

Tema: Intervalo de confianza y propiedades de los estimadores

1. En un estudio de mercado sobre la venta de una bebida gaseosa durante un mes en una cadena de tiendas, se tomó una muestra de 36 tiendas y se encontró que la venta promedio fue de \$1000 con desviación estándar de \$120.
 - (a) Construir e interpretar el intervalo de confianza del 92% para la venta promedio en toda la cadena de tiendas.
 - (b) De qué tamaño debe ser la muestra para estimar la venta promedio con un intervalo de confianza del 95% que tenga una longitud de 60.
2. Una muestra aleatoria de tamaño 25 se tomó de una población normal con $s^2 = 6$. Un intervalo de confianza para la media se dio como (5.37, 7.37). ¿Cuál es el coeficiente de confianza asociado con este intervalo?
3. ¿Perdemos nuestra capacidad de memoria cuando envejecemos? En un estudio del efecto de la glucosa en la memoria de hombres y mujeres ancianos, C. A. Manning y colegas hicieron una prueba a 16 voluntarios (5 hombres y 11 mujeres) acerca de su memoria de largo plazo, registrando el número de palabras recordadas de una lista leída a cada persona. A cada una de éstas se le recordaron las palabras olvidadas y se le pidió recordar tantas palabras como fuera posible de la lista original. La media y desviación estándar de las calificaciones de memoria a largo plazo fueron $\bar{y} = 79.47$ y $s = 25.25$. Proporcione un intervalo de confianza de 99% para las calificaciones de recordar palabras a largo plazo para hombres y mujeres ancianos. Interprete este intervalo.
4. Los focos industriales deberían tener una vida media útil aceptable para usuarios potenciales y una variación relativamente pequeña en su duración. Si algunos focos fallan demasiado pronto en su vida útil, los usuarios se molestan y es probable que los cambien por focos producidos por un fabricante diferente. Variaciones grandes por arriba de la media reducen las ventas de reemplazo; en general, la variación en la vida útil de los focos altera los programas de cambio establecidos por los usuarios. Una muestra aleatoria de 20 focos producidos por un fabricante particular produjo los siguientes valores de vida útil (en horas):

2100	2302	1951	2067	2415	1883	2101	2146	2278	2019
1924	2183	2077	2392	2286	2501	1946	2161	2253	1827

Establezca un límite de confianza superior de 99% para la *desviación estándar* de las duraciones de vida útil para los focos producidos por este fabricante. ¿La verdadera desviación estándar poblacional es menor que 150 horas? ¿Por qué sí o por qué no?

5. Sea Y_1, Y_2, \dots, Y_n una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. Considere los estimadores

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{Y} \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_2 = Y_{(n)}.$$

- (a) Calcule el sesgo y el error cuadrático medio de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.
- (b) Proponga un estimador insesgado de $\hat{\theta}$ basado en $\hat{\theta}_2$, compare la eficiencia de este estimador respecto a $\hat{\theta}_1$ e interprete el resultado obtenido.
- (c) ¿El estimador propuesto es consistente?
6. Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n que denotan una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2 . Considere los siguientes tres estimadores para μ

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \quad \hat{\mu} = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{Y_2 + \dots + Y_{n-1}}{2(n-2)} + \frac{1}{4}Y_{(n)}, \quad \hat{\mu}_3 = \bar{Y}.$$

- (a) Demuestre que cada uno de los tres estimadores es insesgado..
- (b) Encuentre la eficiencia de $\hat{\mu}_3$ con respecto a $\hat{\mu}_2$ y $\hat{\mu}_1$, respectivamente.
7. Suponga que X_1, X_2, \dots, X_n y Y_1, Y_2, \dots, Y_n son muestras aleatorias independientes provenientes de poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 , respectivamente. Demuestre que $\bar{X} - \bar{Y}$ es un estimador consistente de $\mu_1 - \mu_2$.
8. Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n variables aleatorias independientes, cada una con función de densidad de probabilidad

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Demuestre que \bar{Y} converge en probabilidad a alguna constante y determine la constante.