Temas: Probabilidad Condicional, Independencia, Conteo

1. Sean A y B eventos con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Se dice que un evento B sugiere un evento A si $P(A|B) > P(A)$, y que un evento B *no* sugiere un evento A si $P(A|B) < P(A)$.

   a) Demuestre que B sugiere A si y solo si A sugiere B.

   b) Sabemos que un tesoro se encuentra ubicado en una de dos posibles ubicaciones, con probabilidades β y $1-\beta$, respectivamente. Buscamos el tesoro en la primera ubicación y, si se encuentra allá, lo encontramos con probabilidad $p > 0$. Demuestre que el no encontrar el tesoro en la primera ubicación sugiere que el tesoro está en la segunda ubicación.

2. Un caminante tiene dos perros. Al llegar a una bifurcación el caminante no sabe qué camino tomar. Se sabe que cada perro selecciona el camino correcto con probabilidad p, independiente de la selección del otro perro. El caminante deja que cada perro escoja un camino. Si los dos perros coinciden en la elección, el caminante toma ese camino. Si los perros toman caminos diferentes, el caminante selecciona un camino al azar. ¿Es esta estrategia mejor que simplemente dejar decidir a uno de los dos perros sobre el camino a tomar?

3. Al transmitir un mensaje de una fuente a su destino se usa un canal con ruido. El mensaje consiste de símbolos binarios, es decir, 1 o 0. El ruido en el canal implica que, por ejemplo, al enviar un 0 éste puede recibirse en el destino como un 0 o como un 1. Cada símbolo transmitido es 0 con probabilidad p y 1 con probabilidad $1-p$. Si el símbolo es 0, se recibe incorrectamente con probabilidad ϵ_0, y correctamente con probabilidad $1-\epsilon_0$. Similarmente, si el símbolo es 1, se recibe incorrectamente con probabilidad ϵ_1, y correctamente con probabilidad $1-\epsilon_1$. Los errores en la transmisión son independientes entre símbolos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el k-ésimo símbolo sea recibido correctamente?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cadena de símbolos 1011 sea recibida correctamente?

   c) Para mejorar la confiabilidad de la transmisión se decide enviar cada símbolo 3 veces y al recibirlo se decodifica de acuerdo con la regla de la mayoría. Es decir, 0 se envía como 000, y se recibe como un 0 si la cadena recibida está compuesta de al menos 2 ceros. ¿Cuál es la probabilidad de que un 0 sea decodificado/recibido correctamente?

   d) ¿Para qué valores de ϵ_0 hay una mejora en la probabilidad de decodificar correctamente un 0 al usar el procedimiento del literal c?

   e) Suponga que se usa el procedimiento del literal c. ¿Cuál es la probabilidad de que el símbolo enviado era 0 dado que se recibe la cadena 101?

4. Una pareja tiene 2 hijos. Usted conoce a uno de los hijos y sabe que es mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hijo sea mujer también?

a) Responda la pregunta suponiendo que la probabilidad de tener una hija mujer es $0 < p < 1$.

b) Responda la pregunta suponiendo $p = 0{,}5$.

5. Una antena de celular atiende una población de n_1 usuarios de voz y n_2 usuarios de datos. Se estima que en un momento dado cada usuario de voz intenta usar el servicio con probabilidad p_1 y cada usuario de datos con probabilidad p_2. Todos los usuarios se conectan independientemente de los demás. Al conectarse al servicio, un usuario de voz requiere una tasa de r_1 bps mientras uno de datos requiere r_2 bps. La capacidad máxima de la antena es c bps. Determine la probabilidad de que en un momento dado se conecten más usuarios a la antena de los que puede soportar.

6. En una clase la profesora ha decidido que solo hace clase a menos que k de los n estudiantes registrados lleguen a tiempo. Cada estudiante falla independiente de los demás con probabilidad p.

   - Determine la probabilidad de que en un día particular se dicte la clase.
   - Si las fallas ocurren independientemente cada día, determine la probabilidad de que no se dicte la clase dos días consecutivos.
   - Suponga que las probabilidades de falla cambian dependiendo de si el clima es bueno o malo. Si se conocen las probabilidades del clima (bueno o malo) para un día, determine la probabilidad de que se dicte la clase.

7. Suponga que los eventos A_1, A_2, A_3, A_4 son independientes y que $P(A_3 \cap A_4) > 0$. Demuestre que
$$P(A_1 \cup A_2 | A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2)$$

8. Un modelo de carro viene en 5 estilos, 4 tipos de motor, 2 tipos de transmisión (manual o automática), y 8 colores diferentes.

   a) Determine el número total de configuraciones de este modelo.

   b) Determine la probabilidad de seleccionar al azar un modelo con transmisión manual.

   c) Determine la probabilidad de seleccionar al azar un modelo de color rojo y un cierto tipo de motor.

9. Se tienen 10 candidatos para 3 puestos distintos.

   a) ¿De cuántas posibles maneras se pueden asignar?

   b) Si los puestos son iguales, es decir, se buscan 3 operarios para realizar una labor, ¿de cuántas posibles maneras se pueden asignar?.

10. Considere n personas. Cada una tiene la misma probabilidad de cumplir años cualquier día del año (ignore años bisiestos). ¿Cuál es la probabilidad de que cada persona cumpla un día diferente?

11. Se lanza un dado 6 veces, ¿cuál es la probabilidad de que los resultados sean $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en cualquier orden?

12. Se lanza un dado alterado donde la cara del 6 se ha reemplazado con un 5. Se lanza 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados sean $1, 2, 3, 4, 5$ en cualquier orden?

13. Se seleccionan 10 estudiantes de un grupo de 90.
    - ¿Cuántos grupos diferentes se pueden seleccionar?
    - Si 20 de los 90 son hombres, ¿cuál es la probabilidad de que 4 sean incluidos en la muestra?

14. Se sacan 2 cartas de una baraja estándar de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de sacar un as y una figura?

15. Se sacan 5 cartas de una baraja estándar de 52 cartas,
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases y dos reyes?
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas de una pinta, 3 de otra?
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar un full: 3 de un valor, 2 de otro?

16. Se sacan 5 cartas de una baraja estándar de 52 cartas,
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar as, 2, 3, 4, y 5?
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar cualquier escalera?

17. Una urna contiene m bolas azules y n blancas. Se seleccionan dos bolas al azar. Describa el espacio muestral, y determine la probabilidad de que las bolas seleccionadas sean de diferente color.
    - Resuelva este problema usando técnicas de conteo donde se supone que todos los resultados del experimento son igualmente probables.
    - Resuelva este problema un método secuencial (árbol de probabilidad).

18. Una urna contiene m bolas azules y n blancas. Se lanza un dado justo de 3 caras. Si sale la cara k, se toman k bolas de la urna al azar. Describa el espacio muestral, y determine la probabilidad de que todas las bolas sean azules. Utilice el teorema de probabilidad total.

19. Se seleccionan cartas al azar de una baraja estándar de 52 cartas. Determine la probabilidad de que la décima carta seleccionada sea un as.

20. Una oficina está compuesta por 20 espacios de trabajo en línea. Cada día las 20 personas que allá trabajan llegan y toman un espacio al azar (no hay espacio de trabajo fijo). De las 20 personas, 10 son mujeres y 10 son hombres.

- ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse las 20 personas en los 20 puestos de trabajo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado las personas queden alternadas (es decir, no hay dos hombres o dos mujeres sentados uno al lado del otro)?

21. (Probabilidades Hipergeométricas) Una urna contiene n bolas, de las cuales m son azules. Se seleccionan k bolas al azar sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccionen i bolas azules?

22. En un curso de 100 estudiantes, se sabe que k son de MACC. Se seleccionan m estudiantes al azar.

    - ¿Cuál es la probabilidad de que n de los seleccionados sean de MACC?
    - ¿Cuál es la probabilidad de que n de los seleccionados NO sean de MACC?