Temas: Variables aleatorias continuas, función de densidad, función acumulada, valor esperado

1. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0,1]$. Sea $Y = g(X)$ otra variable aleatoria definida en función de X, donde g es

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1/3, \\ 2, & x > 1/3. \end{cases}$$

   a) Determine la función de masa de probabilidad de Y y utilícela para determinar el valor esperado de Y.

   b) Determine el valor esperado de Y usando la regla del valor esperado directamente.

2. Una variable aleatoria X sigue una distribución de Laplace con parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad es igual a

$$f_X(s) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|s|}$$

   a) Demuestre que f_X es una función de densidad válida.

   b) Determine el valor esperado y la varianza de X.

3. Demuestre que el valor esperado de una variable aleatoria continua puede calcularse como

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > s)ds - \int_0^\infty P(X < -s)ds$$

4. Al llegar a la caja de la cafetería usted se puede encontrar con ninguna o con una persona al frente suyo con la misma probabilidad. El tiempo que toma procesar a una persona es una variable aleatoria exponencial con parámetro λ. Determine la función acumulada de probabilidad de su tiempo de espera.

5. En un juego de dardos el objetivo es un círculo de radio r. Usted siempre da en el objetivo pero sus lanzamientos caen en cualquier punto del círculo con la misma probabilidad. Sea X la distancia del dardo al centro del objetivo.

   a) Determine la función acumulada de probabilidad de X.

   b) Determine la función de densidad de X.

   c) Determine la media y varianza de X.

   d) El objetivo tiene marcado un círculo interno de radio d. Si su lanzamiento cae dentro del círculo interno ($X \leq d$) usted obtiene $S = 1/X$ puntos. De lo contrario ($X > d$), usted obtiene $S = 0$ puntos. Determine la función acumulada de probabilidad de S. ¿Es S una variable aleatoria continua?

6. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas. Sea Z una variable aleatoria que es igual a X con probabilidad p e igual a Y con probabilidad $1 - p$.

a) Demuestre que

$$f_Z(a) = pf_X(a) + (1-p)f_Y(a).$$

b) Determine la función acumulada de probabilidad de una variable exponencial doble (*two-sided exponential*) que tiene función de densidad

$$f_X(a) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda a}, & a < 0, \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda a}, & a \geq 0, \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y $0 < p < 1$.