Discrete
Fourier Transformation

2017135002/최성윤

기본원리

Discrete Fourier Transformation

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

$h(t)$ 에서 $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$.

균일한 간격을 이룰 경우

$$H(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i f_n t_k} \Delta$$

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{-2\pi i k n / N}$$

$$t_k = k\Delta \qquad f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \qquad n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$$

f 주파수의 범위는 다음과 같다.

$$f = [0, 1/N, 2/N, \ldots, (N-2)/N, (N-1)/N]$$

하지만 $e^{-2\pi i k}$의 영향으로 f는 1의 주기를 가진다
(1을 빼주어도 무관하다.)

$$f = [0, 1/N, 2/N, \ldots 1/2, \ldots, -(N/2-1)/N, \ldots, -1/N]$$

기본원리

Discrete Inverse Fourier Transform

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \, e^{+2\pi ikn/N}$$

역으로도 푸리에 변환이 가능하다.

Power Spectrum

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{-2\pi ikn/N}$$

$$P_n = |H_n|^2$$

해당 주파수 진폭(전체 주파수에서 영향을 미치는 비율)을 계산한다

실행

```
x=np.linspace(0,99,100) #xarray 생성
a=len(x) #x의 개수 (N)이 변화 하더라도 DFT가 가능하게 주파수,k 등을 설정해준다)
f1=np.linspace(0,1-1/a,a)
f2=f1*(f1>0.5)-1
f=np.array(list(f1)[:51]+list(f2)[51:]) #주파수 생성
k=np.linspace(0,a-1,a) #k 생성 (1~N-1)

xt=x.repeat(a) #X값 1*10000 행렬생성
ft=np.tile(f,(1,a))[0] #F값 1*10000 행렬생성
kt=k.repeat(a) #k값 1*10000 행렬생성
```

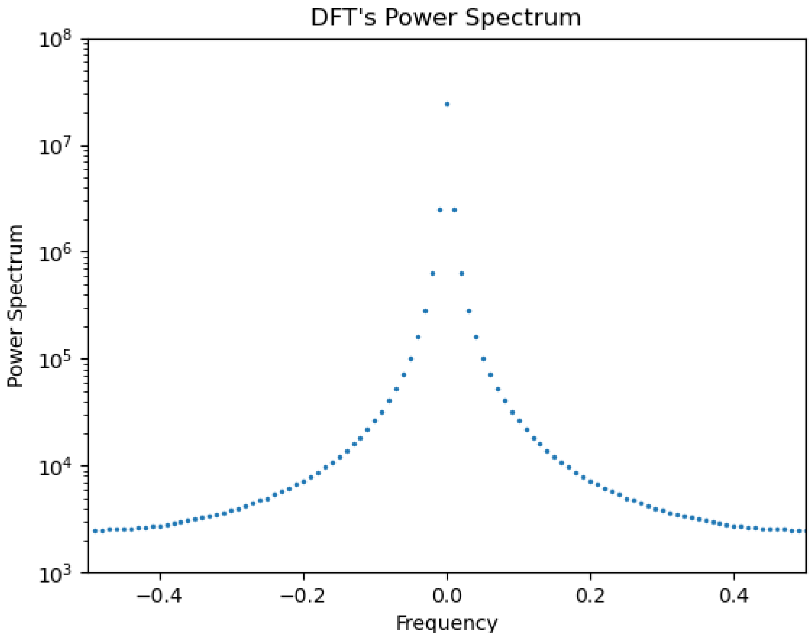
For 반복문을 사용하지 않고 계산을 위하여
1*10000 array을 만들어 준 뒤 계산을 한다.

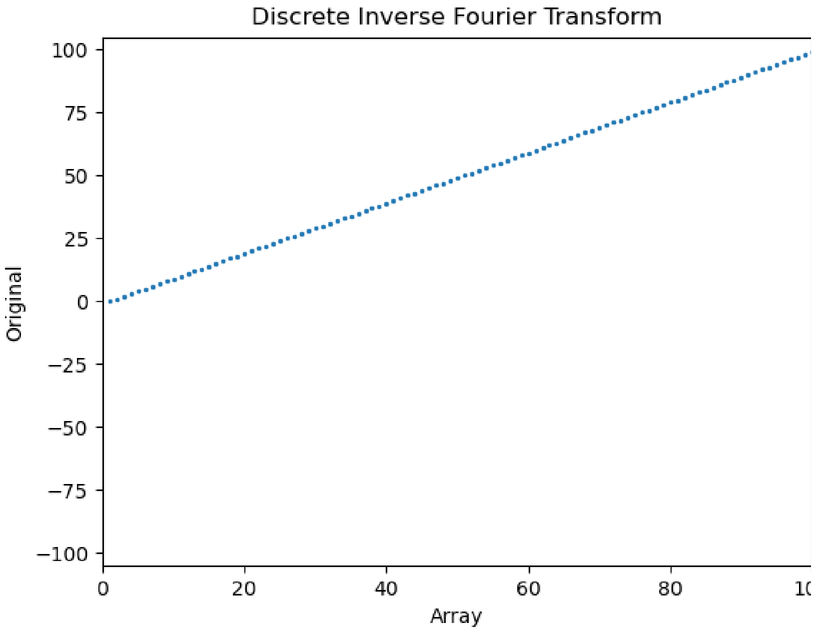
100*100 으로 생성후 계산시 오류 발생

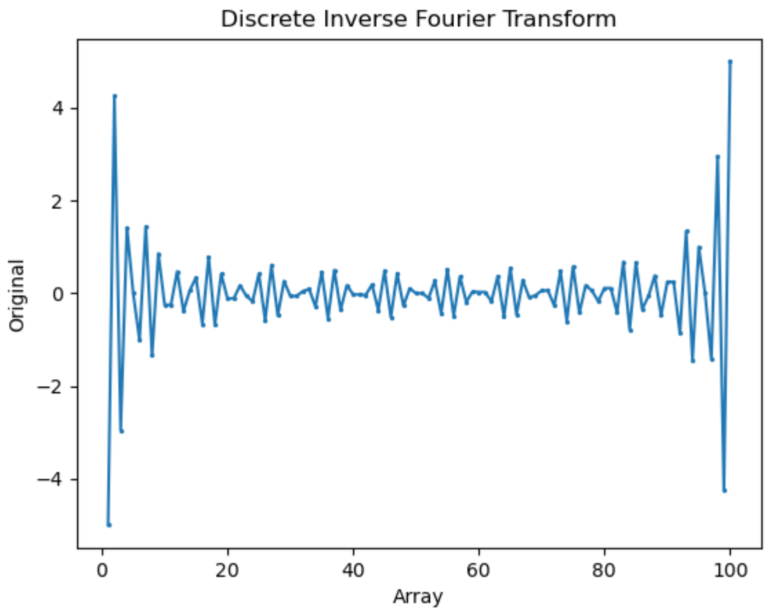
```
def DFT(f,h,k):
    return h*np.exp(-2j*np.pi*k*f) #1*10000 출력

dft=DFT(ft,xt,kt).reshape(a,a) # 100*100 출력으로 바꾼다
H=np.sum(dft,0) #합계산 H출력 (100개 원소가 남는다)

###역변환 만들어주기###
def DIFT(f,H,k):
    return H*np.exp(2j*np.pi*k*f)
dift=DIFT(ft,DFT(ft,xt,kt),kt).reshape(a,a)
IH=np.sum(dift,1)/a
```

Discrete Fourier Transformation
Discrete Inverse Fourier Transformation 실행

결과



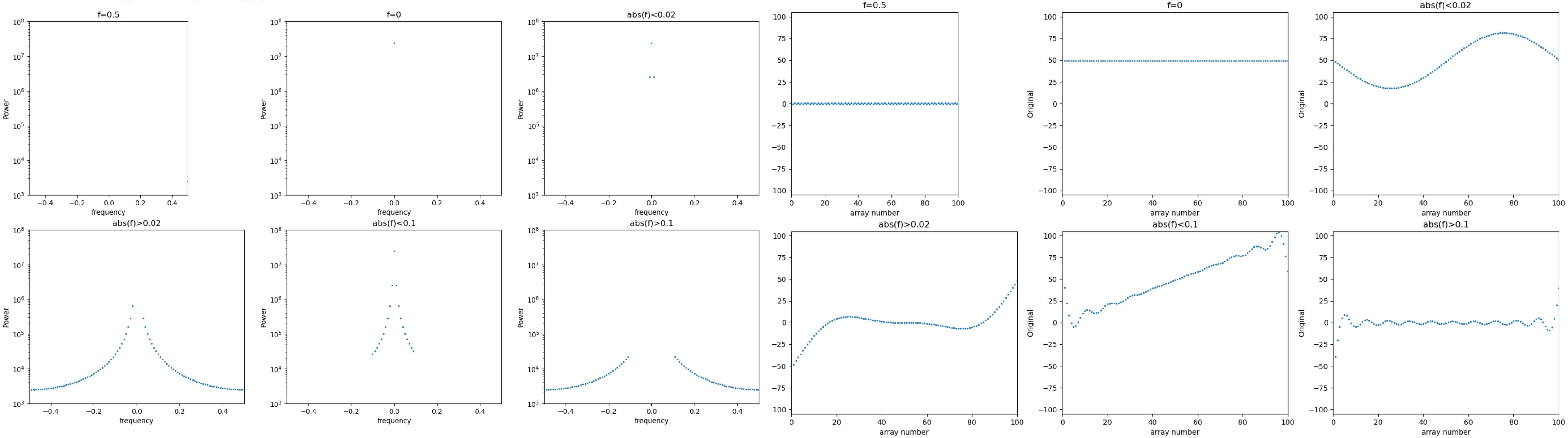




0~99값을 -0.5~0.5 의 주파수에 대하여 Discrete Fourier Transform을 실행하면 첫번째 그림과 같이 나온다.
주파수 0일때 Power Spectrum이 제일 크고 0에 대하여 대칭인것을 알수있다.
이는 0~99의 값에 대하여 DFT를 실행하는데 0~99는 진동, 반복도 하지 않고 일정하게 증가하는 함수인 y=x로 나타낼수있다.
이는 선형함수이므로 반복되지 않는 함수 즉 주기가 0 인것을 알수 있는데 따라서 Power Spectrum에서 0일때가 가장 큼을 알수있다.
(주파수 0이 차지하는 비율이 매우 크다)

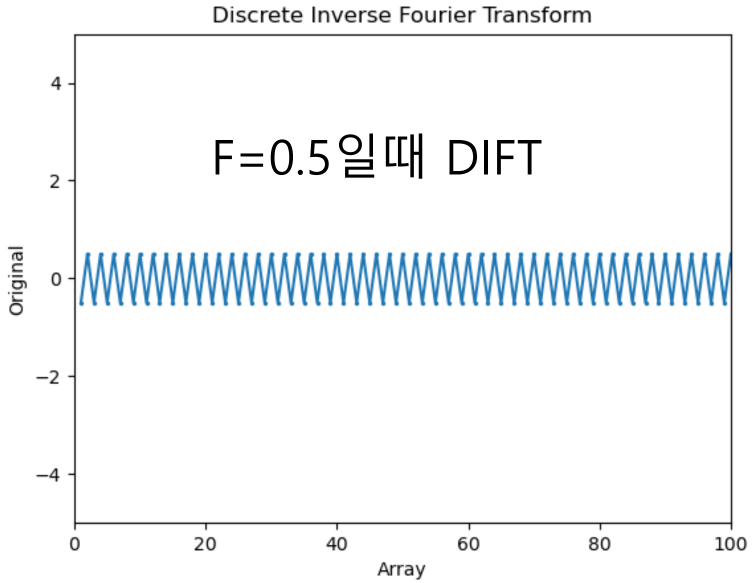
마지막 사진의 경우 처음 주파수 10개인부분 (-0.49~-0.4)에 대하여 DIFT 를 하였다.
이는 서로 다른 주기를 가지는 10개의 주기함수들의 합으로 나타낼수 있다.

토의사항



여러 주파수의 범위에서의 DFT 와 DIFT를 나타내었다. DIFT는 결국 다양한 주파수를 가지는 주기함수의 합이라고 생각 할수 있기때문에 주파수 범위에 따라 다양한 진동함수들을 보여준다.

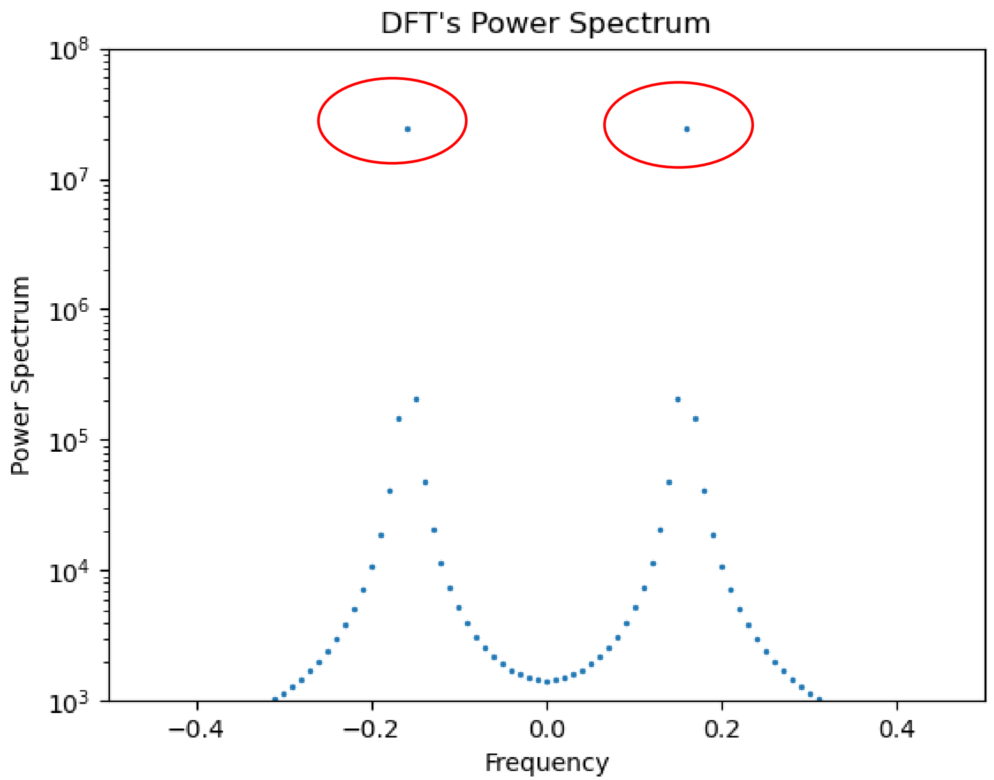
또한 주파수를 특정하고 (f=0, f=0.5) DIFT를 했을 경우에는 일정한 주기를 가지는 주기함수가 PLOT 될것으로 추측할수 있는데 f=0.5일때의 DIFT를 확대하면 만족함을 알 수 있다.



토의사항

X를 0~99 까지 아닌 sinx를 DFT 하면 어떤 결과가 나올까???

위에서는 0~99까지 했을시 선형함수 이기때문에 주기가 0일때 Power가 큼을 알수 있었다.
그렇다면 sinx 를 DFT 하면 어떤 결과가 나올까?
sinx의 주기는 2π이다. 그렇다면 주파수는 $1/2\pi$ 대략 0.16의 값을 가진다. 즉 sinx 는 주파수가 0.16이므로
DFT시 주파수가 +0.16,-0.16 일 때 Power가 최대이고 이를 중심으로 대칭 할 것임을 유추 할 수 있다.



확인결과 예상한것과 맞아 떨어짐을 알수 있었다