Universality Former

Footman

这一次我打算换一種方式敘述这一節的内容, 希望大家多提意見. 在这一節中, 我们主要要介绍 universality 的幾種表现形式, 他们在某些情况下是可以相互表示的. 不過在語言上, 这些不同的表示提供了一些不同的便利. 这一節的内容非常的豐富, 可以說是初等范疇論核心的核心, 我覺得不太可能一次課就講完, 但我還是盡可能的把他们作在这里.

若性質 P 其满足如下形式:

$$\forall x_1, \cdots, x_n, \exists! y P(x_1, \cdots, x_n, y),$$

我们就說性質 P is universal.

令 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ 是二范疇, $X \in D$ 我们稱 $u\colon X \to FY$ 是 $X \to F$ 的一个 **universal arrow** 若對任意的對象 $f\colon Z \in C$, 有唯一的態射 $\tilde{f}\colon Y \to Z$ 使得:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & FY \arrow[d, dashed, "F\tilde{f}"] \\ & FZ \end{tikzcd}$$

對偶地, 我们也稱 $FY \to X$ 是 $F \to X$ 的一个 universal arrow(or 'co-universal' if you like.)

我们常見的一些 universal property 都可以寫成这種形式. 事實上, universal arrow 是 comma category $X \downarrow F$ 的 initial object (dually, terminal object of comma category $F \downarrow X$).

我们復習一下 Adjoint 的槩念, 若 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}, G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ 是二函子, 如果有雙自然同構 $\mathscr{D}(F-, -) \simeq \mathscr{C}(-, G-)$, 并记做 $F \dashv G$. 換言之, 若 $F \dashv G$ 對于每一个 $f^\flat\colon FX \to Y$ 都一一到上的對應了一个 $f^\sharp\colon X \to GY$, 使得對于每个如下的圖表:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[d, "Fp"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ FX' \arrow[r, "g^\flat"'] & Y' \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, "p"'] & GY \arrow[d, "Gq"] \\ X' \arrow[r, "g^\sharp"'] & GY' \end{tikzcd}$$

左邊交換當且僅當右邊交換.

顯然 initial object/terminal object 可以看成 adjoint 只需注意到若 $!\colon \mathscr{C} \to \mathbb{1}$ 的 right adjoint G 存在, 則有 $\mathbb{1}(!X, \mathbb{0}) = \mathscr{C}(X, G\mathbb{0}) = *$, 意味着對每个 $X \in \mathscr{C}$,$X \to G\mathbb{0}$ 唯一, 則 $G\mathbb{0}$ 是 $\mathscr{C}$ 中 terminal object. 對偶的, left adjoint 對應了 initial object.

事實上, adjoint 也可以看成是某種意义上的 universal arrow. 如果 $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, 對于每个 $X \in \mathscr{C}$, 存在 $u\colon X \to GY$ 是 universal arrow 則 $FX := Y$ 并且 $Ff :=!\colon FX \to FX'$ 是由圖表:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & GY \arrow[d, "G!"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & GY' \end{tikzcd}$$

誘導的態射, 則 $F \dashv G$.

哲學的來看, 我们现在可以說 universal,initial, 以及 adjoint 描述的是某種相似的東西.

在研究對象的過程中, 我们常常通過對象之間的映射研究對象的性質, 對于某个給定的函子 $F\colon \mathscr{J} \to \mathscr{C}$, 我们可以定义對角函子 $\Delta_{\mathscr{J}}\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Fun}(\mathscr{J}, \mathscr{C}), C \mapsto (\Delta_{\mathscr{J}} C\colon \mathscr{J} \to \mathscr{C}, J \mapsto C, j\colon J \to J' \mapsto \mathrm{id}_C)$. 由此我们可以考慮这样的 universal arrow $u\colon F \to \Delta_{\mathscr{J}} C$:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C \arrow[d, dashed, "\Delta_{\mathscr{J}} \tilde{f}"] \\
& \Delta_{\mathscr{J}} C'
\end{tikzcd}
$$

我们记 $\varinjlim_{\mathscr{J}} F := C$, 并稱其爲 F 的 colimit. 對偶的, 我们稱 $\varprojlim_{\mathscr{J}} F$ 爲 F 的 limit. 注意到, 若 $\eta\colon F \to G$ 是一自然變換, 并且 F, G 有 colimit $C = \varinjlim_{\mathscr{J}} F, C' = \varinjlim_{\mathscr{J}} G$, 我们有圖表:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\eta"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{J}} !"] \\
G \arrow[r, "u'"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C'
\end{tikzcd}
$$

式中 $!\colon C \to C'$ 是由 $u\colon F \to \Delta_{\mathscr{J}} C$ 的自然性誘導出的態射. 我们记 $\varinjlim_{\mathscr{J}} \eta :=!$. 注意到这个態射事實上是函子性的. 我们考慮所有在 $\mathscr{C}$ 中有 colimit 的 $\mathscr{J}$ 圖表構成的范疇 $\mathscr{C}^{\mathscr{J}}_{\to}$, 我们有函子 $\varinjlim_{\mathscr{J}}\colon \mathscr{C}^{\mathscr{J}}_{\to} \to \mathscr{C}$.

首先, 我们有, $\Delta_{\mathscr{J}} C \in \mathscr{C}^{\mathscr{J}}_{\to}$, 这是因爲對于任意的自然變換 $f\colon \Delta_{\mathscr{J}} C \to \Delta_{\mathscr{J}} C'$, 對任意的 $J, J' \in \mathscr{J}$ 我们有

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_{\mathscr{J}} C(J) = C \arrow[r, "f_J"] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"'] & C' = \Delta_{\mathscr{J}} C'(J) \arrow[d, "\mathrm{id}_{C'}"] \\
\Delta_{\mathscr{J}} C(J') = C \arrow[r, "f_{J'}"'] & C' = \Delta_{\mathscr{J}} C'(J'),
\end{tikzcd}
$$

于是容易得到 $\mathrm{Nat}(\Delta_{\mathscr{J}} C, \Delta_{\mathscr{J}} C') \simeq \mathscr{C}(C, C')$, 我们就直接把它们混淆起來, 并且由于

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_{\mathscr{J}} C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C \arrow[d, dashed, "f"] \\
& \Delta_{\mathscr{J}} C'
\end{tikzcd}
$$

交換, 則 $\varinjlim_{\mathscr{J}} \Delta_{\mathscr{J}} C = C$, 于是 $\Delta_{\mathscr{J}} C$ 在 $\mathscr{C}^{\mathscr{J}}_{\to}$ 中.

并且由 $\varinjlim_{\mathscr{J}}$, 對于每个 $F \in \mathscr{C}^{\mathscr{J}}_{\to}$, $F \to \Delta_{\mathscr{J}} C$, 給出了映射 $\varinjlim_{\mathscr{J}} F \to C$ 的一个映射, 事實上我们還有:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u^\flat"] \arrow[d, "\eta"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{J}} !"] \\
G \arrow[r, "u'^\flat"'] & \Delta_{\mathscr{J}} C'
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathscr{J}} F \arrow[r, "u^\sharp"] \arrow[d, "\varinjlim_{\mathscr{J}} \eta"'] & C \arrow[d, "!"] \\
\varinjlim_{\mathscr{J}} G \arrow[r, "u'^\sharp"'] & C',
\end{tikzcd}
$$

于是这給出了 $\varinjlim_{\mathscr{J}} \dashv \Delta_{\mathscr{J}}$, 對偶地, 我们有 $\Delta_{\mathscr{J}} \dashv \varprojlim_{\mathscr{J}}$

这可以帮助我们證明一个常常用到的定理 right adjoint preserve limit. 在證明这一定理之前, 我们先證明如下事實, 有稗敘述.

- 若 $F \dashv G$ 是 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ 之間的 adjoint pair, 前向復合所誘導的函子 F, G 是 $\mathscr{C}^{\mathscr{J}}, \mathscr{D}^{\mathscr{J}}$ 之間的 adjoint pair.
- 我们有如下圖表交換

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\Delta^{\mathscr{C}}_{\mathscr{J}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathscr{C}^{\mathscr{J}} \arrow[d, "F"] \\
\mathscr{D} \arrow[r, "\Delta^{\mathscr{D}}_{\mathscr{J}}"'] & \mathscr{D}^{\mathscr{J}}
\end{tikzcd}
$$

于是我们就有

$$
\begin{aligned}
(X, \varprojlim_{\mathscr{J}} GY) &\simeq (\Delta^{\mathscr{C}}_{\mathscr{J}} X, GY) \\
&\simeq (F\Delta^{\mathscr{C}}_{\mathscr{J}} X, Y) \\
&\simeq (\Delta^{\mathscr{D}}_{\mathscr{J}} FX, Y) \\
&\simeq (FX, \varprojlim_{\mathscr{J}} Y) \\
&\simeq (X, G\varprojlim_{\mathscr{J}} Y)
\end{aligned}
$$

對于任意的 X, $(X, \varprojlim_{\mathscr{J}} GY) \simeq (X, G\varprojlim_{\mathscr{J}} Y)$ 是自然同構. 于是我们就對任意的 Y, $\varprojlim_{\mathscr{J}} GY \simeq G\varprojlim_{\mathscr{J}} Y$, 即 $\varprojlim_{\mathscr{J}} G \simeq G\varprojlim_{\mathscr{J}}$, 我们就說右伴隨和極限是可交換的, 對偶地, 左伴隨和余極限也是可交換的. 由此我们非常輕松的就得到了, 極限和極限可交換, 余極限和余極限可交換.