Teoría de Grafos

Juan David Rojas Gacha

2020 - II

Emparejamientos y cubrimientos

Emparejamiento

- Un **emparejamiento** M en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) sin extremos comunes.

Emparejamientos y cubrimientos

Emparejamiento

- Un **emparejamiento** M en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) sin extremos comunes.
- Los vértices incidentes a las aristas de un emparejamiento M son **saturados** por M, los demás vértices son **insaturados**. (M-saturado, M-insaturado).

Emparejamientos y cubrimientos

Emparejamiento

- Un **emparejamiento** M en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) sin extremos comunes.
- Los vértices incidentes a las aristas de un emparejamiento M son **saturados** por M, los demás vértices son **insaturados**. (M-saturado, M-insaturado).
- Un **emparejamiento perfecto** en un grafo G es un emparejamiento que satura cada vértice de G.

Emparejamientos y cubrimientos

Emparejamiento

- Un **emparejamiento** M en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) sin extremos comunes.
- Los vértices incidentes a las aristas de un emparejamiento M son **saturados** por M, los demás vértices son **insaturados**. (M-saturado, M-insaturado).
- Un **emparejamiento perfecto** en un grafo G es un emparejamiento que satura cada vértice de G.
- El **tamaño** de un emparejamiento M es el número de aristas en M.

Ejemplo: $K_{n,n}$

Sea $K_{n,n}$ con conjuntos partitos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$.

- Un emparejamiento perfecto define una biyección de X a Y.

Ejemplo: $K_{n,n}$

Sea $K_{n,n}$ con conjuntos partitos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

- Un emparejamiento perfecto define una biyección de X a Y.
- Hay $n!$ emparejamientos perfectos de tamaño n.

Ejemplo: $K_{n,n}$

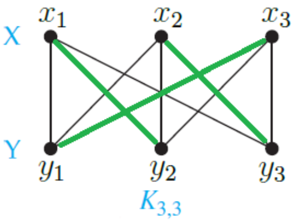
Sea $K_{n,n}$ con conjuntos partitos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

- Un emparejamiento perfecto define una biyección de X a Y.
- Hay $n!$ emparejamientos perfectos de tamaño n.
- Cada emparejamiento perfecto es una permutación del conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo: $K_{n,n}$

Sea $K_{n,n}$ con conjuntos partitos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

- Un emparejamiento perfecto define una biyección de X a Y.
- Hay $n!$ emparejamientos perfectos de tamaño n.
- Cada emparejamiento perfecto es una permutación del conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

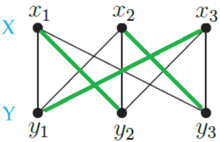


Ejemplo: $K_{n,n}$

- Los emparejamientos se pueden representar como matrices: sean X y Y los índices de las filas y las columnas respectivamente. La entrada (i,j) es 1 para cada arista x_iy_j en M.
- Nótese que hay un 1 en cada fila y en cada columna.

Ejemplo: $K_{n,n}$

- Los emparejamientos se pueden representar como matrices: sean X y Y los índices de las filas y las columnas respectivamente. La entrada (i, j) es 1 para cada arista $x_i y_j$ en M.
- Nótese que hay un 1 en cada fila y en cada columna.



$K_{3,3}$

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ejemplo: K_n

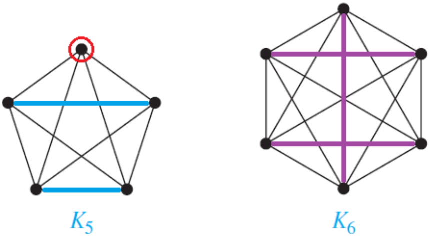
- K_{2n+1} no tiene emparejamientos perfectos.

Ejemplo: K_n

- K_{2n+1} no tiene emparejamientos perfectos.
- K_{2n} tiene $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ emparejamientos perfectos de tamaño n.

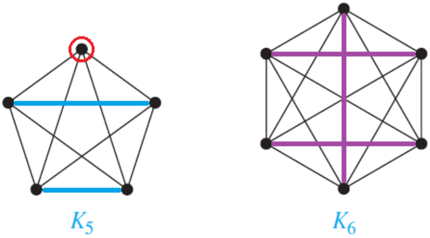
Ejemplo: K_n

- K_{2n+1} no tiene emparejamientos perfectos.
- K_{2n} tiene $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ emparejamientos perfectos de tamaño n.



Ejemplo: K_n

- K_{2n+1} no tiene emparejamientos perfectos.
- K_{2n} tiene $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ emparejamientos perfectos de tamaño n.



K_6 tiene 15 emparejamientos perfectos.
K_{12} tiene 10395 emparejamientos perfectos.

- Sea f_n el número de emparejamientos perfectos de K_{2n}.

- Sea f_n el número de emparejamientos perfectos de K_{2n}.
- Nótese que f_n es el número de formas de hacer parejas (de distintos elementos) con $2n$ elementos.

- Sea f_n el número de emparejamientos perfectos de K_{2n}.
- Nótese que f_n es el número de formas de hacer parejas (de distintos elementos) con $2n$ elementos.
- Hay $2n-1$ posibles compañeros para el vértice v_{2n} y para cada una de éstas selecciones hay f_{n-1} maneras de completar el emparejamiento.

- Sea f_n el número de emparejamientos perfectos de K_{2n}.
- Nótese que f_n es el número de formas de hacer parejas (de distintos elementos) con $2n$ elementos.
- Hay $2n-1$ posibles compañeros para el vértice v_{2n} y para cada una de éstas selecciones hay f_{n-1} maneras de completar el emparejamiento.
- Luego,

$$f_n = \begin{cases} (2n-1)f_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

- Por lo tanto, si $n \geq 1$:

$$f_n = (2n-1)(2n-3)\cdots(1)$$

- Por lo tanto, si $n \geq 1$:

$$f_n = (2n-1)(2n-3)\cdots(1)$$

- Se puede demostrar por inducción que:

$$(1)\cdots(2n-3)(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \ \forall n \geq 1.$$

Argumento por conteo:

- De un ordenamiento de $2n$ elementos (de los cuales hay (2n)!), se forma un emparejamiento perfecto al tomar los primeros dos, los siguientes dos y así sucesivamente.

Argumento por conteo:

- De un ordenamiento de $2n$ elementos (de los cuales hay (2n)!), se forma un emparejamiento perfecto al tomar los primeros dos, los siguientes dos y así sucesivamente.
- Cada emparejamiento perfecto es generado por $2^n n!$ ordenamientos, ya que el cambio de orden en la parejas (n!) o el orden dentro de las parejas (2^n) no cambia el emparejamiento.

Argumento por conteo:

- De un ordenamiento de $2n$ elementos (de los cuales hay (2n)!), se forma un emparejamiento perfecto al tomar los primeros dos, los siguientes dos y así sucesivamente.
- Cada emparejamiento perfecto es generado por $2^n n!$ ordenamientos, ya que el cambio de orden en la parejas (n!) o el orden dentro de las parejas (2^n) no cambia el emparejamiento.
- Así,

$$f_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Emparejamiento maximal

Un **emparejamiento maximal** es un emparejamiento que no puede aumentar su tamaño al agregar una arista.

Emparejamiento maximal

Un **emparejamiento maximal** es un emparejamiento que no puede aumentar su tamaño al agregar una arista.

Emparejamiento máximo

Un **emparejamiento máximo** es un emparejamiento de tamaño máximo entre todos los emparejamientos del grafo.

Nota

- Un emparejamiento M es maximal si cada arista $e \notin M$ es incidente a una arista $e' \in M$.

Nota

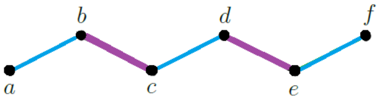
- Un emparejamiento M es maximal si cada arista $e \notin M$ es incidente a una arista $e' \in M$.
- Todo emparejamiento máximo es maximal.

Nota

- Un emparejamiento M es maximal si cada arista $e \notin M$ es incidente a una arista $e' \in M$.
- Todo emparejamiento máximo es maximal.

Ejemplo

- $M_1 = \{bc, de\}$ es un emparejamiento maximal.
- $M_2 = \{ab, cd, ef\}$ es un emparejamiento máximo.



P_6

M-camino alternante

Dado un emparejamiento M, un M-**camino alternante** es un camino que alterna entre aristas $e \in M$ y aristas $e' \notin M$.

M-camino alternante

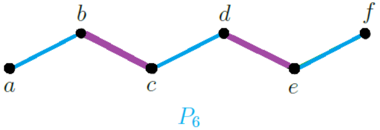
Dado un emparejamiento M, un M-**camino alternante** es un camino que alterna entre aristas $e \in M$ y aristas $e' \notin M$.

M-camino de aumento

Un M-**camino de aumento** es un M-camino alternante cuyos extremos son insaturados por M.

Ejemplo

- En $M_1 = \{bc, de\}$, P_6 es un M_1-camino alternante. Los extremos son insaturados por M_1, luego P_6 es un M_1-camino de aumento.
- En $M_2 = \{ab, cd, ef\}$, P_6 es un M_2-camino alternante. Los extremos son saturados por M_2, luego P_6 no es un M_2-camino de aumento.



Nota

Dado P un M-camino de aumento, si se reemplazan las aristas de M en P con las otras aristas de P se obtiene un nuevo emparejamiento M' con una arista adicional.

Nota

Dado P un M-camino de aumento, si se reemplazan las aristas de M en P con las otras aristas de P se obtiene un nuevo emparejamiento M' con una arista adicional.

Teorema (Berge)

Un emparejamiento M en un grafo G es un emparejamiento máximo en G sii G no tiene un M-camino de aumento.

Diferencia simétrica

- Si G y H son grafos con conjunto de vértices V, entonces la **diferencia simétrica** $G \triangle H$ es el grafo con conjunto de vértices V y aristas $E(G) \triangle E(H)$.

Diferencia simétrica

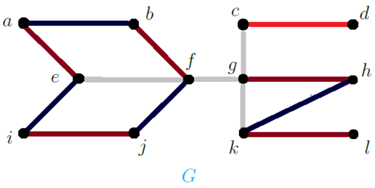
- Si G y H son grafos con conjunto de vértices V, entonces la **diferencia simétrica** $G \triangle H$ es el grafo con conjunto de vértices V y aristas $E(G) \triangle E(H)$.
- Si M y M' son emparejamientos entonces

$$M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$$

Ejemplo

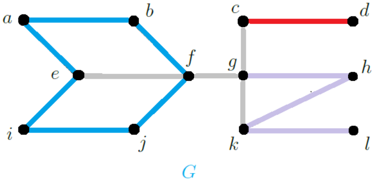
Si $M = \{ae, ij, bf, cd, gh, kl\}$ y $M' = \{ab, ei, jf, kh, cd\}$ entonces

$$M \triangle M' = \{ae, ij, bf, gh, kl, ab, ei, jf, kh\}$$



Proposición

Cada componente de la diferencia simétrica de dos emparejamientos es un camino o un ciclo.



Definición

Sea M un emparejamiento en un grafo G. Si S es un conjunto de vértices, $S \subseteq V(G)$, entonces $N(S)$ es el conjunto de vértices que tienen un vecino en S.

Definición

Sea M un emparejamiento en un grafo G. Si S es un conjunto de vértices, $S \subseteq V(G)$, entonces $N(S)$ es el conjunto de vértices que tienen un vecino en S.

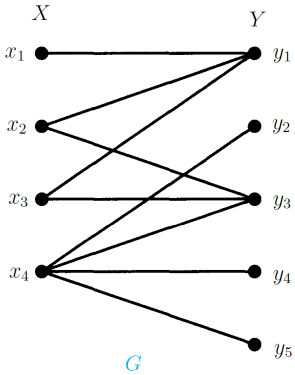
Teorema (Condición de Hall)

Un X, Y-bigrafo G tiene un emparejamiento que satura a X (emparejamiento completo) sii

$$|N(S)| \geq |S|, \ \forall S \subseteq X.$$

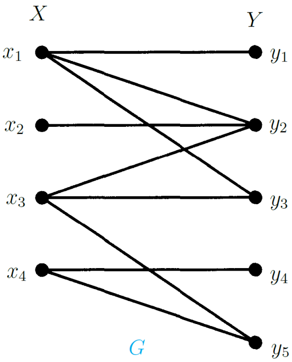
Ejemplo

Sean $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $N(S) = \{y_1, y_3\}$. Como $|N(S)| < |S|$, entonces no existe un emparejamiento que sature a X.

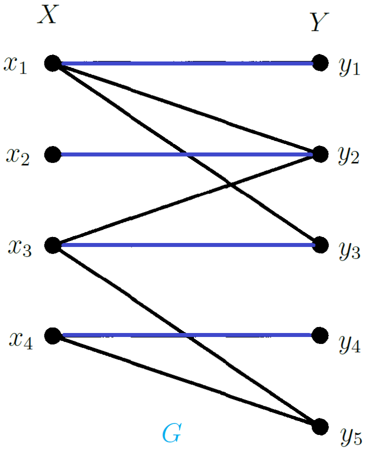


Ejemplo

Como $|N(S)| \geq |S|$, $\forall S \subseteq X$, entonces existe un emparejamiento que satura a X.



S	$N(S)$	$\lvert S\rvert$	$\lvert N(S)\rvert$
$\emptyset$	$\emptyset$	0	0
$\{x_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	1	3
$\{x_2\}$	$\{y_2\}$	1	1
$\{x_3\}$	$\{y_2, y_3, y_5\}$	1	3
$\{x_4\}$	$\{y_4, y_5\}$	1	2
$\{x_1, x_2\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	2	3
$\{x_1, x_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	2	4
$\{x_1, x_4\}$	Y	2	5
$\{x_2, x_3\}$	$\{y_2, y_3, y_5\}$	2	3
$\{x_2, x_4\}$	$\{y_2, y_4, y_5\}$	2	3
$\{x_3, x_4\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	2	4
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$	3	4
$\{x_1, x_2, x_4\}$	Y	3	5
$\{x_1, x_3, x_4\}$	Y	3	5
$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	3	4
X	Y	4	5


X
Y
x_1
x_2
x_3
x_4
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
G

Corolario

Para $k > 0$, todo grafo bipartito regular tiene un emparejamiento perfecto.

Corolario

Para $k > 0$, todo grafo bipartito regular tiene un emparejamiento perfecto.

Corolario

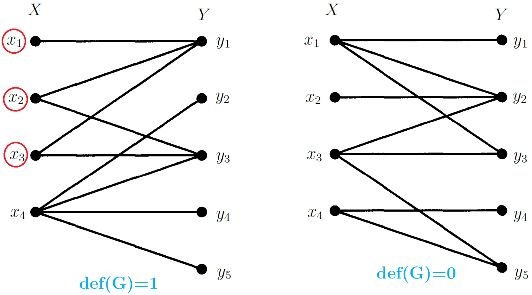
Un X, Y-bigrafo G tiene un emparejamiento completo si para algún $k > 0$, $d(x) \geq k \geq d(y)$ para todos los vértices $x \in X$ y $y \in Y$.

Deficiencia

- Sea G un X, Y-bigrafo. Si $A \subseteq X$ la **deficiencia** de A está definida por $def(A) = |A| - |N(A)|$.

Deficiencia

- Sea G un X, Y-bigrafo. Si $A \subseteq X$ la **deficiencia** de A está definida por $def(A) = |A| - |N(A)|$.
- La **deficiencia** de G, es $def(G) = \text{máx}\{def(A) | A \subseteq X\}$.



Corolario

Sea G un X, Y-bigrafo, si $def(G) > 0$ entonces G no tiene un emparejamiento completo.

Corolario

Sea G un X, Y-bigrafo, si $def(G) > 0$ entonces G no tiene un emparejamiento completo.

Corolario (Fórmula de König - Ore)

Sea G un X, Y-bigrafo, el número máximo de vértices en X que pueden emparejarse con vértices en Y es $|X| - def(G)$.

Corolario

Sea G un X, Y-bigrafo, si $def(G) > 0$ entonces G no tiene un emparejamiento completo.

Corolario (Fórmula de König - Ore)

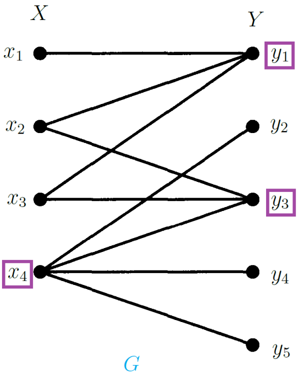
Sea G un X, Y-bigrafo, el número máximo de vértices en X que pueden emparejarse con vértices en Y es $|X| - def(G)$.

Corolario

Sea G un X, Y-bigrafo, si $def(G) = 0$ entonces G tiene un emparejamiento completo.

Cubrimiento por vértices

Un **cubrimiento por vértices** de un grafo G es un subconjunto $Q \subseteq V(G)$ que contiene al menos un extremo de cada arista. En este caso se dice que los vértices en Q **cubren** las aristas de G.



Cubrimiento minimal

Un cubrimiento es un **cubrimiento minimal** si ninguno de sus subconjuntos propios es un cubrimiento.

Cubrimiento minimal

Un cubrimiento es un **cubrimiento minimal** si ninguno de sus subconjuntos propios es un cubrimiento.

Cubrimiento mínimo

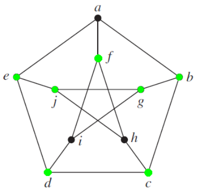
Un **cubrimiento mínimo** es un cubrimiento de tamaño mínimo entre todos los cubrimientos del grafo.

Cubrimiento minimal

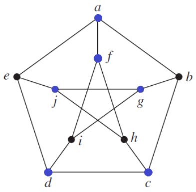
Un cubrimiento es un **cubrimiento minimal** si ninguno de sus subconjuntos propios es un cubrimiento.

Cubrimiento mínimo

Un **cubrimiento mínimo** es un cubrimiento de tamaño mínimo entre todos los cubrimientos del grafo.



Cubrimiento minimal



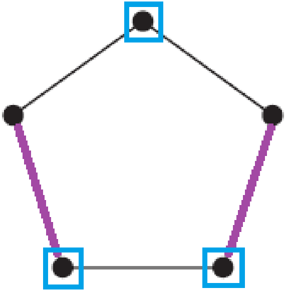
Cubrimiento mínimo

Nota

Si M es un emparejamiento de un grafo G y K es un cubrimiento de G, entonces al menos un extremo de cada arista de M pertence a K. Como todos los extremos son distintos, $|M| \leq |K|$

Nota

Si M es un emparejamiento de un grafo G y K es un cubrimiento de G, entonces al menos un extremo de cada arista de M pertence a K. Como todos los extremos son distintos, $|M| \leq |K|$



Proposición

Sea M es un emparejamiento de un grafo G y K un cubrimiento de G tales que $|M| = |K|$. Entonces M es un emparejamiento máximo y K es un cubrimiento mínimo.

Proposición

Sea M es un emparejamiento de un grafo G y K un cubrimiento de G tales que $|M| = |K|$. Entonces M es un emparejamiento máximo y K es un cubrimiento mínimo.

Teorema (König - Egerváry)

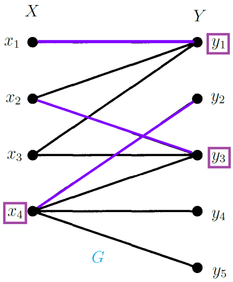
Si G es un grafo bipartito, entonces el tamaño máximo de un emparejamiento en G es igual al tamaño mínimo de un cubrimiento de G.

Proposición

Sea M es un emparejamiento de un grafo G y K un cubrimiento de G tales que $|M| = |K|$. Entonces M es un emparejamiento máximo y K es un cubrimiento mínimo.

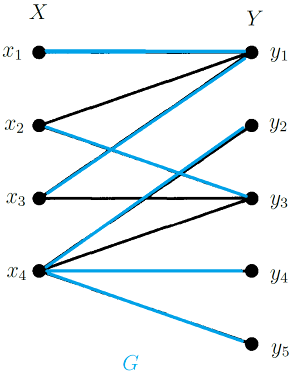
Teorema (König - Egerváry)

Si G es un grafo bipartito, entonces el tamaño máximo de un emparejamiento en G es igual al tamaño mínimo de un cubrimiento de G.



Cubrimiento por aristas

Un **cubrimiento por aristas** de un grafo G es un subconjunto $L \subseteq E(G)$ tal que cada vértice en G es incidente a alguna arista en L. En este caso se dice que las aristas de L **cubren** los vértices de G.



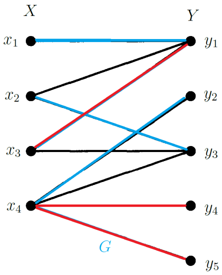
Nota

- Sólo los grafos sin vértices aislados tienen cubrimientos por aristas.
- Un emparejamiento perfecto forma un cubrimiento por aristas con $n(G)/2$ aristas.
- En general, se puede obtener un cubrimiento por aristas al agregar aristas a un emparejamiento máximo.

Nota

- Sólo los grafos sin vértices aislados tienen cubrimientos por aristas.
- Un emparejamiento perfecto forma un cubrimiento por aristas con $n(G)/2$ aristas.
- En general, se puede obtener un cubrimiento por aristas al agregar aristas a un emparejamiento máximo.

Emparejamiento máximo + aristas que completan el cubrimiento

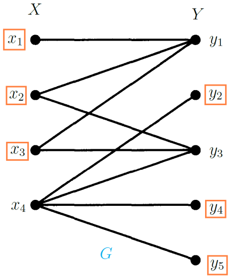


Número de independencia

El número de independencia de un grafo G es el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices.

Número de independencia

El número de independencia de un grafo G es el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices.



Conjunto independiente: $\{x_1, x_2, x_3, y_2, y_4, y_5\}$

Universidad del Rosario

Definición

Los tamaños óptimos de los conjuntos en los problemas de independencia y cubrimientos usan la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\alpha(G) &: \text{tamaño máximo de un conjunto independiente.}\\
\alpha'(G) &: \text{tamaño máximo de un emparejamiento.}\\
\beta(G) &: \text{tamaño mínimo de un cubrimiento por vértices.}\\
\beta'(G) &: \text{tamaño mínimo de un cubrimiento por aristas.}
\end{aligned}$$

Definición

Los tamaños óptimos de los conjuntos en los problemas de independencia y cubrimientos usan la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \alpha(G) &: \text{tamaño máximo de un conjunto independiente.} \\ \alpha'(G) &: \text{tamaño máximo de un emparejamiento.} \\ \beta(G) &: \text{tamaño mínimo de un cubrimiento por vértices.} \\ \beta'(G) &: \text{tamaño mínimo de un cubrimiento por aristas.} \end{aligned}$$

Teorema (König - Egerváry)

Si G es un grafo bipartito, entonces $\alpha'(G) = \beta(G)$.

Lema

En un grafo G, $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente sii $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices, y así $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

Lema

En un grafo G, $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente sii $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices, y así $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

- Si S es un conjunto independiente, cada arista es incidente en al menos un vértice de $\overline{S}$, es decir, $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices.

Lema

En un grafo G, $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente sii $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices, y así $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

- Si S es un conjunto independiente, cada arista es incidente en al menos un vértice de $\overline{S}$, es decir, $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices.
- Si $\overline{S}$ cubre todas las aristas de G, entonces no hay aristas que conecten vértices de S, de decir, S es un conjunto independiente.

Lema

En un grafo G, $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente sii $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices, y así $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

- Si S es un conjunto independiente, cada arista es incidente en al menos un vértice de $\overline{S}$, es decir, $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices.
- Si $\overline{S}$ cubre todas las aristas de G, entonces no hay aristas que conecten vértices de S, de decir, S es un conjunto independiente.
- Luego, cada conjunto independiente maximal es el complemento de un cubrimiento por vértices minimal, y así $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

Teorema (Gallai)

Si G es un grafo sin vértices aislados entonces $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

Teorema (Gallai)

Si G es un grafo sin vértices aislados entonces $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

Corolario (König)

Si G es un grafo bipartito sin vértices aislados entonces $\alpha(G) = \beta'(G)$.

$$\alpha(G) + \cancel{\beta(G)} = n(G) = \cancel{\alpha'(G)} + \beta'(G)$$

Emparejamientos en grafos generales

Factor

- Un **factor** de un grafo G es un subgrafo de expansión de G.

Emparejamientos en grafos generales

Factor

- Un **factor** de un grafo G es un subgrafo de expansión de G.
- Un k-**factor** es un subgrafo de expansión k-regular.

Emparejamientos en grafos generales

Factor

- Un **factor** de un grafo G es un subgrafo de expansión de G.
- Un k-**factor** es un subgrafo de expansión k-regular.

Componente impar

- Una **componente impar** de un grafo G es una componente de orden impar.

Emparejamientos en grafos generales

Factor

- Un **factor** de un grafo G es un subgrafo de expansión de G.
- Un k-**factor** es un subgrafo de expansión k-regular.

Componente impar

- Una **componente impar** de un grafo G es una componente de orden impar.
- El número de componentes de orden impar de G es $\circ(G)$.

Nota

Existe una relación entre un 1-factor y un emparejamiento perfecto:

- Un 1-factor de un grafo G es un subgrafo de expansión 1-regular de G.

Nota

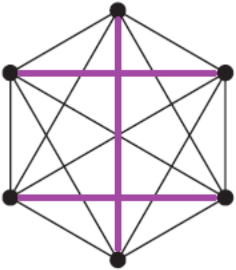
Existe una relación entre un 1-factor y un emparejamiento perfecto:

- Un 1-factor de un grafo G es un subgrafo de expansión 1-regular de G.
- El emparejamiento perfecto sería el conjunto de aristas de este subgrafo.

Nota

Existe una relación entre un 1-factor y un emparejamiento perfecto:

- Un 1-factor de un grafo G es un subgrafo de expansión 1-regular de G.
- El emparejamiento perfecto sería el conjunto de aristas de este subgrafo.



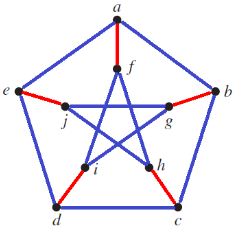
K_6

Nota

Un grafo 3-regular que tenga un emparejamiento perfecto se descompone en un 1-factor y un 2-factor.

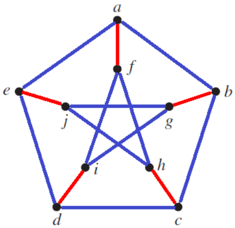
Nota

Un grafo 3-regular que tenga un emparejamiento perfecto se descompone en un 1-factor y un 2-factor.



Nota

Un grafo 3-regular que tenga un emparejamiento perfecto se descompone en un 1-factor y un 2-factor.



1-factor

2-factor

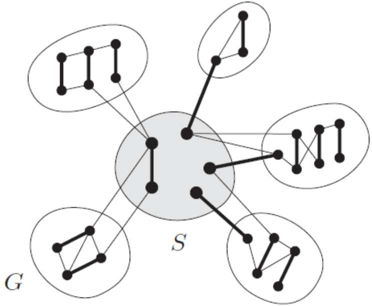
Universidad del Rosario

Teorema (Tutte)

Un grafo G tiene un 1-factor sii $\circ(G - S) \leq |S|$, $\forall S \subseteq V(G)$.

Teorema (Tutte)

Un grafo G tiene un 1-factor sii $\circ(G-S) \leq |S|$, $\forall S \subseteq V(G)$.



Corolario (Fórmula de Berge - Tutte)

El número máximo de vértices saturados por un emparejamiento en G es

$$\min_{S \subseteq V(G)} \{n(G) - (\circ(G - S) - |S|)\}$$

Corolario (Fórmula de Berge - Tutte)

El número máximo de vértices saturados por un emparejamiento en G es

$$\min_{S \subseteq V(G)} \{n(G) - (\circ(G - S) - |S|)\}$$

Corolario (Petersen)

Todo grafo 3-regular sin aristas de corte tiene un 1-factor.

Corolario (Fórmula de Berge - Tutte)

El número máximo de vértices saturados por un emparejamiento en G es

$$\min_{S \subseteq V(G)} \{n(G) - (\circ(G - S) - |S|)\}$$

Corolario (Petersen)

Todo grafo 3-regular sin aristas de corte tiene un 1-factor.

Corolario (Petersen)

Todo grafo 2k-regular tiene un 2-factor.

Bibliografía

Douglas B. West
Introduction to graph theory.
Pearson. (2005).

Kenneth Rosen
Discrete Mathematics and its Applications
McGraw Hill. (2012).