Temas: valor esperado y varianza condicionales, transformadas

1. En un juego un participante gana con probabilidad p y pierde con probabilidad $1-p$. Cada repetición del juego es independiente de las anteriores. Si un participante apuesta una cantidad S y gana, recibe S unidades adicionales. Si pierde el juego, pierde lo apostado. Si $p > 1/2$, la estrategia Kelly consiste en siempre apostar una fracción $2p-1$ de la fortuna actual. Calcule el valor esperado de la fortuna después de n juegos suponiendo que la fortuna inicial es x y se usa la estrategia Kelly.

2. N y P están saliendo. Sus citas son todos los viernes a las 9:00 p.m. N siempre llega a tiempo. En cambio, P llega a una hora aleatoria que se distribuye uniformemente entre las 8:00 p.m. y las 10:00 p.m. Sea X el tiempo en horas que transcurre entre las 8:00 p.m. y la hora a la que llega P. Si P llega a lo sumo a las 9:00 p.m. la cita dura exactamente tres horas, si P llega después de las 9:00 p.m. la cita dura un tiempo que se distribuye uniforme entre 0 y $3-X$ horas. A N no le gusta que P llegue tarde y terminará la relación si P llega más de 45 minutos tarde dos veces. Todas las citas son independientes entre sí.

   a) Determine el valor esperado del número de horas que N espera por P en una cita cualquiera.

   b) ¿Cuánto espera que dure una cita cualquiera?

   c) ¿Cuántas citas espera que N y P tengan antes de terminar?

3. Un profesor retirado llega a la oficina a una hora que se distribuye uniformemente entre las 9:00 a.m. y la 1:00 p.m., realiza una actividad y se va al terminar la actividad. La duración de la actividad se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda(y) = 1/(5-y)$, donde y es la duración del intervalo entre las 9:00 a.m. y el momento en que llega el profesor, en horas.

   a) Determine el valor del tiempo que el profesor dedica a realizar la actividad un día cualquiera.

   b) ¿Cuál es la hora esperada a la que el profesor termina su actividad?

4. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1, \\ \frac{1}{4}, & k = 2, 3, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   Determine la transformada de X y utilícela para calcular los tres primeros momentos de X.

5. Calcule el tercer y cuarto momento de una variable aleatoria normal estándar.

6. Determine el tercer, cuarto y quinto momento de una variable aleatoria exponencial con parámetro λ.

7. Una variable aleatoria X toma valores enteros no-negativos. Su transformada es una de las dos siguientes.

$$M_X(s) = e^{2(e^{e^s-1}-1)}$$
$$M_X(s) = e^{2(e^{e^s}-1)}$$

   a) Determine cuál de las dos expresiones anteriores no puede ser una transformada válida.

   b) Demuestre que para una variable aleatoria que toma valores enteros no-negativos se cumple que
$$\lim_{s\to-\infty} M_X(s) = P(X=0).$$

   c) Utilice la transformada válida y el resultado anterior para calcular $P(X=0)$.

8. Determine al función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X con transformada
$$M_X(s) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{2-s}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{3-s}\right).$$

9. En un equipo de fútbol dos jugadores son los designados para patear los penaltis. El i-ésimo jugador tiene probabilidad p_i de acertar, independiente de los resultados de los otros jugadores. En un entrenamiento cada uno de estos jugadores lanza un penalti. Sea X el número de lanzamientos exitosos.

   a) Utilice la convolución para determinar la función de masa de probabilidad de X.

   b) Verifique el resultado anterior calculando la transformada de X y obteniendo la función de masa de probabilidad a partir de ésta.

10. Sean X, Y y Z variables aleatorias independientes. X es Bernoulli con parámetro $1/3$, Y es exponencial con parámetro 2, y Z es Poisson con parámetro 3.

   a) Sea $U = XY + (1-X)Z$. Determine la transformada de U. Pista: tenga en cuenta que U es el resultado de mezclar Y y Z de acuerdo con X.

   b) Determine la transformada de $2Z+3$.

   c) Determine la transformada de $Y+Z$.

11. Un vendedor de pizza vende n tipos de pizza. Diariamente lo visitan K clientes, donde K es una variable aleatoria entera no-negativa con transformada conocida $M_K(s) = E[e^{sK}]$. Cada cliente pide una sola pizza, cuyo tipo es seleccionado al azar con la misma probabilidad e independientemente del número de clientes y del tipo de pizza seleccionado por los otros clientes. Determine el valor esperado del *número de diferentes tipos de pizza pedidos* en un día empleando M_K.

    Pistas: Defina variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$, donde $X_i = 1$ si al menos un cliente pide el tipo de pizza i y $X_i = 0$ en caso contrario. Condicione en el valor de K para calcular $E[X|K]$, donde $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.