Exercise 2.11, Computing with a nonconjugate single-par. model

$$y_1, \dots, y_5 \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Cauchy}(\theta, 1) \implies p(y_i|\theta) \propto \frac{1}{1+(y_i-\theta)^2}$$

$\theta \sim U[0,1]$, observationer $(y_1, \dots, y_5) = (-2, -1, 0, 1.5, 2.5)$

/ Beräkna den onormaliserade posterior funktionen $p(\theta|y) \propto p(\theta) \cdot p(y|\theta)$ på en grid av punkter

$$\theta = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \overset{m=1000}{\Longrightarrow} \theta = 0, 0.001, 0.002, \dots, 1$$

$$p(\theta|y) \propto p\left[(y_1, \dots, y_5) \mid \theta\right] = \prod_{j=1}^{5} p(y_j|\theta)$$

$$= \prod_{j=1}^{5} \frac{1}{1+(y_j-\theta)^2} .$$

Beräknar $p(\theta|y)$ för varje θ och bestämmer arean A för den onormaliserade posteriorfunktionen som

$$\sum_{i=0}^{1000} p\left(\frac{i}{1000} \middle| y\right) \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=0}^{1000} \left[\prod_{j=1}^{5} \frac{1}{1+\left(y_j - \frac{i}{1000}\right)^2}\right]$$

$\approx 0{,}0033944$, så att den normaliserade posteriorfunktionen ges som

$$p_N(\theta|y) = \frac{1}{0{,}0033944} \cdot p(\theta|y)$$, se figur 2.2

Exercise 2.11 forts.

- Utför 1000 slumpmässiga dragningar från posteriorfunktionen

$$p(\theta|y) \propto \prod_{j=1}^{5} \frac{1}{1+(y_j-\theta)^2}$$

och plottar ett histogram över dragningarna, se figur 2.3

- Posterior prediktiv fördelningen, $p(y_6|y, \theta_{(i)})$, för en framtida observation, y_6, givet parameterdragningen $\theta_{(i)}$; $i = 1, \ldots, 1000$ ges som

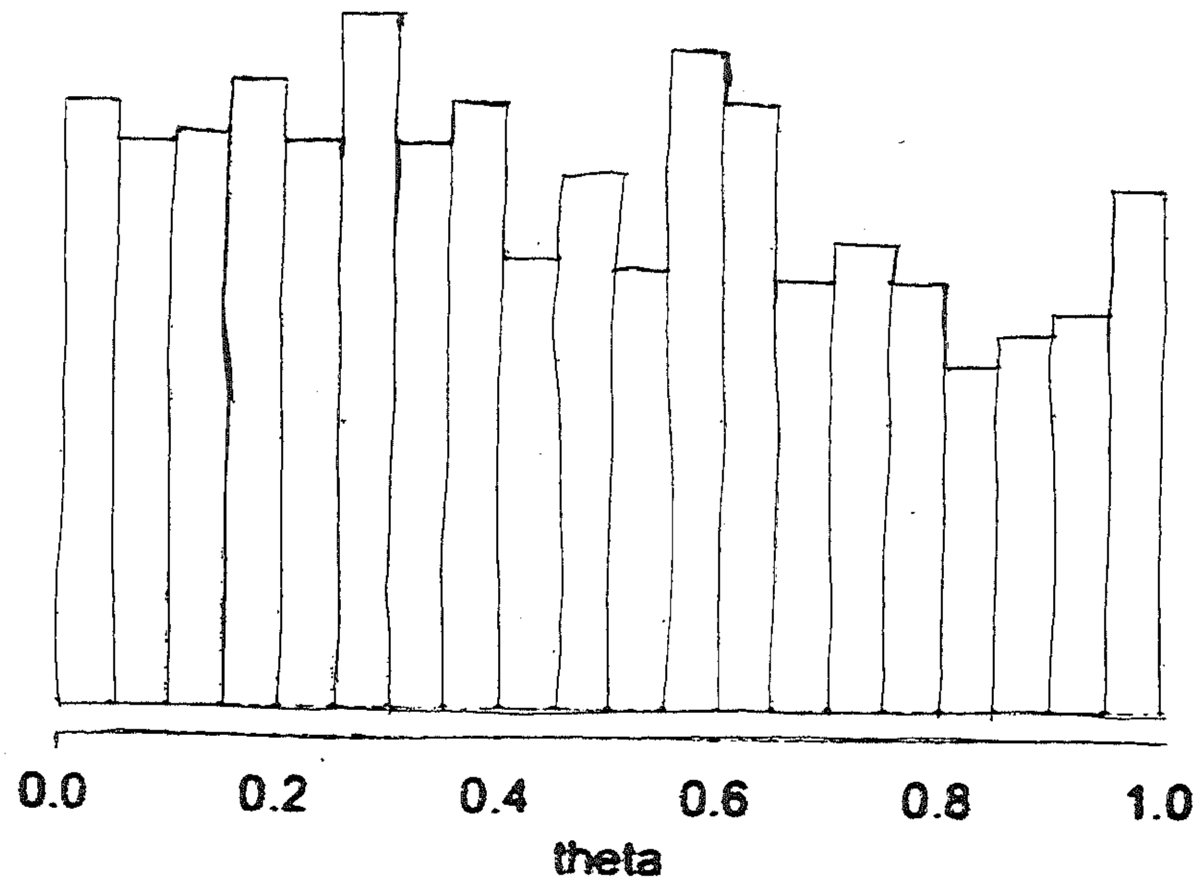
$$y_6 | y, \theta_{(i)} \sim \text{Cauchy}(\theta_{(i)}, 1) \Rightarrow p(y_6|y, \theta_{(i)}) =$$

$$= \frac{1}{1+(y_6-\theta_{(i)})^2}$$

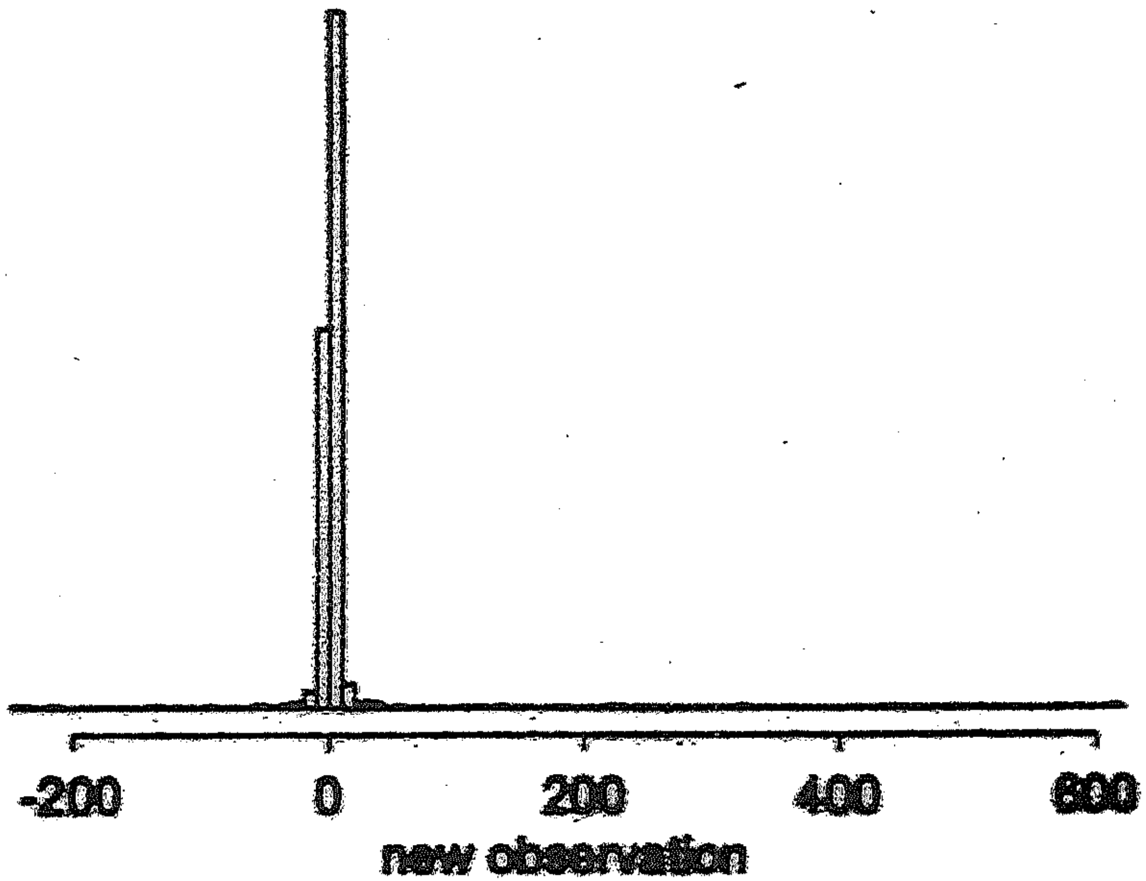
. Alltså, 1000 dragningar av en framtida observation, y_6, från 1000 olika Cauchy$(\theta_{(i)}, 1)$-fördelningar.

Histogram över prediktiva dragningar, se figur 2.4.

2.11b.



2.11c.



Kapitel 2, exercise 14, Algebra of the normal model

a) Fyll i de steg som krävs för att erhålla (2.9)-(2.10) och (2.11)-(2.12
se sid. 46 – 47

känd varians

$$y|\theta \sim N(\theta, \sigma^2) \implies p(y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(y-\theta)^2}$$

$$\theta \sim N(\mu_0, \gamma_0^2) \implies p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\cdot\gamma_0^2}\cdot(\theta-\mu_0)^2}$$

Det ger oss

$$p(\theta|y) \propto \exp\Bigg[\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(y-\theta)^2}{\sigma^2}+\frac{(\theta-\mu_0)^2}{\gamma_0^2}\right)}_{(*)}\Bigg]$$

$$(*) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2\cdot\gamma_0^2}\cdot\left((y-\theta)^2\cdot\gamma_0^2 + (\theta-\mu_0)^2\cdot\sigma^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2\cdot\gamma_0^2}\cdot\left[(\gamma_0^2+\sigma^2)\cdot\theta^2 + \left(\gamma_0^2\cdot(-2y)+\sigma^2\cdot(-2\mu_0)\right)\cdot\theta + y^2\cdot\gamma_0^2 + \mu_0^2\cdot\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(\gamma_0^2+\sigma^2)}{\sigma^2\cdot\gamma_0^2}\cdot\left[\theta^2 - 2\cdot\frac{\gamma_0^2\cdot y+\sigma^2\cdot\mu_0}{\gamma_0^2+\sigma^2}\cdot\theta + y^2\cdot\gamma_0^2 + \mu_0^2\cdot\sigma^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\gamma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right)\cdot\left[\left(\theta - \frac{\gamma_0^2\cdot y + \sigma^2\cdot\mu_0}{\gamma_0^2+\sigma^2}\right)^2 + y^2\cdot\gamma_0^2 + \mu_0^2\cdot\sigma^2 - \left(\frac{\gamma_0^2\cdot y+\sigma^2\cdot\mu_0}{\gamma_0^2+\sigma^2}\right)^2\right.$$

$$\implies p(\theta|y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\gamma_1^2}\cdot(\theta-\mu_1)^2\right], \text{ där}$$

$$\frac{1}{\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2} \quad \text{och} \quad \mu_1 = \frac{\gamma_0^2\cdot y + \sigma^2\cdot\mu_0}{\gamma_0^2+\sigma^2} = \frac{\frac{1}{\gamma_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2}\cdot y}{\frac{1}{\gamma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

Kapitel 2, exercise 14 forts.

1 forts.

P.s.s. som för en observation y tidigare, kan vi låta $\bar{y}$ vara en observation. Därför ersätter vi y med $\bar{y}$ och σ^2 med $\frac{\sigma^2}{n}$ $\left(\bar{y} \mid \theta \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ i ekv. (2.9) – (2.10). Då får vi att

$$\mu_n = \frac{\frac{1}{\tau_0^2} \cdot \mu_0 + \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\frac{1}{\tau_0^2} \cdot \mu_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}},$$

och

$$\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}$$

Kapitel 2, exercise 14 forts.

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2}\cdot y}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

(Visa först att $\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}$ gäller)

$$\mu_2 = \frac{\frac{1}{\tau_1^2}\cdot\mu_1 + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\sigma^2}} =$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{\tau_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\bar{y}\right]}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{2}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{2}{\sigma^2}}$$

. Antag att det gäller för $n=p$

Visar att det gäller för $n=p+1$. Vi har att

$$\mu_{p+1} = \frac{\frac{1}{\tau_p^2}\cdot\mu_p + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_p^2} + \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\left(\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{p}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\frac{1}{\tau_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{p}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{p}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\left(\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{p}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{(p+1)}{\sigma^2}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{(p+1)}{\sigma^2}}$$

, enligt (2.12) och därför gäller (2.11) – (2.12) för alla n.