Universality Warming Up

Footman

當我们定义完了 (co-)limit, 很自然的, 我们應该考慮下面这些事: the property of limits, what kind of catgory contained what kind of limits, and what limits can explain?

首先, 我们介绍一些基本的極限, 馬上我们就會看到爲什么他们是基本的.

我们稱 $\mathscr{J}$ 是 discrete 范疇, 如果對于 $\mathscr{J}$ 中的態射我们有 $\mathscr{J}(x,y) = * \iff x = y$, $\mathscr{J}(x,y) = \varnothing \iff x \neq y$. 實際上我们可以把这个范疇和集合 $\mathrm{Ob}(\mathscr{J})$ 等同起來. 我们稱任意的 $\mathscr{J}$-diagram$F$ 的極限 $\prod_{j\in\mathscr{J}} Fj$ 爲一个 product of Fj. Dually, 我们记 $\coprod_{j\in\mathscr{J}} Fj$ 爲 coproduct of Fj. 在集合范疇中 product 就是笛卡爾積, coproduct 就是無交并. 特别的, 當 $\mathscr{J}$ 是空的時候, 他们的 product 和 coproduct 分别對應了終對象和始對象.

令 $\mathscr{J}$ 是只有兩个對象 x,y 的范疇, 如果这个 $\mathscr{J}(x,y)$ 是空集, 我们也记 $\mathscr{J}$-diagram$F$ 的極限是 $Fx \times Fy$. 若此時態射 $f\colon Fx \to Fy$ 存在, 則我们可以誘導出一个態射 $\Gamma_f\colon Fx \to Fx \times Fy$ 如, 稱爲 graph of f. 注意到, 此時 Γ_f 是單的, 并且 the projectionp_{Fx} 是滿的. 如果 $\mathscr{J}(x,y)$ 非空, 則我們稱 $\mathscr{J}$-diagram 的極限 $\mathrm{eq}_{f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{J})} Ff$ 爲 equalizer of morphisms Ff.Dually $\mathrm{coeq}_{f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{J})} Ff$ 爲 coequalizer of morphisms Ff. 在集合范疇中, 我們可以把 equalizer 看成是滿足態射相等的子集, 而 coequalizer 則是商去態射相等的集合.

令 $\mathscr{J}$ 是一个有終對象 X 的范疇, 并且額外滿足 $\mathscr{J}(Y,Z) = \varnothing \iff Z \neq X, Y \neq Z$, $\mathscr{J}(Y,Y) = *$, 則我們稱 $\mathscr{J}$-diagram F 的極限 $\prod_{X,Y\in\mathscr{J}} FY$ 是一个 pullback (或者更形象的, 是一个 fibre product). Dually, $\prod_{X,Y\in\mathscr{J}} FY$ 是一个 pushout. 在集合范疇中, pullback 是一个笛卡爾積的子集, 滿足他們映射到 FX 的像相等, 而 pushout 这是一个無交并的商集 (也即拓撲空間中的粘合). 并且如果每个投射都是單的, pullback 也可以看成是一些集合的交集.

注意到如果 FX 恰好是 $\mathscr{C}$ 中的終對象, 則 pullback 就退化成 product. 而 equalizer 就變成 pullback of graph of morphisms. 反過來的, 我們可以把 pullback 看成是 equalizer of product, 并且終對象看成是 empty product. 这提示我們, 或許一些極限是可以被表示成另一些極限的.

爲了解釋清楚这个問題, 现在我們把我們的視角關注于一个更廣的范疇, $\mathrm{Bund}(\mathscr{C})$, 这个范疇其中的對象是 $F\colon \mathscr{J} \to \mathscr{C}$ 的函子, 令 $H\colon \mathscr{J}' \to \mathscr{C}$, 而態射 $F \to H$, 實際上是指一个函子 $G\colon J' \to J$, 配備上一个自然變换 $\eta\colon FG \to H$. 如果 $\mu\colon \varprojlim_{\mathscr{J}} F \to F$ and $\lambda\colon \varprojlim_{\mathscr{J}} H \to H$ 是 F,H 的 limiting cone, 則我們有下圖:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{\mathscr{J}} F \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mu_{G_j}"] & \varprojlim_{\mathscr{J}'} H \arrow[d, "\lambda_j"] \\
FGj \arrow[r, "\eta_j"] & Hj
\end{tikzcd}$$

交換, 事實上我們有函子 $\varprojlim\colon \mathrm{Bund}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$.

在这一函子的加持下, 我們才能做下面这件事. 對于任意的 $\mathscr{J}$ 我們可以定义 $\mathscr{J}[i] := \mathrm{Fun}([i], J)$. 作爲集合, 顯然有 $d^0, d^1\colon \mathscr{J}[1] \to \mathscr{J}[0]$ 并且 $\mathscr{J}[0] \hookrightarrow \mathscr{J}$. 注意到 $F\mathrm{cod}\colon \mathscr{J}[1] \to \mathscr{C}, f \mapsto \mathrm{cod} f$ 滿足 $Fd_1 = F\mathrm{cod}$ 并且 $\eta\colon Fd_0 \to F\mathrm{cod}, \eta_f = Ff\colon F\mathrm{dom} f \to F\mathrm{cod} f$, 于是我們就可以有 $\mathrm{Bund}(\mathscr{C})$ 中的態射

$$F \longrightarrow F_0 \underset{d^1_*}{\overset{d^0_*}{\rightrightarrows}} F\mathrm{cod}$$

并且實際上, $\mathscr{C}$ 是完備的話, 我們就會有

$$\varprojlim_{\mathscr{J}} F \longrightarrow \varprojlim_{\mathscr{J}[0]} F_0 \underset{d^1_*}{\overset{d^0_*}{\rightrightarrows}} \varprojlim_{\mathscr{J}[1]} F\mathrm{cod}$$

是一个 equalizer of products. 至此, 我們巧妙的給出了完備判準: 對任意范疇 $\mathscr{C}$, 以下幾个條件等價

- $\mathscr{C}$ 對任意 (resp. 有限) 圖表有極限存在,
- $\mathscr{C}$ 存在任意 (resp. 有限)fibre product, 以及 terminal object.

- $\mathscr{C}$ 存在任意 (resp. 有限)product, 以及 equalizer.

事實上, 關于圖表的‘組合性質’, 我们是能談論非常非常多的, 在这里不贅述. 根據上述討論, 我们知道集合范疇是完備的.

當然, 并不是什么范疇都是完備的. 所以我们要考慮一个范疇的‘完備化’, 我们希望完備化要滿足一些條件, 首先是得是 fully faithful, 并且完備化和取極限應當交換 (这相當于是說, 我们原先的范疇是完備化的一个 full subcategory). 同样的, 爲了說明这个問題, 我们應當先對函子范疇有一些基本的了解.

在上一次討論班中, 我们知道若 $F\colon \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{D}\colon G$ 是一个 adjoint pair 则 $F_*\colon \mathrm{Fun}(\mathscr{J}, C) \leftrightarrow \mathrm{Fun}(\mathscr{J}, D)\colon G_*$ 仍是一个 adjoint pair. 这種性質能帮助我们驗證下面的圖表交換:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}(\mathscr{H},\mathscr{C}) \arrow[r, shift left, "\Delta_{\mathscr{J}}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Fun}(\mathscr{J},\mathrm{Fun}(\mathscr{H},\mathscr{C})) \arrow[l, shift left, "\varprojlim_{\mathscr{J}}"] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Fun}(\mathscr{H},\mathscr{C}) \arrow[r, shift left, "\Delta_{\mathscr{J}}"] & \mathrm{Fun}(\mathscr{H},\mathrm{Fun}(\mathscr{J},\mathscr{C})) \arrow[l, shift left, "\varprojlim_{\mathscr{J}}"]
\end{tikzcd}$$

于是我们可以得到, 若 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{J}$-complete, 則 $\mathrm{Fun}(\mathscr{H},\mathscr{C})$ 也是 $\mathscr{J}$-complete, 并且我们根據上面的圖表, 我们非常自然地知道極限的計算應當是 pointwise. (这也說明了爲啥表示范疇里的核就是直接在模范疇里取核了, 并且也說明了 presheaf of abel group on topological space X is abelian).

我们很自然的想到, 由于 Set is complete, 所以 $\mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ is complete, 是否 presheaf category of $\mathscr{C}$ 就是 $\mathscr{C}$ 的完備化呢? 還真是. 这一完備化我们就取 Yoneda embedding $:\mathscr{C} \hookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}, X \mapsto \mathscr{C}(-,C)$, 我们知道 Yoneda embedding 是 fully faithful. 那么完備化和取極限可不可交換呢? 这是由于 $\mathscr{C}(-,*)$ presverse limits, 顯然这一事實來自于 limit 的泛性質配合上 Yoneda lemma. 于是预層范疇便是我们心目中的完備化.

爲什么我们需要完備化呢, 这是因爲我们想知道什么時候能生成一類對象. 比方說 $i\colon \mathscr{C} \hookrightarrow \mathscr{D}$ 有一个左伴隨 $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, 我们就稱 Fd 是自由的 $\mathscr{C}$ 對象, 或者說是由 d 生成的 $\mathscr{C}$ 對象. 那么什么時候函子 i 才會有左伴隨呢?

如果 i preserve limits,A small complete 而且, $x \downarrow i$ is small, 則这样的 left adjoint F 存在. 實際上, $Fx := \varprojlim Q\colon x\downarrow i \to A$, 并且 $Ff\colon Fx \to Fy$, 是 $f\downarrow i\colon y\downarrow i \to x\downarrow i$ 誘導出的極限間的典范映射. 其中 Fx 的計算公式, 引誘了我们得到 pointewise kan extension formular.