Laboratorio 2 Algebra Lineal

Rolando Rivas 594276

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&6\\4&1&1\\-2&9&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&5&-9\\3&-4&1\\-1&0&-6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7&4&2\\-5&-2&3\\1&5&7\end{pmatrix}$

Encuentre una matriz E tal que $3C-2B+8A-3E$ dé una matriz 3×3 con todos elementos iguales a 1.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}7&4&2\\-5&-2&3\\1&5&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&5&-9\\3&-4&1\\-1&0&-6\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}1&0&6\\4&1&1\\-2&9&2\end{pmatrix}-3E$$

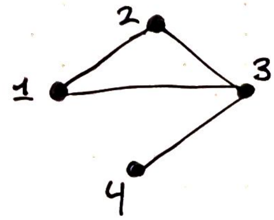
$$3E=\begin{pmatrix}21&12&6\\-15&-6&9\\3&15&21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-10&18\\-6&8&-2\\2&0&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&0&48\\32&8&8\\-16&72&16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$3E=\begin{pmatrix}(21+4+8-1)&(12-10+0-1)&(6+18+48-1)\\(-15-6+32-1)&(-6+8+8-1)&(9-2+8-1)\\(3+2-16-1)&(15+0+72-1)&(21+12+16-1)\end{pmatrix}$$

$$E=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}32&1&71\\10&9&14\\-12&86&48\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}10\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&23\frac{2}{3}\\3\frac{1}{3}&3&4\frac{2}{3}\\-4&28\frac{2}{3}&16\end{pmatrix}$$

2) Construya una matriz 4x4 que contenga la propiedad de que $a_{ij}=0$ si no hay conexión entre 'i' y 'j' y $a_{ij}=1$ si sí están conectados.



$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Una compañia paga a sus ejecutivos su salario y varias acciones de la empresa. El presidente recibió $80,000 y 50 acciones; a los 3 vicepresidentes $45,000 y 20 acciones; el tesorero recibió $40,000 y 10 acciones. Exprese los pagos en un vector 2×3. Exprese el número de ejecutivos en un vector columna. Multiplique las matrices.

$$\begin{pmatrix} 80{,}000 & 45{,}000 & 40{,}000 \\ 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (80{,}000)(1)+(45{,}000)(3)+(40{,}000)(1) \\ (50)(1)+(20)(3)+(10)(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 255{,}000 \\ 120 \end{pmatrix}$$

5) Determine si la matriz es invertible. De ser así calcule la inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sacar determinante $\rightarrow 1a_{11} - 2a_{12} + 3a_{13}$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1[1\cdot2 - 1\cdot2] - 2[1\cdot2 - 0\cdot2] + 3[1\cdot1 - 0\cdot1]$$

$$= 1[2-2] - 2[2-0] + 3[1-0] = 1\cdot0 - 2\cdot2 + 3\cdot1 = \underline{-1}$$

$$-1 \neq 0$$

Tiene inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2,\; R_2+R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_3+R_1,\; -R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$I \qquad A^{-1}$

6) Una hechicera tiene 10 onzas de tréboles y 140 onzas de raiz. Una poción de amor requiere 1/13 oz. de tréboles y 2 2/13 oz. de mandrágora. Para aliviar un resfriado sería 5 5/13 y 10 10/13 respectivamente.

Calcule la matriz inversa
$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{13} & 5\frac{5}{13} & 10 \\ 2\frac{2}{13} & 10\frac{10}{13} & 140 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1/13 & 70/13 & 1 & 0 \\ 28/13 & 140/13 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{13R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 70 & 13 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{13}{140} \end{array}\right) \quad \frac{13}{140}R_2$$

$$\xrightarrow{-70R_2+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13 & 6\,1/2 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{13}{140} \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13 & 6\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & -\frac{143}{420} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 6\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{5} & -\frac{143}{420} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} (13)(10)+(6\,1/2)(10) = \underline{195} = x \\ \left(-\frac{13}{5}\right)(140)+\left(-\frac{143}{420}\right)(140) = \underline{-\frac{1235}{5}} = y \end{array}$$

7) Encuentre números a y β tales que $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \beta & -6 & a \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$a = 2 \quad \beta = -5$

8) Calcule $(A^T)^{-1}$ y $(A^{-1})^T$ y demuestre que son iguales dada

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{9}R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$-12R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -\frac{12}{9} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{2}R_2 \quad 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{3} & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\frac{4}{9}R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{3} & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{9}R_1$

$\frac{1}{2}R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$4R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 & 4/9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{3}{16}R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 0 & 3/16 \end{array}\right)$$

$-\frac{4}{3}R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) Considerando que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$ calcule

Dado que:

$$\begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(B)$$

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-3a_{11} & a_{22}-3a_{12} & a_{23}-3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{6}$

b) $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot -1 \cdot 6 = \underline{-96}$

10) Área de $\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

donde el signo se toma como conveniencia para que resulte una cantidad positiva. Encuentre Δ con vértices $(3,4)$, $(-2,5)$ y $(-2,-3)$

$$= \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \Big[(-2)(-3) - (-2)(5)\Big] - 3\Big[(1)(-3) - (1)(5)\Big] + 4\Big[(1)(-2) - (1)(-2)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 + 24 + 0\right) = \underline{20}$$

Doy mi palabra que he realizado esta actividad con integridad académica.

-Rolando Rivas