Temas: ley débil de los grandes números, desigualdades de Markov y Chebyshev, teorema del límite central

1. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población, y por ende de cada muestra, es de un metro.

   a) Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo un centímetro.

   b) Determine el tamaño n que hace que la desigualdad de Chebyshev garantice que el estimador M_n está a lo sumo a cinco centímetros de diferencia de h con probabilidad de por lo menos 0.99.

   c) Determine cómo cambian sus resultados anteriores si la desviación estándar de la población se estima en diez centímetros.

2. Se busca estimar la proporción f de fumadores en una población. Para este fin se seleccionan n personas al azar. Se estima f con la media muestral M_n, la cual es la proporción de fumadores en la muestra. Se quiere que el tamaño de la muestra sea el menor número de personas seleccionadas al azar tal que la desigualdad de Chebyshev garantiza que
$$P(|M_n - f| \geq \epsilon) \leq \delta,$$
donde ϵ y δ se han definido previamente. Determine cómo cambia el valor de n que recomienda la desigualdad de Chebyshev en los siguientes casos.

   a) Se reduce el valor de ϵ a la mitad de su valor original.

   b) Se reduce la probabilidad δ a la mitad de su valor original.

3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada uno de los siguientes casos muestre que la sucesión $Y_1, Y_2, \ldots$ converge en probabilidad a algún límite e identifique el límite.

   a) $Y_n = X_n/n$

   b) $Y_n = (X_n)^n$

   c) $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$

   d) $Y_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$

4. Antes de empezar a jugar en la ruleta de un casino usted decide observar el comportamiento de la misma. Se observan 100 rondas, cada una de las cuales resulta en un número entre el 1 y el 36, y cuenta el número de rondas en que el resultado es impar. Si el resultado es mayor a 55 usted decide que la ruleta no es justa. Suponiendo que la ruleta es justa, encuentre una aproximación a la probabilidad de que usted tome una decisión equivocada.

5. En un día cualquiera su computador falla con probabilidad 0.05, la cual es independiente de otros días. Usted está interesado en la probabilidad de tener al menos 45 días sin fallas en los siguientes 50 días.

   a) Utilice una aproximación basada en el teorema del límite central para determinar esta probabilidad.

   b) Utilice la aproximación de De Moivre-Laplace para la binomial para determinar esta probabilidad.

   c) Calcule la probabilidad exacta utilizando la distribución binomial y compare con sus resultados anteriores.

6. Una fabrica produce X_n dispositivos el día n, donde las X_n son variables aleatorias i.i.d. con media cinco y varianza nueve.

   a) Encuentre una aproximación a la probabilidad de que en 100 días se produzcan menos de 440 dispositivos.

   b) Determine (aproximadamente) el mayor valor de n tal que

   $$P(X_1 + \cdots + X_n \geq 200 + 5n) \leq 0{,}05.$$

   c) Sea N el primer día en que se llega a un total de 1000 dispositivos producidos (acumulados desde el día uno). Determine de manera aproximada la probabilidad de que $N \geq 220$.

7. Sean $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, distribuidas uniformemente en el intervalo unitario $[0, 1]$, y sea

   $$W = \frac{(X_1 + \cdots + X_{16}) - (Y_1 + \cdots + Y_{16})}{16}.$$

   Encuentre una aproximación a la probabilidad

   $$P(|W - E[W]| < 0{,}001).$$