Temas: variables aleatorias normales, variables continuas conjuntas

1. Sea X una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno, y sea Y una variable aleatoria normal con media uno y varianza cuatro.

   a) Determine $P(X \geq 1{,}5)$ y $P(X \geq -1)$.

   b) Determine la función de densidad de la variable $\frac{Y-1}{2}$.

   c) Determine $P(-1 \leq Y \leq 1)$. Compare este resultado con $P(-1 \leq X \leq 1)$.

2. Sea X una variable aleatoria normal con media cero y desviación estándar σ.

   a) Determine la probabilidad de los eventos $\{X \geq k\sigma\}$ para $k = 1, 2, 3$.

   b) Determine la probabilidad de los eventos $\{|X| \leq k\sigma\}$ para $k = 1, 2, 3$.

3. La temperatura de una ciudad se modela como una variable aleatoria normal con media y desviación estándar iguales a diez grados centígrados.

   a) Determine la probabilidad de que en un momento seleccionado al azar la temperatura sea mayor a quince grados centígrados.

   b) Determine la probabilidad de que en un momento seleccionado al azar la temperatura esté entre diez y veinte grados centígrados.

4. Se selecciona un punto al azar (de acuerdo con una ley uniforme) dentro del semicírculo

$$\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$$

   para un $r > 0$ dado.

   a) Determine la función de densidad conjunta de las coordenadas X y Y del punto seleccionado.

   b) Determine la función de densidad de Y y úsela para determinar el valor esperado de Y.

5. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas, y sea Z una variable aleatoria que con probabilidad p es igual a X y con probabilidad $1 - p$ es igual a Y.

   a) Demuestre que

$$f_Z(a) = pf_X(a) + (1 - p)f_Y(a).$$

   b) Determine la función acumulada de probabilidad de una variable exponencial doble (*two-sided exponential*) que tiene función de densidad

$$f_X(a) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda a}, & a < 0, \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda a}, & a \geq 0, \end{cases}$$

   donde $\lambda > 0$ y $0 < p < 1$.

6. Una empresa opera un local que da servicio a clientes que llegan en automóvil y otro que da servicio a clientes que llegan caminando. En un día elegido al azar, sean X y Y las proporciones de tiempo que cada uno de estos locales está en servicio, respectivamente. La función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Verifique que $f(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad válida.
   b) Calcule $P((X,Y) \in A)$ donde $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 0{,}5, 0{,}25 \leq y \leq 0{,}5\}$
   c) Calcule $P(X \geq 3Y)$
   d) Calcule $P(X+Y \leq 1)$

7. Sean X y Y variables aleatorias conjuntas continuas con función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c\sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de c que hace a $f(x,y)$ una función de densidad de probabilidad conjunta válida.
   b) Determine la función de densidad de Y.