



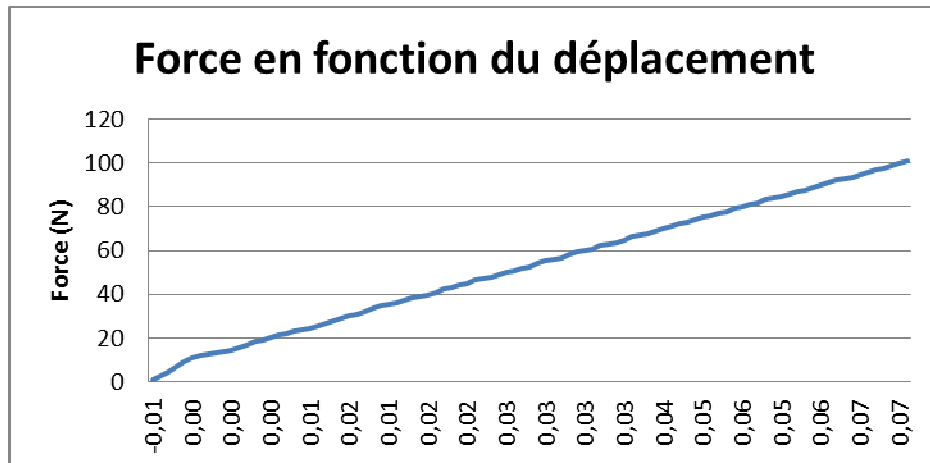
TP 4: INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DE LA SECTION SUR LA DEFORMATION D'UNE POUTRE

CORRIGE

RESULTATS PRATIQUES:

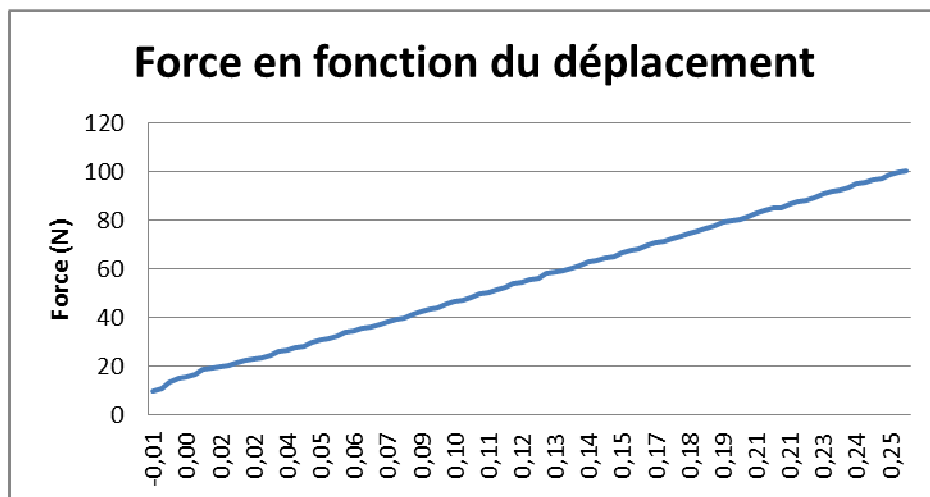
Pour chaque cas, le banc didactique nous a donné la valeur de la flèche en milieu de travée suite à une charge ponctuelle de 100 N en milieu de travée.

1) Poutre rectangulaire posée sur la plus petite dimension de sa section:



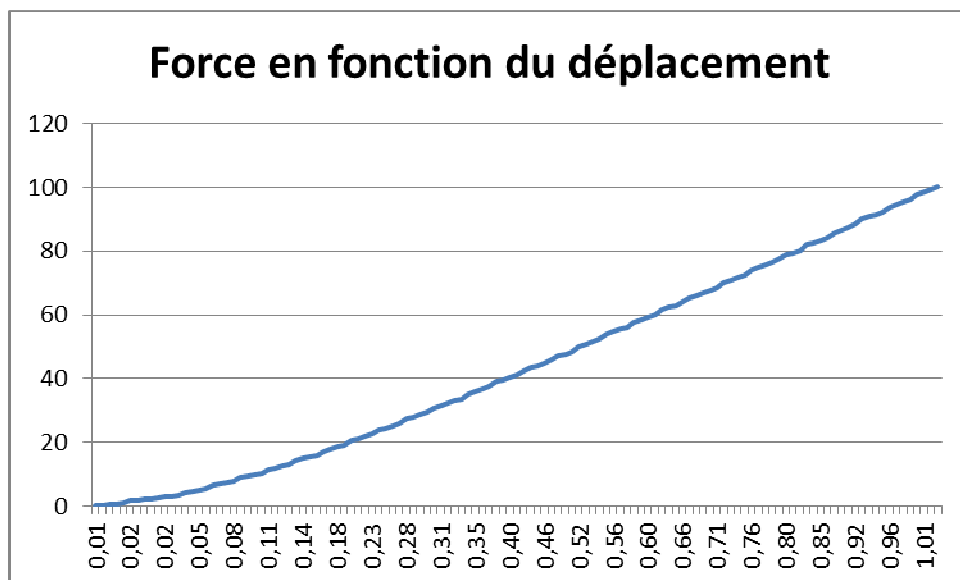
Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 0.07 mm pour un chargement de 100 N.

2) Poutre rectangulaire posée sur la plus grande des dimensions:



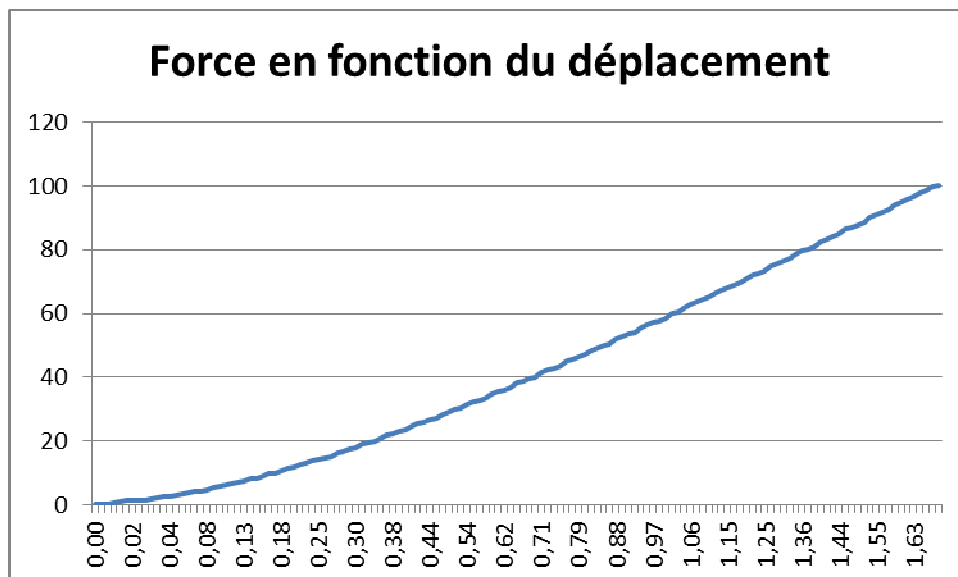
Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 0.25 mm pour un chargement de 100 N.

3) Poutre circulaire:



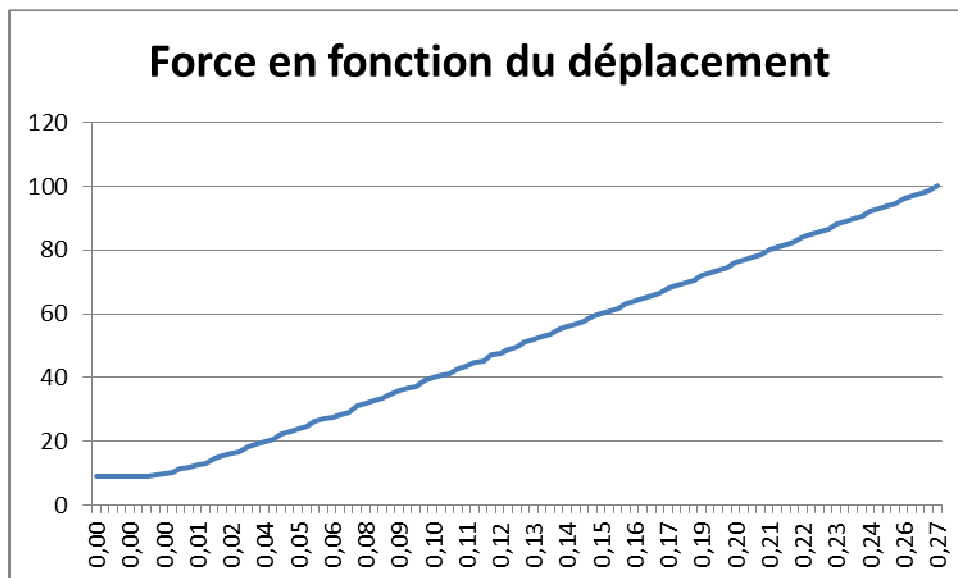
Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 1.01 mm pour un chargement de 100 N.

4) Poutre annulaire:



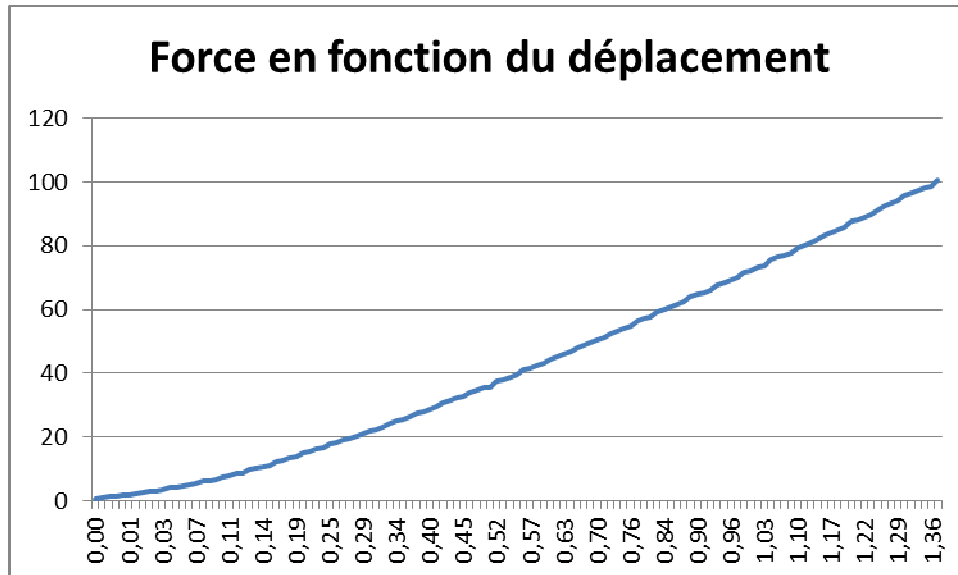
Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 1.63 mm pour un chargement de 100 N.

5) Poutre en U posée sur la plus petite dimension de sa section



Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 0.27 mm pour un chargement de 100 N.

6) Poutre en U posée sur la plus grande dimension de sa section



Comme on peut le voir sur le graphique, on obtient une flèche maximum de 1.36 mm pour un chargement de 100 N.

DEUXIEME PARTIE : Analyse théorique d'une poutre isostatique sur deux appuis soumise à une charge ponctuelle en milieu de travée

Q.1. Nous avons une poutre sur deux appuis: une rotule à gauche et un appui simple à droite. C'est donc une poutre isostatique que l'on résout:

- $\sum F_{/x} = 0 \implies X_A = 0$
- $\sum F_{/y} = 0 \implies Y_A + Y_B - 100 = 0$
- $\sum M_{/A} = 0 \implies Y_B \times 0,9 - 100 \times 0,45 = 0 \implies Y_B = 50 \text{ N}$

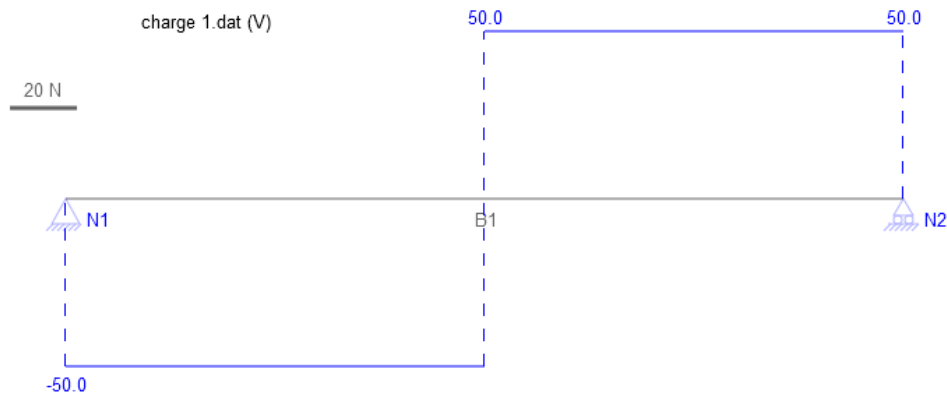
On en déduit la valeur de Y_A : $Y_A = 100 - Y_B$

$$Y_A = 100 - 50$$

$$Y_A = 50 \text{ N}$$

Q.2. Pour une poutre sur deux appuis avec une force ponctuelle en son milieu, l'effort tranchant est maximum au niveau des appuis et sa valeur est égale à celle de la réaction d'appui soit:

$$V_{max} = 50 \text{ N}$$

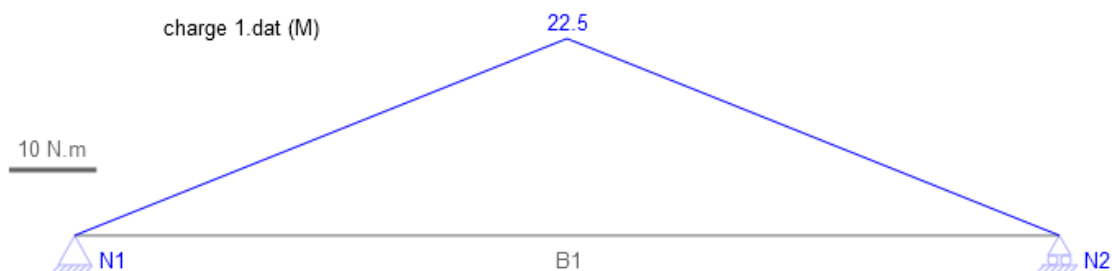


Le moment maximum est lui en milieu de travée et s'écrit de la manière suivante:

$$M_{max} = \frac{F \times L}{4}$$

$$M_{max} = \frac{100 \times 0.9}{4}$$

$$M_{max} = 22.5 \text{ N.m}$$



Q.3. Calcul des moments quadratiques:

- section rectangulaire posée sur la dimension la plus petite:

$$I_G = \frac{B \times H^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0.03 \times 0.05^3}{12} - \frac{0.028 \times 0.048^3}{12} = 5.4452 \times 10^{-8} m^4 = 5.4452 cm^4$$

- section rectangulaire posée sur la dimension la plus grande:

$$I_G = \frac{B \times H^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0.05 \times 0.03^3}{12} - \frac{0.048 \times 0.028^3}{12} = 2.4692 \times 10^{-8} m^4 = 2.4692 cm^4$$

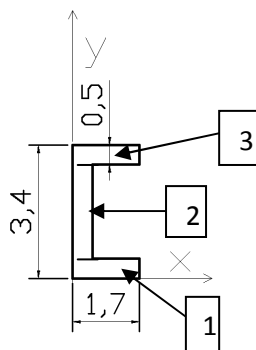
- section circulaire: $I_G = \frac{\pi \times D^4}{64} = \frac{\pi \times 0.02^4}{64} = 0.785 \times 10^{-8} m^4 = 0.785 cm^4$

- Section annulaire:

$$I_G = \frac{\pi \times D^4}{64} - \frac{\pi \times d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.02^4}{64} - \frac{\pi \times 0.016^4}{64} = 0.464 m^4 \times 10^{-8} m^4 = 0.464 cm^4$$

Q.4. Pour calculer la position du centre de gravité de la section totale, on sépare la section en trois surfaces élémentaires dont on connaît la position du centre de gravité.

a) Poutre posée sur la dimension la plus petite de la section:



Partie 1:

- Aire du rectangle: $A_1 = 0.005 \times 0.017 = 0.000085 m^2 = 0.85 cm^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G1} = 0.85 cm$ et $y_{G1} = 0.25 cm$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.017 \times 0.005^3}{12} = 1.77 \times 10^{-10} m^4 = 0.0177 cm^4$

Partie 2:

- Aire du rectangle: $A_2 = 0.005 \times 0.024 = 0.00012 m^2 = 1.2 cm^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G2} = 0.25 cm$ et $y_{G2} = 1.7 cm$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.005 \times 0.024^3}{12} = 0.576 \times 10^{-8} m^4 = 0.576 cm^4$

Partie 3:

- Aire du rectangle: $A_3 = 0.005 \times 0.017 = 0.000085 m^2 = 0.85 cm^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G3} = 0.85 cm$ et $y_{G3} = 3.15 cm$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.017 \times 0.005^3}{12} = 1.77 \times 10^{-10} m^4 = 0.0177 cm^4$

On peut maintenant en déduire la position du centre de gravité:

$$y_G = \frac{\sum y_i \times A_i}{A_G}$$

$$y_G = \frac{0.85 \times 0.25 + 1.2 \times 1.7 + 0.85 \times 3.15}{0.85 \times 2 + 1.2}$$

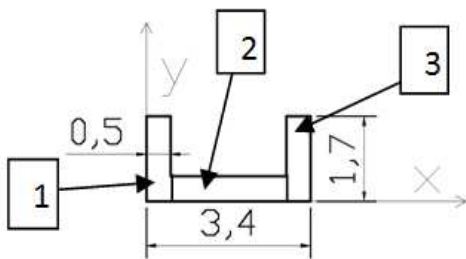
$$y_G = 1.7 cm$$

$$x_G = \frac{\sum x_i \times A_i}{A_G}$$

$$x_G = \frac{0.85 \times 0.85 + 1.2 \times 0.25 + 0.85 \times 0.85}{0.85 \times 2 + 1.2}$$

$$x_G = 0.602 cm$$

b) Poutre posée sur dimension la plus grande de la section:



Partie 1:

- Aire du rectangle: $A_1 = 0.005 \times 0.017 = 0.000085 m^2 = 0.85 cm^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G1} = 0.25 cm$ et $y_{G1} = 0.85 cm$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.005 \times 0.017^3}{12} = 0.2047 \times 10^{-8} m^4 = 0.2047 cm^4$

Partie 2:

- Aire du rectangle: $A_2 = 0.005 \times 0.024 = 0.00012m^2 = 1.2 \text{ cm}^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G2} = 1.7\text{cm}$ et $y_{G2} = 0.25\text{cm}$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.024 \times 0.005^3}{12} = 2.5 \times 10^{-10} m^4 = 0.025 \text{ cm}^4$

Partie 3:

- Aire du rectangle: $A_3 = 0.005 \times 0.017 = 0.000085m^2 = 0.85 \text{ cm}^2$
- Coordonnées du centre de gravité: $x_{G3} = 3.15\text{cm}$ et $y_{G3} = 0.85\text{cm}$
- $I_G = \frac{B \times H^3}{12} = \frac{0.005 \times 0.017^3}{12} = 0.2047 \times 10^{-8} m^4 = 0.2047 \text{ cm}^4$

On peut maintenant en déduire la position du centre de gravité:

$$y_G = \frac{\sum y_i \times A_i}{A_G}$$

$$y_G = \frac{0.85 \times 0.85 + 1.2 \times 0.25 + 0.85 \times 0.85}{0.85 \times 2 + 1.2}$$

$$y_G = 0.602 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{\sum x_i \times A_i}{A_G}$$

$$x_G = \frac{0.85 \times 0.25 + 1.2 \times 1.7 + 0.85 \times 3.15}{0.85 \times 2 + 1.2}$$

$$x_G = 1.7 \text{ cm}$$

Q.5. On applique maintenant le théorème de Huygens afin de déterminer la valeur du moment quadratique au centre de gravité de la section totale:

a) Poutre en U posée sur la plus petite dimension de la section

$$I_G = \sum (I_{Gi} + A_i \times d_i^2)$$

$$I_G = [0.0177 + 0.85 \times (1.7 - 0.25)^2] + [0.576 + 1.2 \times (1.7 - 1.7)^2] + [0.0177 + 0.85 \times (1.7 - 3.15)^2]$$

$$I_G = 3.610 \text{ cm}^4$$

b) Poutre en U posée sur la plus grande dimension de la section:

$$I_G = \sum (I_{Gi} + A_i \times d_i^2)$$

$$I_G = 2 \times [0.2047 + 0.85 \times (0.602 - 0.85)^2] + [0.025 + 1.2 \times (0.602 - 0.25)^2]$$



$$I_G = 0.688 \text{ cm}^4$$

Q.6. En connaissant la valeur du moment maximum ainsi que le module d'Young et le moment quadratique, on peut déterminer la flèche maximum de la poutre suite au chargement ponctuel de 100 Newtons en milieu de travée.

$$f_{max} = \frac{F \times L^3}{48 \times E \times I}$$

a) Pour la poutre rectangulaire appuyée sur la plus petite dimension de sa section:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 5.4452 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.000133 \text{ m}$$

b) Pour la poutre rectangulaire appuyée sur la plus grande dimension de sa section:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 2.4692 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.000293 \text{ m}$$

c) Pour la poutre circulaire:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 0.785 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.0009 \text{ m}$$



c) Pour la poutre annulaire:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 0.464 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.0015 \text{ m}$$

d) Pour la poutre en U appuyée sur la plus petite dimension de sa section:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 3.61 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.0002 \text{ m}$$

e) Pour la poutre en U appuyée sur la plus grande dimension de sa section:

$$f_{max} = \frac{100 \times 0.9^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 0.688 \times 10^{-8}}$$

$$f_{max} = 0.0011 \text{ m}$$

Q.8.

	Flèche pratique	Flèche théorique
Poutre rectangulaire 1	0.07	0.133
Poutre rectangulaire 2	0.25	0.293
Poutre circulaire	1.01	0.9
Poutre annulaire	1.63	1.5
Poutre en U 1	0.27	0.2
Poutre en U 2	1.36	1.1

Comme on peut le constater dans le tableau précédent, les résultats pratiques et théoriques comportent des différences. En effet dans certain cas, la théorie donne des résultats plus grands qu'en pratique et inversement.

Ceci peut être du à différentes choses:

- mauvaise mise en place des appuis sur le banc didactique (espacement entre les appuis pas exactement identique à celui de la théorie)
- mauvaise mise en place de la poutre sur les appuis (alignement, ...)
- sections des différentes poutres non exactes (variation de l'épaisseur de l'élément, ajout de peinture sur l'élément qui peut entraîner une sur-épaisseur,...)
- hypothèses de calculs non valables (valeur du module d'élasticité réelle différente de celle choisie en théorie (210 GPa), ...)
- approximation des résultats avec le capteur de déplacement qui calcule la flèche (manque de précision)
- mauvais positionnement du vérin qui doit se situer au milieu de la travée. Par exemple, il peut y avoir un petit décalage du vérin par rapport au milieu de la poutre.
- Les liaisons théoriques (rotule et appui simple) sont difficilement réalisables pour l'essai.

Q.9. En comparant maintenant les résultats de flèche obtenus entre les différentes sections, on remarque que plus l'inertie est petite, plus la flèche est grande. En effet, la formule nous donnant la valeur de la flèche en milieu de travée comporte le moment quadratique I au dénominateur.



$$f_{max} = \frac{F \times L^3}{48 \times E \times I}$$

Par exemple, lorsque nous avons une section de poutre rectangulaire, il faudra bien choisir le sens de positionnement de celle-ci. En effet, si nous voulons limiter le déplacement en milieu de travée, il faudra positionner la section sur la dimension la plus petite pour avoir la plus grande inertie et donc la plus petite flèche.

Le fait de jouer sur la forme de la section va influencer sur le déplacement que subira la poutre.

La nature du matériau utilisé joue également sur la réponse de la poutre sous un chargement. Nous l'étudierons au cours d'un autre TP.