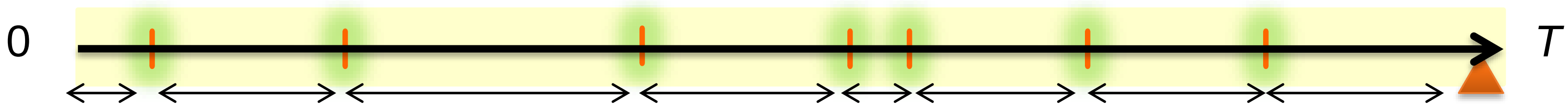
# Distribuciones de probabilidad: Exponencial, Gamma y otras derivadas.

Estadística MACC 2020-1

Santiago Alférez




*X - tiempo entre "clics" en un contador Geiger en radiación de fondo normal.*

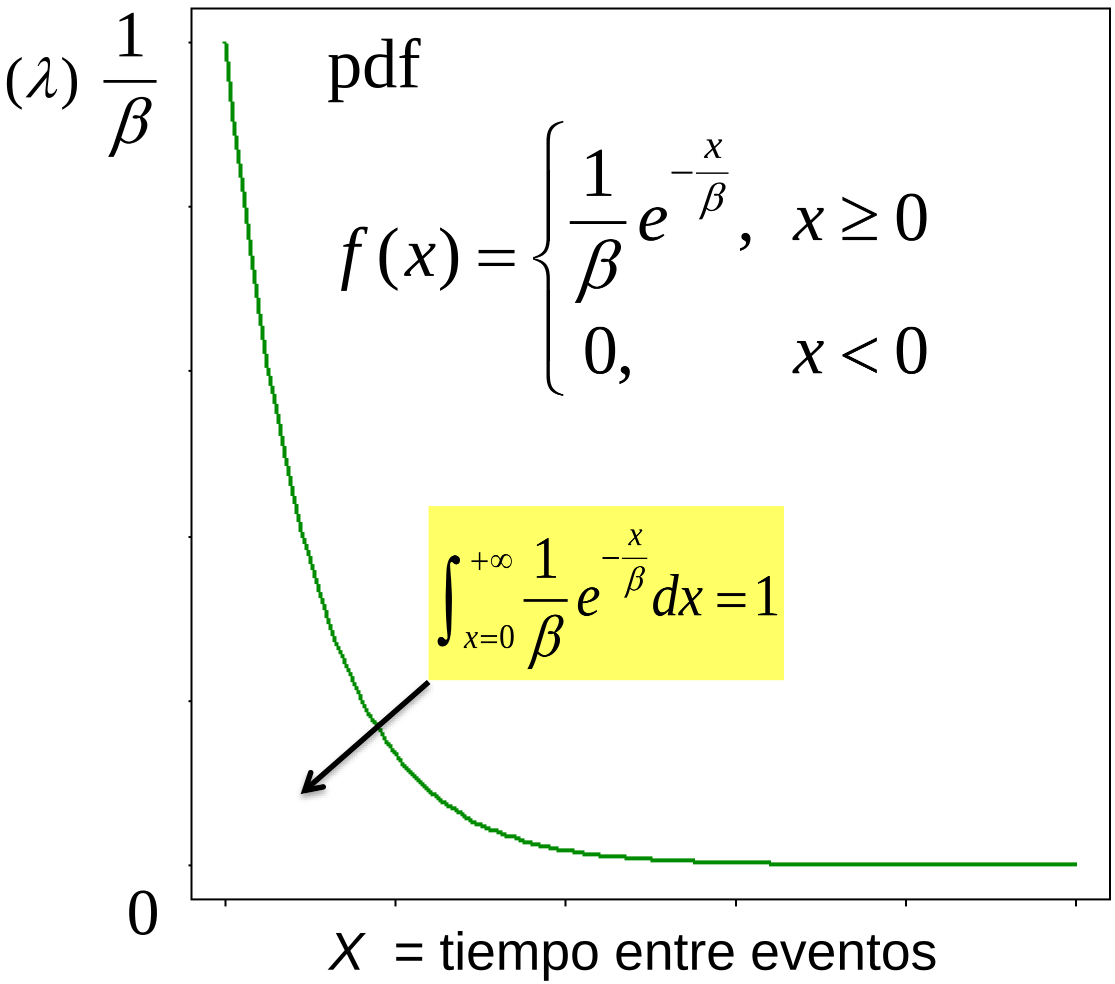
- "Análisis de tiempo a evento"
- "Análisis de tiempo a fallo"
- "Análisis de fiabilidad"
- "Análisis de supervivencia"

fracasos, muertes, nacimientos, etc.

**El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).**

**El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).**

$X \sim \text{Exp}(\beta)$ Parámetro $\beta > 0$




$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1$$

***Comprobar pdf?***

$f(x) \geq 0$ ✓

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Sea $y = \frac{x}{\beta}$; entonces $dy = \frac{dx}{\beta}$

$$= \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y} dy$$

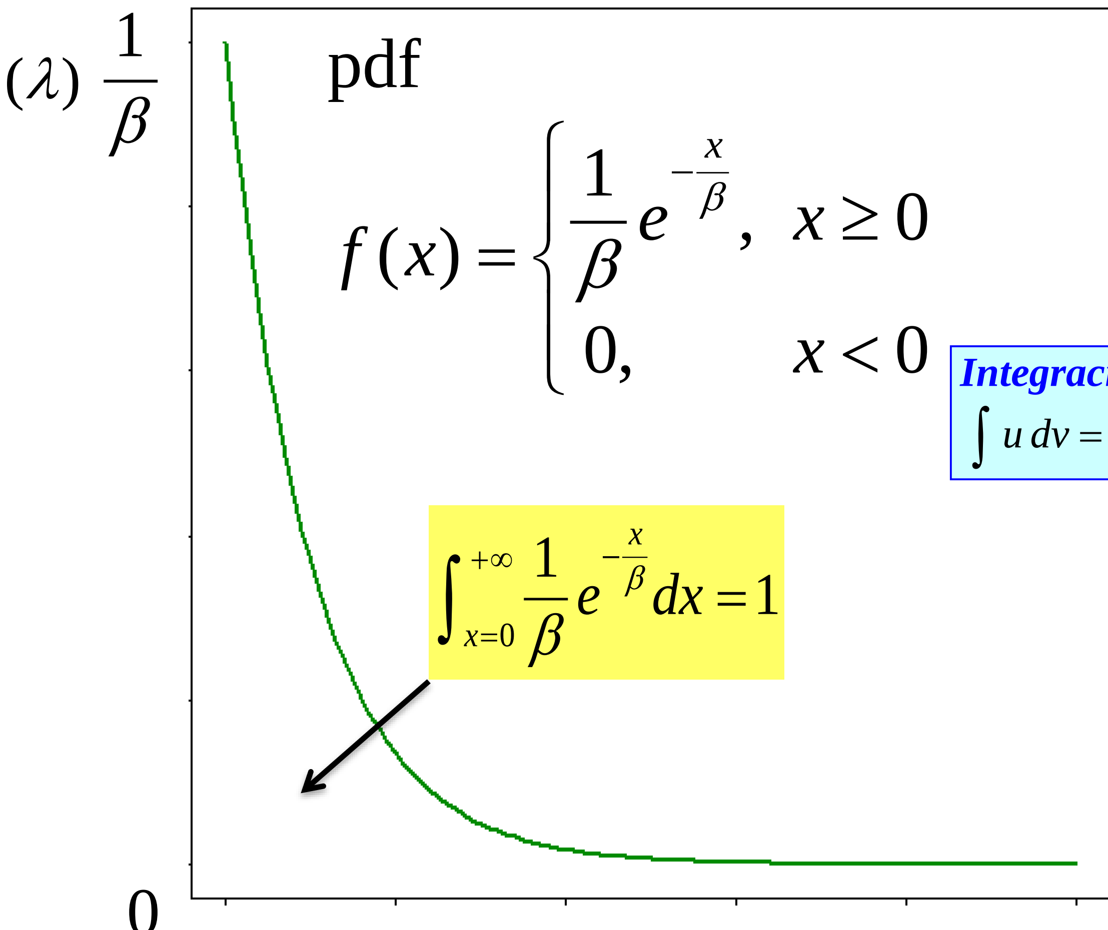
$$= \lim_{c \to +\infty} \left[ -e^{-y} \right]_0^c$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left[ -e^{-c} + 1 \right]$$

$$= 1$$ ✓

**El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).**

$X \sim \text{Exp}(\beta)$ Parámetro $\beta > 0$




$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1$$

$X$ = tiempo entre eventos

***Calcular el tiempo esperado entre eventos***

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

***Integración por partes***

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$u = x \quad dv = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$\Rightarrow du = dx \quad v = -e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$\therefore\ \mu = \left[ -x\, e^{-\frac{x}{\beta}} \right]_0^{+\infty} + \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

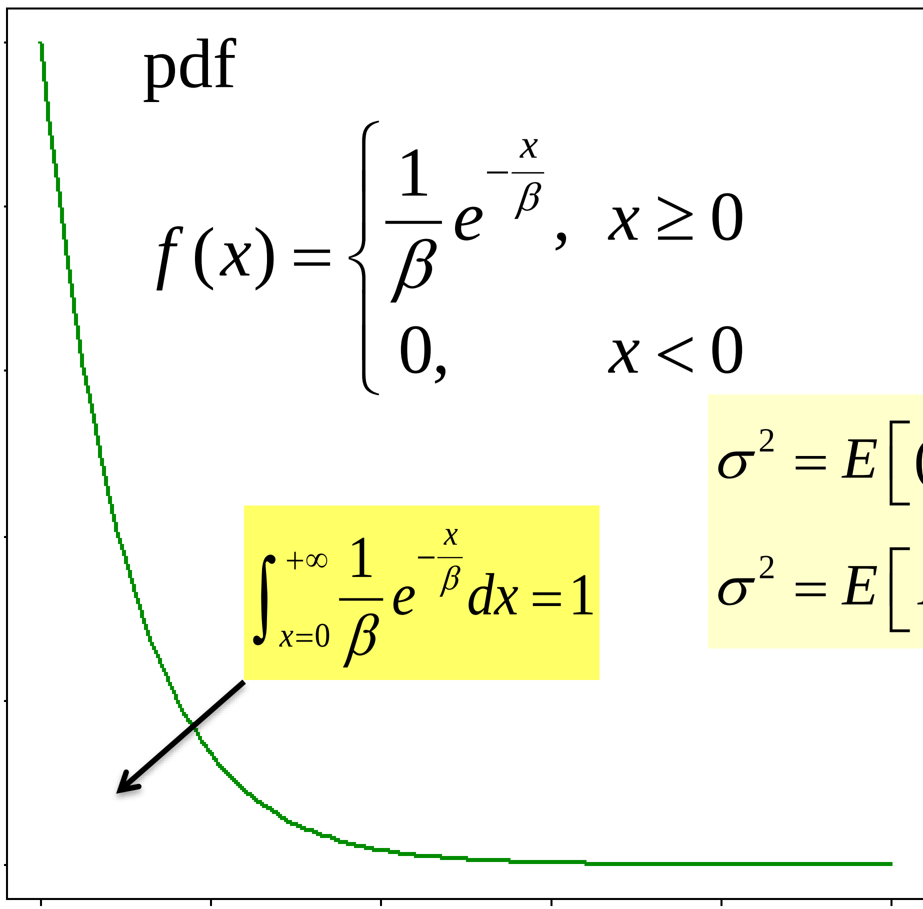
$$= \lim_{c \to +\infty} \left[ -c\, e^{-\frac{c}{\beta}} + 0 \right] + \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= 0 + \beta = \boxed{\beta}$$

**El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).**

$X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ Parámetro $\beta > 0$

$(\lambda)\ \dfrac{1}{\beta}$



pdf

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1$$

0

$X$ = tiempo entre eventos

***Calcular el tiempo esperado entre eventos***

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\boxed{\text{Mean } \mu = \beta}$$

Del mismo modo para la varianza...

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} x^2 e^{-\frac{x}{\beta}} dx - \beta^2$$

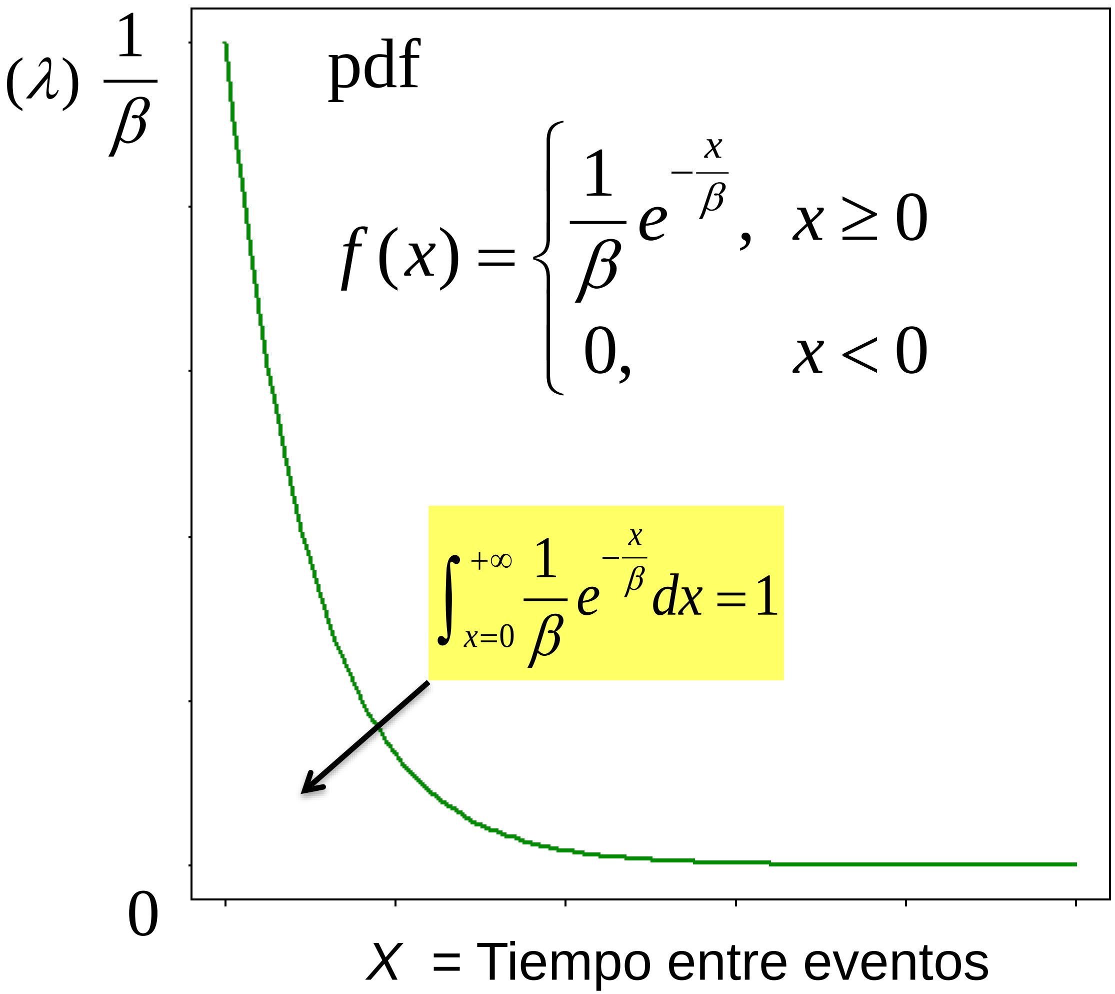
***Integración por partes***

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

etc... = $\boxed{\beta^2}$

## El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).

$X \sim \text{Exp}(\beta)$ Parámetro $\beta > 0$




pdf

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1$$

***Calcular el tiempo esperado entre eventos***

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Media $\mu = \beta$

Varianza $\sigma^2 = \beta^2$

***Determinar the cdf***

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

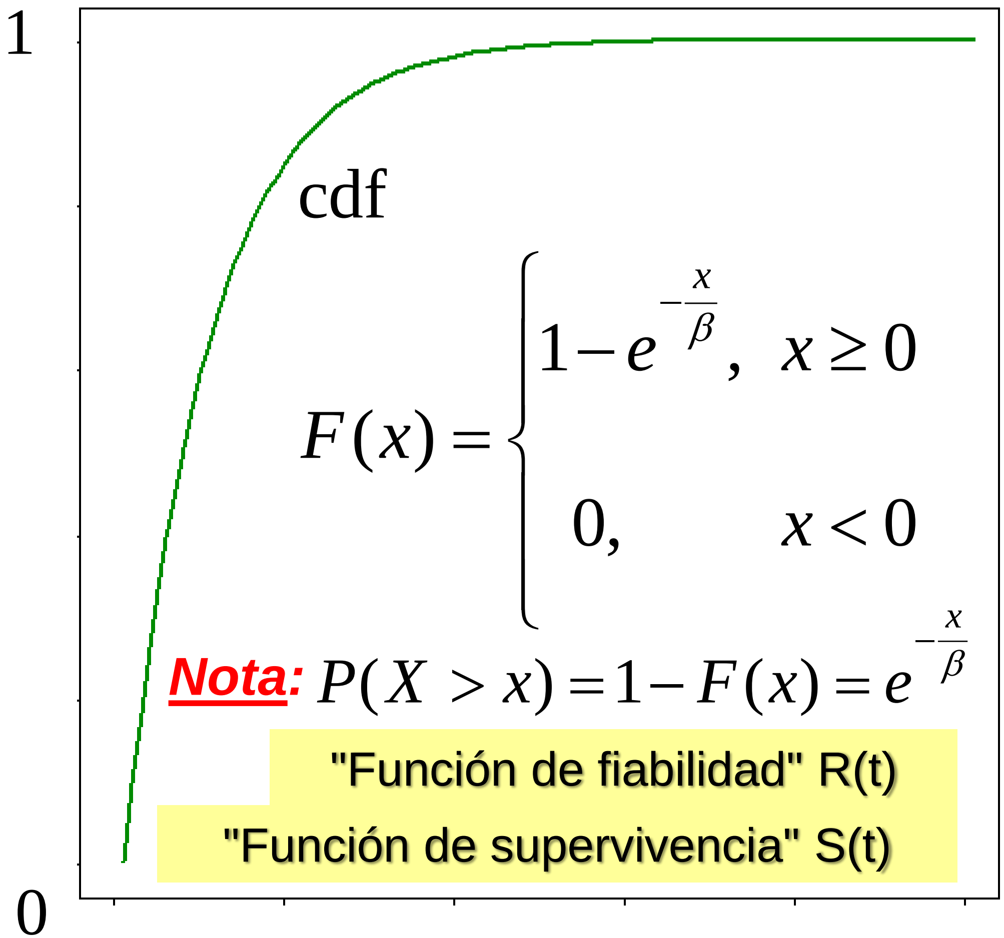
$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \left[ -e^{-\frac{t}{\beta}} \right]_0^x$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0$$

***Nota:*** $F(0) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

**El tiempo entre eventos a menudo se modela mediante la distribución exponencial (continua).**

$X \sim \text{Exp}(\beta)$ Parámetro $\beta > 0$




$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

**Nota:** $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x}{\beta}}$

"Función de fiabilidad" R(t)

"Función de supervivencia" S(t)

***Calcular el tiempo esperado entre eventos***

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Media $\mu = \beta$

Varianza $\sigma^2 = \beta^2$

***Determinar the cdf***

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}\, dt = \left[ -e^{-\frac{t}{\beta}} \right]_0^x$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0$$

**Nota:** $F(0) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Existen modelos más generales..., por ejemplo, **La distribución Gamma**

Para entender esto, primero es necesario entender la "Función Gamma"

***Def:*** Para cualquier $\alpha > 0$, $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

- Descubierto por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) en una forma diferente.
- "Special Functions of Mathematical Physics" Incluye **Gamma**, **Beta**, Bessel, classical orthogonal polynomials (Jacobi, Chebyshev, Legendre, Hermite,…), etc.
- Generalización de los "factoriales" a todos los valores complejos de $\alpha$ (excepto 0, -1, -2, -3, …).
- La distribución exponencial es un caso especial de la distribución Gamma

## *Propiedades básicas:*

$$\boxed{\Gamma(1) = 1} \quad Dem:\ \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^c = \lim_{c \to +\infty} \left[ -e^{-c} + 1 \right] = 1 \checkmark$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)} \quad Dem:\ \Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$$

**Integración por partes**

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= \left[ -x^{\alpha} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$u = x^{\alpha} \qquad dv = e^{-x} dx$$
$$du = \alpha x^{\alpha-1} dx \qquad v = -e^{-x}$$

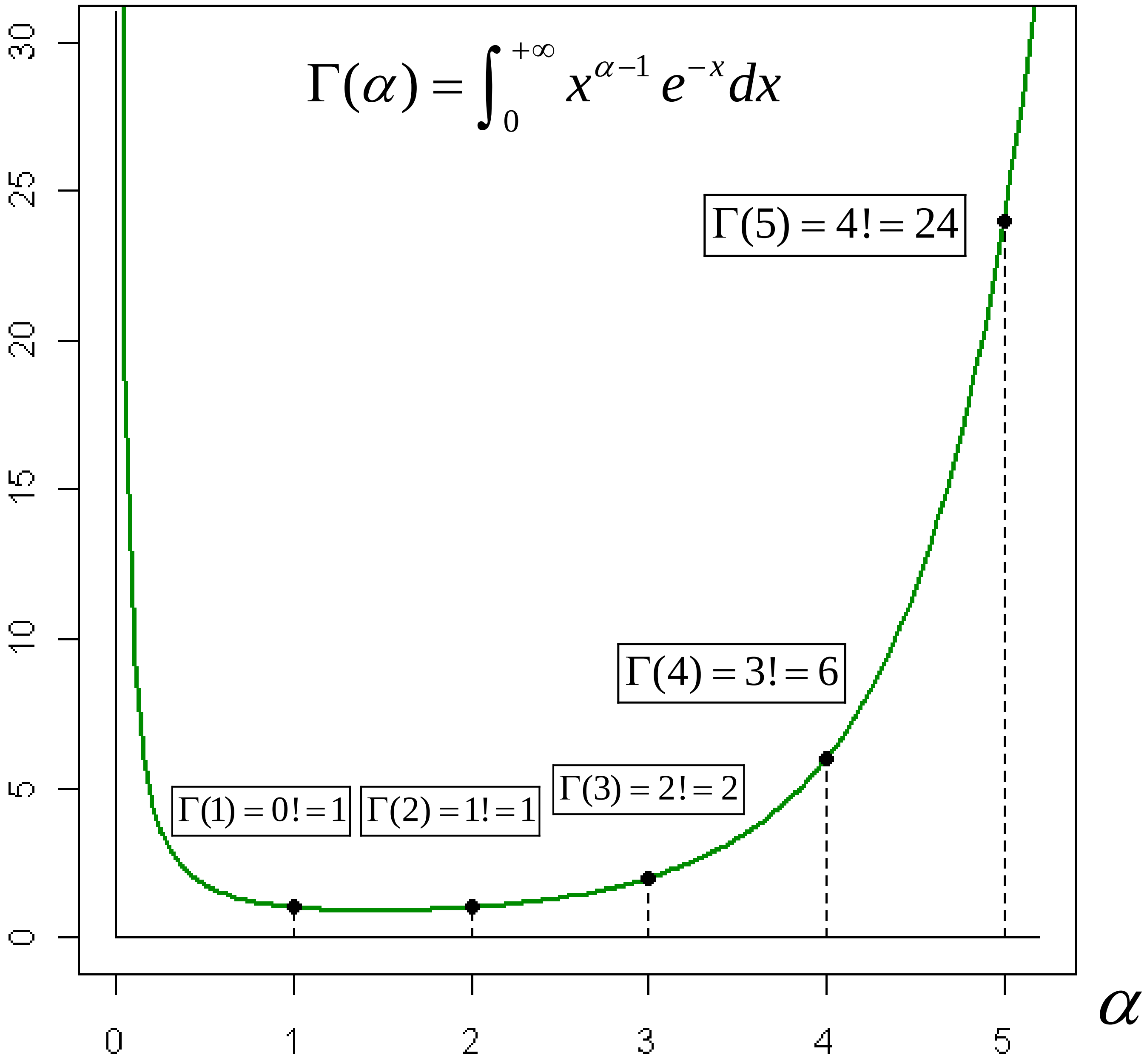
$$= 0 + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\, \Gamma(\alpha) \checkmark$$

Sea $\alpha = n = 1, 2, 3,$ …

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

# La función Gamma



# Distribución Gamma general

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

***Función Gamma***

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

$\beta$ = **"parámetro de escala"**

pdf parámetros $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \alpha\,\beta$$

$$\sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

Tenga en cuenta que si $\alpha$ = 1, a continuación, pdf

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\, e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0$$

**Distribución exponencial**

$$\text{Gamma}(1, \beta) = \text{Exp}(\beta)$$

Tenga en cuenta que si $\beta$ = 1, entonces pdf

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\Gamma(\alpha) = 1 \;\checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \text{for} \quad x \geq 0$$

**Distribución Gamma estándar**

$$\text{Gamma}(\alpha, 1)$$

*WLOG…*

**Distribución Gamma general**

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

***Gamma Function***

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

pdf

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \text{for} \quad x \ge 0$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \text{for} \quad x \ge 0}$$

**Distribución gamma estándar**

*WLOG…*

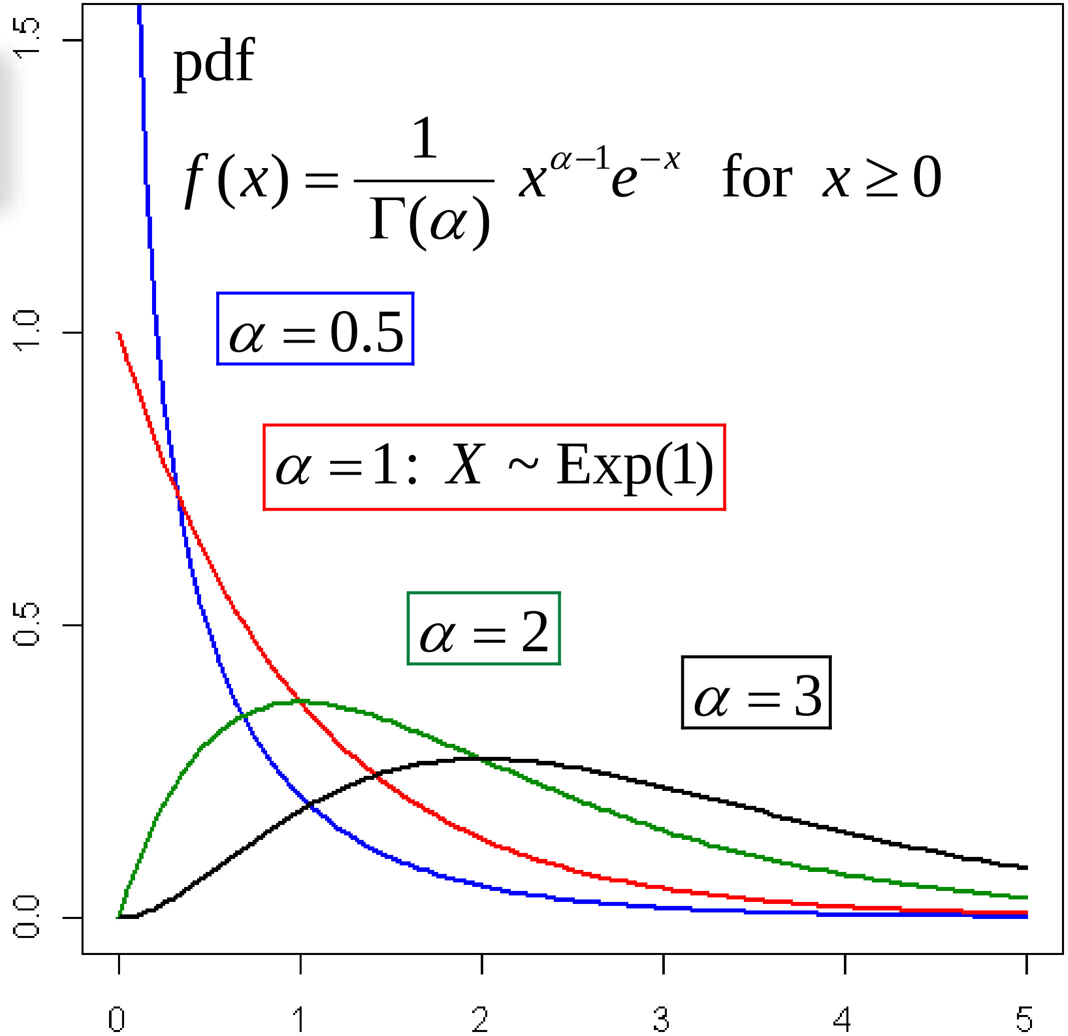
# Distribución gamma estándar

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

***Función Gamma***

$X \sim \text{Gamma}(\alpha,1)$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**



# Distribución Gamma estándar

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Función Gamma**

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

pdf

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \text{for} \quad x \geq 0$$

cdf $F(x) = P(X \leq x)$

# Distribución Gamma estándar

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Función Gamma**

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

pdf

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \text{for} \quad x \geq 0$$

cdf

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

**"Función gamma incompleta"**

(No hay expresión de forma cerrada general, pero todavía continua y monotónica de 0 a 1.)

Volviendo a...

# Distribución Gamma general

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Función Gamma**

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

$\beta$ = **"parámetro de escala"**

pdf  parámetros $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \alpha\,\beta$$
$$\sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

Tenga en cuenta que si $\alpha = 1$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0$$

**Distribución Exponencial**

$$\mu = \beta$$
$$\sigma^2 = \beta^2$$

**"Poisson rate"** $\alpha$ = $1/\beta = \lambda$

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\text{Gamma}(1, \beta) = \text{Exp}(\beta)$$

"independiente, distribuido de forma idéntica" (i.i.d.)

***Teorema:*** Suponga $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ son ***independientes***, $\sim \text{Exp}(\beta)$.

Entonces su suma $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \beta)$.

por ejemplo, el tiempo de fallo en los componentes de la máquina

# Distribución Gamma general

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Función Gamma**

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

$\beta$ = **"parámetro de escala"**

pdf parámetros $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \alpha \beta$$
$$\sigma^2 = \alpha \beta^2$$

$$8 = \alpha \beta$$
$$4^2 = \alpha \beta^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 4 \\ \beta &= 2 \end{aligned}}$$

***Ejemplo:*** Supongamos que X= tiempo entre fallas, se sabe que está modelado por una distribución Gamma, con la media de 8 años, y la desviación estándar de 4 años. Calcule la probabilidad de fallo antes de 5 años.

$$f(x) = \frac{1}{2^4 \Gamma(4)} x^{4-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{(16)\,3!} x^3 e^{-\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1}{96} x^3 e^{-\frac{x}{2}}}, \quad x \geq 0$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{96} t^3 e^{-\frac{t}{2}} dt = \ldots$$

# Distribución Gamma general

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Función Gamma**

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$\alpha$ = **"parámetro de forma"**

$\beta$ = **"parámetro de escala"**

pdf parameters $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \alpha\,\beta$$

$$\sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

$$5.6 = \alpha\,\beta$$

$$3^2 = \alpha\,\beta^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 3.5 \\ \beta &= 1.6 \end{aligned}}$$

***Ejemplo:*** Supongamos que x - tiempo entre fallas se sabe que está modelado por una distribución Gamma, con la media de 5.6 años, y la desviación estándar de 3 años. Calcular la probabilidad de fallo antes de 5 years.

$$f(x) = \frac{1}{(1.6)^{3.5}\,\Gamma(3.5)} x^{3.5-1} e^{-\frac{x}{1.6}}$$

Recuerde... $\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)}$ para cualquier $\alpha > 0$.

$$F(5) = P(X \leq 5) = \ldots$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}$$

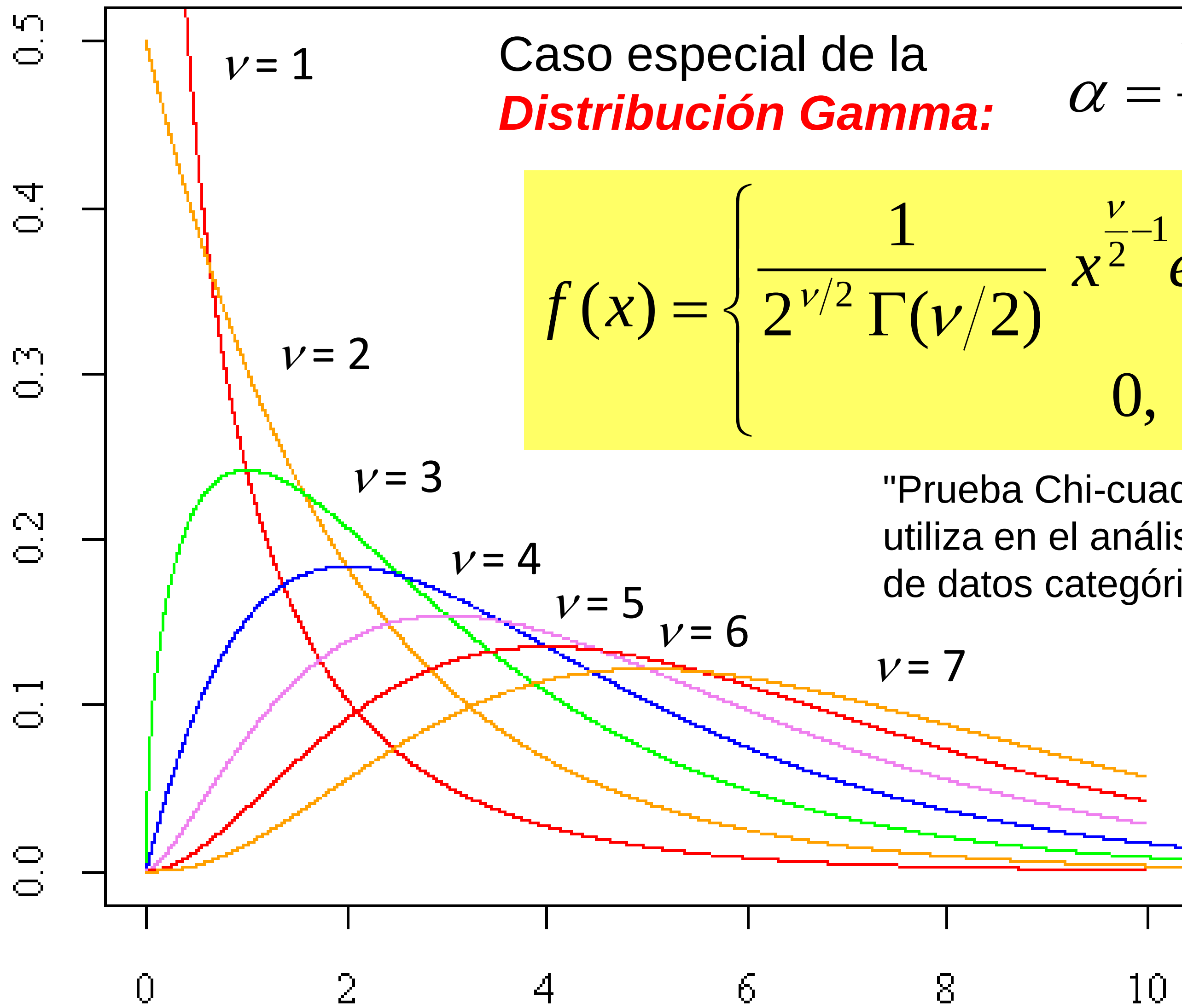
## *Distribución Chi-Cuadrada*

Con $\nu = n - 1$ **grados de libertad** df = 1, 2, 3,…

Caso especial de la ***Distribución Gamma:*** $\alpha = \frac{\nu}{2},\ \beta = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

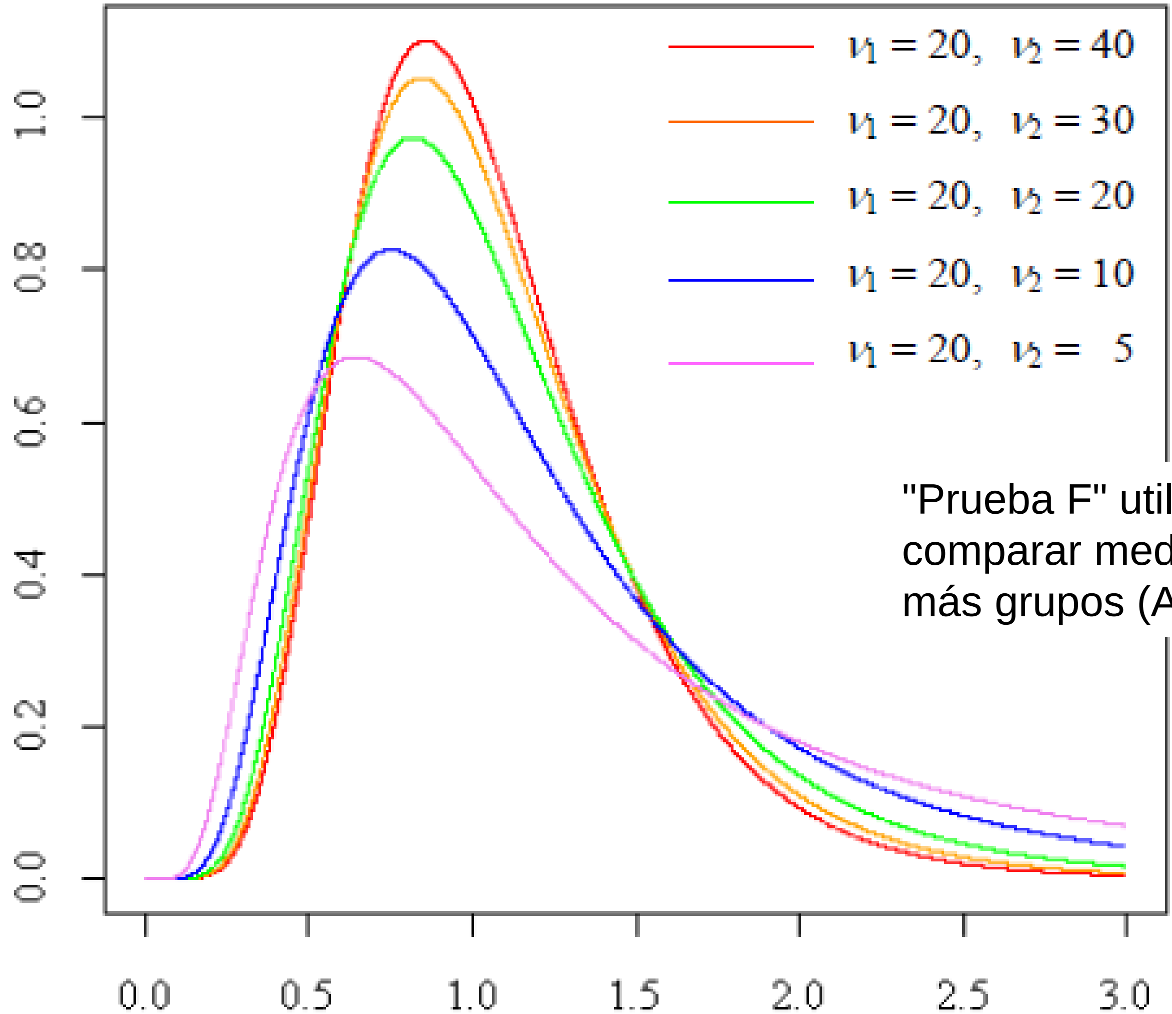
"Prueba Chi-cuadrada" se utiliza en el análisis estadístico de datos categóricos.



## ***Distribución F***

Con **grados de libertad** $\nu_1$ y $\nu_2$ .

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\nu_1/2, \nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} x^{\nu_1/2-1} \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} x\right)^{-\nu_1/2-\nu_2/2}$$



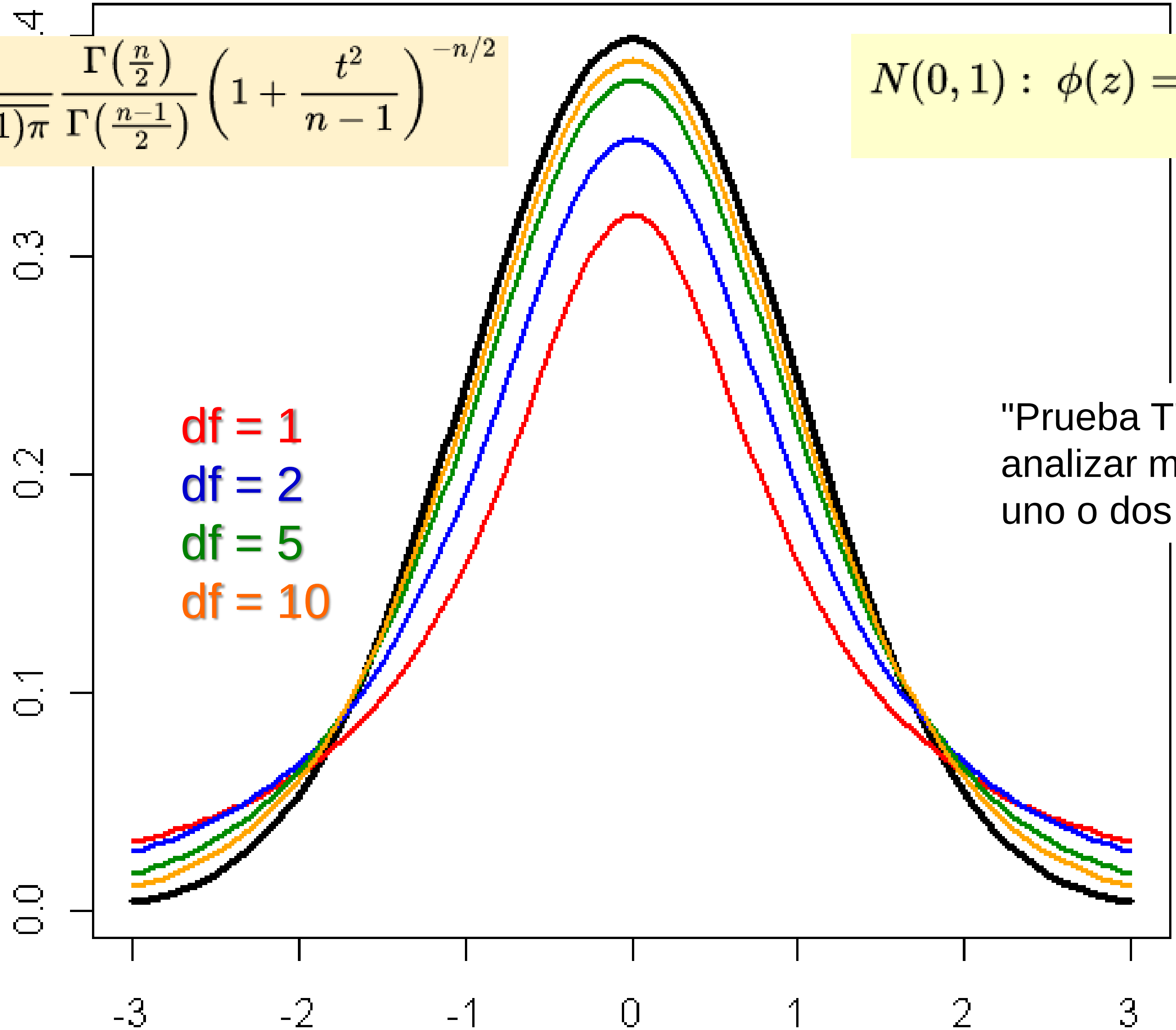

"Prueba F" utilizada al comparar medias de dos o más grupos (ANOVA).

# ***Distribución T***

con (n – 1) **grados de libertad** df 1, 2, 3,

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

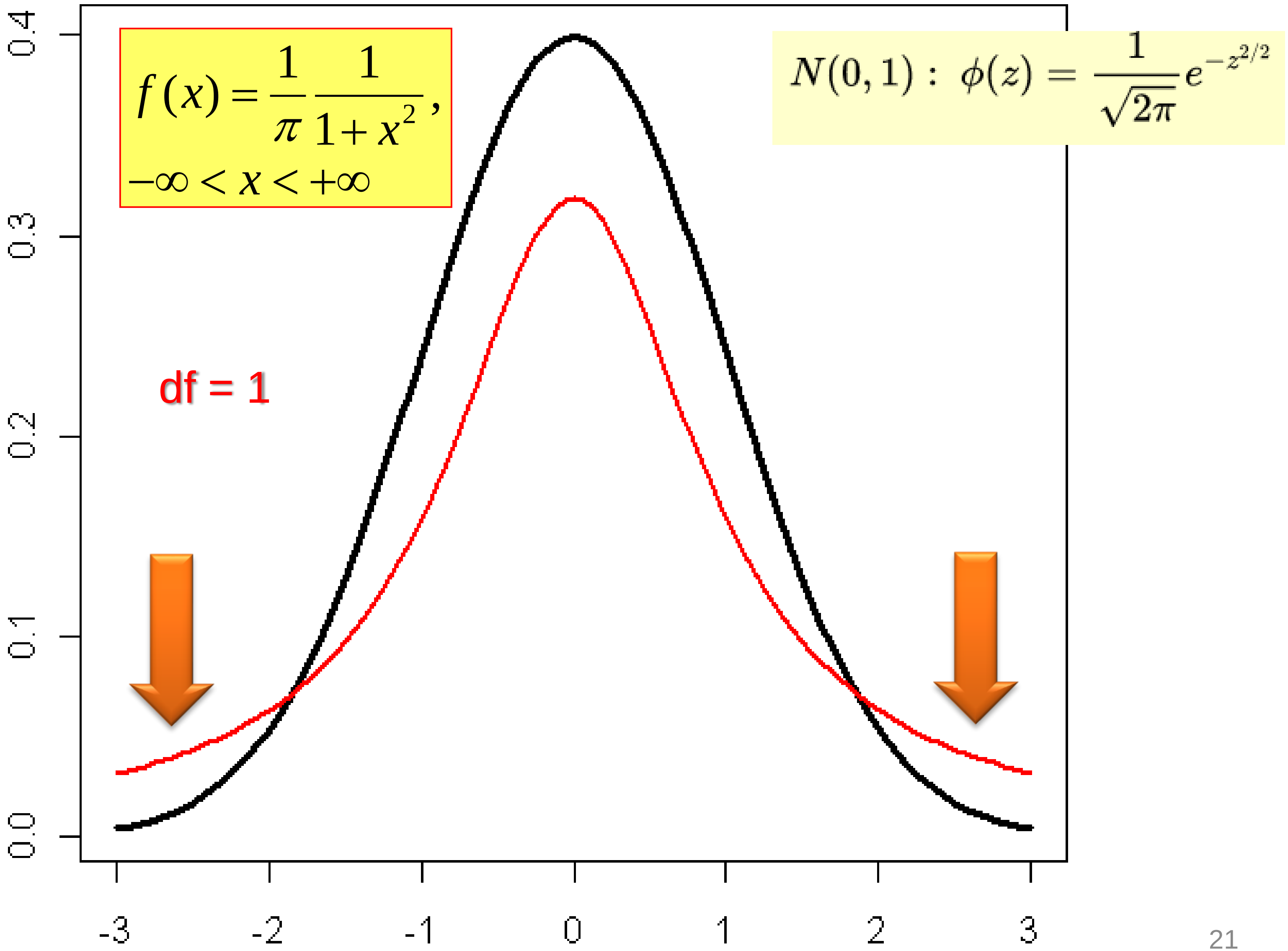
$$N(0,1): \ \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$




"Prueba T" utilizada al analizar medias de uno o dos grupos.

"Distribución Cauchy"

**Distribución T**
con 1 grado de libertad



# Distribuciones clásicas de probabilidad continua

- Distribución normal
- Log-Normal ~ *X* no se distribuye normalmente (por ejemplo, sesgada), Pero *Y* = “Logaritmo de *X*” se distribuye normalmente
- Distribución t ~ Similar al distr normal, más flexible
- *Distribución F* ~ Se utiliza al comparar múltiples medias de grupo
- Distribución chi-cuadrada ~ Utilizado ampliamente en el análisis de datos categóricos
- Otros para aplicaciones especializadas ~ Gamma, Beta, Weibull…