Universality: Medium Rare
The Kan extension

Footman

向 Daniel Kan 表示崇高的敬意.

在幾乎所有的范疇論的書里, 一个 slogan 隨處可見: All concepts are Kan extensions. 这是因爲, 我们之前所學的 limit/adjoint 等 concepts, 都可以統一到 Kan extension 的框架中來.

簡單的說 Kan extension 是一个 2-cat 中一 universal arrow. 令 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ 并且 $K\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是二函子, 一个 F 的 left Kan extension along K 是一个 functor $\mathrm{Lan}_K F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ 以及一个自然變换 $\eta\colon F \to \mathrm{Lan}_K F$ 使得:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "K"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathscr{E} \\
& \mathscr{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_K F"'] &
\end{tikzcd}
$$

并且對于任一自然變换 $G\colon \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ 以及 $\lambda\colon F \to GK$, 有 $\tilde{\lambda}\colon \mathrm{Lan}_K F \to G$ 使得 $\tilde{\lambda}K \circ \eta = \lambda$, 換句話說, 卽是我们有自然的‘雙射’:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Lan}_K F, G) \simeq \mathrm{Nat}(F, GK).$$

對偶的, 我们稱 $\mathrm{Ran}_K F$ 以及 ϵ 爲 F 的 right Kan extension along K.

一个經典的例子是如果我们把一个 G-representation over a fixed field k, 看成是范疇 Vect_k^G 的話, 則一个 G 的子羣 H, 誘導 functor $i\colon G \to H$ 誘導函子 $\mathrm{res}\colon \mathrm{Vect}_k^G \to \mathrm{Vect}_k^H$. 这一函子有一个 left adjoint, 卽是 left kan extension along i, 對偶的, 这一函子有一个 right adjoint, 卽是这一函子的 right kan extension.

爲什么 limit 和 adjoint 能統一到 Kan extension 的框架中來呢, 这是因爲我们有如下定理

Theorem 1. A functor $F\colon \mathscr{J} \to \mathscr{C}$ has a limit if and only if it has a right Kan extension along the unique functor $!\colon \mathscr{J} \to \mathbb{1}$ and $\varprojlim_{\mathscr{J}} F \simeq \mathrm{Ran}_! F(\mathbb{0})$.

Theorem 2. A functor $G\colon A \to X$ has a left adjoint if and only if 1_A have the right Kan extension $\mathrm{Ran}_G 1_A$ along G and the extension is preserved by G.

这就已經給了我们一定的理由去了解 Kan extension. 然而 Kan extension 的魅力不止于此. 爲了定义一个大的范疇之間的函子, 其滿足某些性質, 我们往往會考慮一个小范疇上的函子, 之后通過 Kan extension 的方式延拓到大范疇上.

爲什么我们能够做这件事呢, 这是因爲我们有内个公式:

内个公式 3. When $\mathscr{C}$ is small, $\mathscr{D}$ is locally small, and $\mathscr{E}$ is cocomplete, the left Kan extension of any functor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ along any functor $K\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ is computed at $d \in \mathscr{D}$ by the colimit

$$\mathrm{Lan}_K F(d) \cong \int^{c\in\mathscr{C}} \mathscr{D}(Kc, d) \cdot Fc$$

式中的一些符號我们仍未定义, 我们先小小的劇透一下 $\int^{c\in\mathscr{C}}$ 是一个 functor, 它把 functor $H\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times C \to \mathscr{D}$ 的函子映到一个 $\mathscr{D}$ 中的對象, 而 $\cdot\colon \mathrm{Set} \times \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ 也是一个 functor.

Proof. 證明看上去是容易的, 如果我们像物理學家一样相信以下所用等式是自然成立的:

若對于所有的 $d\in\mathscr{D}$, 有 $Ld\cong\int^{c\in\mathscr{C}}\mathscr{D}(Kc,d)\cdot Fc$ 注意到:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(L,G) &\cong \int_{d\in\mathscr{D}}\mathscr{E}(Ld,Gd)\\
&\cong \int_{d\in\mathscr{D}}\mathscr{E}(\int^{c\in\mathscr{C}}\mathscr{D}(Kc,d)\cdot Fc,Gd)\\
&\cong \int_{d\in\mathscr{D}}\int_{c\in\mathscr{C}}\mathscr{E}(\mathscr{D}(Kc,d)\cdot Fc,Gd)\\
&\cong \int_{c\in\mathscr{C}}\int_{d\in\mathscr{D}}\mathscr{E}(\mathscr{D}(Kc,d)\cdot Fc,Gd)\\
&\cong \int_{c\in\mathscr{C}}\int_{d\in\mathscr{D}}\mathrm{Set}(\mathscr{D}(Kc,d),\mathscr{E}(Fc,Gd))\\
&\cong \int_{c\in\mathscr{C}}\mathrm{Nat}(\mathscr{D}(Kc,-),\mathscr{E}(Fc,G-))\\
&\cong \int_{c\in\mathscr{C}}\mathscr{E}(Fc,GKc)\\
&\cong \mathrm{Nat}(F,GK)
\end{aligned}$$

于是 $L\cong\int^{c\in\mathscr{C}}\mathscr{D}(Kc,-)\cdot Fc\cong\mathrm{Lan}_K F$, 这就證明了定理. □

當然, 關于这一定理中所涉及的諸多性質我们都從未提及, 我们接下來對它们進行一些介绍.

令 $S\colon\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times C\to W$ 是一个functor, 而 $\omega\colon w\to S$ 是一个wedge 如果對于任意的 $c\in\mathscr{C}$, 我们有態射 $\omega_c\colon w\to S(c,c)$ 使得, 對于任意的 $f\colon c\to c'$ 我们有如下圖表交換:

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\omega_c"] \arrow[d, "\omega_{c'}"'] & S(c,c) \arrow[d, "S(c,f)"] \\
S(c',c)' \arrow[r, "S(f,c)"'] & S(c,c')
\end{tikzcd}$$

如果 wedge$\omega\colon w\to S$ 是 universal, 則我们稱 w 是一个 ends of functor S, 并且把其记作 $\int_{c\in\mathscr{C}}S(c,c)$, 對偶的, 我们稱其爲 coends of functor S, 并把其记作 $\int^{c\in\mathscr{C}}S(c,c)$

我们來看一个有意思的例子, 令 $F,G\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, 于是我们有 functor $\mathscr{C}(F-,G-) from \mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to\mathrm{Set}$, 并且这一函子的 ends 如果存在, 則我们有

$$\mathrm{Nat}(F,G)\simeq\int_{c\in\mathscr{C}}\mathscr{C}(Fc,Gc)$$

當然, (co)ends 并不是非常虛無縹緲的東西, 如果我们選擇一个好的視角, 它當然就是我们通常的極限:

Example 4. 令 $\mathscr{C}^{\S}$ 是这样一个范疇, $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\S})=\mathrm{Ob}(\mathscr{C})\cup\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, 并且其中態射除去 identity, 只有 $\mathrm{dom} f,\mathrm{cod} f\to f$.

并且對于每个 functor $S\colon\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times C\to W$, 我们都有 associated functor $S^{\S}\colon\mathscr{C}^{\S} to W$ 將在原來范疇的對象 c, 映成 $S(c,c)$, 將態射 $f\colon x\to y$ 映成 $S(x,y)$, 并且將 $x,y\to f\in\mathscr{C}^{\S}$ 映成 $S(x,f),S(f,y)$.

于是我们總有

$$\int_{c\in\mathscr{C}}S(c,c)\simeq\varprojlim S^{\S}.$$

顯然 $\int_{c\in\mathscr{C}}$ 是一个 functor.

我们順帶介绍一个有趣的定理

Theorem 5 (Fubini)**.** 若 $S\colon\mathscr{P}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{P}\times\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to X$ 是一个functor 使得其 end 存在. 則我们有

$$\int_{(p,c)\in(\mathscr{P}\times\mathscr{C})}S(p,c,p,c)\simeq\int_{p\in\mathscr{P}}\int_{c\in\mathscr{C}}S(p,c,p,c)\simeq\int_{c\in\mathscr{C}}\int_{p\in\mathscr{P}}S(p,c,p,c).$$

至于 copower, 我们到现在都還沒有給出它的定义. 爲了介绍这个, 我们先小小的提一下 Enrichment 的槩念 (欲聽后事, 下回分解)