Continuous Lattices and Domains 一书笔记

胡晓

November 1, 2022

Contents

1 引言: Introductions

这篇笔记是学生关于阅读 **Continuous Lattices and Domains** 的笔记, 如有错漏还请各位老师同学多加指正.

我尽量顺着书中的大体内容一点一点的写, 本文的结构尽量跟随原文的结构. 希望学生能尽量不要出大差错. 在本篇笔记中, 如果遇到英文术语我会尽量翻译成中文, 如不便于翻译, 请原谅学生愚拙, 将原样不动. 对照表放在本文的附录.

默认读者知道基本的范畴论的概念. 对于本文中提到的范畴, 我们自动选定一个大的正则基数 κ, 使得这些范畴里的对象和态射全体的基数都严格小于 κ. 这是一个纯技术上的约定, 如果你不担心大小问题的话, 可以不用管这个约定.

2 有序集和格: Ordered Sets and Lattices

2.1 一般的定义和记号: Generalities and Notations

在本文中, 我们把 Preordered set L, 就看成是一个范畴 $\mathcal{C}$. 并且我们把 L 的子集 2^L, 视为下述两者其一:

1. $\mathcal{C}$ 上满足一定条件的图表; 即, 一个函子 $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$, 其中范畴 $\mathcal{J}$ 是小范畴;

2. $\mathcal{C}$ 上满足一定条件的**预层, presheaf**. 即, 一个函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

在这篇笔记中, 我们更多的关心前者, 后者和前者在一定意义下的对应, 可以参看附录A一节. 在这样的看法下, 自然的会有下面的这些定义.

称呼对象 $a \in \mathcal{C}$ 是一个**下界, lower bound** 或者是一个**锥, cone** of a diagram $F\colon X \to \mathcal{C}$, 以及说 $b \in \mathcal{C}$ 是一个**上界, upper bound** 或者说是一个**余锥, cocone**, 如果存在对应的两族态射 $\{\lambda_x\colon a \to Fx\}_{x\in X}$, $\{\rho_x\colon Fx \to b\}_{x\in X}$ 使得下面两个对应的图表, 对于任意一个 $f\colon x \to y \in X$ 交换:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\lambda_x"] \arrow[dr, "\lambda_y"'] & Fx \arrow[d, "Ff"] \\ & Fy \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fx \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\rho_x"] & \\ Fy \arrow[r, "\rho_y"'] & b \end{tikzcd}.$$

也可以简单的把它们记成 $\lambda\colon a \to F$ 或者是 $\rho\colon F \to b$, 或者为了书写方便, 有的时候也把 F 和 X 等同起来. 一些书中也把 cone 记成 $\lambda\colon \Delta_a \to F$, 式子中的 $\Delta_a\colon X \to \mathbf{Fun}(X,\mathcal{C})$ 是通常的对角映射.

说一个图表 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ 是**定向的, directed** 如果 $\mathcal{D}$ 至少有一个对象并且对于每个有限的 $\mathcal{D}$ 的子范畴, 都有 cocone 存在. 或者等价的说, 如果:

- 对于所有的对象 $x, y \in \mathcal{D}$, 存在对象 $z \in \mathcal{D}$ 是 $\{x, y\}$ 的 cocone

- 对于所有 $f, g\colon x \to y \in \mathcal{D}$, 存在态射 $h\colon y \to z$, 使得 $hf = gf$, 是 $\{f, g\}$ 的 cocone.

此时 $\mathcal{D}$ 也称为是定向的. 如果 $F^{\mathrm{op}} \subset \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 是定向的, 则我们称 F 作为 $\mathcal{D}$ 的子范畴是**滤过的, filtered**.

也有一种同伦论风味的看法: 定义函子 $u\colon \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \hookrightarrow \{\mathbb{0} \to \mathbb{2} \leftarrow \mathbb{1}\}$ 和 $v\colon \{g, h\colon \mathbb{0} \to \mathbb{1}\} \hookrightarrow \{\mathbb{0} \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{1} \xrightarrow{f} \mathbb{2}\}$. 其中范畴 $\mathbf{cod}(v)$ 里的态射满足 $fg = fh$(这样的图表我们也通常叫做**余叉, cofork**). 我们令函子的族 $\mathcal{L} := \{u, v\}$. 一般的, 给定两个函子的族 $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ 如果对于任意的 $l \in \mathcal{L}, r \in \mathcal{R}$, 以及下面实线的图表交换:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "l\in\mathcal{L}"'] & \bullet \arrow[d, "r\in\mathcal{R}"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\mu"] & \bullet \end{tikzcd}$$

就存在一个虚线表示的函子 μ, 使得上面和下面的两个三角形图标的各自交换, 则我们称 **函子的族 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathcal{L}$ 有右提升性质, $\mathcal{R}$ has right lifting property against to $\mathcal{L}$**. 或者好看一点, 记成 $\mathcal{L} \boxslash \mathcal{R}$. 更进一步, 如果在上述定义中提到的 μ 是唯一的, 则我们称**函子的族 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathcal{L}$ 有正交右提升性质, $\mathcal{R}$ has orthogonal right lifting property against to** $\mathcal{L}$, 或者好看一点, 记成 $\mathcal{L} \boxslash_! \mathcal{R}$.

如果 $\mathcal{L} = \{l\}$, 我们也简单记 $l \boxslash \mathcal{R} := \{l\} \boxslash \mathcal{R}$. 当然另一边的情况也类似定义.

对于这边定义的族 $\mathcal{L} := \{u, v\}$, 我们可以等价的说 $\mathcal{C}$ 是定向的, 如果 $r\colon \mathcal{C} \to \{\mathbb{0}\}$ 满足 $\mathcal{L} \boxslash r$. 更一般的说, 我们称函子 $r\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是**局部定向的, locally directed**, 如果 r 满足 $\mathcal{L} \boxslash r$.

更抽象一些的看法是, 我们可以引入范畴的**聚合, join**, 这是 **poset** 上的**序数和, ordinal sum** 的一个类比. 让 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 是两个范畴, 我们定义新的范畴 $\mathcal{P} \star \mathcal{Q}$. 这一范畴的对象集合为:

$$(\mathcal{P} \star \mathcal{Q})_0 := \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{Q}_0,$$

并且态射集为:

$$(\mathcal{P} \star \mathcal{Q})_1 := \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{Q}_1 \sqcup (\mathcal{P}_0 \times \mathcal{Q}_0)$$

其中 **dom** 和 **cod** 限制在 $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{Q}_0$ 上, 分别是到集合 $\mathcal{P}_0$ 和 $\mathcal{Q}_0$ 的投射, 并且族 $(\mathcal{P}_0 \times \mathcal{Q}_0)$ 对范畴 $\mathcal{P} \star \mathcal{Q}$ 里的态射是左右吸收的. 形象地说, 这个定义是将 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 中的每个对象, 都用一个新的唯一的态射链接在一起. 对于只有一个对象一个态射的范畴 $\{\mathbb{0}\}$, 我们记 $\mathcal{J}^{\triangleright} := \mathcal{J} \star \{\mathbb{0}\}$ 以及 $\mathcal{J}^{\triangleleft} := \{\mathbb{0}\} \star \mathcal{J}$.

显然 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 到 $\mathcal{P} \star \mathcal{Q}$ 有一个 fully faithful embedding, 我们分别把它们记成 $\iota_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P} \star \mathcal{Q}$ 和 $\iota_{\mathcal{Q}}\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P} \star \mathcal{Q}$.

容易看出上文中提到的 $\mathcal{L}$ 中的 u 实际上是都是 $\iota_{\mathcal{J}}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}^{\triangleright}$ 的特例, 于是我们可以把 $\mathcal{L}$ 替换成

$$\mathcal{L} := \{\iota_{\mathcal{J}}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}^{\triangleright} \colon \ \mathcal{J} \text{ is a finite diagram.}\}$$

如果子范畴 X 的 cocone 在相差一个自然同构的意义下是唯一的, 我们就称该 cocone 是**最小上界, least upper bound**(or lub) 或者是**余积, coproduct**, 并将其记为 $\vee X$ 或者是 $\coprod X$. 对偶的, 我们记 X 在自然同构意义下唯一的 cone 为 $\wedge X$ 或者是 $\prod X$. 并且特别的, 如果 X 是定向集的话, 我们会把 X 的 lub 记为 $\coprod^{\uparrow} X$. 为了简单起见, 如果 $X = \{x, y\}$, 我们就分别把 coproduct 记成 $x \vee y, x \sqcup y$ 或者把 product 记成 $x \wedge y, x \times y$.

由于学生暂时没有看到比较好的对应, 我们暂且把**网, net** 定义成一个如下映射 $\varphi_0\colon \mathcal{J}_0 \to \mathcal{C}_0, j \mapsto x_j$, 其中 $\mathcal{J}$ 是一个 directed set, 而 $\mathcal{C}_0$ 是某一集合. 并且我们称一网是**单调的, monotone**, 如果上述提到的映射 φ_0 可以提升成为一个函子 $\varphi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

对于范畴 $\mathcal{C}$, 以及图表 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 我们有下列定义:

1. ${}_{\downarrow}F$ 是 F 的离散纤维化替代;

2. ${}^{\uparrow}F$ 是 F 的离散余纤维化替代, 详见附录A一节;

3. 对于任何 $x \in \mathcal{C}$, ${}_{\downarrow}x := {}_{\downarrow}\{x\} \simeq \mathcal{C}_{/x}$ 和 ${}^{\uparrow}x := {}^{\uparrow}\{x\} \simeq \mathcal{C}_{x/}$.

   并且我们称:

4. 图表 F 是一个**下部集, lower set** 如果 $F \simeq {}_{\downarrow}F$;

5. 图表 F 是一个**上部集, lower set** 如果 $F \simeq {}^{\uparrow}F$;

6. 图表 F 是一个**理想, ideal**, 如果 F 是一个 directed lower set;

7. 图表 F 是一个**滤子, filter**, 如果 F 是一个 filtered upper set;

8. 理想 F 被称作是**主的, principal**, 如果存在某个 $x \in \mathcal{C}$ 使得 F factor through ${}_{\downarrow}x$;

9. 滤子 X 被称作是主的, 如果存在某个 $x \in \mathcal{C}$ 使得 F factor through ${}^{\uparrow}x$;

10. 我们记 $\mathbf{Id}\mathcal{C}$(resp. $\mathbf{Filt}\mathcal{C}$) 是所有 $\mathcal{C}$ 上的理想全体 (reps. 滤子全体), 作为 $\mathbf{Bund}(\mathcal{C})$ 的满子范畴;

11. 我们记 $\mathbf{Id}_!\mathcal{C} := (\mathbf{Id}\mathcal{C})^{\triangleleft}$ 以及 $(\mathbf{Filt}\mathcal{C})^{\triangleleft}$.

由离散纤维化的性质, 我们知道

$$X \to {}_{\downarrow}X = {}_{\downarrow\downarrow}X$$

其中 $X \to {}_{\downarrow}X$ 是一个**共尾, cofinal(终的, final)** 的函子. 即, 若 $F\colon {}_{\downarrow}X \to \mathcal{E}$ 的 colimit 存在, 则一定有

$$\mathbf{colim}_{{}_{\downarrow}X} F \simeq \mathbf{colim}_X F_{|X},$$

式中 $F_{|X} := X \to {}_{\downarrow}X \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ 是 F 沿着 $X \to {}_{\downarrow}X$ 做的限制.

Proposition 2.1. 若图表 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是定向的, 则离散纤维化替代 $\widehat{F}\colon \widehat{\mathcal{J}} \to \mathcal{C}$ 也是定向的

Proof. 对于任意 $[f] \in \mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Fj)$, 由于 $\mathcal{J}$ 的滤过性, 我们不妨选择一个 $[f]$ 的代表元 $f\colon c \to Fj$. 不难看出, f 恰好是态射 $f\colon (c,[f]) \to \big(Fj, [\mathbf{id}_{Fj}]\big)$. 这便保证了对于任意 $(c,[f]),(d,[g])$ 一定存在一个 $e \in \mathcal{J}$, 使得 $(c,[f]),(d,[g])$ 到 $(Fe,[\mathbf{id}_{Fe}])$ 有态射.

由于 $\mathcal{J}$ 是滤过的, 所以对于两个 $[f],[g] \in \mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}}(c,Fj)$, $[f] = [g]$ 当且仅当存在 $p\colon j_1 \to j_3, q\colon j_2 \to j_3$, 使得 $(Fp)f = (Fq)g$. 于是对于两个态射 $u,v\colon (c,[f]) \to (Fx,[\mathbf{id}_{Fx}])$, 根据其态射定义, 我们得到 $[f] = [\mathbf{id}_{Fx}u] = [\mathbf{id}_{Fx}v]$. 由于 $[u] = [v]$, 上面提到的滤过性质保证存在态射 $p,q\colon Fx \to Fy \in X$ 满足 $pu = qv$. 另一方面, 由于 $\mathcal{J}$ 是滤过的, 所以一定存在 $r\colon y \to z$ 使得 $s = rq = rp$. 注意到由于 $[Fs] = [\mathbf{id}_{Fx}]$, 这便给出了 ${}_{\downarrow}X$ 中态射 $Fs\colon (Fx,[\mathbf{id}_{Fx}]) \to (Fz,[\mathbf{id}_{Fz}])$ 满足 $(Fs)f = (Fs)g$. 于是根据定义, 我们知道 $\widehat{\mathcal{J}}$ 是滤过的. □

于是考虑子范畴的情况, 我们有:

Proposition 2.2. 对于范畴 $\mathcal{C}$ 和满子范畴 $X \subset \mathcal{C}$ 下面三个命题是等价的:

1. X 是定向的;

2. ${}_{\downarrow}X$ 是定向的;

3. ${}_{\downarrow}X$ 是理想.

Proof. 由于2和3是等价定义, 我们只需要证明1推出2以及3推出1.

先证1推出2:

由命题2.1立刻得到.

而2推出1只需要注意到, 由于 X 是满子范畴, 于是对于每个 $(x,[\mathbf{id}_x]) \rightrightarrows (y,[\mathbf{id}_y]) \to (z,[\mathbf{id}_z])$, 有提升 $x \rightrightarrows y \to z$ 存在. □

我们把 **inf semilattice**, 就看成是一个范畴 $\mathcal{C}$ 上存在乘积, 而 **sup semilattice**, 看成是一个范畴 $\mathcal{C}$ 上存在余积. 终对象和始对象分别记为 $*$ 和 $\emptyset$. 并把**单调函数**看成是函子, 自然的我们会有如下事实:

Proposition 2.3. 令 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 我们有等价的如下命题:

1. F 保持定向余极限;
2. F 保持理想的余极限.
   并且如果 $\mathcal{C}$ 有余积并且 F 保持有限余积, 则1和2同时等价于
3. F 保持任意余极限.

并且对偶的命题也对那些保持极限的函子成立.

Proof. 由于理想一定是定向的, 所以自动1推出2. 并且由于2.1, 若图表 Q 是定向的, 则我们有 ${\downarrow}Q$ 是一个理想. 并且由于 $Q \to {\downarrow}Q$ 是 final 的, 我们知道 F 保持 ${\downarrow}Q$ 的余极限就保持 Q 的. 故2推出1成立.

而最后一条与前者的等价性是 GTM5 习题, 不赘述. □

2.1.1 离散纤维化的基变换: Base Change of Discrete Fibrations

令 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 functor. 若给一个 presheaf $P\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, 我们有 $f \mapsto PFf$ 是 $\mathcal{C}$ 上的 presheaf, 我们把该 presheaf 记作 F_*P, 称为 P 在 F 下的**顺像, directed image**. 而对于任意一个 $Q\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C} \in \mathbf{DFib}(\mathcal{C})$, 都有 ${\downarrow}FQ$ 是一个 $\mathcal{D}$ 上的 discrete fibration, 把该 discrete fibratioin 记作 F^*Q, 称为 Q 在 F 下的**逆像, inverse image**. 由于 $\mathbf{DFib} \to \mathbf{Psh}$ 自然同构, 我们不妨把 F 在他们上面的作用等同起来.

注意到对于 $Q\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, $P\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, 我们有自然同构

$$\begin{aligned}
\left(Q, \mathbf{el}^{\mathcal{C}} F_* P\right)_{\mathcal{C}} &\simeq \mathbf{Fun}\left(K_{\mathcal{C}} Q, PF\right) \\
&\simeq \mathbf{Fun}\left(\mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Qj), PF\right) \\
&\simeq \mathbf{Fun}\left(\mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}} \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(-, FQj), P\right) \\
&\simeq \mathbf{Fun}\left(K_{\mathcal{D}} FQ, P\right) \\
&= \mathbf{Fun}\left(F^* Q, P\right)
\end{aligned}$$

于是我们有下面这个命题成立:

Proposition 2.4. 基变换函子 F^* 是 F_* 的左伴随.

2.1.2 节选习题: Selected Exercises

Exercise 2.5. 令 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 并且 $Q\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上图表, 我们有如下范畴等价:

$$_{\downarrow}(FQ) \simeq {}_{\downarrow}\left(F_{\downarrow}Q\right)$$

其中 $F_{\downarrow}Q \coloneqq {}_{\downarrow}Q \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$.

Proof. 令 $\pi_{FQ}\colon {}_{\downarrow}(FQ) \to \mathcal{D}$ 的典范投射. 由离散纤维化的的伴随对我们知道, 只需要证明下图

$$\begin{tikzcd}
{}_{\downarrow}Q \arrow[rr, "F^{\natural}"] \arrow[dr, "F_{\downarrow}Q"'] & & {}_{\downarrow}(FQ) \arrow[dl, "\pi_{FQ}"] \\
& \mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

交换即可. 其中 $F^{\natural}\colon {}_{\downarrow}Q \to {}_{\downarrow}(FQ)$ 的定义为:

$$\begin{tikzcd}
(X,[gf]) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & (FX,[F(gf)]) \arrow[d, "Ff"] \\
(Y,[g]) \arrow[r, mapsto] & (FY,[Fg])
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\longmapsto"]
\end{tikzcd}$$

由图表追踪则知交换性显然. □

Exercise 2.6. 若我们有一理想的集合 $\{I_i\colon \mathcal{J}_i \to \mathcal{C}\}_{i\in I}$, 若 $\mathcal{C}$ 有限完备, 则这族态射的交 $\cap_i I_i\colon \cap_i \mathcal{J}_j \to \mathcal{C}$ 是一个 ideal. 式中 $\cap_i \mathcal{J}_i$ 是 $\mathcal{C}$ 上的**纤维积, fibre product**, 或者看成是 $\mathbf{Bund}(\mathcal{C})$ 上的乘积.

Proof. 由于右提升性质对极限封闭, 故 $\cap_i I_i$ 是离散纤维化. 下面要证明 $\cap_i \mathcal{J}_i$ 仍然定向. 对于任意 $x, y \in \cap_i \mathcal{J}_i$, 由于 I_i 是理想, 于是一定存在一个 $z_i \in \mathcal{J}_i$, 我们都有态射

$$\cap_i I_i(x) \sqcup \cap_i I_i(y) \to I_i z_i \in \mathcal{C}.$$

由于 I_i 是离散纤维化, 我们可以知道一个上述态射的提升 $Z_i \to z_i \in I_i$, 使得 $Z \in \cap_i I_i$, 并且诱导了 $x, y \to Z$. 剩余的情况考虑构造余等值子即可. □

根据上面的叙述, 我们也可以证明如果 $\mathcal{C}$ 有乘积, 两个理想的交也会是理想. 同样我们希望,

Exercise 2.7. 若对于任意的 $\mathcal{C}$ 上的理想 I_1, I_2, 有 $I_1 \sqcup I_2$ 包含在某一理想中, 则 $\mathcal{C}$ 本身是定向的.

Proof. 对于任意对象 $x, y \in \mathcal{C}$, 由于 ${}_{\downarrow}x$, ${}_{\downarrow}y$ 分别有终对象 $\mathbf{id}_x$ 和 $\mathbf{id}_y$, 故都为理想. 那么 ${}_{\downarrow}x \sqcup {}_{\downarrow}y$ 包含在某一理想 (I, π_I) 中, 就一定有 $\mathbf{id}_x, \mathbf{id}_y$ 中的像在 I 中有公共的 targetz. 利用 π_I 就得到了 $x, y \to \pi_I(z)$.

对态射的分析是类似的, 考虑 ${}_{\downarrow}\{f: x\colon y\}$ 和 ${}_{\downarrow}\{g\colon x \to y\}$ 包含在的理想 I, 如法炮制就可以得到结果. □

Exercise 2.8. 令 $\mathcal{C}$ 是一范畴, $\mathbf{DFib}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 上所有离散纤维化全体, 证明如下事实:

1. $\mathbf{Id}(\mathcal{C}) \subset \mathbf{DFib}(\mathcal{C})$.
2. 若 $f: x \to y$ 使得诱导映射 ${}_{\downarrow}x \to {}_{\downarrow}y$ 是范畴等价, 则 f 是同构.

Proof. 命题 1 和 2 都是显然的, 1 单纯是定义, 2 是变形的 yoneda lemma. □

Lemma 2.9. 令 I 是一 index category, 若 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是有 $\mathcal{I}$-极限的范畴间的保持 $\mathcal{I}$-极限的函子. 则诱导映射 $F_!: \mathbf{Psh}(\mathcal{C}) \to: \mathbf{Psh}(\mathcal{D})$ 也保持 $\mathcal{I}$-极限.

Proof. 根据 $F_!$ 的构造, 我们只需证明

$$\mathbf{el}^{\mathcal{C}}\mathbf{lim}_{i\in\mathcal{I}}Qi \to \mathbf{lim}_{i\in\mathcal{I}}\mathbf{el}^{\mathcal{C}}Qi$$

是 cofinal 的. 这只需注意到对于每个 $\mathcal{I}$-相容的态射组 $(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \to Qi)$, 我们能找到唯一的提升 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{lim}_{i\in\mathcal{I}}c_i) \to \mathbf{lim}_{i\in\mathcal{I}}Qi$. □

利用上面的引理, 我们有

Theorem 2.10. 令 $F: \to \mathcal{D}$ 是一有限极限范畴之间的函子. 则 F 保持有限极限当且仅当 F^* 保持任意余极限和有限极限.

Proof. Think. □

2.2 格和偏序集的完备性条件: Completeness Conditions for Lattices and Posets

在这一节中, 我们把偏序集合也看作是一个范畴. 只需要同构都是自然的我们也不太担心同构类太复杂的问题. 于是自然的我们变可以把 semilattice 看作是拥有乘积的范畴, complete lattice 看成是完备范畴, 等等. 这样的想法自然的导出了本节的内容.

Definition 2.11. 我们说一个范畴 $\mathcal{C}$ 是**相对定向图表完备的, complete with respect to directed sets**, 或者说是**定向完备的, directed complete**, 如果每个定向图表在 $\mathcal{C}$ 中都有余极限. 我们也简记为 dcat. 一个 dcat 如果有初始对象我们也叫他带基点的 dcat.

Theorem 2.12. 令 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是完备余完备范畴 $\mathcal{C}$ 上的自函子. 则 $\mathcal{C}$ 上的不动点 $\mathbf{fix}(F) := \{x \in \mathcal{C}, : x \simeq F(x)\} \subset \mathcal{C}$ 构成的满子范畴在 $\mathcal{C}$ 中完备. 特别的 F 在 $\mathcal{C}$ 中的极限余极限是 $\mathbf{fix}(F)$ 中的始对象终对象.

A 纤维化: Fibrations

这一节主要是对2.1中所叙述的纤维化进行一个补充, 也可以当做一个独立的一节来看. 通常**纤维化, fibration** 一词是出现在代数拓扑中的, 这一概念主要是用来描述那些同伦提升性质的连续映射. 我们把这样的性质抽象出来, 便得到了我们现在有的纤维化的概念. 不严格的说, 纤维化是指一些态射相对于一族是*几乎同构*的态射的右提升性质的. 这边的*几乎是同构*是一个很宽泛的概念, 但一般情况下, 这一词和在**同伦范畴, homotopy category** 中是同构是一个意思.

A.1 离散纤维化: Discrete Fibrations

在小节2.1中, 我们提到我们对一个 $\mathcal{C}$ 上的 subset, 有两种看法, 一种是作为 $\mathcal{C}$ 上的图表, 另一种是作为 $\mathcal{C}$ 上的预层. 下面我们将尝试说明, 这两种看法在一定的程度上可以相互转换.

Definition A.1. 回顾一下离散纤维化的定义, 我们说函子 $F\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$ 是一个离散纤维化, 如果对于每个**全空间, total space** 中元素 $e\in\mathcal{E}$, 都有下面的所谓**提升唯一性, uniquely lifting property** 存在, 即是说, 对于任一**底空间, base space**$\mathcal{B}$ 中的态射 $f\colon b\to Fe$, 都存在唯一一个提升态射 $\tilde{f}\colon e'\to e$, 使得 $F\tilde{f}=f$ 成立.

对偶的, 我们称函子 $F\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$ 是一个**离散原纤维化, discrete opfibration**, 如果 $F^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{E}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个离散纤维化. 这等价于把离散纤维化定义中所说的态射 $f\colon b\to Fe$ 改为 $g\colon Fe\to q$ 有唯一的提升.

更同伦论的说如果对于态射 $\iota_{\mathbb{1}}\colon \{\mathbb{1}\}\hookrightarrow\{\mathbb{0}\to\mathbb{1}\}$ 有 $\iota_{\mathbb{1}}\boxslash_! F$, 则称 F 是一个离散纤维化.

Definition A.2. 令 $F\colon\mathcal{P}\to\mathcal{C}$, $G\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的两个图表. 我们说 $\varphi\colon F\to G$ 是一个**图表态射, morphism of diagram**, 如果 $\varphi\colon\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$, 满足图表

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{Q} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

交换. 令 $(F,G)_{\mathcal{C}}$ 是从图表 F 到图表 G 的态射全体, 并且有自然同构:

$$(F,G)_{\mathcal{C}}\cong\mathbf{Fun}(\mathcal{Q},\mathcal{C})\times_{\mathbf{Fun}(\mathcal{P},\mathcal{C})}\mathbf{Fun}(\mathcal{P},\mathcal{Q}).$$

这便给出了一个 $\mathcal{C}$ 上图表全体的一个范畴结构, 我们记这个范畴为 $\mathbf{Bund}(\mathcal{C})$.

Definition A.3. 对于任意一 $\mathcal{C}$ 上图表 $F\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$, 我们定义

$$K_{\mathcal{C}}(F):=\mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Fj).$$

记 $\mathbf{Psh}(\mathcal{C}):=\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的预层全体. 于是我们得到了函子

$$K_{\mathcal{C}}\colon\mathbf{Bund}(\mathcal{C})\to\mathbf{Psh}(\mathcal{C}).$$

对于任意一预层 $P\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$, 我们同样可以定义范畴 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}P$. 范畴 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}P$ 中的对象是这样的二元组 (C,x) 全体: C 是 $\mathcal{C}$ 中对象, x 是 $P(C)$ 中元素. 并且定义态射 $f\colon(C,x)\to(D,y)$ 是 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}P$, 如果元素 x,y 满足 $P(f)(y)=x$.

注意到典范投射 $\pi_P\colon\mathbf{el}^{\mathcal{C}}P\to\mathcal{C},(C,x)\mapsto C$ 是一个 $\mathcal{C}$ 上的图表, 于是我们得到了一个新的函子

$$\mathbf{el}^{\mathcal{C}}\colon\mathbf{Psh}(\mathcal{C})\to\mathbf{Bund}(\mathcal{C}).$$

Proposition A.4. 我们有伴随对 $K_{\mathcal{C}}\dashv\mathbf{el}^{\mathcal{C}}$.

Proof. 对于任意的 $F\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 和预层 $Q\in\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$, 首先有自然同构:

$$\begin{aligned}\mathbf{Fun}(K_{\mathcal{C}}F,Q)&\simeq\mathbf{Fun}(\mathbf{colim}_{j\in\mathcal{J}}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Fj),Q)\\&\simeq\mathbf{lim}_{j\in\mathcal{J}}\mathbf{Fun}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Fj),Q)\\&\simeq\mathbf{lim}_{j\in\mathcal{J}}QFj\end{aligned}$$

接下来我们要证明存在下面这个自然同构

$$(F, \mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q)_{\mathcal{C}} \simeq \mathbf{lim}_{j\in\mathcal{J}} QFj. \tag{1}$$

假设 $\varphi\colon F \to \mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q$ 是一个图表态射. 由于 $\pi_Q\varphi = F$, 于是一定有 $\varphi j = (Fj, x_{\varphi j})$. 这使得我们可以定义映射 $\mu_j\colon \varphi \mapsto x_{\varphi j} \in QF_j$. 对于 $f: j \to j' \in \mathcal{J}$, $\varphi f \in \mathbf{el}^{\mathcal{C}}$ 一定满足 $QFf(x_{\varphi j'}) = x_{\varphi j}$. 这使得 $\mu\colon (F, \mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q)_{\mathcal{C}} \to QF$ 是一个锥.

而对于任意的锥 $\sigma\colon S \to QF$, 我们对每个 $s \in S$, 定义 $\eta_s(j) = (Fj, \sigma(s))$. 容易验证这给出了映射 $\eta\colon S \to (F, \mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q)_{\mathcal{C}}$. 由构造方式立刻得到唯一性. 利用 $\mathbf{lim}_{j\in\mathcal{J}}$ 的泛性质, 我们证明了式1是自然同构. □

事实上对于任意预层 $Q \in \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$, 我们有

$$\begin{aligned}
K_{\mathcal{C}}(\mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q) :=& \mathbf{colim}_{(C,x)\in\mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \pi_Q(C,x)) \\
=& \mathbf{colim}_{(C,x)\in\mathbf{el}^{\mathcal{C}}Q}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \\
=& \mathbf{colim}_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C)\to Q}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \\
\simeq& Q
\end{aligned}$$

最后一个自然同构来自于 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 是稠密函子的证明. 这直接告诉了我们 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}$ 是 fully faithful 的. 对 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}$ 做进一步的分析我们还得到下面这个事实: 在定义A.3中提到的 π_P 是一个离散纤维化. 这是由 $\mathbf{el}^{\mathcal{C}}$ 中态射的定义保证的.

如果我们考虑任意图表 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, 经过伴随对之后我们会得到新的图表

$$_{\downarrow}F\colon {}_{\downarrow}\mathcal{J} \to \mathcal{C} := \mathbf{el}^{\mathcal{C}}(K_{\mathcal{C}}F)$$

并且通过1这一同构, 我们知道伴随对的单位映射给出了函子:

$$\begin{aligned}
\widehat{(\cdot)}\colon \mathcal{J} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{J}} \\
j &\longmapsto \widehat{j} := \left(Fj, \left[\mathbf{id}_{Fj}\right]\right), \\
f: j \to j' &\longmapsto \widehat{f} := Ff\colon \left(Fj', \left[\mathbf{id}_{Fj'}\right]\right) \to \left(Fj, \left[\mathbf{id}_{Fj}\right]\right).
\end{aligned}$$

式中 $[g]$ 是态射 $g\colon Fj \to Fj'$ 在典范映射 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Fj, Fj') \to \mathbf{colim}_{j'\in J}\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Fj, Fj')$ 下的像. 并且对于任何 $f: Fj \to Fj'$, 都有 $[f] = \left[\mathbf{id}_{Fj}\right]$, 于是我们知道 $\widehat{(\cdot)}$ 是 essentially surjective 的. 当函子 F fully faithful, 特别的当 F 是离散纤维化的时候, 函子 $\widehat{(\cdot)}$ 给出了一个范畴等价. 于是我们便把 $\widehat{F}$ 称作 F 的**离散纤维化替代, discrete fibration replacement**

记 $\mathbf{DFib}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 上所有离散纤维化构成的 $\mathbf{Bund}(\mathcal{C})$ 的满子范畴, 经过上述分析我们得到了投射函子:

$$\widehat{(\cdot)}\colon \mathbf{Bund}(\mathcal{C}) \to \mathbf{DFib}(\mathcal{C}).$$

并且有范畴等价 $K\colon \mathbf{DFib}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$.

A.2 路连通分支: Path-connected Components

当人们讨论拓扑空间的时候, 如果这个空间任意两个点之间都存在一条道路, 人们就说一个空间是路联通的. 假使我们把对象间的态射, 看成是这两个对象之间的一条道路的话, 我们有如下定义:

Definition A.5. 对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 x, y, 我们称 x, y 之间有一条道路, 如果在 $\mathcal{C}$ 中存在态射 $X_i, X_{i+1} \to Y_i, i = 0, \cdots, n$, 满足 $Y_0 = x, Y_n = y$. 显然这构成一个等价关系, 在不产生歧义的情况下, 我们把和对象 x 之间有道路的满子范畴记作 $[x]$.

特别的, 当两个对象之间存在态射时, 他们一定在同一个路联通分支里. 于是路联通分支把范畴划分成了一些不交并.

我们现在提供一种典范的视角来看待范畴中的路联通分支: 令 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, 以如下方式定义函子 $\mathbf{pt}_{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{pt}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} &\to \mathbf{Set} \\ x &\mapsto \{x\} \\ f \colon x \to y &\mapsto \{f\} \colon \{x\} \to \{y\}, \{f\}(x) = y. \end{aligned}$$

我们有:

Theorem A.6. 对于任何的对象 $x, y \in \mathcal{C}$, x 和 y 在同一个路联通分支里, 当且仅当 x, y 在 $\mathbf{colim}_{x\in\mathcal{C}} \mathbf{pt}_{\mathcal{C}}(x)$ 中的像相同.

Proof. 由余极限的定义立刻得到. □

于是我们便得以定义 $\pi_0(\mathcal{C}) \coloneqq \mathbf{colim}_{x\in\mathcal{C}} \mathbf{pt}_{\mathcal{C}}(x)$. 显然 π_0 是函子. 对于更一般的 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 我们会有

Proposition A.7. 对于任何 $\mathcal{D}$ 中对象 d, 由如下自然的同构:

$$\mathbf{colim}_{x\in\mathcal{C}} \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(d, Fx) \simeq \pi_0(d/F).$$

其中 d/F 是 comma category.

Proof. 由余极限的泛性质立刻得到. □

A.3 离散原纤维化: Discrete Opfibrations

在本节中, 我们将讨论节A.1中关于离散纤维化结论的离散原纤维化版本. 我们令 $\mathcal{D} \coloneqq \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. 常把函子 $F \colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$, 称为 $\mathcal{D}$ 上的一个 pre-cosheaf. 记 $\mathcal{D}$ 上 pre-cosheaf 全体以及其自然变换构成的范畴为 $\mathbf{Pcs}(\mathcal{D})$, 我们有范畴的相等 $\mathbf{Pcs}(\mathcal{D}) = \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$. 我们可以定义如下的函子

$$\begin{aligned} K^{\mathcal{D}} \coloneqq& \mathbf{Bund}(\mathcal{D}) \xrightarrow{(\cdot)^{\mathrm{op}}} \mathbf{Bund}(\mathcal{C}) \xrightarrow{K_{\mathcal{C}}} \mathbf{Psh}(\mathcal{C}) = \mathbf{Pcs}(\mathcal{D}) \\ \mathbf{el}_{\mathcal{D}} \coloneqq& \mathbf{Pcs}(\mathcal{D}) = \mathbf{Psh}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathbf{el}^{\mathcal{C}}} \mathbf{Bund}(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\cdot)^{\mathrm{op}}} \mathbf{Bund}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

容易得到 $K^{\mathcal{D}} \dashv \mathbf{el}_{\mathcal{D}}$. 并且考虑 $\check{F} \colon \check{\mathcal{J}} \to \mathcal{D} \coloneqq \mathbf{el}_{\mathcal{D}}\left(K^{\mathcal{D}}F\right)$, 我们会有 $\check{F}$ 是一个 $\mathcal{D}$ 上的离散原纤维化. 跟离散纤维化的时候一样, 我们把 $\check{F}$ 称为是 F 的**离散原纤维化替代, discrete opfibration replacement**.

B 词汇表: Dictionary