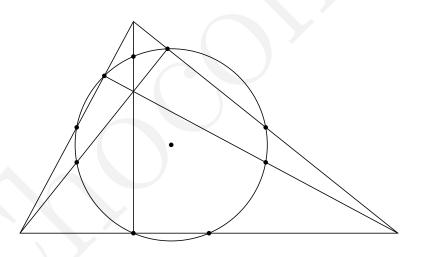
# 幾何秘笈

Chocomint



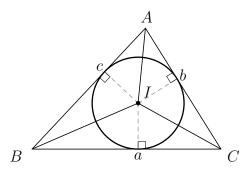
## Contents

1.1 内心 (Incenter) 1.2 外心 (Circumeenter) 1.3 重心 (Center of Gravity) 1.4 重心 (Orthocenter) 4 2 分線定理 2.1 角平分線定理 2.2 中線定理 2.3 斯園商精定理 6 3 園的性質 7 4 三角形的共線勘定理 4.1 孟氏定理 4.2 並氏定理 4.2 並氏定理 4.2 並氏定理 6.3 本角公式 6.1 正弦定理 6.3 本角公式 6.4 倍角公式 6.5 半角公式 10.6.5 半角公式 11.6.5 半角公式 11.7 莫需三分角定理 12 整倍角關係 8.1 二倍角關係 8.1 二倍角關係 8.1 二倍角關係 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 15 百分格定理 16 羅斯定理 17 基本定理 17 基本定理 18 基本分角定理 19 万本定理 10 羅斯定理 11 業格定理 11 業格定理 11 業格定理 11 業格定理 11 業格定理 11 業格定理 11 業務定理 11 3 三角形整度地線長關係 12 3 三角形整度地線長關係 13 1 内外心與邊角距離 13 三角形整度地線長關係 14 蝴蝶定理 15 帕斯卡定理 21 15 帕斯卡定理 21 15 帕斯卡定理	1	三角形的三心與垂心	3
1.2 外心 (Circumcenter) 1.3 重心 (Center of Gravity) 1.4 重心 (Orthocenter) 2 分線定理 2.1 角平分線定理 2.2 中線定理 2.3 斯國爾特定理 5 2.3 斯國爾特定理 6 3 園的性質 7 4 三角形的共線點定理 4.1 孟氏定理 4.2 帥氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 5 海龍公式 9 6 三角函数 6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 称角公式 6.4 倍角公式 6.5 半角公式 11 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 8.1 二倍角關係 8.1 二倍角關係 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 15 16 8 英史理 17 17 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18		1.1 内心(Incenter)	3
1.4 垂心 (Orthocenter) 4 2 分線定理 5 2.1 角平分線定理 5 2.2 中線定理 5 2.3 期間雨特定理 6 3 間的性質 7 4 三角形的共線點定理 8 4.1 孟氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 5 海龍公式 9 6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 倍角公式 11 6.5 平角公式 11 7 英雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.5 三倍角關係 14 8.6 三角形造角關係 14 8 音)			3
2 分線定理       5         2.1 角平分線定理       5         2.2 中線定理       5         2.3 期國衛特定理       6         3 園的性質       7         4 三角形的共線點定理       8         4.1 孟氏定理       8         4.2 帥氏定理       8         5 海龍公式       9         6.1 正確定理       10         6.2 餘成定理       10         6.3 和角公式       10         6.4 倍角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         8 資汐格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 首卡兒四園定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 内外心與邊邊線長關係       20         13.2 三角形路邊鎮線長關係       20         14 蝴蝶定理       21         14 蝴蝶定理       21		1.3 重心 (Center of Gravity)	4
2.1 角平分線定理 5 2.2 中線定理 5 2.3 斯圖爾特定理 6 3 圆的性質 7 4 三角形的共線點定理 8 4.1 孟氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 5 海龍公式 9 6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 倍角公式 10 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.3 二角肠悬径 14 8.5 二角形邊角關係 14 8.6 二角形邊角關係 14 8.7 三角形邊角關係 14 8.8 三角形邊角關係 14 9 笛沙格定理 15		1.4 垂心 (Orthocenter)	4
2.1 角平分線定理 5 2.2 中線定理 5 2.3 斯圖爾特定理 6 3 圆的性質 7 4 三角形的共線點定理 8 4.1 孟氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 5 海龍公式 9 6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 倍角公式 10 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.3 二角肠悬径 14 8.5 二角形邊角關係 14 8.6 二角形邊角關係 14 8.7 三角形邊角關係 14 8.8 三角形邊角關係 14 9 笛沙格定理 15	0	八伯之四	_
2.2 中線定理 2.3 斯圖爾特定理 6 3 圖的性質 7 4 三角形的共線點定理 4.1 孟氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 6.1 正弦定理 6.1 正弦定理 6.3 和角公式 6.4 信角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 8 整倍角關係 8.1 二倍角關係 8.1 二倍角關係 8.2 三倍角關係 9 笛沙格定理 10 羅斯定理 11 蒙格定理 11 蒙格定理 12 笛卡兒四圓定理 12 笛卡兒四圓定理 13 三角形邊角關係 13.1 内外心與邊角距離關係 13.1 二角外心與邊角距離關係 13.1 二角形路邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21	2		
2.3 斯圖爾特定理 7  4 三角形的共線點定理 8 4.1 孟氏定理 8 4.2 帥氏定理 8 5 海龍公式 9 6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.2 除弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 倍角公式 10 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12  整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.3 二角形體內關係 14 8.4 二角形體內關係 14 8.5 三角形體內關係 14 8.6 三角函數 15 8 查抄格定理 15 8 查抄格定理 16 8 查抄格定理 16 8 查抄格定理 17 8 查抄格定理 16 8 查抄格定理 17			
3 園的性質       7         4 三角形的共線點定理       8         4.2 帥氏定理       8         5 海龍公式       9         6 三角函数       10         6.1 正弦定理       10         6.2 餘弦定理       10         6.3 和角公式       10         6.4 倍角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 箇沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 箇卡兒四園定理       18         13.1 內外心與邊角距離隔       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
4 三角形的共線點定理			U
4.1 孟氏定理       8         4.2 帥氏定理       8         5 海龍公式       9         6 三角函數       10         6.1 正弦定理       10         6.3 和角公式       10         6.4 信角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四園定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 内外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	3	圓的性質	7
4.1 孟氏定理       8         4.2 帥氏定理       8         5 海龍公式       9         6 三角函數       10         6.1 正弦定理       10         6.3 和角公式       10         6.4 信角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四園定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 内外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
4.2 帥氏定理       8         5 海龍公式       9         6 三角函数       10         6.1 正弦定理       10         6.2 餘弦定理       10         6.3 和角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四園定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	4		
5 海龍公式       9         6 三角函数       10         6.1 正弦定理       10         6.2 餘弦定理       10         6.3 和角公式       10         6.4 倍角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四園定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 6.5 半角公式 11 6.5 半角公式 11 7 英雷三分角定理 12 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 第定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 內外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21 4 蝴蝶定理 21		4.2 即戊足埋	8
6 三角函数 10 6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 6.5 半角公式 11 6.5 半角公式 11 7 英雷三分角定理 12 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 第定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 內外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21 4 蝴蝶定理 21	5	海龍公式	9
6.1 正弦定理 10 6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 9 笛沙格定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 内外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21			Ü
6.2 餘弦定理 10 6.3 和角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 9 笛沙格定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 内外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21	6		
6.3 和角公式 10 6.4 信角公式 11 6.5 半角公式 11 7 莫雷三分角定理 12 8 整倍角關係 14 8.1 二倍角關係 14 8.2 三倍角關係 14 9 笛沙格定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 内外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21			
6.4 倍角公式       11         6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 内外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
6.5 半角公式       11         7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
7 莫雷三分角定理       12         8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21			
8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21		6.5 半角公式	11
8 整倍角關係       14         8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	7	莫雷三分角定理	12
8.1 二倍角關係       14         8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	•		
8.2 三倍角關係       14         9 笛沙格定理       15         10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	8		14
9 笛沙格定理 15 10 羅斯定理 16 11 蒙格定理 17 12 笛卡兒四圓定理 18 13 三角形邊角關係 20 13.1 內外心與邊角距離關係 20 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21			14
10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21		8.2 三倍角關係	14
10 羅斯定理       16         11 蒙格定理       17         12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	0	<b>公小校</b>	15
11 蒙格定理 12 笛卡兒四圓定理 13 三角形邊角關係 13.1 內外心與邊角距離關係 13.2 三角形點邊連線長關係 20 14 蝴蝶定理 21	9	田乃俗足在	19
12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	10	羅斯定理	16
12 笛卡兒四圓定理       18         13 三角形邊角關係       20         13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21		<b>本 lb                                   </b>	
13 三角形邊角關係       20         13.1 内外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	11	<b>紧格定理</b>	17
13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	12	笛卡兒四圓定理	18
13.1 內外心與邊角距離關係       20         13.2 三角形點邊連線長關係       20         14 蝴蝶定理       21	13	三角形邊角關係	20
13.2 三角形點邊連線長關係			
14 蝴蝶定理 21		13.2 三角形點邊連線長關係	
15 帕斯卡定理 22	14	蝴蝶定理	21
	<b>15</b>	帕斯卡定理	22

	CONTENTS	
16 歐拉定理		23
17 歐拉線 與 九點圓		24
18 卡諾定理		25
19 費馬點		26
20 垂足三角形		27
21 西姆松定理		28
22 拿破崙定理		29
23 旁切圓 與 中界線		30
24 奈格爾點 (Nagel Point)		31
25 布洛卡兒點 (Brocard Point)		33

## 1 三角形的三心與垂心

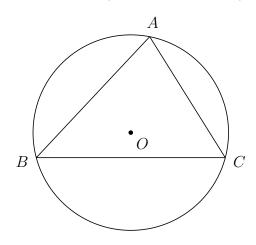
## 1.1 内心 (Incenter)



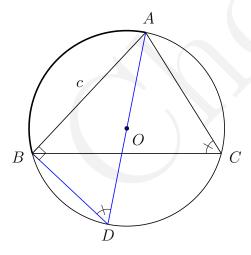
- 1. 内接圓圓心
- 2. 到三邊等距
- 3. 三頂點角平分線

$$4. \ r = \frac{ 面積}{ 半周長} = \frac{\triangle}{s}$$

## 1.2 外心 (Circumcenter)



- 1. 外接圓圓心
- 2. 到三頂點等距
- 3. 三垂直平分線交點
- 4. 直角三角形的外心在斜邊中點
- 5.  $R = \frac{abc}{4\triangle}$



Proof.

做
$$\overrightarrow{AO}$$
,交圓 $O$ 於 $D$ 

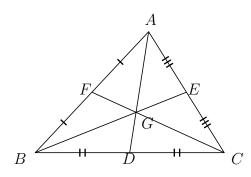
$$\angle ACB = \angle ADB$$
 (對同弧)
$$\overline{AD} = 2R$$

$$\therefore \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2\triangle}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2R} = \frac{2\triangle}{ab} \Rightarrow R = \frac{abc}{4\triangle}$$

#### 重心 (Center of Gravity) 1.3

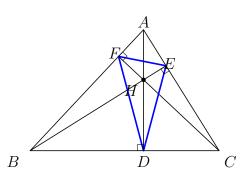


- 1. 中線交點
- 2. 六塊面積相等

$$3. \ \frac{\overline{G}\overline{D}}{\overline{A}\overline{G}} = \frac{\overline{G}\overline{E}}{\overline{B}\overline{G}} = \frac{\overline{G}\overline{F}}{\overline{C}\overline{G}} = \frac{1}{2}$$

4. 
$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

#### 垂心 (Orthocenter) 1.4

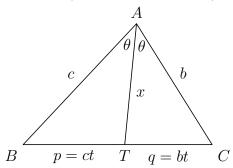


- 1. 三垂線交點
- 2. 「垂足三角形」(△DEF)爲内部三角 形中周長最小的三角形,且H爲垂足 三角形之内心

## 2 分線定理

### 2.1 角平分線定理

定理 2.1 (Schooten's Theorem).  $\overline{AT}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} - \overline{BT} \times \overline{CT}$ 



Proof. 由面積相等列式:

$$\frac{1}{2}bc\sin 2\theta = \frac{1}{2}bx\sin \theta + \frac{1}{2}cx\sin \theta 
\Rightarrow 2bc\cos \theta = x(b+c)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2bc}{b+c}\cos \theta = \frac{2bc}{b+c}\cos \frac{A}{2}$$

$$= \frac{2bc}{b+c} \times \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$= \frac{2bc}{b+c} \times \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$= \frac{2bc}{b+c} \times \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(b+c)^2}}$$

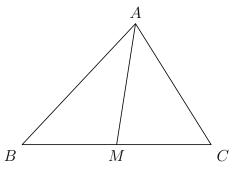
$$= \sqrt{bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{bc-\left(\frac{ab}{b+c}\right)}\left(\frac{ac}{b+c}\right)$$

$$= \sqrt{bc-pq}$$

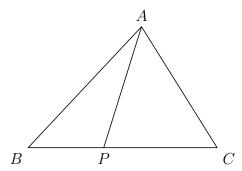
### 2.2 中線定理

定理 2.2 (Apollonius's Theorem).  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 

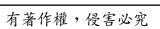


## 2.3 斯圖爾特定理

定理 2.3 (Stewart's Theorem).  $\overline{PC}\overline{AB}^2 + \overline{PB}\overline{AC}^2 = \overline{BC}\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}\overline{PC}\right)$ 



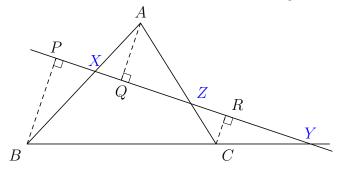
## 3 圆的性質



## 4 三角形的共線點定理

### 4.1 孟氏定理

定理 4.1 (Menelaus' Theorem).  $\overline{\frac{AX}{XB}} \cdot \overline{\frac{BY}{YC}} \cdot \overline{\frac{CZ}{ZA}} = 1 \iff XYZ =$ 點共線



Proof. ( $\Leftarrow$ ) 做垂線  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BP}$ ,  $\overline{RC}$ 

$$\overline{AX} : \overline{BX} = \overline{AQ} : \overline{BP}$$

$$\overline{CZ} : \overline{ZA} = \overline{CR} : \overline{AQ}$$

$$\overline{BY} : \overline{YC} = \overline{BP} : \overline{CR}$$

$$\overline{\frac{AX}{BX}} \cdot \overline{\frac{BY}{YC}} \cdot \overline{\frac{CZ}{ZA}} = \overline{\frac{AQ}{BP}} \cdot \overline{\frac{BP}{CR}} \cdot \overline{\frac{CR}{AQ}} = 1$$

(⇒)假設XZ 交BC 異於Y 之點Y'

由(⇐)得知:
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY'}}{\overline{Y'C}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$$

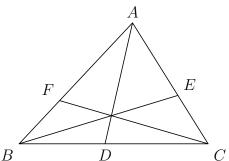
由題目條件得知:
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$$

兩式比較可知,
$$\frac{\overline{BY'}}{\overline{Y'C}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \Rightarrow Y = Y'$$

故XYZ三點共線

### 4.2 帥氏定理

定理 4.2 (Ceva's Theorem).  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \Longleftrightarrow \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CF} = 線共點$ 



有著作權,侵害必究

## 5 海龍公式

定理 5.1 (Heron's Formula).

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \ s = \frac{a+b+c}{2}$$

Proof.

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)$$

$$= \frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= \left(\frac{b+c+a}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$
這裡令  $s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 

定理 5.2 (Brahmagupta's Formula). 對於任意圓內接四邊形而言,面積由下式給出:

$$\triangle = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \ s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Proof. [略]

### 6 三角函數

### 6.1 正弦定理

定理 6.1 (Law of Sines). 對於任意三角形,有以下關係:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

### 6.2 餘弦定理

定理 6.2 (Law of Cosines). 對於任意三角形,有以下關係:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

或者更常使用這個形式:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

### 6.3 和角公式

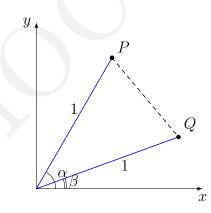
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Proof. 由 cos 的差角開始



$$\overline{PQ} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\overline{PQ}^2 = 1 + 1 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$\stackrel{LC}{=} 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ 

### 6.4 倍角公式

 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$   $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$   $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$   $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 

## 6.5 半角公式

## 7 莫雷三分角定理

引理 7.1.  $\sin 3\theta = 4 \sin \theta \sin (60^{\circ} + \theta) \sin (120^{\circ} + \theta)$ 

Proof.

$$\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

$$= \sin \theta \left(3 - 4\sin^2 \theta\right)$$

$$= \sin \theta \left(3\cos^2 \theta - \sin^2 \theta\right)$$

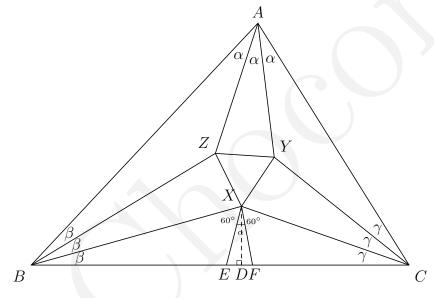
$$= \sin \theta \left(\sqrt{3}\cos \theta + \sin \theta\right) \left(\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta\right)$$

$$= 4\sin \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \theta + \frac{1}{2}\sin \theta\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \theta - \frac{1}{2}\sin \theta\right)$$

$$= 4\sin \theta \left(\sin 60^{\circ}\cos \theta + \cos 60^{\circ}\sin \theta\right) \left(\sin 120^{\circ}\cos \theta - \cos 120^{\circ}\sin \theta\right)$$

$$= 4\sin \theta \sin \left(60^{\circ} + \theta\right) \sin \left(120^{\circ} + \theta\right)$$

定理 7.2 (Morley's Theorem). 對於任意的三角形,其三個內角作角三分線,靠近公共邊三分線的三個交點,是一個正三角形。



Proof.

- 1. 作E於 $\overline{BC}$ 上使得 $\angle BXE = 60^{\circ}$
- 2. 作 F 於  $\overline{BC}$  上使得  $\angle CXF = 60^{\circ}$

$$\therefore 3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^{\circ}$$

$$\Rightarrow \angle EXF = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle BXC = 120^{\circ} + \alpha$$

同理,
$$\begin{cases} \angle CYA = 120^{\circ} + \beta \\ \angle AZB = 120^{\circ} + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(120^{\circ} + \beta) = \frac{AC \sin \gamma}{\overline{AY}} \\ \sin(120^{\circ} + \gamma) = \frac{\overline{AB} \sin \beta}{\overline{AZ}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \angle XEF = 60^{\circ} + \beta \Rightarrow \sin(60^{\circ} + \beta) = \frac{\overline{XD}}{\overline{XE}} \\ \angle XFE = 60^{\circ} + \gamma \Rightarrow \sin(60^{\circ} + \gamma) = \frac{\overline{XD}}{\overline{XF}} \end{cases}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 3\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin 3\gamma}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \sin 3\beta = \overline{AC} \sin 3\gamma$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \sin \beta \sin (60^{\circ} + \beta) \sin (120^{\circ} + \beta) = \overline{AC} \sin \gamma \sin (60^{\circ} + \gamma) \sin (120^{\circ} + \gamma)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \sin \beta \frac{\overline{XD}}{\overline{XE}} \frac{\overline{AC} \sin \gamma}{\overline{AY}} = \overline{AC} \sin \gamma \frac{\overline{XD}}{\overline{XF}} \frac{\overline{AB} \sin \beta}{\overline{AZ}}$$

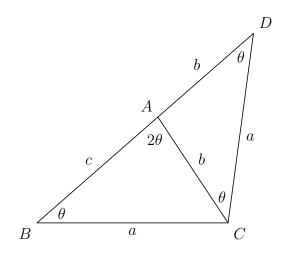
$$\Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{XE}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{XF}}$$

$$\therefore \triangle AZY \sim \triangle XEF (SAS)$$

#### 整倍角關係 8

#### 二倍角關係 8.1

**定理 8.1.**  $a^2 = b(b+c), \angle A = 2\angle B$ 

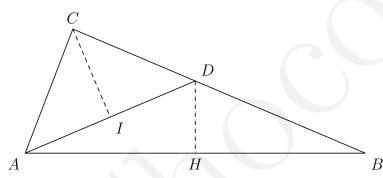


$$Proof.$$
 延長 $\overrightarrow{BA}$ ,使 $D$ 於 $\overrightarrow{BA}$ 上,且 $\angle ACD = \angle ABC = \theta$ 

$$\overline{AD} = b, \ \overline{CD} = a$$
  
 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$   
 $\Rightarrow b: a = a: (b+c)$   
 $\Rightarrow a^2 = b(b+c)$ 

#### 三倍角關係 8.2

**定理 8.2.** 
$$c^2 = \frac{1}{b}(a+b)(a-b)^2$$
,  $\angle A = 3\angle B$ 



Proof. 做 D 於  $\overline{BC}$  上使  $\angle DAB = \angle DBA$ 

$$\therefore \angle CDA = \angle DAB + \angle DBA$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CDA$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{CA} = b$$

$$\Rightarrow \overline{DB} = a - b = \overline{DA}$$

設 
$$\angle DAB = \theta$$
,  $\angle CAD = 2\theta$ 

$$\cos \theta = \frac{\frac{c}{2}}{a-b} = \frac{c}{2(a-b)}$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$=2\left[\frac{c}{2(a-b)}\right]^2$$

$$= \frac{c^2}{2(a-b)^2} - 1 \qquad \Rightarrow \frac{c^2 - 2(a-b)^2}{2(a-b)^2} = \frac{a-b}{2b}$$

$$= \frac{c^2 - 2(a-b)^2}{2(a-b)^2} \qquad \Rightarrow bc^2 - 2b(a-b)^2 = (a-b)^3$$

$$\Rightarrow bc^2 = (a-b)^2(a-b+2b)$$

$$=\frac{c^2-2(a-b)^2}{2(a-b)^2}$$

In 
$$\triangle CAI$$
:

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{a-b}{2}}{b}$$
$$= \frac{a-b}{2b}$$

$$c^2 - 2(a - b)^2$$
  $a - b$ 

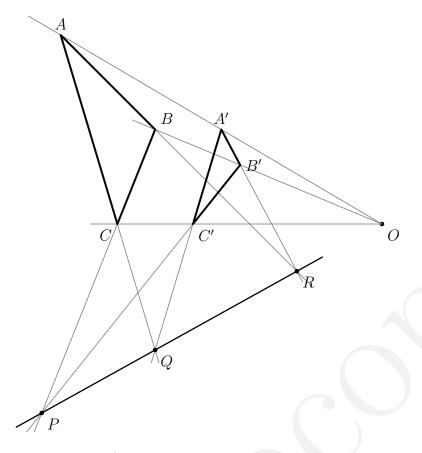
$$\Rightarrow bc^{2} - 2b(a - b)^{2} = (a - b)^{3}$$

$$\Rightarrow bc^2 = (a-b)^2(a-b+2b)$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{b}(a-b)^2(a+b)$$

### 9 笛沙格定理

定理 9.1 (Desargues' Theorem). 任意兩個三角形對應頂點的連線共點若且唯若其對應邊的交點 共線



Proof. B', C' 截過  $\triangle BCO$ 

$$\Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} \times \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}} = 1 \quad (1)$$

同理,

$$\begin{cases}
\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} \times \frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}} = 1 & (2) \\
\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} \times \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'A}} = 1 & (3)
\end{cases}$$

$$(1) \times (2) \times (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} \times \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} \times \frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}} \times \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} \times \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'A}} = 1$$

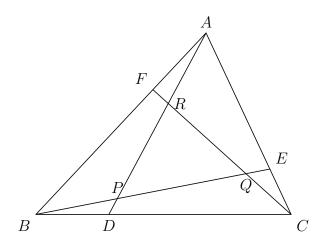
$$\Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

⇒ 由孟氏逆定理, ABC 爲三角形, 故P,Q,R三點共線

## 10 羅斯定理

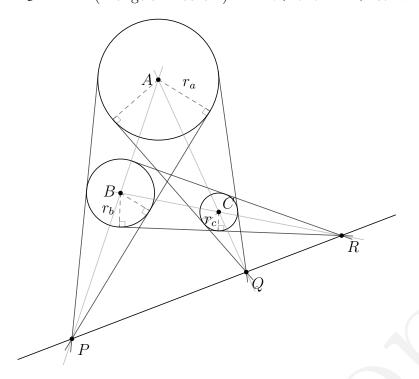
定理 10.1 (Routh's Theorem). 若  $\overline{AF}:\overline{FB}=1:x,\,\overline{BD}:\overline{DC}=1:y,\,\overline{CE}:\overline{EA}=1:z$ ,則:

$$\frac{\triangle PQR}{\triangle ABC} = \frac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+y+1)(zy+z+1)}$$



## 11 蒙格定理

定理 11.1 (Monge's Theorem). 任三圓兩兩公切線交點共線



### 12 笛卡兒四圓定理

 $= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta)$ 

 $= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 

引理 12.1. 若
$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$
, 則 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2\cos \alpha\cos \beta\cos \gamma$ 

Proof. 
$$\gamma = 2\pi - (\alpha + \beta) \Rightarrow \cos \gamma = \cos(\alpha + \beta)$$
  

$$\cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + \cos^{2} \gamma$$

$$= \cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + \cos^{2} (\alpha + \beta)$$

$$= \cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + [\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta]^{2}$$

$$= \cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + \cos^{2} \alpha \cos^{2} \beta + \sin^{2} \alpha \sin^{2} \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$$= \cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + \cos^{2} \alpha \cos^{2} \beta + (1 - \cos^{2} \alpha) (1 - \cos^{2} \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$$= 2 \cos^{2} \alpha \cos^{2} \beta + 1 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$$= 2 (\cos \alpha \cos \beta)^{2} - 2 (\sin \alpha \sin \beta) (\cos \alpha \cos \beta) + 1$$

$$= 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

定理 12.2 (Descartes' Circle Theorem). 若有三圓 A,B,C 相切,曲率各爲  $k_1,k_2,k_3$ ,且有一曲率爲  $k_4$  圓 O 與三圓相切,則:

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

Proof. Let 
$$\begin{cases} \alpha = \angle AOB \\ \beta = \angle BOC \\ \gamma = \angle COA \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{(r_1 + r_4)^2 + (r_2 + r_4)^2 - (r_1 + r_2)^2}{2(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)}$$

$$= \frac{2r_4^2 + 2r_4(r_1 + r_2) - 2r_1r_2}{2(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)}$$

$$= \frac{(r_1 + r_4)(r_2 + r_4) - 2r_1r_2}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)}$$

$$= 1 - \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)}$$

$$= 1 - \frac{2\left(\frac{1}{k_1}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_4}\right)\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2k_4^2}{(k_1 + k_4)(k_2 + k_4)} := 1 - \lambda_1$$

同理,

$$\cos \beta = 1 - \frac{2k_4^2}{(k_2 + k_4)(k_3 + k_4)} := 1 - \lambda_2$$
$$\cos \gamma = 1 - \frac{2k_4^2}{(k_3 + k_4)(k_1 + k_4)} := 1 - \lambda_3$$

#### 將上式代入 Lemma 12.1:

$$(1 - \lambda_1)^2 + (1 - \lambda_2)^2 + (1 - \lambda_3)^2 = 1 + 2(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2} + 2 = 2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right)$$

$$\frac{(k_4 + k_1)^2}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_2)^2}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_3)^2}{2k_4^2} + 2 = 2\left(\frac{3k_4^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 2(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1)}{2k_4^2}\right)$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 7k_4^2 = 6k_4^2 + 4k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 2(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1)$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

- 13 三角形邊角關係
- 13.1 内外心與邊角距離關係
- 13.2 三角形點邊連線長關係

## 14 蝴蝶定理

## 15 帕斯卡定理

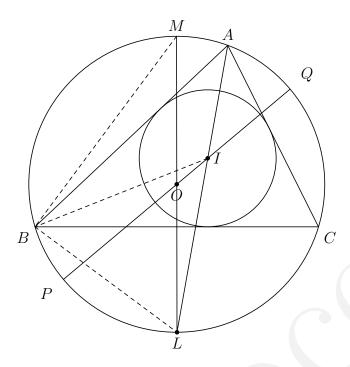
### 16 歐拉定理

引理 16.1 (雞爪定理).

定理 16.2 (Euler's Theorem). 對於任意三角形,

$$\overline{IO}^2 = R(R - 2r)$$

其中,I爲内心、O爲外心、R爲外接圓半徑、r則是内切圓半徑



 ${\it Proof.}$ 

(1) 做  $\overrightarrow{AI}$  交圓 O 於 L ,且 L 爲 BC 孤之中點

(2) 延長 $\overrightarrow{LO}$ ,交圓O於M

(3) 過I做 $\overline{AB}$ 之垂足H

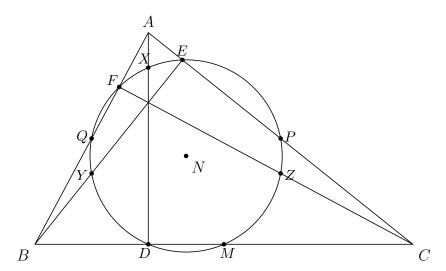
 $\angle IAH = \angle LMB, \angle AHI = \angle MBL$ 

 $\Rightarrow \triangle AHI \sim \triangle MBL\left(AA\right)$ 

$$\frac{\overline{IH}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{ML}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AI} \times \overline{BL} = \overline{IH} \times \overline{ML} = r \times 2R \tag{1}$$

## 17 歐拉線與九點圓

定理 17.1 (Euler Line). 外心(O)、重心(G)、垂心(H)三點共線,且  $2\,\overline{OG}=\overline{GH}$ 



### 18 卡諾定理

引理 18.1.  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 

Proof.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(\pi - (A+B))$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\pi - C}{2} \times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

引理 18.2. 對於任意三角形,內切圓半徑r與外接圓半徑R有以下關係:

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Proof.

$$\begin{split} \triangle &= \frac{1}{2} \, r(a+b+c) = \frac{1}{2} \, ab \sin C \\ \mathbf{d} \, \mathbf{E} \, \mathbf{\hat{x}} \, \mathbf{\hat{z}} \, \mathbf{g} \, \Rightarrow a = 2R \sin A, \, b = 2R \sin B, \, c = 2R \sin C \\ 2Rr(\sin A + \sin B + \sin C) &= 2R \sin A \times 2R \sin B \times 2R \sin C \\ 4r \, \cos \frac{A}{2} \, \cos \frac{B}{2} \, \cos \frac{C}{2} &= 16R \, \sin \frac{A}{2} \, \cos \frac{A}{2} \, \sin \frac{C}{2} \, \cos \frac{C}{2} \, \sin \frac{C}{2} \, \cos \frac{C}{2} \\ r &= 4R \, \sin \frac{A}{2} \, \sin \frac{B}{2} \, \sin \frac{C}{2} \end{split}$$

定理 18.3 (Carnot Theorem). 三角形之外心到三邊的距離和爲 R+r

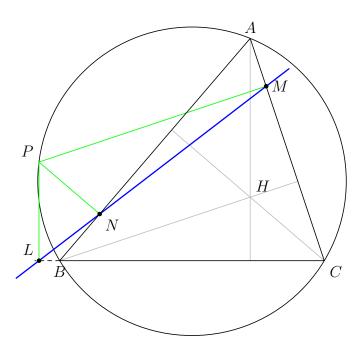
## 19 費馬點



## 20 垂足三角形

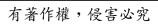
## 21 西姆松定理

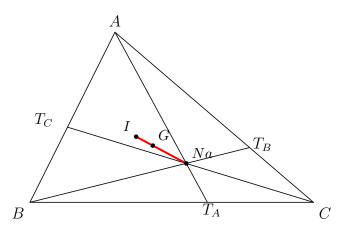
定理 21.1 (Simson's Theorem). 平面上有一三角形  $\triangle ABC$  以及一點 P ,則 P對  $\triangle ABC$  之三邊 做垂足共線若且唯若 P在  $\triangle ABC$  之外接圓上



## 22 拿破崙定理

## 23 旁切圆與中界線





定理 24.1. 内心 (I)、重心 (G)、奈格爾點 (Na) 共線,且  $\overline{NaG}=2$   $\overline{IG}$  Proof. 假設斜座標  $S\equiv\left\{B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right\}$ 

$$\overline{AT_B} = s - c, \overline{T_BC} = s - a, \overline{BT_A} = s - c$$

$$\Rightarrow \frac{s - c}{s - a} \times \frac{a}{s - c} \times \frac{\overline{T_ANa}}{\overline{NaA}} = 1 \quad (孟氏定理)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ANa}}{\overline{NaT_A}} = \frac{a}{s - a}$$

$$\cancel{R} \overrightarrow{BT_A} = \frac{s - c}{a} \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \overline{BNa} = \frac{a}{a + (s - a)} \overrightarrow{BT_A} + \frac{s - a}{a + (s - a)} \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{a}{s} \times \frac{s - c}{a} \overrightarrow{BC} + \frac{s - a}{s} \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{s - c}{s} \overrightarrow{BC} + \frac{s - a}{s} \overrightarrow{BA}$$

$$\cancel{R} \overrightarrow{BI} = \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a + b + c} \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{c}{2s} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{2s} \overrightarrow{BA}$$

$$\cancel{R} \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$$

$$\Delta GINa = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{c}{2s} & \frac{s-c}{s} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{a}{2s} & \frac{s-a}{s} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{a}{2s} & \frac{s-a}{s} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2s} & \frac{c}{s} & \frac{c}{3s} & \frac$$

(1)

$$\triangle GINa = 0$$
 若且唯若  $G, I, Na$  三點共線

$$\overline{NaG}^2 = \left(\frac{s-c}{s} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{s-a}{s} - \frac{1}{3}\right)^2 \\
= \left[\frac{3(s-c)-s}{3s}\right]^2 + \left[\frac{3(s-a)-s}{3s}\right]^2 \\
= \frac{(2s-3c)^2 + (2s-3a)^2}{9s^2} := \frac{1}{9}\mathcal{K}$$

$$\overline{NaG}^2 = \left(\frac{c}{2s} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2s} - \frac{1}{3}\right)^2 \\
= \left[\frac{3c-2s}{6s}\right]^2 + \left[\frac{3a-2s}{6s}\right]^2 \\
= \frac{(2s-3c)^2 + (2s-3a)^2}{36s^2} := \frac{1}{36}\mathcal{K}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NaG}^2}{\overline{GI}^2} = \frac{\frac{1}{9}\mathcal{K}}{\frac{1}{36}\mathcal{K}} = 4$$

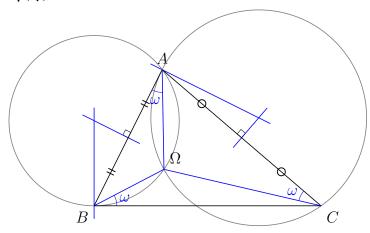
$$\Rightarrow \sqrt{\overline{NaG}^2} = \sqrt{4\overline{GI}^2}$$

 $\overline{NaG} = 2\overline{GI} \tag{2}$ 

由(1)及(2)可知,G, I, Na三點共線,且 $\overline{NaG} = 2\overline{IG}$ 

## 25 布洛卡兒點 (Brocard Point)

定義. 若一點到三頂點的線段與邊夾角相同,稱此點爲布洛卡兒點(Brocard Point)作圖.



定理 25.1.  $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$ 

Proof. 
$$\angle AB\Omega = B - \omega \Rightarrow \angle A\Omega B = \pi - (B - \omega) - \omega = \pi - B$$

$$\begin{cases} \frac{\overline{A\Omega}}{\sin(B-\omega)} = \frac{\overline{B\Omega}}{\sin\omega} \\ \frac{\overline{B\Omega}}{\sin(C-\omega)} = \frac{\overline{C\Omega}}{\sin\omega} \\ \frac{\overline{C\Omega}}{\sin(A-\omega)} = \frac{\overline{A\Omega}}{\sin\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{A\Omega}}{\overline{B\Omega}} = \frac{\sin(B-\omega)}{\sin\omega} \\ \frac{\overline{B\Omega}}{\overline{C\Omega}} = \frac{\sin(C-\omega)}{\sin\omega} \\ \frac{\overline{C\Omega}}{\overline{B\Omega}} = \frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(A - \omega) \sin(B - \omega) \sin(C - \omega) = \sin^3 \omega$$

$$\begin{cases} \frac{\overline{C\Omega}}{\sin(A-\omega)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-A)} = \frac{\overline{AC}}{\sin A} \\ \frac{\overline{C\Omega}}{\sin \omega} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-C)} = \frac{\overline{BC}}{\sin C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A - \omega)}{\sin \omega} = \frac{\overline{BC} \sin A}{\overline{AC} \sin C} = \frac{2R \sin A \cdot \sin A}{2R \sin B \cdot \sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A - \omega)}{\sin \omega} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{\sin A \cdot \sin (\pi - (B + C))}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A \cos \omega - \cos A \sin \omega}{\sin \omega} = \frac{\sin A \cdot (\sin B \cos C + \cos B \sin C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\Rightarrow \sin A \cot \omega - \cos A = \sin A \cdot \sin \left( \cot C + \cot B \right)$$

$$\Rightarrow \cot \omega - \cot A = \cot C + \cot B$$

$$\Rightarrow \cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$$