}.

Fórmula de Cayley

Hay n^{n-2} numeraciones de árboles con conjunto de vértices $[n]$.

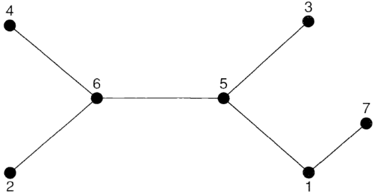
- Dado un conjunto S de números, hay n^{n-2} listas de longitud $n-2$ con entradas en S. Este conjunto de listas lo notamos S^{n-2}.
- S^{n-2} se usa para codificar los árboles con conjunto de vértices S. La lista que resulta de un árbol es un **código de Prüfer**.

Algoritmo (Código de Prüfer)

Input: Un árbol T con conjunto de vértices $S \subseteq \mathbb{N}$.
Output: $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ un código de Prüfer.
Iteración: En el i-ésimo paso se elimina la hoja con menor valor, sea a_i el vecino de esta hoja.

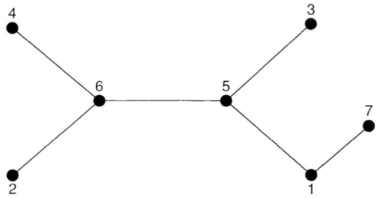
Algoritmo (Código de Prüfer)

Input: Un árbol T con conjunto de vértices $S \subseteq \mathbb{N}$.
Output: $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ un código de Prüfer.
Iteración: En el i-ésimo paso se elimina la hoja con menor valor, sea a_i el vecino de esta hoja.



Algoritmo (Código de Prüfer)

Input: Un árbol T con conjunto de vértices $S \subseteq \mathbb{N}$.
Output: $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ un código de Prüfer.
Iteración: En el i-ésimo paso se elimina la hoja con menor valor, sea a_i el vecino de esta hoja.



65651

Nota

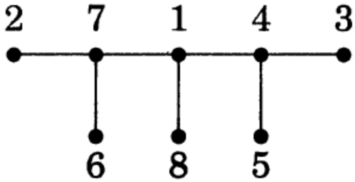
- Después de $n-2$ iteraciones queda solo una de las $n-1$ aristas originales y se ha producido una lista de longitud $n-2$ con entradas en S.

Nota

- Después de $n-2$ iteraciones queda solo una de las $n-1$ aristas originales y se ha producido una lista de longitud $n-2$ con entradas en S.
- Después de la primera iteración, el resto del código de Prüfer es el código del subárbol $T' = T - \{x\}$, con x la hoja de menor valor.

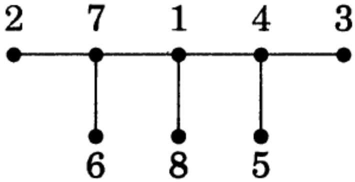
Nota

- Después de $n-2$ iteraciones queda solo una de las $n-1$ aristas originales y se ha producido una lista de longitud $n-2$ con entradas en S.
- Después de la primera iteración, el resto del código de Prüfer es el código del subárbol $T' = T - \{x\}$, con x la hoja de menor valor.



Nota

- Después de $n-2$ iteraciones queda solo una de las $n-1$ aristas originales y se ha producido una lista de longitud $n-2$ con entradas en S.
- Después de la primera iteración, el resto del código de Prüfer es el código del subárbol $T' = T - \{x\}$, con x la hoja de menor valor.



744171

Algoritmo (Reconstrucción de T)

Input: $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ un código de Prüfer.
Output: Un árbol T con conjunto de vértices $S \subseteq \mathbb{N}$.
Iteración:

- T es el conjunto S de vértices aislados.
- Seleccione el menor vértice no marcado que no está en el código: x.
- $T = T \cup \{ax\}$ donde a es el primer vértice del código.
- Marque x.
- Tome el subcódigo que se obtiene al eliminar el primer vértice a.
- Después de $n-2$ iteraciones quedan dos nodos sin marcar, únalos para formar la última arista.

744171

Aristas:

- $(2,7)$

744171

Aristas:

- $(2, 7)$
- $(3, 4)$

744171

Aristas:

- $(2, 7)$
- $(3, 4)$
- $(5, 4)$

744171

Aristas:

- $(2,7)$
- $(3,4)$
- $(5,4)$
- $(4,1)$

744171

Aristas:

- $(2, 7)$
- $(3, 4)$
- $(5, 4)$
- $(4, 1)$
- $(6, 7)$

744171

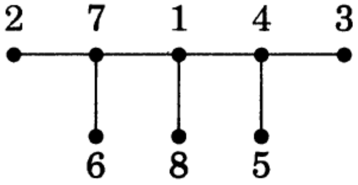
Aristas:

- $(2, 7)$
- $(3, 4)$
- $(5, 4)$
- $(4, 1)$
- $(6, 7)$
- $(7, 1)$

744171

Aristas:

- $(2,7)$
- $(3,4)$
- $(5,4)$
- $(4,1)$
- $(6,7)$
- $(7,1)$
- $(1,8)$



Corolario

El número de árboles de expansión de K_n es n^{n-2}.

Corolario

El número de árboles de expansión de K_n es n^{n-2}.

Corolario

Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ enteros positivos que sumen $2(n-1)$, entonces existen exactamente

$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!}$$

árboles con conjunto de vértices $[n]$ tales que para todo i, $d(v_i) = d_i$.

Corolario

El número de árboles de expansión de K_n es n^{n-2}.

Corolario

Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ enteros positivos que sumen $2(n-1)$, entonces existen exactamente

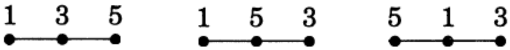
$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!}$$

árboles con conjunto de vértices $[n]$ tales que para todo i, $d(v_i) = d_i$.

$$n(T) = n,\ e(T) = n-1,\ \sum_{v \in V(T)} d(v_i) = 2e(T)$$

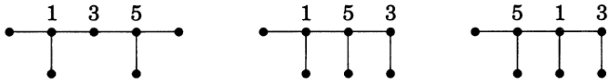
Ejemplo

- Sea T un árbol con vértices $S = [7]$ y grados $(3, 1, 2, 1, 3, 1, 1)$ respectivamente.
- $\dfrac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!} = 30$
- Los vértices $\{1, 3, 5\}$ son vértices internos.
- Al eliminar las hojas queda un subárbol $\{1, 3, 5\}$.
- Hay tres de éstos subárboles, determinados por cuál de los tres vértices está en el centro.



Ejemplo (continuación)

- Para completar T se agrega el número apropiado de hojas vecinas a cada vértice interno.
- Primer árbol: De los cuatro vértices restantes se seleccionan los dos adyacentes al vértice 1: $\binom{4}{2} = 6$.
- Segundo y tercer árbol: De los cuatro vértices restantes se selecciona el vecino del vértice 3 y de los restantes tres se selecciona el vecino del vértice central: $\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 12$.



Árboles de expansión

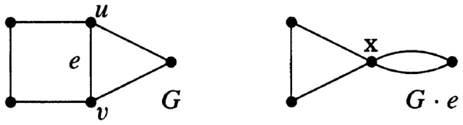
Contracción

Sea G un grafo y e una arista con extremos u, v. La **contracción** de la arista e consiste en reemplazar u, v con un único vértice x cuyas aristas incidentes son las aristas distintas de e que eran incidentes a u o v. El grafo resultante, notado $G \cdot e$ tiene una arista menos que G.

Árboles de expansión

Contracción

Sea G un grafo y e una arista con extremos u, v. La **contracción** de la arista e consiste en reemplazar u, v con un único vértice x cuyas aristas incidentes son las aristas distintas de e que eran incidentes a u o v. El grafo resultante, notado $G \cdot e$ tiene una arista menos que G.



Teorema

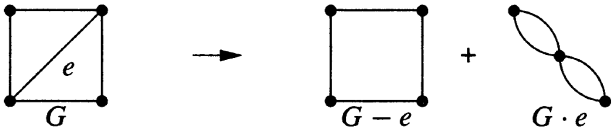
Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Teorema

Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

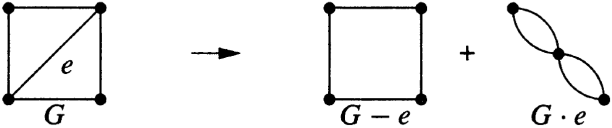
$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$



Teorema

Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

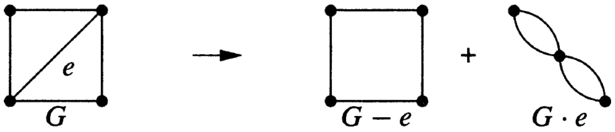


$\tau(G) = 8$

Teorema

Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

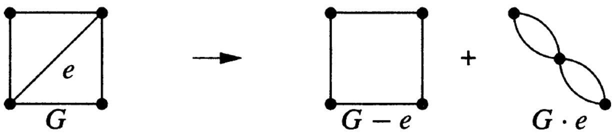


$\tau(G) = 8$ $\tau(G - e) = 4$

Teorema

Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$



$\tau(G) = 8$ $\qquad$ $\tau(G - e) = 4$ $\qquad$ $\tau(G \cdot e) = 4$

Teorema (Matrix Tree Theorem)

Dado G un grafo sin bucles con vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sea a_{ij} el número de aristas con extremos v_i y v_j. Sea Q la matriz definida por:

$$q_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ d(v_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces

$$\tau(G) = Q_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

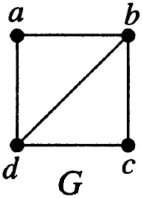
Teorema (Matrix Tree Theorem)

Dado G un grafo sin bucles con vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sea a_{ij} el número de aristas con extremos v_i y v_j. Sea Q la matriz definida por:

$$q_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ d(v_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces

$$\tau(G) = Q_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$



$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{4,4} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Nota

- Si G tiene bucles, éstos no afectan el número de árboles de expansión. Por lo tanto, se eliminan los bucles de G y se aplica el teorema.

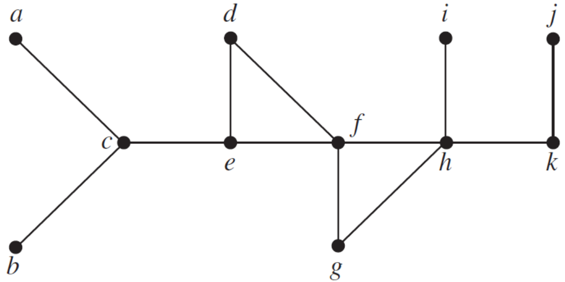
Nota

- Si G tiene bucles, éstos no afectan el número de árboles de expansión. Por lo tanto, se eliminan los bucles de G y se aplica el teorema.
- Los bucles si afectarían la diagonal de la matriz

Búsqueda en profundidad (Backtracking)

Input: Un grafo conexo G con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$.
Output: Un árbol de expansión T.
Iteración:

1. $T = \{v_1\}$
2. $Visita(v)$
   a. Para cada vértice w adyacente a v, $w \notin V(T)$
      1. $V(T) = V(T) \cup \{w\}$ y $E(T) = E(T) \cup \{vw\}$
      2. $Visita(w)$


a
d
i
j
f
c
e
h
k
b
g

Búsqueda a lo ancho (BFS Breadth-First Search)

Input: Un grafo conexo G con conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
Output: Un árbol de expansión T.
Iteración:

1. $T = \{v_1\}$
2. $L = [v_1]$
3. Mientras $L \neq \emptyset$
   I Elimine el primer vértice v de L
   II Para cada vecino w de v
      a Si $w \notin L$ y $w \notin V(T)$
      i Concatene w al final de la lista L
      ii $V(T) = V(T) \cup \{w\}$ y $E(T) = E(T) \cup \{vw\}$

Árbol con raíz

Un **árbol con raíz** $T(x)$ es un árbol con un vértice específico x, denominado la **raíz** de T.

Árbol con raíz

Un **árbol con raíz** $T(x)$ es un árbol con un vértice específico x, denominado la **raíz** de T.

Derivación

Una **derivación** o **árbol de salida** es una orientación de un árbol con raíz x, tal que $d^{-}(x) = 0$ y $d^{-}(v) = 1$, $\forall v \in V(T) - \{x\}$

Árbol con raíz

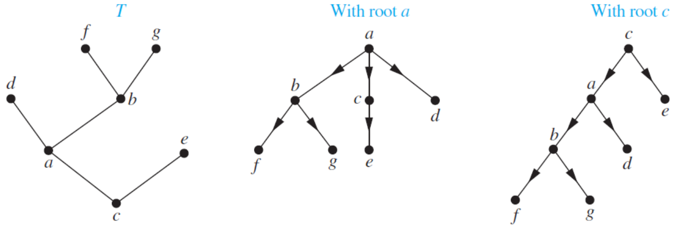
Un **árbol con raíz** $T(x)$ es un árbol con un vértice específico x, denominado la **raíz** de T.

Derivación

Una **derivación** o **árbol de salida** es una orientación de un árbol con raíz x, tal que $d^{-}(x) = 0$ y $d^{-}(v) = 1$, $\forall v \in V(T) - \{x\}$

Árbol de entrada

Un **árbol de entrada** es un árbol de salida con las aristas invertidas.


T
f
g
d
b
e
a
c
With root a
a
b
c
d
f
g
e
With root c
c
a
e
b
d
f
g

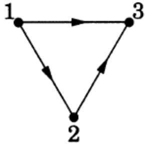
Teorema (Directed Matrix Tree Theorem)

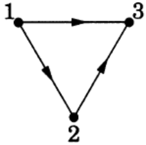
Dado G un digrafo sin bucles con vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sea a_{ij} el número de aristas de v_j a v_i. Sean Q^- y Q^+ las matrices definidas por:

$$Q^- = (q^-)_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ d^-(v_i) & \text{si } i = j \end{cases} \quad Q^+ = (q^+)_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ d^+(v_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

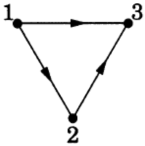
Entonces:

- El número de árboles de salida de expansión de G con raíz en v_i es el valor de cualquier cofactor en la i-ésima fila de Q^-.
- El número de árboles de entrada de expansión de G con raíz en v_i es el valor de cualquier cofactor en la i-ésima columna de Q^+.


1
3
2



$$Q^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad Q^{+} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$Q^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad Q^+ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Raíz 1: Salida: 2. Entrada: 0.
- Raíz 2: Salida: 0. Entrada: 0.
- Raíz 3: Salida: 0. Entrada: 2.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- Si v es un vértice en T, $v \neq x$, el **padre** de v es el único vértice u tal que hay una arista dirigida de u a v.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- Si v es un vértice en T, $v \neq x$, el **padre** de v es el único vértice u tal que hay una arista dirigida de u a v.
- Si u es el padre de v, v es un **hijo** de u.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- Si v es un vértice en T, $v \neq x$, el **padre** de v es el único vértice u tal que hay una arista dirigida de u a v.
- Si u es el padre de v, v es un **hijo** de u.
- Vértices con el mismo padre se denominan **hermanos**.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- Si v es un vértice en T, $v \neq x$, el **padre** de v es el único vértice u tal que hay una arista dirigida de u a v.
- Si u es el padre de v, v es un **hijo** de u.
- Vértices con el mismo padre se denominan **hermanos**.
- Los **ancestros** de un vértice $v \neq x$, son los vértices en el camino de la raíz a v (excluyendo a v.)

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- Si v es un vértice en T, $v \neq x$, el **padre** de v es el único vértice u tal que hay una arista dirigida de u a v.
- Si u es el padre de v, v es un **hijo** de u.
- Vértices con el mismo padre se denominan **hermanos**.
- Los **ancestros** de un vértice $v \neq x$, son los vértices en el camino de la raíz a v (excluyendo a v.)
- Los **descendientes** de un vértice v son los vértices que tienen a v como ancestro.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- El **nivel** de un vértice v es la longitud del camino de la raíz al vértice v. El nivel de la raíz se define como cero.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- El **nivel** de un vértice v es la longitud del camino de la raíz al vértice v. El nivel de la raíz se define como cero.
- La **altura** h de un árbol con raíz es el máximo de los niveles de los vértices.

Definición

Sea T un árbol con raíz x:

- El **nivel** de un vértice v es la longitud del camino de la raíz al vértice v. El nivel de la raíz se define como cero.
- La **altura** h de un árbol con raíz es el máximo de los niveles de los vértices.

Árbol m-ario

Sea T un árbol con raíz:

- T es un **árbol m-ario** si cada vértice interno tiene a lo sumo m hijos.

Árbol m-ario

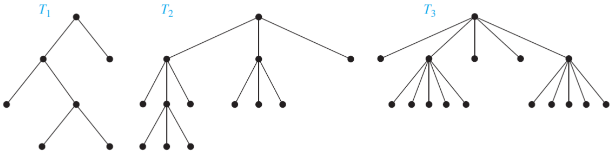
Sea T un árbol con raíz:

- T es un **árbol m-ario** si cada vértice interno tiene a lo sumo m hijos.
- T es un **árbol m-ario completo** si cada vértice interno tiene exactamente m hijos.

Árbol m-ario

Sea T un árbol con raíz:

- T es un **árbol m-ario** si cada vértice interno tiene a lo sumo m hijos.
- T es un **árbol m-ario completo** si cada vértice interno tiene exactamente m hijos.
- Un árbol m-ario con $m = 2$ es un **árbol binario**. En este caso, los hijos de un vértice v se denominan **hijo izquierdo** e **hijo derecho**.



Proposición

Sea T un árbol m-ario completo con n vértices, i vértices internos y l hojas, entonces:

Vértices	Internos	Hojas
n	$i = \frac{n-1}{m}$	$l = \frac{(m-1)n+1}{m}$
$n = mi + 1$	i	$l = (m-1)i + 1$
$n = \frac{ml-1}{m-1}$	$i = \frac{l-1}{m-1}$	l

Árbol balanceado

Un árbol m-ario de altura h es **balanceado** si todas las hojas están en los niveles h o $h - 1$.

Árbol balanceado

Un árbol m-ario de altura h es **balanceado** si todas las hojas están en los niveles h o $h-1$.

Proposición

Sea T un árbol m-ario de altura h, entonces:

- $l \leq m^h$
- $h \geq \lceil \log_m l \rceil$
- Si T es completo y balanceado, $h = \lceil \log_m l \rceil$

Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).