Temas: suma de un número aleatorio de variables aleatorias, desigualdades de Markov y Chebyshev

1. El número de personas que entran a un ascensor es una variable aleatorias de Poisson con parámetro λ. El peso de cada persona es independiente del peso de las demás y sigue una distribución uniforme en 50 y 100 kilos. Sea X_i la fracción de 50 en la que la i-ésima persona excede los 50 kilos. Por ejemplo, si la segunda persona pesa 80 kilos, entonces $X_2 = 0{,}6$. Sea Y la suma de los X_i.

   a) Determine la transformada de Y.

   b) Determine el valor esperado de Y.

2. Construya un ejemplo que demuestre que la suma de un número *aleatorio* de variables aleatorias normales independientes no es normal (a pesar de que la suma de un número fijo sí lo es).

3. Un conductor pasa por cuatro semáforos, cada uno de los cuales encuentra en rojo con probabilidad $1/2$. Los tiempos de espera en cada semáforo son independientes entre sí y siguen una distribución normal con media un minuto y desviación estándar igual a $1/2$ minuto. Sea X el tiempo total de espera en los semáforos en rojo.

   a) Utilice el teorema de probabilidad total para determinar la función de densidad de X y calcule la probabilidad de que X sea mayor a 4 minutos.

   b) Determine la transformada de X interpretándola como la suma de un número aleatorio de variables aleatorias.

4. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población (y por ende de cada muestra) es de un metro.

   a) Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo 1 centímetro.

   b) Determine el tamaño n que hace que la desigualdad de Chebyshev garantice que el estimador M_n está a lo sumo a 5 centímetros de diferencia de h con probabilidad de por lo menos 0.99.

   c) Determine cómo cambian sus resultados anteriores si la desviación estándar de la población se estima en 10 centímetros.

5. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de veces que cabecea un estudiante hasta quedarse dormido en clase. Cada vez que el estudiante cabecea tiene una probabilidad de quedarse dormido igual a $p = \frac{1}{8}$.

   a) Calcule la media y la varianza de X.

   b) Aplique la desigualdad de Markov para obtener una cota para la probabilidad del evento $X \geq 16$.

c) Ahora obtenga una cota para la probabilidad de este evento utilizando la desigualdad de Chebyshev.

d) ¿Cuál sería la cota de la probabilidad de este evento si se emplea la desigualdad de Chernoff? (Vea el problema 5.2 del Bertsekas).

e) Calcule $P(X \geq 16)$. ¿Cuál desigualdad da la mejor cota para la probabilidad del evento $X \geq 16$?