Taller 12

1

1) Estatura media: h.

Muestra de tamaño n. $X_1, \dots, X_n$

$M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ como estimador de h.

$\sigma^2 = 1\ m^2 \quad (\sigma = 1m)$.

a) $\mathrm{Var}(M_n) = \dfrac{\mathrm{var}(X_n)}{n} = \dfrac{1}{n}$

Buscamos, $\sqrt{\mathrm{var}(M_n)} = \sqrt{\dfrac{1}{n}} \leq 0.01$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq (0.01)^2 \Rightarrow n \geq \dfrac{1}{(0.01)^2} = 10{,}000$

b) Desigualdad de Chebyshev. $P(|X-\mu| \geq c) \leq \dfrac{\sigma^2}{c^2},\ c>0.$

(x con media μ y var σ^2)

Luego, $P(|M_n - h| \geq 0.05) \leq \dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)}{(0.05)^2} \leq 0.01$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq (0.01)(0.05)^2 \Rightarrow n \geq 40{,}000$

c) Si $\sigma = 0.1 \Rightarrow \sigma^2 = 0.01$, $\mathrm{var}(M_n) = \dfrac{0.01}{n}$

i) $\sqrt{\dfrac{0.01}{n}} \leq 0.01 \Rightarrow n \geq \dfrac{\cancel{0.01}}{(0.\cancel{01})(0.01)} = 100.$

2

ii) $P(|M_n - h| \geq 0.05) \leq \dfrac{\left(\frac{0.01}{n}\right)}{\frac{(0.05)^2}{1}} \leq 0.01$

$\rightarrow \quad n \geq \dfrac{\cancel{0.01}}{(\cancel{0.01})(0.05)^2} = 400$

2) Proporción f de fumadores, $f \in [0,1]$

Muestra de tamaño n

$P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \delta.$

a) Por Chebyshev:

$P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.\quad \varepsilon > 0. \quad (\sigma^2 \text{ var de } M_n)$

σ^2 no se conoce pero $M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Con X_i Bernoulli, $var(X_i) = f(1-f)$

Luego $var(M_n) = \dfrac{f(1-f)}{n}.$

El máximo de la varianza se da con $f = \frac{1}{2}$.

Luego $P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\frac{1}{4n}}{\varepsilon^2}.$

Tenemos:

$$P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

n es tq $\frac{1}{4n\varepsilon^2} = \delta \Rightarrow n = \frac{1}{4\varepsilon^2\delta}$.

Sea $K = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$P(|M_n - f| \geq K) \leq \frac{1}{4n^* K^2} = \frac{1}{4n^*\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{1}{n^*\varepsilon^2} = \delta$$

Luego $n^* = \frac{1}{\varepsilon^2\delta}$. ó $n^* = 4n$. (se cuatriplica n).

b) Tenemos $P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} = \delta$. $\left(n = \frac{1}{4\varepsilon^2\delta}\right)$

Queremos $P(|M_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n^{**}\varepsilon^2} = \frac{\delta}{2} =: \omega$

Luego $n^{**} = \frac{1}{4\varepsilon^2\omega} = \frac{1}{4\varepsilon^2\frac{\delta}{2}} = 2\left(\frac{1}{4\varepsilon^2\delta}\right)$

ó $n^{**} = 2n$. (se duplica n).

3) Sean $X_1, \dots, X_n, \dots$ iid.
X_i uniforme en $[-1, 1]$.

a) $Y_n = X_n / n$.

Vamos a demostrar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$$

$$= P(|X_n| > n\varepsilon) = P(X_n < -n\varepsilon) + P(X_n > n\varepsilon)$$

Ahora si $n\varepsilon > 1$
$P(X_n < -n\varepsilon) = P(X_n > n\varepsilon) = 0$.
Es decir, para $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$.

Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, si $n > \frac{1}{\varepsilon}$
$P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0 < \delta$. Luego $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

(Otra forma es que $\lim_{n \to \infty} P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$)

b) Veremos que $Y_n \xrightarrow{P} 0$. $(Y_n = (X_n)^n)$.
Sea $\varepsilon > 0$. (si $\varepsilon \geq 1$ $P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$)

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|(X_n)^n| > \varepsilon) = P(|X_n|^n > \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon^{1/n})$$

$$= P(X < -\varepsilon^{1/n}) + P(X_n > \varepsilon^{1/n}) = 2(1 - \varepsilon^{1/n}).$$

Ahora, $\lim_{n \to \infty} 2(1 - \varepsilon^{1/n}) = 0$ pues $\lim_{n \to \infty} \varepsilon^{1/n} = 1$ $(\varepsilon > 0)$

Luego $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n|>\varepsilon)=0$ o $Y_n \xrightarrow{P} 0$

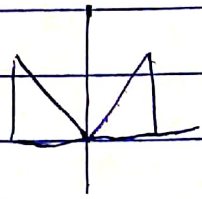
c) Veremos que $Y_n \xrightarrow{P} 0$. Sea $\varepsilon>0$.

$$P(|Y_n|>\varepsilon) = P\left(\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right|>\varepsilon\right) = P\left(\prod_{i=1}^{n}|X_i|>\varepsilon\right)$$

Pero

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}|X_i|>\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}|X_i|\right)}{\varepsilon} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|X_i|)}{\varepsilon}$$

(pues son indep)



Ahora $\mathbb{E}(|X_i|) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\cdot|x_i|\,dx_i = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 x\,dx$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$P\left(\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right|>\varepsilon\right) \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Además.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right|>\varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Luego $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n|>\varepsilon)=0$ ó $Y_n \xrightarrow{P} 0$

d) $Y_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Veremos que $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

Sea $\varepsilon>0$,

$$P(|\max\{X_1,\dots,X_n\}-1|>\varepsilon) = P(1-\max\{X_1,\dots,X_n\}>\varepsilon)$$

Como $X_1,\dots,X_n \le 1$.

$$= P(X_1,\dots,X_n \le 1-\varepsilon) = P(X_1\le 1-\varepsilon,\dots,X_n\le 1-\varepsilon)$$

indep

$$= P(X_1<1-\varepsilon)\cdots\cdots P(X_n<1-\varepsilon).$$

Si $\varepsilon\geq 2$ $P(X_i<1-\varepsilon)=0$. $\forall i=1,\dots,n$

Ahora, si $0<\varepsilon<2$.

$$P(X_i<1-\varepsilon) = \frac{2-\varepsilon}{2}$$

Luego

$$P(|\max\{X_1,\dots,X_n\}-1|>\varepsilon) = \left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)^n$$

Como $2>\varepsilon>0$, $0<\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)<1$ luego

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n-1|>\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)^n = 0.$$

Es decir $Y_n \xrightarrow{P} 1$

4) 100 rondas con números entre 1 y 36.
N: # rondas impares. Si $N > 55$. ruleta no es justa.

Supongamos que la ruleta es justa. Es decir $p = \frac{1}{2}$ donde p es la prob. de impar.

$N = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_{100}$. donde X_i es Bernoulli con parámetro $p = \frac{1}{2}$. luego $E(N) = 50$ y $var(N) = 100(0.5)(0.5) = 25$

Queremos ver $P(N > 55)$ Aprox. de DM y L.

$$P(N > 55) = P\left(\frac{N-50}{\sqrt{25}} > \frac{55.5-50}{\sqrt{25}}\right) \approx 1 - \Phi(1.1).$$

$$= 1 - 0.864 = 0.136.$$

5) Comp falla con prob. 0.05 indep. Tener 45 días sin fallas en 50 días.

a) $S_{50} = X_1 + \ldots + X_{50}$, donde X_i es Bernoulli con prob. 0.95.

Aproximamos S_n con una normal con media $\mu = 0.95 \cdot 50 = 47.5$ y varianza $50(0.05)(0.95) = 2.375$

Queremos ver $P(S_{50} \geq 45)$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 2.5}{\sqrt{2.375}} \geq \frac{45 - 47.5}{\sqrt{2.375}}\right) \approx 1 - \Phi(-1.62) = 0.9474.$$

b)

$$P(S_{50} \geq 45) = \cancel{\quad} \rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{44.5-47.5}{\sqrt{2.375}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{2.375}}\right)$$

$$= \cancel{\quad}$$

$$\cancel{\quad}$$

$$= 1 - \Phi(-1.\overset{94}{\cancel{\quad}}) = 1 - \overset{0.0257}{\cancel{\quad}} = \overset{0.9742}{\cancel{\quad}}$$

$$= 0.9742$$

c)

$$P(S_{50} \geq 45) = \sum_{i=45}^{50} \binom{50}{i} (0.95)^i (0.05)^{50-i}$$

$$= \binom{50}{46}(0.95)^{45}(0.05)^5 + \binom{50}{46}(0.95)^{46}(0.05)^4 + \binom{50}{47}(0.95)^{47}(0.05)^3 +$$

$$\binom{50}{48}(0.95)^{48}(0.05)^2 + \binom{50}{49}(0.95)^{49}(0.05)^1 + \binom{50}{50}(0.95)^{50}\, 1.$$

$$= 0.9622238.$$

6) Una fábrica produce X_n dispositivos el día n. X_n iid con media 5 y var 9.

a) $S_{100} = X_1 + \dots + X_{100}$. $E(S_{100}) = 100(5) = 500$

$var(S_{100}) = 100 \cdot 9 = 900$

Queremos aproximar $P(S_{100} < 440)$

S_{100} es aprox. normal, luego

$$P(S_{100} < 440) = P\left(\frac{S_{100} - 500}{\sqrt{900}} < \frac{440-500}{\sqrt{900}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{100}-500}{\sqrt{900}} < \frac{-60}{30}\right) \approx \phi(-2) = 0.0227.$$

b) Queremos encontrar el n máximo tq.

$$P(X_1 + \dots + X_n \geq 200 + 5n) \leq 0,05.$$

Luego, $P\left(\frac{S_n - n5}{\sqrt{9n}} \geq \frac{200 + 5n - n5}{\sqrt{9n}}\right) \leq 0.05$

$\Rightarrow P\left(\frac{S_n - n5}{\sqrt{9n}} \geq \frac{200}{3\sqrt{n}}\right) \leq 0.05$

$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{200}{3\sqrt{n}}\right) \leq 0.05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{200}{3\sqrt{n}}\right) \geq 0.95.$

Tenemos que $\Phi(1.65) \approx 0.95$. es decir el máximo n (aprox) debe satisfacer

$\frac{200}{3\sqrt{n}} = 1.65$ ó $n = \left(\frac{200}{3(1.65)}\right)^2 = 1632.1$

Luego $n \leq 1632$.

6) N 1er día tq hay un total de 1000 disp. prod.
Queremos determinar

$$P(N \geq 220).$$

$\{N \geq 220\}$ Es equivalente al evento $\{S_{220} \leq 1000\}$

Ahora, $P(S_{220} \leq 1000) = P\left(\dfrac{S_{220} - 220 \cdot 5}{\sqrt{9 \cdot 220}} \leq -2.247\right)$

$$= \phi(-2.247) = 1 - \phi(2.247) = 0.0123.$$

7) $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ v.a's indep. con dist unif en $[0,1]$.

$$W = \frac{(X_1 + \ldots + X_{16}) - (Y_1 + \ldots + Y_{16})}{16}$$

Queremos aproximar

$$P(|W - \mathbb{E}(W)| < 0.001)$$

$W = \left(\dfrac{(X_1 - Y_1) + \ldots\ldots + (X_{16} - Y_{16})}{16}\right)$. Llamemos $Z_i = X_i - Y_i$
$i = 1, \ldots, 16$

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(Y_i) = 0.$$

$$\mathrm{var}(Z_i) = \mathrm{var}(X_i) + \mathrm{var}(-Y_i) = 2\,\mathrm{var}(X_i)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

luego, $W = \dfrac{Z_1 + \ldots + Z_{16}}{16}$. satisface: $\mathbb{E}(W) = 0$ y

$$\mathrm{var}(W) = \frac{\frac{1}{6}}{16} = \frac{1}{6 \cdot 16} = \frac{1}{96}.$$

Tenemos que $P(|W| \leq 0.001) = P\left(\dfrac{|W|}{\sqrt{\frac{1}{96}}} < \dfrac{0.001}{\sqrt{\frac{1}{96}}}\right) =$

$$: \quad P\left(-\frac{0.001}{\sqrt{\frac{1}{96}}} < \frac{W}{\sqrt{\frac{1}{96}}} < \frac{0.001}{\sqrt{\frac{1}{96}}}\right)$$

$$= \Phi\left(\sqrt{96}(0.001)\right) - \phi\left(-0.001\sqrt{96}\right) = 2\,\phi\left(\sqrt{96}(0.001)\right) - 1$$

$$= 2\,\phi(0.0097979) - 1 = 0.007817$$