Temas: distribuciones derivadas, covarianza, correlación

1. Sea N una variable aleatoria que describe el número de veces que usted juega un cierto video juego, y sea X_i el puntaje que obtiene la i-ésima vez que juega. Las variables aleatorias X_i tienen valor esperado μ, varianza σ^2 y son independientes entre sí. El puntaje total obtenido en los N juegos es entonces

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

   a) Demuestre que $E[T] = \mu E[N]$
   b) Demuestre que $\mathrm{var}(T) = \mu^2 \, \mathrm{var}(N) + \sigma^2 E[N]$

   Pista: Condicione en el evento $\{N = i\}$ y utilice el teorema de esperanza total (probabilidad total aplicado al valor esperado).

2. Sea X una variable aleatoria con función de densidad uniforme entre menos uno y uno.

   a) Sea $Y = \sqrt{|X|}$. Determine la función de densidad de Y.
   b) Sea $Y = -\ln |X|$. Determine la función de densidad de Y.

3. Sea X una variable aleatoria y $Y = e^X$

   a) Determine una expresión general para la función de densidad de Y.
   b) Especialice su resultado para el caso en que X sigue una ley uniforme entre cero y uno.

4. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme entre cero y uno. Determine la función de densidad de $Z = |X - Y|$. *Pista:* considere la distribución conjunta de X y Y y el área donde $Z = |X - Y| \leq z$.

5. Se seleccionan dos puntos en el intervalo $[0, 1]$ independientemente de acuerdo con una distribución uniforme. Muestre que el valor esperado de la distancia entre los dos puntos es $1/3$.

6. Sean X y Y variables aleatorias exponenciales con parámetro λ independientes. Determine la función de densidad de $Z = X + Y$.

7. Sean X y Y variables aleatorias con función de masa de probabilidad

$$p_X(a) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & a = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{dlc}, \end{cases}$$

$$p_Y(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & b = 0, \\ \frac{1}{3}, & b = 1, \\ \frac{1}{6}, & b = 2, \\ 0, & \text{dlc}. \end{cases}$$

   Determine la función de masa de $Z = X + Y$.

8. Sean X y Y variables aleatorias que representan el tiempo de vida de los dos discos que utiliza un servidor. El tiempo hasta que falla el primer disco es entonces $Z = \min\{X, Y\}$. Si X y Y siguen distribuciones exponenciales con parámetros λ y μ, respectivamente, demuestre que Z sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda + \mu$.

9. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de masa de probabilidad conjunta dada por

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

   a) Determine la covarianza de X y Y.
   b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

10. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Determine la covarianza de X y Y.
   b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

11. Suponga que X y Y son variables aleatorias con la misma varianza. Demuestre que las variables $X - Y$ y $X + Y$ no están correlacionadas.

12. Considere cuatro variables aleatorias W, X, Y, Z donde

$$E[X] = E[Y] = E[Z] = E[W] = 0,$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = \text{var}(W) = 1.$$

Además, estas variables aleatorias son no-correlacionadas por parejas. Determine los coeficientes de correlación $\rho_{R,S}$ y $\rho_{R,T}$, donde $R = W + X$, $S = X + Y$, y $T = Y + Z$.