Compte rendu de TP Mini-stage Scilab/latex

Alexandre Petit Térence Marchal Olivier brun

Pour le 22 Novembre 2017

1 Sensibilisation à l'arithmétique machine

1.1 Exercice 1

1.1.1 Programme de test

```
--> x = 1e30
--> y = 1e-8
--> z = ((y + x) - x) / y
--> w = (y + (x - x)) / y
```

1.1.2 Analyse des résultats

On rappelle que dans scilab, les nombres réels sont représentés par un nombre flottant dont la mantisse est codée sur 52 bits et l'exposant sur 11 bits. On remarque que $2^{52} \approx 4 \times 10^{15}$, en d'autres termes, cette représentation permet d'atteindre approximativement 16 chiffres représentatifs (décimaux).

Dans le calcul de z, l'opération $y + x$ donne, en notation décimale

$$x + y = 1000000000000000000000000000000,00000001$$

Cette valeur présente 39 chiffres significatifs, ce qui est bien au delà des capacités de repésentation en double précision.

De fait, dans $x + y$, y se trouve absorbé (par sa faible pondération), et l'on obtient $x + y = x$ bien que y soit non nul.

Dans le calcul de w, l'opération $x - x$ produit un zéro, calculer w revient alors à diviser y par lui même, ce qui donne 1, le calcul est correct.

1.2 Exercice 2

Pour cet exercice, deux implantations des calculs sont proposées. Les résultats sont identiques par chaque méthode. La première est immédiate. La seconde, récursive, permet de suivre l'évolution des calculs pas à pas.

Posons

- $recursive\_root(x, n) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}}$ (n fois)
- $recursive\_power(x, n) = ((\ldots((y^2)^2)^2\ldots)^2)^2$ (n fois)

L'étude de limite de la fonction racine récursive donne :

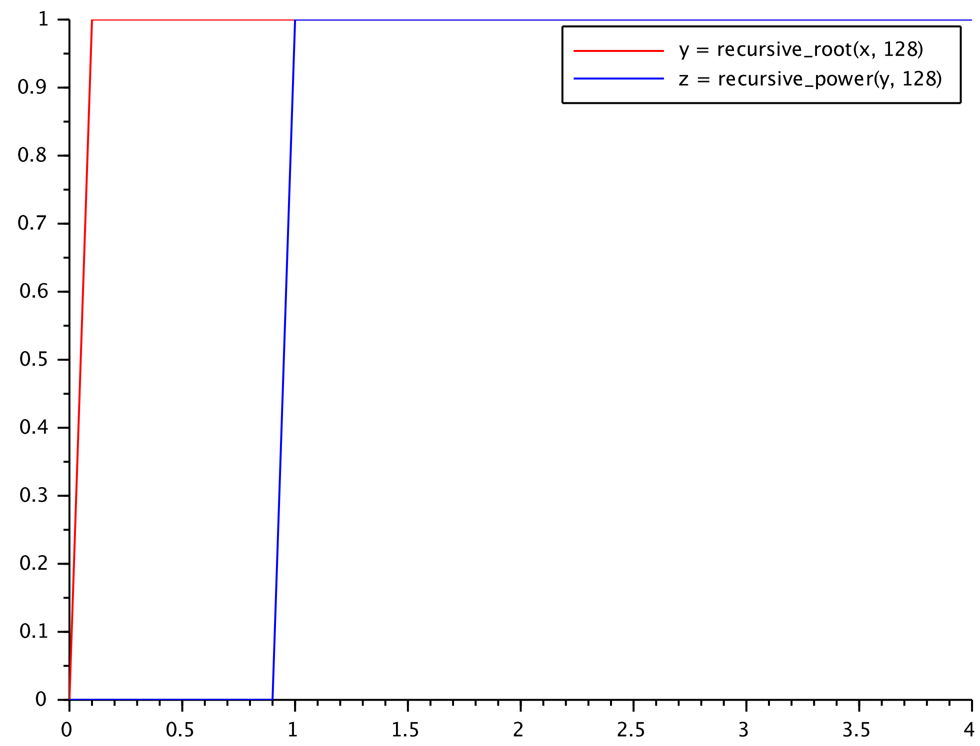
$$\lim_{n\to+\infty} recursive\_root(x, n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

L'étude de limite de la fonction puissance récursive donne :

$$\lim_{n\to+\infty} recursive\_power(x, n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ \infty & \text{si} \quad x \in> 1 \end{cases}$$

1.2.1 Représentation graphique

Tracé des courbes pour x allant de 0 à 4 avec un pas de 0.1.



1.2.2 Analyse des résultats

Afin de visualiser les étapes de calcul, lançons la commande $recursive\_root(x, n)$ avec la valeur scalaire $x = 4$ au rang $n = 128$.

```
--> recursive_root(4, 128)
    2.
    1.4142136
    1.1892071
    1.0905077
    1.0442738
    1.0218971
    1.0108893
    1.0054299
    1.0027113
    1.0013547
    1.0006771
    1.0003385
    1.0001692
    1.0000846
    1.0000423
    1.0000212
    1.0000106
    1.0000053
    1.0000026
    1.0000013
    1.0000007
    1.0000003
    1.0000002
    1.0000001
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    ...
```

On observe qu'au fil des itérations, la fonction tends vers 1 jusqu'à venir s'écraser sur cette valeur (ici lors de la 26e itération). Autrement dit, la valeur est tellement proche de 1 que la machine ne peut plus représenter : Soit y_i la valeur prise lors de la i^{ime} itération, on a :

$$1 < y_i < 1 + 10^{-16} \qquad \forall i = 26, \ldots, 128$$

// Impossible à redresser / inverser

1.3 Exercice 3

On rappelle la définition de l'intégrale étudiée dans cet exercice :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

1.3.1

On donne une formule de récurrence de I_n, pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} I_0 = e - 1 \\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n \end{cases}$$

1.3.2

Effectuons le développement en série de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{20} &= \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{k+20}}{k!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+21)} \end{aligned}$$

D'où $I_{20} \approx \sum_{k=0} N \frac{1}{k!(k+21)}$ pour N suffisamment grand.

1.4 Exercice 4

Méthode des rectangles :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{n-1} \sum k = 0n - 1f(k)$$

On applique à $f : x \mapsto x^{20}e^x$ avec SCILAB.

2 Etude du phénomène de Gibbs

2.1 Exercice 5

On étudie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période $T = 1$. En vue de calculer la série de Fourier de f, on calcul les coefficients $a_n(f)$.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t).dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t).dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-1).dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 1.dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

De par la parité de la fonction cosinus, on a :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(2\pi nt).dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Enfin,

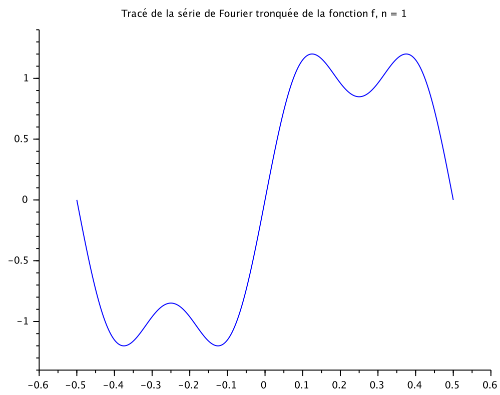
$$\begin{aligned} b_n(f) &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi nt)dt \\ &= 4\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi nt)dt \\ &= 2\left[\frac{\cos(2\pi nt)}{\pi n}\right]_{\frac{1}{2}}^{0} \\ &= 2 \times \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi n} \end{aligned}$$

La fonction f n'est pas continue en 0. Autrement, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\setminus \{0\}$, les calculs préliminaires des coeffcients nous donnent

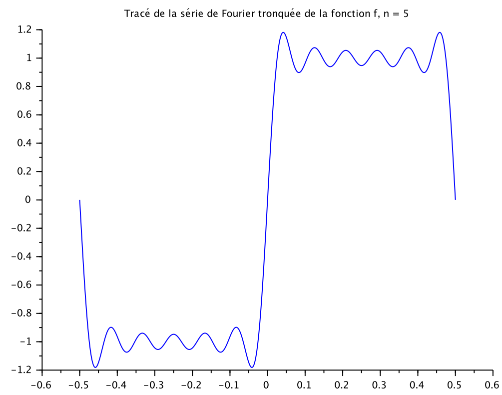
$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{def}{=} a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n(f)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi n}\sin(2\pi nx) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx(2n+1))}{2n+1} \end{aligned}$$

2.2 Exercice 6

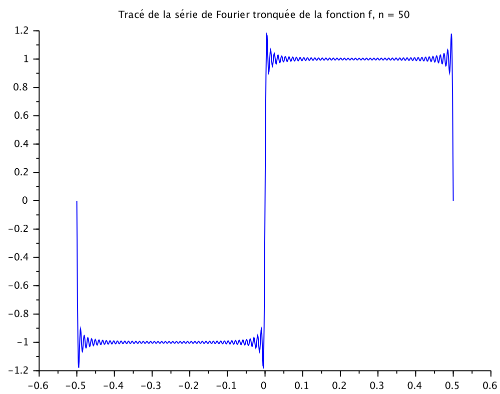
On calcul la somme partielle de la fonction f obtenue dans l'exercice précédent.



n = 1



n = 5



n = 50

n = 5000

On remarque que la transformée de fourier de f approche fortement f lorsque n est suffisament grand.

3 Théorème de Gerschgörin

3.1 Exercice 7

3.1.1 Démonstration du théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \lambda \in Sp(A)$ et $v = (v_i)^\intercal_{1 \leqslant i \leqslant N}$ un vecteur propre de A associé à λ. On a, pour tout k :

$$\lambda v_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} v_i \tag{1}$$

Soit :

$$(\lambda - a_{kk})v_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{N} a_{ik} v_i \tag{2}$$

D'où (inégalité triangulaire) :

$$|\lambda - a_{kk}||v_k| \leqslant \sum_{i=1, i\neq k}^{N} |a_{ik}||v_i| \tag{3}$$

Prenons alors k tel que $v_k = \max_i |v_i| \neq 0$ car v est un vecteur propre. Il vient alors, puisque $v_i \leqslant v_k$ pour tout i :

$$|\lambda - a_{kk}||v_k| \leqslant |v_k| \sum_{i=1, i\neq k}^{N} |a_{ik}| \tag{4}$$

D'où le résultat.

3.1.2 Visualisation des disques de Gerschgörin

Considérons la matrice suivante

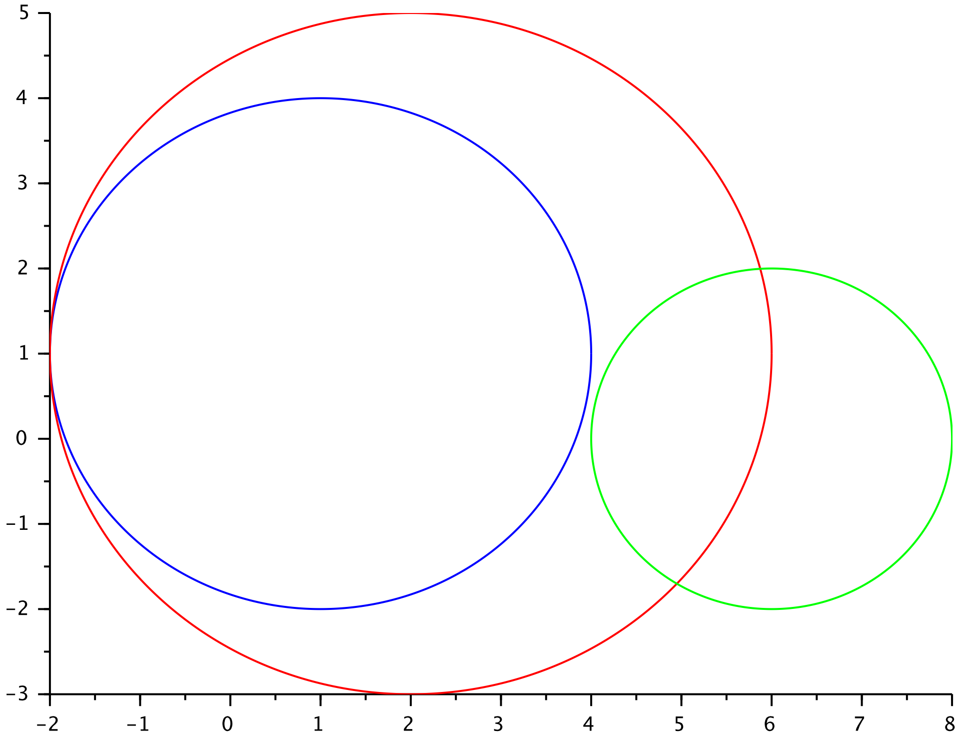
$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ 3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

et traçons les disques de Gerschgörin qui lui sont associés.

3.1.3 Vérification de l'appartenance des valeurs propres au disques

On utilise la commande $spec(A)$ pour connaitre ses valeurs propres.
On constate graphiquement qu'elles sont bien dans les disques

4. Soit A à diagonale strictement dominante
En effet, posons $E_k = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{kk}| < |a_{kk}|\}$,il est clair que $0_{\mathbb{C}} \notin \bigcup_{k=1}^{N} E_k$
On a également $D_k \subseteq E_k$ pour tout k
Par suite : $Sp(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} D_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ donc $0_{\mathbb{C}} \notin Sp(A)$
Donc A est inversible.


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8