Rodrigo Castillo
Camilo A. Martínez

—TAREA 3

1. X y Y v.a's independientes con distribución normal y medias μ_X, μ_Y y varianzas σ_X^2, σ_Y^2. Sea $Z = X + Y$.

Proposición: Z es normal.

Demostración.

Las transformadas de X y Y son:

$$M_X(s) = \exp\left\{\frac{\sigma_X^2 s^2}{2} + \mu_X s\right\}$$
$$M_Y(s) = \exp\left\{\frac{\sigma_Y^2 s^2}{2} + \mu_Y s\right\}$$

La transformada de $M_Z(s) = M_X(s) M_Y(s)$ luego.

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= \exp\left\{\frac{\sigma_X^2 s^2}{2} + \mu_X s\right\} \exp\left\{\frac{\sigma_Y^2 s^2}{2} + \mu_Y s\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_X^2 s^2}{2} + \mu_X s + \frac{\sigma_Y^2 s^2}{2} + \mu_Y s\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{s^2}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) + s(\mu_X + \mu_Y)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) s^2}{2} + (\mu_X + \mu_Y) s\right\} \end{aligned}$$

Note que la transformada de Z es la misma que la transformada de una v.a. con media $\mu_X + \mu_Y$ y varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ normal. Por unicidad de las transformadas se tiene que Z es normal con media $\mu_X + \mu_Y$ y varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

2. Sean X_i v.a. geométricas i.i.d con parametro p

Sea N una v.a. geometrica con parametro q e independiente de las X_i

Calcular $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Observe que las X_i tienen media $E(X) = p$ y varianza $var(X) = p(1-p)$

Ahora note que N tiene media $E(N) = q$ y varianza $var(N) = q(1-q)$

Note que $M_Z(s) = M_N(\ln M_X(s))$.

$$M_N(s) = \frac{qe^s}{1-(1-q)e^s} \qquad M_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$$

luego
$$M_Z(s) = \frac{q M_X(s)}{1-(1-q)M_X(s)} = \frac{q\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)}{1-(1-q)\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)}$$

$$= \frac{\frac{qpe^s}{\cancel{1-(1-p)e^s}}}{\frac{1-(1-p)e^s-(1-q)pe^s}{\cancel{1-(1-p)e^s}}}$$

$$= \frac{qpe^s}{1-e^s((1-p)+p(1-q))} = \frac{qpe^s}{1-e^s(1-\cancel{p}+\cancel{p}-pq)}$$

$$= \frac{qpe^s}{1-(1-qp)e^s}$$

Note que la transformada de Z es la misma que la transformada de una v.a. geometrica con parametro qp. Por unicidad de las transformadas se tiene que Z es geometrica con parametro qp.

4. Ley Fuerte de los Números grandes

Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a. i.i.d con media μ. Entonces, la sucesion de medias muestrales $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge a μ, con probabilidad 1, de manera que.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Demostración

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesion de v.a. i.i.d y asumimos que $E(X_i^4) < \infty$, es decir que esta definido.

Note que $E(X_i^4) < \infty$ implica que el valor esperado de X_i, $E(X_i)$, es finito.

Ahora usando la desigualdad $|X| \leq 1 + X^4$, tenemos que

$$E(|X_i|) \leq 1 + E(X_i^4) < \infty$$

Asumamos inicialmente que $E(X_i) = 0$, mostraremos que

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^4}{n^4}\right) < \infty$$

Tenemos que

$$E\left(\frac{(X_1 + \cdots + X_n)^4}{n^4}\right) = E\left(\frac{(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)}{n^4}\right)$$

Como los X_i son independientes luego.

$$E\left(\frac{(X_1 + \cdots + X_n)^4}{n^4}\right) = \frac{1}{n^4} E\left((X_1 + \cdots + X_n) \cdot (X_1 + \cdots + X_n) \cdot (X_1 + \cdots + X_n) \cdot (X_1 + \cdots + X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^4} E\left(\sum_{i_1=1}^{n} (X_{i_1}) \cdot \sum_{i_2=1}^{n} (X_{i_2}) \cdot \sum_{i_3=1}^{n} (X_{i_3}) \cdot \sum_{i_4=1}^{n} (X_{i_4})\right)$$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_4=1}^{n} E(X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4})$$

$$E\left(\frac{(X_1+\cdots+X_n)^4}{n^4}\right)=\frac{1}{n^4}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{i_4=1}^{n}E(X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4})$$

Consideremos los téminos en la suma. Note por ejemplo que si i_1 es diferente de i_2, i_3 o i_4

$$E(X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4})=E(X_{i_1})E(X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4})=0$$

ya que $E(X_i)=0$.

Luego si uno de los indices es diferente de los otros, el término correspondiente es 0.

Por lo tanto, los términos no cero en la suma son de la forma $E(X_i^4)$ (note que hay n de estos términos) o de la forma $E(X_i^2X_j^2)$, con $i\neq j$.

Para la forma $E(X_i^2X_j^2)$, con $i\neq j$, el número de términos se calcula de la siguiente manera:

- Estos términos se obtienen de 3 formas distintas: haciendo $(i_1=i_2\neq i_3=i_4)$ ó $(i_1=i_3\neq i_2=i_4)$ ó $(i_1=i_4\neq i_2=i_3)$. Para cada una de estas 3 maneras, tenemos n opciones para el primer par de indices y $n(n-1)$ para el segundo par. Por lo tanto hay $n(n-1)+(n(n-1))+n(n-1)=3n(n-1)$ terminos de este tipo.

Entonces, $E((X_1+\cdots+X_n)^4)=nE(X_1^4)+3n(n-1)E(X_1^2X_2^2)$.

Ahora usando la desigualdad $xy\leq\frac{(x^2+y^2)}{2}$

obtenemos que $E(X_1^2X_2^2)\leq E(X_1^4)$ y

$$E((X_1+\cdots+X_n)^4)\leq(n+3n(n-1))E(X_1^4)\leq 3n^2E(X_1^4)$$

luego se sigue que.

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_1+\cdots+X_n)^4}{n^4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}E\left((X_1+\cdots+X_n)^4\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^4}E(X_1^4)<\infty$$

la desigualdad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}E(X_1^4)<\infty$ se da ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$.

Ahora se tiene que

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_1+\cdots+X_n)^4}{n^4}\right)<\infty$$

Sea $Y_n=\frac{(X_1+\cdots+X_n)^4}{n^4}$, note que Y_n es no negativa.

Observe que $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ debe ser finita. con probabilidad 1. ya que si tuviera probabilidad positiva de ser infinita, entonces su valor esperado tambien seria infinito. Pero si la suma de los valores de las variables aleatorias Y_n es finito, la sucesión de estos valores debe converger a 0.

Ya que la probabilidad de este evento es 1, entonces la sucesión Y_n converge a 0 con probabilidad 1.

Como Y_n converge a 0 con probabilidad 1, se tiene tambien que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ tambien converge a 0 con probabilidad 1, es decir se cumple la ley fuerte de los numeros grandes.

Ahora para el caso mas general donde $E(X_i)$ no es cero, el argumento anterior estableceria que $\frac{X_1+\cdots+X_n-nE(X_1)}{n}$ converge a 0, que es lo mismo que

$\frac{(X_1+\cdots+X_n)}{n}$ convergiendo a $E(X_1)$, con probabilidad 1.

5. Teorema del límite Central.

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a. i.i.d con media y varianza común, μ y σ^2 respectivamente.

Definamos

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Entonces la CDF de Z_n converge a la CDF de la normal estandar, es decir

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z), \ \forall z$$

Demostración:

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesion de v.a. i.i.d con media y varianza común, 0 y σ^2 respectivamente. (la media es cero).

Asumamos que $M_X(s)$ es finita cuando $-d<s<d$, con d positivo. (esto para que se cumpla la propiedad de Inversión de $M_X(s)$).

Definamos $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Note que

$$\begin{aligned}
M_{Z_n}(s) &= E(e^{sZ_n}) = E\left(\exp\left\{\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right)\\
&= E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left\{\frac{X_i s}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \text{, como } X_i \text{ son indep luego}\\
&= \prod_{i=1}^{n} E\left(\exp\left\{\frac{sX_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_X\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right) \text{, ya que } X_i \text{ son i.i.d}\\
&= \underline{\left(M_X\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n}
\end{aligned}$$

Por otro lado supongamos que $M_X(s)$ tiene una serie de expansión de Taylor de segundo orden al rededor de $s=0$ de la forma

$$M_X(s) = a + bs + cs^2 + o(s^2),$$

donde $o(s^2)$ es una función que satisface $\lim_{s\to 0} o(s^2)/s^2 = 0$.

Ahora para encontrar a, b y c en términos de σ^2 usamos las propiedades de la transformada $M_X(s)$ como función generadora de momentos.

- $M_X(0) = E(e^{(0)X}) = 1$ y $M_X(0) = a + \cancel{b(0)} + \cancel{c(0)^2} + \cancel{O(0^2)}$

luego $\underline{\underline{M_X(0) = 1 = a}}$.

- $E(X) = \frac{d}{ds} M_X(s)\Big|_{s=0} = b + \cancel{2cs} + \cancel{\frac{d\, O(s^2)}{ds}}\Big|_{s=0}$

$$0 = E(X) = b$$

y como $E(X) = 0$ entonces $\underline{\underline{b = 0}}$.

- $E(X^2) = \frac{d^2}{ds^2} M_X(s)\Big|_{s=0} = 2c + \cancel{\frac{d^2\, O(s^2)}{ds^2}}\Big|_{s=0}$

$$E(X^2) = 2c$$

$$\underline{\underline{c = \frac{E(X^2)}{2}}}$$

y como $\sigma^2 = var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 0 = E(X^2)$

luego $\underline{\underline{c = \frac{\sigma^2}{2}}}$.

Por lo tanto $M_X(s) = 1 + \frac{\sigma^2 s^2}{2} + O(s^2)$

Ahora se tiene que

$$M_{Z_n}(s) = \left(M_X\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{\cancel{\sigma^2}}{2}\frac{s^2}{\cancel{\sigma^2} n} + O\left(\frac{s^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{s^2}{2n} + O\left(\frac{s^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n$$

Finalmente si calculamos.

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{s^2}{2n} + \cancel{O\left(\frac{s^2}{\sigma^2 n}\right)}\right)^n.$$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{s^2}{2n}\right)^n$ y por identidad $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$

se tiene que $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = e^{s^2/2}$,

es decir $M_{Z_n}(s)$ converge a la transformada $M_Z(s) = e^{s^2/2}$ que corresponde a la transformada de una v.a. normal estandar. Por lo tanto la CDF de Z_n converge a la CDF de Z, donde Z es una v.a. normal estandar.

6. Dado justo

a). 1000 lanzamientos.

Sea X_i: Bernoulli, donde es 1 si el dado cae en 4 y 0 de lo contrario.

$$P(X_i = k) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } k=1 \\ 5/6 & \text{si } k=0. \end{cases}$$

Sea S_n el número de veces que cae 4, en n lanzamientos

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

S_n es binomial, media $n/6$ y varianza $n/6(1-1/6) = 5n/36$

Tenemos que calcular $P(S_{1000} \geq 150)$

Usando aproximacion normal empleando el teorema del limite central tenemos:

$$P(S_{1000} \geq 150) = 1 - P(S_{1000} < 150) = 1 - P\left(\frac{S_{1000} - 1000/6}{\sqrt{5 \cdot 1000}/6} < \frac{150 - 1000/6}{\sqrt{5 \cdot 1000}/6}\right).$$

$$\approx 1 - \Phi(-1{,}4142) = 1 - (1 - \Phi(1{,}4142))$$

$$\approx \Phi(1{,}4142) = 0{,}9207$$

Usando aproximacion de Moivre-Laplace.

$$P(S_{1000} \geq 150) \approx 1 - \Phi\left(\frac{149{,}5 - 1000/6}{\sqrt{5000}/6}\right) = 1 - \Phi(-1{,}46)$$

$$\approx 1 - (1 - \Phi(1{,}46))$$

$$\approx \Phi(1{,}46) = 0{,}9279$$

b).
- Sea X_i el tiempo de calificacion del examen final para el estudiante i-esimo
- Las X_i son i.i.d. con media 1 hora y desviación estandar 0,4 horas.

S_n es el tiempo de calificacion de n examenes.

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Calcular $P(S_{100} > 110)$.

$E(S_{100}) = 100(1) = 100$

$Var(S_{100}) = 100 \cdot Var(X) = 100(0,4)^2$.

Usando aproximacion normal de S_{100} tenemos:

$$P(S_{100} > 110) = 1 - P(S_{100} \leq 110) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100}{\sqrt{100(0,4)^2}} \leq \frac{110 - 100}{\sqrt{100(0,4)^2}}\right).$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{\cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 0,4}\right) = 1 - \Phi(1/0,4)$$

$$\approx 1 - \Phi(2,5) = 1 - 0,9938$$

$$\approx \underline{\underline{0,0062}}$$

7. Proposición: Si $Var(X) = 0$, entonces $P(X = E(X)) = 1$

Demostración:

Usando desigualdad de chebychev se tiene que

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

luego $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{0}{\varepsilon^2} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

adicionalmente $0 \leq P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq 0$

asi que $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

luego $P(X \neq E(X)) = 0$

Por lo tanto $P(X = E(X)) = 1$

$\blacksquare$