Temas: variables aleatorias continuas condicionales, función de densidad condicional, esperanza condicional, regla de Bayes continua

1. La temperatura ambiente X (en °C) y el tiempo Y (en minutos) que toma iniciar un motor son variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c(4x+2y+1), & 0 \leq x \leq 40, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Calcule el valor de c que hace a f una función de densidad válida.

   b) Calcule la probabilidad de que la temperatura ambiente sea mayor a 20 °C y se requiera al menos un minuto para iniciar el motor.

   c) Determine las funciones de densidad marginal de X y Y.

   d) Calcule la probabilidad de que en un día seleccionado al azar se requiera al menos un minuto para iniciar el motor.

   e) Si la temperatura ambiente es 10 °C, ¿cuál es la probabilidad de que en un día seleccionado al azar se requiera al menos un minuto para iniciar el motor?

   f) ¿Cómo cambia su respuesta anterior si la temperatura es 30 °C?

   g) Si toma más de un minuto iniciar el motor, ¿cuál es la probabilidad de que la temperatura sea mayor a 20 °C?

   h) ¿Son X y Y independientes?

2. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta igual a

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 \leq x \leq y, x+y \leq 2, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Verifique que f es una función de densidad válida.

   b) Determine la función de densidad marginal de X.

   c) Determine la función de densidad marginal de Y. Tenga especial cuidado con los diferentes comportamientos de esta densidad dependiendo de los valores que toma Y. Compruebe que la función obtenida es efectivamente una función de densidad válida.

   d) Determine la función de densidad condicional de Y dado $X = x$.

   e) Con el resultado anterior determine la probabilidad de que Y sea a lo sumo 1.1 dado que X es igual a 0.6.

   f) ¿Son X y Y independientes?

3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad igual a

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & dlc, \end{cases}$$

   y sea A el evento $\{X \geq 2\}$.

a) Determine $E[X]$ y $P(A)$.

b) Determine $f_{X|A}(x)$ y $E[X|A]$.

c) Determine $f_{X|\bar{A}}(x)$ y $E[X|\bar{A}]$.

d) Determine $E[X]$ a partir de $E[X|A]$ y $E[X|\bar{A}]$ y verifique su respuesta con la del primer literal.

e) Sea $Y = X^2$. Determine $E[Y]$ y $V(Y)$.

4. Una variable aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^{-2}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & dlc. \end{cases}$$

a) Determine el valor de c.

b) Defina el evento $A = \{X > 1{,}5\}$. Determine $P(A)$ y la función de densidad de X dado que A ocurrió.

c) Sea $Y = X^2$. Determine la esperanza y la varianza condicional de Y dado A.

5. Un profesor cita por error a dos estudiantes a la misma hora. Cada reunión se prolonga por un tiempo que sigue una distribución exponencial con media de treinta minutos independiente de la duración de la otra reunión. El primer estudiante llega a tiempo y el segundo estudiante llega cinco minutos tarde. La reunión con el segundo estudiante no puede iniciar si la reunión con el primero no ha terminado. Determine el valor esperado del tiempo desde que llega el primer estudiante hasta que termina la reunión con el segundo estudiante.

6. Se tiene una barra de longitud l. Se rompe en un punto que se selecciona aleatoriamente (con distribución uniforme) y nos quedamos con el extremo izquierdo de la barra, cuya longitud denominamos Y. Con este fragmento se repite el proceso de romperlo en un punto seleccionado aleatoriamente y sea X la longitud del fragmento que queda después de romper la barra por segunda vez.

a) Determine la función de densidad conjunta de Y y X.

b) Determine la función de densidad marginal de X.

c) Determine el valor esperado de X utilizando su función de densidad marginal.

7. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta uniforme sobre el triángulo con vértices en los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

a) Determine la función de densidad conjunta de X y Y.

b) Determine la función de densidad marginal de Y.

c) Determine la función de densidad condicional de X dado Y.

d) Determine $E[X|Y = y]$ y use el teorema de esperanza total para determinar $E[X]$ en términos de $E[Y]$.

e) Use la simetría del problema para determinar el valor de $E[X]$.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad exponencial doble (*two-sided exponential*) dada por

$$f_X(a) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda a}, & a < 0, \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda a}, & a \geq 0, \end{cases}$$

donde λ y p son escalares con $\lambda > 0$ y $p \in [0, 1]$. Determine la media y la varianza de X de dos maneras.

a) Usando el cálculo usual basado en la función de densidad.

b) Usando una estrategia *divide y vencerás* y los valores de la media y la varianza de la distribución exponencial estándar.