Propiedades de los estimadores

Estadística

Santiago Alférez

Febrero de 2020

Contenidos

Eficiencia Relativa

Definición: eficiencia

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de un parámetro θ, con varianzas $V(\hat{\theta}_1)$ y $V(\hat{\theta}_2)$ respectivamente, entonces la eficiencia de $\hat{\theta}_1$ con respecto a $\hat{\theta}_2$, se define como

$$\text{eff}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

Eficiencia Relativa

Ejemplo

Sea θ_1 la mediana muestral y sea θ_2 la media muestral. Calcule la eficiencia de la mediana muestral con respecto a la media muestral.

Solución

Se puede demostrar que la varianza de la mediana muestral es $V(\hat{\theta}_1) = (1.25)^2(\sigma^2/n)$. Entonces, la eficiencia es:

$$\text{eff}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)} = \frac{\sigma^2/n}{(1.25)^2\sigma^2/n} = \frac{1}{(1.25)^2} = .64 < 1$$

Por lo tanto, se prefiere utilizar la media muestral como estimador de la media poblacional.

Eficiencia Relativa

Ejercicio

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ denotan una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución de Poisson con media λ. Considere $\hat{\lambda}_1 = (Y_1 + Y_2)/2$ y $\hat{\lambda}_2 = \bar{Y}$. Deduzca la eficiencia de $\hat{\lambda}_1$ con respecto a $\hat{\lambda}_2$.

Solución

- La distribución de Poisson tiene media y varianza λ.
- Ambos estimadores son insesgados.
- $V(\hat{\lambda_1}) = /2$ y $V(\hat{\lambda_2}) = \lambda/n$.
- Así, la eficiencia $\text{eff}(\lambda_1, \lambda_2) = 2/n$.

Consistencia

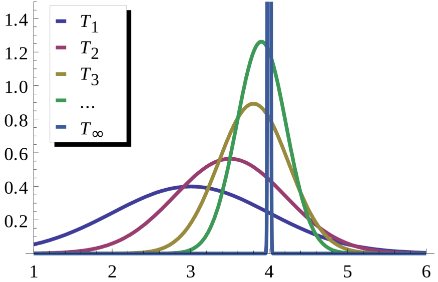
Definición

El estimador $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ si, para cualquier número positivo ε

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

o bien, de forma equivalente,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0$$



Consistencia

Teorema

Un estimador insesgado $\hat{\theta}_n$ para θ es un estimador consistente de θ si

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$

Ejemplo

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ que representan una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Demuestre que $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ es un estimador consistente de μ.

Solución $E(\bar{Y}_n) = \mu$ y $V(\bar{Y}_n) = \sigma^2/n$. Dado que $\bar{Y}_n$ es insesgado y $V(\bar{Y}_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, $\bar{Y}_n$ es un estimador consistente de μ, o $\bar{Y}_n$ converge en probabilidad en μ.

Consistencia

Teorema

Suponga que $\hat{\theta}_n$ converge en probabilidad en θ y que $\hat{\theta}'_n$ converge en probabilidad en θ'.

1. $\hat{\theta}_n + \hat{\theta}'_n$ converge en probabilidad en $\theta + \theta'$
2. $\hat{\theta}_n \times \hat{\theta}'_n$ converge en probabilidad en $\theta \times \theta'$
3. Si $\theta' \neq 0, \hat{\theta}_n / \hat{\theta}'_n$ converge en probabilidad en θ / θ'.
4. Si $g(\cdot)$ es una función de valor real que es continua en θ, entonces $g\left(\hat{\theta}_n\right)$ converge en probabilidad en $g(\theta)$.

Consistencia

Teorema

- Suponga que U_n tiene una función de distribución que converge en una función de distribución normal estándar cuando $n \to \infty$.
- Si W_n converge en probabilidad en 1, entonces la función de distribución de U_n/W_n converge en una función de distribución normal estándar.