

# Satisfacibilidad, validez y consecuencia

## Sesión 11

---

Edgar Andrade, PhD

Última revisión: Enero de 2020

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación



En esta sesión estudiaremos:

1. Clasificación de fórmulas de acuerdo a sus interpretaciones
2. Satisfacibilidad de conjuntos de fórmulas
3. Consecuencia lógica

- 1 Clasificación de fórmulas
- 2 Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas
- 3 Implicación lógica

# Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea  $A$  una fórmula.

$A$  es satisfacible sii existe una interpretación  $I$  tal que  
 $V_I(A) = 1$ .

# Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea  $A$  una fórmula.

$A$  es satisfacible sii existe una interpretación  $I$  tal que  
 $V_I(A) = 1$ .

$A$  es insatisfacible sii para toda interpretación  $I$ ,  $V_I(A) = 0$ .

## Ejemplo 3

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge q$  es satisfacible.

Sea  $I$  tal que  $I(p) = 1$  y  $I(q) = 1$ . Luego  $V_I(p \wedge q) = 1$ .

## Ejemplo 4

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

## Ejemplo 4

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:



## Ejemplo 4

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ .

## Ejemplo 4

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$  y entonces  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ .

## Ejemplo 4

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$  y entonces  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ .

En cualquier caso,  $V_I(p \wedge \neg p) = 0$ . Como  $I$  es arbitraria,  $p \wedge \neg p$  es insatisfacible.

# Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea  $A$  una fórmula.

$A$  es válida sii para toda interpretación  $I$ ,  $V_I(A) = 1$ .

## Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea  $A$  una fórmula.

$A$  es válida sii para toda interpretación  $I$ ,  $V_I(A) = 1$ .

$A$  es falseable sii existe una interpretación  $I$  tal que  $V_I(A) = 0$ .

## Ejemplo 5

*Proposición:* La fórmula  $p \vee \neg p$  es válida.

## Ejemplo 5

*Proposición:* La fórmula  $p \vee \neg p$  es válida.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

## Ejemplo 5

*Proposición:* La fórmula  $p \vee \neg p$  es válida.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ .



## Ejemplo 5

*Proposición:* La fórmula  $p \vee \neg p$  es válida.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ .

Caso 2:  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(\neg p) = 1$  y entonces  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ .

## Ejemplo 5

*Proposición:* La fórmula  $p \vee \neg p$  es válida.

Sea  $I$  una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ .

Caso 2:  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(\neg p) = 1$  y entonces  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ .

En cualquier caso,  $V_I(p \vee \neg p) = 1$ . Como  $I$  es arbitraria,  $p \vee \neg p$  es válida.

## Ejemplo 6

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge q$  es falseable.

## Ejemplo 6

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge q$  es falseable.

Sea  $I$  tal que  $I(p) = 0$ . Luego  $V_I(p \wedge q) = 0$ .

Sea  $A$  una fórmula.

$A$  es contingente sii  $A$  es satisfacible y falseable.

## Ejemplo 7

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge q$  es contingente.

## Ejemplo 7

*Proposición:* La fórmula  $p \wedge q$  es contingente.

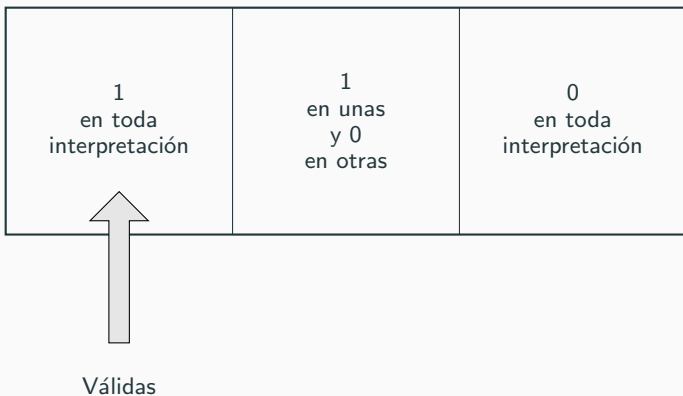
Ver ejemplos 3 y 6.

## Clasificación de fórmulas (1/2)

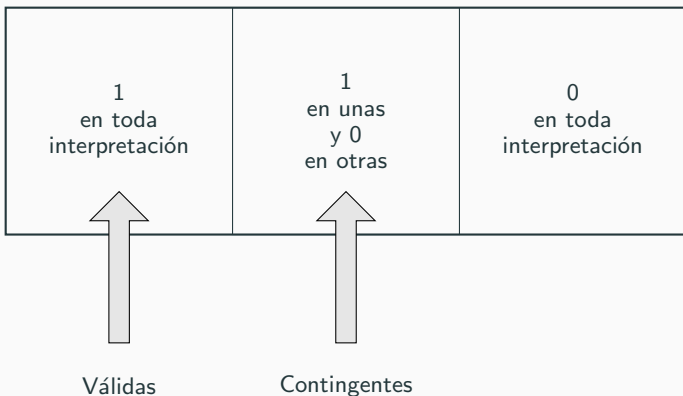
1 en toda interpretación	1 en unas y 0 en otras	0 en toda interpretación
--------------------------------	---------------------------------	--------------------------------



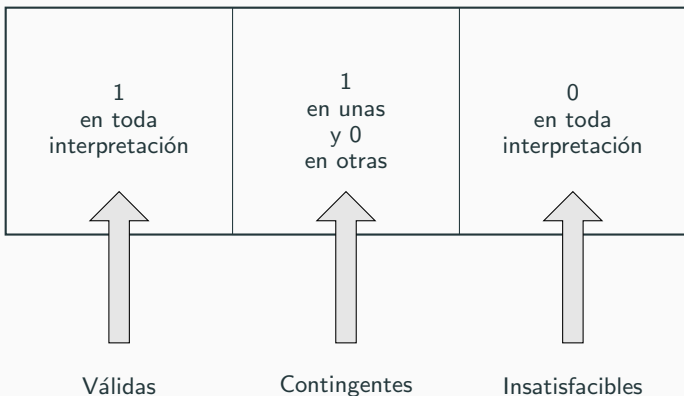
## Clasificación de fórmulas (1/2)



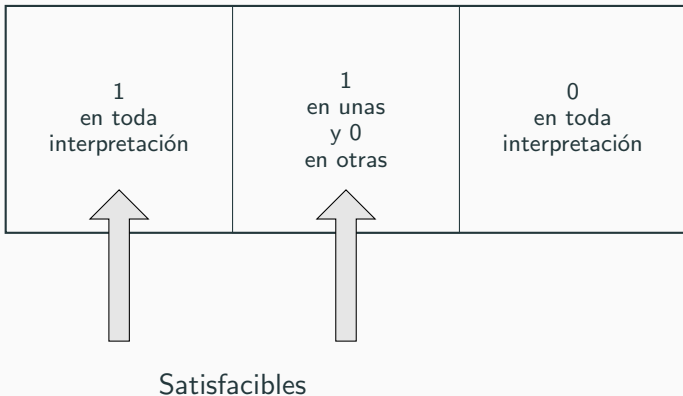
## Clasificación de fórmulas (1/2)



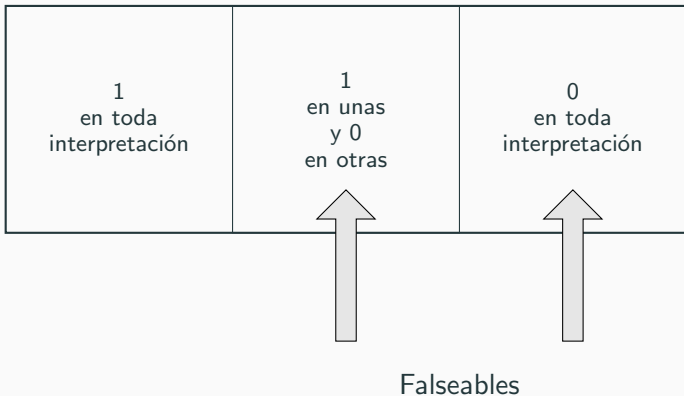
## Clasificación de fórmulas (1/2)



## Clasificación de fórmulas (2/2)



## Clasificación de fórmulas (2/2)



- 1 Clasificación de fórmulas
- 2 Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas**
- 3 Implicación lógica

# Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

$U$  es satisfacible sii existe una interpretación  $I$  tal que para toda  $A_i \in U$ ,  $V_I(A_i) = 1$ .

## Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

$U$  es satisfacible sii existe una interpretación  $I$  tal que para toda  $A_i \in U$ ,  $V_I(A_i) = 1$ .

$U$  es insatisfacible sii para toda interpretación  $I$ , existe  $A_i \in U$  tal que  $V_I(A_i) = 0$ .



## Ejemplo 8

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p \vee r, q \vee r\}$  es satisfacible.

Sea  $I$  tal que  $I(p) = 1$  y  $I(q) = 1$ . Luego  $V_I(p \vee r) = 1$  y  $V_I(q \vee r) = 1$ .

## Ejemplo 8

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p \vee r, q \vee r\}$  es satisfacible.

Sea  $I$  tal que  $I(p) = 1$  y  $I(q) = 1$ . Luego  $V_I(p \vee r) = 1$  y  $V_I(q \vee r) = 1$ .

NB: Observe que cualquiera sea el valor que  $I$  le da a  $r$  no se altera el hecho de que  $V_I(p \vee r) = 1$  y  $V_I(q \vee r) = 1$ . Luego hay más de una tal  $I$ .

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego sea  $A = p$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego sea  $A = p$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$ . Tenemos dos casos:

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego sea  $A = p$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$ . Tenemos dos casos:

Caso 2a:  $I(q) = 1$ . Luego sea  $A = \neg q$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego sea  $A = p$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$ . Tenemos dos casos:

Caso 2a:  $I(q) = 1$ . Luego sea  $A = \neg q$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2b:  $I(q) = 0$ . Luego sea  $A = \neg p \vee q$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ , toda vez que  $V_I(\neg p) = 0$  y que  $V_I(q) = 0$ .



## Ejemplo 9

*Proposición:* El conjunto  $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$  es insatisfacible.

Sea  $I$  arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Tenemos varios casos:

Caso 1:  $I(p) = 0$ . Luego sea  $A = p$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2:  $I(p) = 1$ . Luego  $V_I(\neg p) = 0$ . Tenemos dos casos:

Caso 2a:  $I(q) = 1$ . Luego sea  $A = \neg q$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ .

Caso 2b:  $I(q) = 0$ . Luego sea  $A = \neg p \vee q$ . Observe que  $A \in U$  y que  $V_I(A) = 0$ , toda vez que  $V_I(\neg p) = 0$  y que  $V_I(q) = 0$ .

En cualquier caso, existe una fórmula  $A$  en  $U$  tal que  $V_I(A) = 0$ . Como  $I$  es arbitraria,  $U$  es insatisfacible.

Sean  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U$  es satisfacible, entonces  $U - \{A_i\}$  es satisfacible, para cualquier  $i = 1, \dots, n$ .

Sean  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U$  es satisfacible, entonces  $U - \{A_i\}$  es satisfacible, para cualquier  $i = 1, \dots, n$ .
2. Si  $U$  es satisfacible y  $B$  es válida, entonces  $U \cup \{B\}$  es satisfacible.

Sean  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U$  es satisfacible, entonces  $U - \{A_i\}$  es satisfacible, para cualquier  $i = 1, \dots, n$ .
2. Si  $U$  es satisfacible y  $B$  es válida, entonces  $U \cup \{B\}$  es satisfacible.
3. Si  $U$  es insatisfacible, entonces  $U \cup \{B\}$  es insatisfacible para cualquier fórmula  $B$ .

Sean  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U$  es satisfacible, entonces  $U - \{A_i\}$  es satisfacible, para cualquier  $i = 1, \dots, n$ .
2. Si  $U$  es satisfacible y  $B$  es válida, entonces  $U \cup \{B\}$  es satisfacible.
3. Si  $U$  es insatisfacible, entonces  $U \cup \{B\}$  es insatisfacible para cualquier fórmula  $B$ .
4. Si  $U$  es insatisfacible y  $A_i$  es válida para algún  $i$ , entonces  $U - \{A_i\}$  es insatisfacible.

- 1 Clasificación de fórmulas
- 2 Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas
- 3 Implicación lógica**

## Implicación lógica (1/2)

Sea  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$ . Definimos que  $B$  sea una implicación lógica de  $U$ :

$U \models B$  sii para toda interpretación  $I$ ,  
si  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ ,  
entonces  $V_I(B) = 1$ .

## Ejemplo 10

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \models B$ .



## Ejemplo 10

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \models B$ .

Sea  $I$  una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$$

## Ejemplo 10

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \models B$ .

Sea  $I$  una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$$

Como  $V_I(p) = 1$  y  $V_I(p \rightarrow r) = 1$ , entonces  $V_I(r) = 1$ .

## Ejemplo 10

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \models B$ .

Sea  $I$  una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$$

Como  $V_I(p) = 1$  y  $V_I(p \rightarrow r) = 1$ , entonces  $V_I(r) = 1$ .

Como  $V_I(r) = 1$  y  $V_I(r \rightarrow q) = 1$ , entonces  $V_I(q) = 1$ .

## Ejemplo 10

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \models B$ .

Sea  $I$  una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$$

Como  $V_I(p) = 1$  y  $V_I(p \rightarrow r) = 1$ , entonces  $V_I(r) = 1$ .

Como  $V_I(r) = 1$  y  $V_I(r \rightarrow q) = 1$ , entonces  $V_I(q) = 1$ .

En consecuencia, si  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ , entonces  $V_I(B) = 1$ . Por lo tanto  $U \models B$ .

## Implicación lógica (2/2)

Observe que:

$U \not\models B$  sii existe una interpretación  $I$  tal que

$$V_I(A_i) = 1 \text{ para todo } A_i,$$

$$\text{pero } V_I(B) = 0.$$

## Ejemplo 11

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \not\models B$ .

## Ejemplo 11

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \not\models B$ .

Debemos encontrar una  $I$  tal que  $V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$  y  $V_I(q) = 0$ .

## Ejemplo 11

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \not\models B$ .

Debemos encontrar una  $I$  tal que  $V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$  y  $V_I(q) = 0$ .

Sea  $I(p) = I(r) = I(q) = 0$ .



## Ejemplo 11

*Proposición:* Sea  $B = q$  y  $U = \{p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$ . Entonces  $U \not\models B$ .

Debemos encontrar una  $I$  tal que  $V_I(p \rightarrow r) = V_I(r \rightarrow q) = 1$  y  $V_I(q) = 0$ .

Sea  $I(p) = I(r) = I(q) = 0$ .

Luego  $V_I(p \rightarrow r) = 1$  y también  $V_I(r \rightarrow q) = 1$ . Además,  $V_I(q) = 0$ .

Sean  $B$ ,  $C$  fórmulas y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U \models B$ , entonces  $U \cup \{C\} \models B$ .

Sean  $B$ ,  $C$  fórmulas y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas.

1. Si  $U \models B$ , entonces  $U \cup \{C\} \models B$ .
2. Si  $C$  es válida y  $U \models B$ , entonces  $U - \{C\} \models B$ .

*Proposición:* Sea  $B$  una fórmula y  $U = \{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de fórmulas:

$$U \models B \text{ sii } (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \text{ es válida.}$$

## Demostración (1/2)

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $U \models B$  y sea  $I$  una interpretación arbitraria. Debemos ver que  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ . Tenemos dos casos:

## Demostración (1/2)

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $U \models B$  y sea  $I$  una interpretación arbitraria. Debemos ver que  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ . Tenemos dos casos:

☞ Existe  $A_i \in U$  tal que  $V_I(A_i) = 0$ . Luego  
 $V_I(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 0$  y por lo tanto  
 $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ .

## Demostración (1/2)

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $U \models B$  y sea  $I$  una interpretación arbitraria. Debemos ver que  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ . Tenemos dos casos:

☞ Existe  $A_i \in U$  tal que  $V_I(A_i) = 0$ . Luego  
 $V_I(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 0$  y por lo tanto  
 $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ .

☞  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ . Como  $U \models B$ , entonces  
 $V_I(B) = 1$  y por lo tanto  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ .

## Demostración (1/2)

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $U \models B$  y sea  $I$  una interpretación arbitraria. Debemos ver que  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ . Tenemos dos casos:

☞ Existe  $A_i \in U$  tal que  $V_I(A_i) = 0$ . Luego  
 $V_I(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 0$  y por lo tanto  
 $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ .

☞  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ . Como  $U \models B$ , entonces  
 $V_I(B) = 1$  y por lo tanto  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ .

En cualquier caso,  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ . Como  $I$  es arbitraria,  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  es válida.



## Demostración (2/2)

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  es válida y sea  $I$  tal que  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ . Debemos ver que  $V_I(B) = 1$ .

## Demostración (2/2)

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  es válida y sea  $I$  tal que  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ . Debemos ver que  $V_I(B) = 1$ .

Esto es fácil, ya que  $V_I(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 1$  y como  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ , entonces  $V_I(B) = 1$ .

## Demostración (2/2)

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  es válida y sea  $I$  tal que  $V_I(A_i) = 1$  para todo  $A_i \in U$ . Debemos ver que  $V_I(B) = 1$ .

Esto es fácil, ya que  $V_I(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 1$  y como  $V_I((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1$ , entonces  $V_I(B) = 1$ .

Por lo tanto  $U \models B$ .

En esta sesión usted ha aprendido:

1. Comprender las categorías de una fórmula de acuerdo a sus interpretaciones
2. Demostrar relaciones entre conceptos lógicos
3. Comprender una de las posibles formalizaciones de la noción de consecuencia lógica