Instrucciones:

- Fecha de publicación: 17 de Noviembre de 2019.
- Fecha de entrega: 27 de Noviembre de 2019 a las 11:55 p.m.
- Medio de entrega: Correo electrónico.
- La tarea **debe** realizarse en grupos de mínimo dos o máximo tres personas.
- Formato de entrega: un solo archivo comprimido (`.zip`, `.rar`., `.tgz`) cuyo nombre debe tener el formato: APELLIDOS_tarea3.xxx. Por cada punto debe haber un archivo cuyo nombre tenga el formato APELLIDOS_tarea3_puntoX.xxx.
- No deje espacios en los nombres de los archivos.

1. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribución normal con medias μ_X y μ_Y, y varianzas σ_X^2 y σ_Y^2. Utilice las transformadas de X y Y para demostrar que la variable aleatoria $Z = X + Y$ sigue una distribución normal. Determine el valor de los parámetros de la distribución de Z.

2. Sea X_i una sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d. con parámetro p. Sea N una variable aleatoria geométrica con parámetro q independiente de las X_i. Utilice las transformadas de X_i y N para determinar la distribución de la variable aleatoria $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Determine el valor de los parámetros de la distribución de Z.

3. (A realizar en R) Sea $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial con tasa $\lambda = 0{,}1$.

   a) Genere $n = 10$ números aleatorios de acuerdo con la distribución de X_i. Calcule la media muestral
   $$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
   y su diferencia relativa (error) con respecto a la media poblacional $\mu = E[X_i]$. Repita este ejercicio $K = 100$ veces, calcule el percentile 95 de los errores y grafique el histograma de los mismos.

   b) Repita el anterior literal incrementando n a 100, 1000 y 10000. Compare y concluya.

   c) Use el código del primer literal para crear una ciclo externo adicional. Para cada n datos generados calcule la media muestral estandarizada
   $$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$
   donde $\sigma^2 = V(X_i)$. Usando $K = 1000$ resultados determine el percentil 60 observado y calcule la diferencia relativa (error) con respecto al percentil teórico (el percentil 95 de una distribución normal estándar). Repita este ejercicio $I = 100$ veces para calcular un error promedio para el percentil 60. Utilice inicialmente $n = 10$.

   d) Repita el literal anterior incrementando n a 100, 1000 y 10000. Compare y concluya.

4. Demuestre la Ley fuerte de los números grandes.

5. Demuestre el Teorema del límite central.

6. *a*) Un dado justo se lanza 1000 veces. Encuentre la probabilidad de que el número 4 aparezca al menos 150 veces.

   b) Suponga que para cada uno de los estudiantes, el tiempo requerido para que el profesor califique el examen final del curso de probabilidad es una variable aleatoria con media 1 hora y desviación estándar 0.4 horas. Si hay 100 estudiantes en el curso, ¿cuál es la probabilidad de que el profesor necesite más de 110 horas para calificar los exámenes?

7. Demuestre que si $Var(X) = 0$, entonces $P(X = E(X)) = 1$.