Taller 11.

1) a) $M_Y(s) = M_N(\log M_X(s))$

$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$

$M_X(s) = \dfrac{e^{s(1)} - e^{s(0)}}{s(1-0)} = \dfrac{e^s - 1}{s}$.

luego,

$M_Y(s) = e^{\lambda\left(\frac{e^s-1}{s} - 1\right)}$

b) $E(Y) = E(N)E(X)$.

$E(N) = \lambda, \quad E(X) = 0.5$

luego

$E(Y) = E(N)E(X) = 0.5\lambda$.

2) Sea $Y = X_1 + \dots + X_N$ con

$X_i \sim N(0,1)$ y N con dist

Poisson con parametro $\lambda = 1$

$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$. $= e^{(e^s-1)}$

$M_X(s) = e^{\frac{s^2}{2} + s}$.

luego

$M_Y(s) = e^{\left(e^{\frac{s^2}{2}+s} - 1\right)}$

$M_Y(s)$ no tiene la forma

$M_Y(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}$

luego Y no es normal.

3) 4 semáforos. $P(\{rojo\}) = \frac{1}{2}$.

Tiempos de espera son indep.

$T_i \sim N(1, \frac{1}{4})$

$$X = T_1 + \dots + T_N$$

N es binomial con $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$.

a) $$f_{X|\{N=n\}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\frac{1}{4}}} e^{-(x-n)^2/2(n\cdot\frac{1}{4})}$$

si $n>0$, $f_{X|\{N=0\}}(x) = \delta_0$

Además
$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{4} P(N=n) f_{X|\{N=n\}}(x)$$

$$P(N=n) = \binom{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

luego, Asumiendo $N>0$.

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{4} \binom{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}} e^{-2(x-n)^2/n}$$

Ahora, $$P(X>4) = \sum_{n=0}^{4} P(N=n) P(X>4 \mid N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{4} P(N=n)\, P(X>4 \mid N=n)$$

$\left(\text{pues } P(X>4 / N=0) = 0\right)$

$$= \sum_{n=1}^{4} \binom{4}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^4 P(X>4 \mid N=n).$$

$$P(X>4 \mid N=n) = \int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}\, e^{-(x-n)^2 / \left(\frac{n}{2}\right)}\, dx$$

$$= P\left(\frac{X-n}{\sqrt{\frac{n}{4}}} > \frac{4-n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) = P\left(Z > \frac{4-n}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{8-2n}{\sqrt{n}}\right) = \begin{cases} 1-\phi(6) & n=1 \\ 1-\phi\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) & n=2 \\ 1-\phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) & n=3 \\ 1-\phi(0). & n=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X>4) = \sum_{n=1}^{4} \binom{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1-\phi\left(\frac{8-2n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

b) Se tiene que

$$M_N(s) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^s\right)^4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^s\right)^4$$

(como N es binomial).

También, $M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{4} \cdot \frac{1}{2} + s}$

$$= e^{s^2/8 + s}.$$

Luego,

$$M_X(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{s^2/8 + s}\right)\right)^4$$

Luego X no es normal.

4) Estatura media h de pob. usando muestra de n.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \qquad var(X) = 1 = \sigma^2$$

a)

Tenemos que $var(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

luego $var(M_n) = \frac{1}{n}$.

Queremos que $\sqrt{var(M_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}} \leq 0.01$

luego $\frac{1}{n} \leq (0.01)^2$ ó $\frac{1}{(0.01)^2} \leq n$

es decir $n \geq 10{,}000$

b) Queremos

$$P(|M_n - h| \leq 0.05) \geq 0.99$$

ó $P(|M_n - h| > 0.05) \leq 0.01$

Por la desigualdad de Chebyshev.

$$P(|M_n - h| \geq 0.05) \leq \frac{var(M_n)}{0.05^2}.$$

$$var(M_n) = \frac{1}{n}$$

Luego

$$P(|M_n - h| \geq 0.05) \leq \frac{\frac{1}{n}}{0.05^2} \leq 0.01$$

Luego $\frac{1}{n} \leq 0.01 \cdot (0.05)^2$

ó $n \geq \frac{1}{0.000025} = 40{,}000$

c) Ahora, si $var(X) = (0.1)^2 = 0.01$.

Queremos que $\sqrt{var(M_n)} = \sqrt{\frac{0.01}{n}} \leq 0.01$

Luego $\frac{0.01}{n} \leq (0.01)^2$. ó

$$n \geq \frac{0.01}{(0.01)^2} = \frac{1}{0.01} = 100.$$

Además

$$P(|M_n - \mu| \geq 0.05) \leq \frac{var(M_n)}{0.05^2} = \frac{\frac{0.01}{n}}{(0.05)^2} \leq 0.01$$

Luego.

$$\frac{0.01}{n(0.05)^2} \leq 0.01 \quad ó$$

$$\frac{\cancel{0.01}}{\cancel{0.01} \cdot (0.05)^2} \leq n \Rightarrow n \geq \frac{1}{0.05^2} = 400.$$

5) X cuenta # veces que cabecea estudiante.

X es geométrica con $p = \frac{1}{8}$.

Media de X es $E(X) = \frac{1}{p} = 8.$

Varianza de X. $var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{64}}$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 8}{8} = 56$$

b) $P(X \geq 16) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

c) $P(|X-8| \geq 8) = P(X-8 \geq 8)$

pues X no puede tomar valores negativos

Pero $P(X-8 \geq 8) = P(|X-8| \geq 8) \leq \frac{56}{64}$

ó $P(X-8 \geq 8) \leq \frac{56}{64}$

d) Desigualdad de Chernoff.

$P(X \geq a) \leq e^{-sa} M_x(s) \quad \forall a, s \leq 0.$

Luego $P(X \geq 16) \leq e^{-16s} M_X(s)$ pero

$M_X(s) = \frac{\frac{1}{8} e^s}{1 - \frac{7}{8} e^s}$, es decir

$$P(X \geq 16) \leq e^{-16s} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{8}} e^{s}}{\frac{8}{\cancel{8}} - \frac{7}{\cancel{8}} e^{s}}$$

$$= e^{-16s} \left(\frac{e^{s}}{8 - 7e^{s}} \right)$$

$$= \frac{e^{-16s+s}}{8-7e^{s}} = \frac{e^{-15s}}{8-7e^{s}} = \frac{1}{8e^{15s} - 7e^{16s}}$$

Como $s \leq 0$. El mínimo valor es con $s = 0$. Luego

$$P(X \geq 16) \leq \frac{1}{8-7} = 1.$$

d) Ahora $P(X \geq 16) = 1 - P(X < 16)$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{15} P(X=n) = 1 - \sum_{n=1}^{15} p(1-p)^{n}$$

$$= 1 - (1 - (1-p)^{k}) = (1-p)^{16}.$$

$$= (7/8)^{16} = 0.1180.$$

Luego, la des. de Markov es la mejor