Part A：《Frechet 分布函数的基本性质》

1.极值分布的基本条件

假定随机变量 X 满足极值分布，即 $X \sim \exp(\lambda)$，于是可将 X 的概率表示为如下形式：

$$P(X \le x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda \cdot x} & for \quad 0 < x < \infty \\ 0 & others \end{cases} \quad (1)$$

对应的随机变量 X 的期望和方差分别表示为：

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2)$$

2.EK 模型中对应的时间变量 X 对应的 Frechet 分布

在 EK 模型中，X 表示生产单一产品使用的时间，发达国家对应的 λ 更大。我们对生产产品使用时间 X 求对数的期望和方差，可得对数时间期望和方差分别为：

$$E\left[\log(X)\right] = -\gamma - \log(\lambda); V\left[\log(X)\right] = \frac{\pi^2}{6} \quad (3)$$

其中，$\gamma = -\int_0^\infty \left[e^{-x} \cdot \log(x)\right] dx$，表示欧拉常数。由（3）可知，生产单位产品时间对数的期望与方差之间相互独立。记 $t = X^{-\frac{1}{\theta}}$。当 $\theta > 0$ 时，则定义 $t \sim Frechet(\lambda, \theta)$。于是有：

$$P(t \le y) = P(X^{-\frac{1}{\theta}} \le y) = P(X \ge y^{-\theta}) \quad (4)$$

将 $y^{-\theta}$ 带入（1）式，于是（1）式的随机变量概率值可写为：

$$P(X \ge y^{-\theta}) = \begin{cases} 1-(1-e^{-\lambda \cdot x}) = e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} & for \quad 0 < y < \infty \\ 0 & others \end{cases} \quad (5)$$

此时（5）式对应的概率密度函数表示为[1]：

$$f_t(y) = \begin{cases} \lambda \cdot \theta \cdot y^{-(1+\theta)} \cdot e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} & for \quad 0 < y < \infty \\ 0 & others \end{cases} \quad (6)$$

---

[1] 由 $P(X \ge y^{-\theta}) = \begin{cases} 1-(1-e^{-\lambda \cdot x}) = e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} & for \quad 0 < y < \infty \\ 0 & others \end{cases}$（5）式。两边求关于随机变量 y 的偏导，于是有：$\frac{dP(X \ge y^{-\theta})}{dy} = \begin{cases} e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} \cdot \lambda \cdot \theta \cdot y^{-\theta-1} & for \quad 0 < y < \infty \\ 0 & others \end{cases}$。等价于：

$\frac{dP(X \ge y^{-\theta})}{dy} = \begin{cases} \lambda \cdot \theta \cdot e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} \cdot y^{-(\theta+1)} & for \quad 0 < y < \infty \\ 0 & others \end{cases}$，即可得（6）式。

当$\theta > \alpha$时，（6）式的累计概率密度函数表示为：

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha} \cdot f_t(y)dy = \int_0^{\infty} \lambda \cdot \theta \cdot y^{-(1+\theta-\alpha)} \cdot e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}} dy = \lambda^{\frac{\alpha}{\theta}} \cdot \Gamma\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}\right) \text{（7）}$$

其中，$\Gamma\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}\right)$表示伽马函数。

由（7）式可知，此时有：

$$E\left(y^{\alpha}\right) = \lambda^{\frac{\alpha}{\theta}} \cdot \Gamma\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}\right) \text{（8）}$$

由（8）式可知：

i）当$\theta > 1$时，$E\left(y\right) = \lambda^{\frac{1}{\theta}} \cdot \Gamma\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)$（9）

ii）当$\theta > 2$时，$V\left(y\right) = \lambda^{\frac{2}{\theta}} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{\theta-2}{\theta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\right]$（10）

由（9）（10）式可知，当λ提高时，期望和方差都会提高。当θ下降时，y会收敛为概率为1的常数。

此外，在 i）和 ii）时，有$\theta > 0$。此时由对数期望和方差性质（3）式，可知：

$$E\left[\log(y)\right] = -\left(\frac{-\gamma - \log(\lambda)}{\theta}\right) = \frac{\gamma + \log(\lambda)}{\theta}; V\left[\log(y)\right] = \frac{\pi^2}{6\theta^2} \text{（11）}$$

（11）式中，$\gamma = -\int_0^{\infty}\left[e^{-y} \cdot \log(y)\right]dy$仍表示欧拉常数。由（11）式可知：随机变量$y$的对数分布依然独立于$\lambda$。因此，若给定国家间经济份额比重为$\theta$，且方差为$\lambda$，可用$\theta$表示国家全局生产技术水平的期望。若用$y$表示生产技术效率，则$1/y$可以表示生产一个单位商品的时间。在国家间生产技术水平满足 Frechet 极值分布的条件下，技术效率越高意味着全局技术效率的方差λ越大。

3.Frechet 分布函数的基本属性证明（用于 EK 模型中变体推导过程）[1]

3.1 Corllary I **常数倍数分布**等于常数^{方差}期望的 Frechet 分布

当$X \sim Frechet(\lambda, \theta)$则$T = k \cdot X \sim Frechet(\lambda \cdot k^{\theta}, \theta)$

证：

由$X \sim Frechet(\lambda, \theta)$以及（4）式$P(t \le y) = P(X^{-\frac{1}{\theta}} \le y) = P(X \ge y^{-\theta})$，可知：

$$P(T \le y) = P(k \cdot X \le y)$$
$$\Rightarrow P(X \le k^{-1} \cdot y) = e^{-\lambda \cdot \left(k^{-1} \cdot y\right)^{-\theta}} = e^{-\lambda \cdot k^{\theta} (y)^{-\theta}} \sim Frechet(\lambda \cdot k^{\theta}, \theta)$$

Q.E.D

[1] 以下内容不涉及 EK 模型，属于 Frechet 分布函数的基本属性。主要依据（4）式、（5）式和（6）式以及独立同分布假定（i.i.d）。

3.2 Corllary II **独立同分布的最大值分布**等于同分布期望之和

若 $X \sim Frechet(\lambda,\theta)$， $Y \sim Frechet(\mu,\theta)$，且 $Z=\max(X,Y)$，则 $Z \sim Frechet(\mu+\lambda,\theta)$

证：

不妨设：

$$
\begin{aligned}
&P(Z \le z)=P\left[\max(X,Y)\le z\right]\\
&\Leftrightarrow P(X \le z, Y \le z)\\
&\Leftrightarrow P(X \le z)\cdot P(Y \le z)\\
&=e^{-\lambda\cdot z^{-\theta}}\cdot e^{-\mu\cdot z^{-\theta}}=e^{-(\lambda+\mu)\cdot z^{-\theta}} \sim Frechet(\lambda+\mu,\theta)
\end{aligned}
$$

Q.E.D

3.3 Corllary III 两个独立同分布的**占优分布概率=**期望 1/(期望 1+期望 2)

若 $X \sim Frechet(\lambda,\theta)$， $Y \sim Frechet(\mu,\theta)$，且 X 与 Y 独立，则有： $P(X>Y)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

证：

由概率密度函数性质：

$$
\begin{aligned}
P(X>Y)&=\int_0^\infty\int_y^\infty f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy=\int_0^\infty f_Y(y)\cdot\int_y^\infty f_X(x)\cdot dxdy\\
&=\int_0^\infty f_Y(y)\cdot\left[1-F_X(y)\right]dy=\int_0^\infty f_Y(y)dy-\int_0^\infty f_Y(y)\cdot F_X(y)dy
\end{aligned}
\tag{12}
$$

（12）式中 $\int_0^\infty f_Y(y)dy=1$，由（6）式： $f_Y(y)=\mu\cdot\theta\cdot y^{-(1+\theta)}\cdot e^{-\mu\cdot y^{-\theta}}$ ，由（5）式： $F_X(y)=e^{-\lambda\cdot y^{-\theta}}$ 。

于是将上述式代入（12）式，可得：

$$
P(X>Y)=1-\int_0^\infty \underbrace{\mu\cdot\theta\cdot y^{-(1+\theta)}\cdot e^{-\mu\cdot y^{-\theta}}}_{(6)式}\cdot \underbrace{e^{-\lambda\cdot y^{-\theta}}}_{(5)式}dy \tag{13}
$$

（13）式化简为：

$$
\begin{aligned}
P(X>Y)&=1-\int_0^\infty \mu\cdot\theta\cdot y^{-(1+\theta)}\cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot y^{-\theta}}dy\\
&=1-\mu\cdot\int_0^\infty\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)\cdot\theta\cdot y^{-(1+\theta)}\cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot y^{-\theta}}dy\\
&=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\underbrace{\int_0^\infty(\lambda+\mu)\cdot\theta\cdot y^{-(1+\theta)}\cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot y^{-\theta}}dy}_{满足均值(\lambda+\mu)的Frechet分布}\\
&=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}
\end{aligned}
$$

Q.E.D

3.4 Corllary IV 两个独立同分布**倒数的最小值分布**等于期望 1+期望 2 的 Frechet 分布

若 $X \sim Frechet(\lambda,\theta)$，$Y \sim Frechet(\mu,\theta)$，$X$ 与 Y 独立，有：$\frac{1}{Z} = \min\left\{\frac{1}{X},\frac{1}{Y}\right\} \sim Frechet(\lambda+\mu,\theta)$

证 1：

由于 $X \sim Frechet(\lambda,\theta)$， $Y \sim Frechet(\mu,\theta)$，于是 $X > 0$ 且 $Y > 0$。因此， $Z > 0$ 。于是有：

$Z = \frac{1}{\min\left\{\frac{1}{X},\frac{1}{Y}\right\}} \Leftrightarrow \max\{X,Y\}$。由 Corllary II 可知： $Z \sim Frechet(\lambda+\mu,\theta)$ Q.E.D；

证 2：

$$
\begin{aligned}
P(Z \le z) &= P(\frac{1}{Z} \ge \frac{1}{z}) = P(\min\left\{\frac{1}{X},\frac{1}{Y}\right\} \ge \frac{1}{z}) \\
&= P(\frac{1}{X} \ge \frac{1}{z}) \cdot P(\frac{1}{Y} \ge \frac{1}{z}) \\
&= P(X \le z) \cdot P(Y \le z) \\
&= e^{-\lambda \cdot z^{-\theta}} \cdot e^{-\mu \cdot z^{-\theta}} = e^{-(\lambda+\mu) \cdot z^{-\theta}} \sim Frechet(\lambda+\mu,\theta)
\end{aligned}
$$

Q.E.D

3.5 Corllary V **多个**独立同分布**最大值分布**等于**多个**独立期望之和的 Frechet 分布

假设 $X_1, X_2,..., X_n \underset{j\in(1,2,...n)}{\sim Frechet}(\lambda_j,\theta)$， 于是有： $\underset{j\in(1,2,3,...,n)}{Z} = \max\{X_j\} \sim Frechet(\sum_1^n \lambda_j,\theta)$

证：

将 $\underset{j\in(1,2,3,...,n)}{Z} = \max\{X_j\}$ 看成随机变量并记 $\sum_1^n \lambda_j = \lambda_z$ 。有： $X_1, X_2,..., X_n, X_{n+1} \sim Frechet(\lambda_j,\theta)$ 。

由于 $Z_{n+1} = \max_{j\in(1,2,...,n,n+1)}\{X_j\}$。根据 Corrary II 有：

$Z_{n+1} \sim Frechet(\lambda_z + \lambda_{n+1},\theta)$ （14）

将 $\sum_1^n \lambda_j = \lambda_z$ 代入（14）式，于是有：

$Z_{n+1} \sim Frechet(\sum_1^n \lambda_j + \lambda_{n+1},\theta) \Leftrightarrow Frechet(\sum_1^{n+1} \lambda_j,\theta)$，因此： $Z_n \sim Frechet(\sum_1^n \lambda_j,\theta)$ Q.E.D

3.6 Corllary VI **多个**独立同分布最小值**常数倍数概率**=期望 i*(常数 i)^{方差}/sum(期望 i*(常数 i)^{方差})

若 $X_i \sim Frechet(\lambda_i,\theta)$，且 $k_i > 0$ 。 X_i 独立同分布。于是： $P\left[\frac{k_i}{X_i} \le \min_{i\ne j}\left(\frac{k_j}{X_j}\right)\right] = \frac{\lambda_i \cdot k_i^{-\theta}}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot k_j^{-\theta}}$

证：

定义 $\frac{1}{Z} = \min_{i\ne j}\left(\frac{k_j}{X_j}\right)$，由于 $k_j > 0$ 且 $X_j > 0$，于是有：$Z = \max_{i\ne j}\left(\frac{X_j}{k_j}\right)$。由 Corllary I 和 Corllary V，

可知：

$$Z \sim Frechet(\sum_{j\neq i}\lambda_j\cdot\left(\frac{1}{k_j}\right)^{\theta},\theta) \Leftrightarrow Frechet(\sum_{j\neq i}\lambda_j\cdot k_j^{-\theta},\theta)$$ （15）

又因为：

$$P\left[\frac{k_i}{X_i}\leq\min_{i\neq j}\left(\frac{k_j}{X_j}\right)\right]\Leftrightarrow P\left[\frac{X_i}{k_i}\geq\max_{i\neq j}\left(\frac{X_j}{k_j}\right)\right]$$ （16）

由 Corllary III （16）式期望等价于：

$$\frac{\mathrm{E}\left(\frac{X_i}{k_i}\right)}{\mathrm{E}\left(\frac{X_i}{k_i}\right)+\mathrm{E}\left(\max_{i\neq j}\left(\frac{X_j}{k_j}\right)\right)}=\frac{\lambda_i\cdot k_i^{-\theta}}{\lambda_i\cdot k_i^{-\theta}+\sum_{j\neq i}\lambda_j\cdot k_j^{-\theta}}=\frac{\lambda_i\cdot k_i^{-\theta}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot k_i^{-\theta}}=\frac{\lambda_i\cdot k_i^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot k_j^{-\theta}}$$ （17）Q.E.D

Part B：《EK 模型推导》

Eaton J & Kortum S. Technology, Geography and Trade[J]. *Econometrica, 2002, 70(5): 1741-1779.*

1.基本假设

在李嘉图连续商品贸易模型基本假设下，设定不同国家可获得生产不同商品的技术水平存在差异。假定国家 i 生产差异化商品 j 的生产率水平为 $z_i(j)$。在李嘉图假定中，国内要素自由流动，由此造成国家 i 的生产差异化商品所需的中间投入品成本为常量 c_i。于是，国家 i 生产一个单位差异化商品 j 的生产成本可表示为：$c_i/z_i(j)$。

进一步引入贸易地理“冰山成本”，从国家 i 运输至国家 n 一单位商品的“冰山成本”为 $d_{in}>1$，若 $i\neq n$，且 $d_{ii}=1$。此外，并不存在边境套利交易，于是有：$d_{in}\leq d_{nk}d_{ik}$，k 表示第三国。

于是很容易得贸易中的商品价格表示为如下形式：

$$p_{ni}(j)=\left[c_i/z_i(j)\right]\cdot d_{ni}$$ （1）【文中（1）式】

假定厂商是完全竞争市场，$p_{ni}(j)$ 表示国家 n 从国家 j 进口商品支付的价格。假设国家 n 从全球范围内搜寻最低价格进行交易，于是有：

$$p_{ni}(j)=\min\left\{p_{n1}(j),p_{n2}(j),...,p_{ni}(j);i=1,2,...,N\right\}$$ （2）【文中（2）式】

其中，N 表示全球范围内进口来源国的国家数量。

面对上述（2）式的价格，国家 n 国内消费者效用函数表示为如下 CES 形式：

$$U=\left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$ （3）【文中（3）式】

2.不同国家的技术水平（模型关键）

假定国家 i 在生产差异化产品 j 的技术水平是一个随机变量 Z_i。随机变量 Z_i 满足如下分布：$F_i(z)=\Pr\left[Z_i \le z\right]$。由（1）式可知，国家 n 从国家 i 进口特定商品的价格同样满足随机变量：$p_{ni}(j)=\left[c_i \cdot d_{ni} / Z_i(j)\right]$。由（2）式以及极值分布属性，可知：国家 n 从国家 i 购买特定商品 j 的概率 $\pi_{ni}(j)$ 同样满足极值分布。本文假定上述机制分布为 Frechet 分布（II 型极值分布）。于是有：出口方国家 i 的生产率分布函数为：

$F_i(z)=\Pr\left[Z_i \le z\right]=e^{-T_i \cdot z^{-\theta}}$ （4）【文中（4）式】

其中，$T_i>0$ 以及 $\theta>1$，分别表示国家 i 的平均技术水平以及不同技术水平在国家之间的分布方差[1]。（4）式正好对应《Frechet 分布函数的基本性质》中的（5）式。于是更高的国家 i 平均技术水平 T_i，意味着国家 j 将更多的从该国进口商品，而参数 θ 反映了技术水平的差异程度，θ 越大，则技术水平在国家之间的部分差异越小。由《Frechet 分布函数的基本性质》中，在 i）和 ii）时，即 $\theta>0$ 条件下，Frechet 分布的对数期望和方差性质（11）式[2]，可知：

$E\left[\log(Z_i)\right]=\dfrac{\gamma+\log(T_i)}{\theta}$；$V\left[\log(Z_i)\right]=\dfrac{\pi^2}{6\theta^2}$ （5）

由（5）式子可知：

$E\left[Z_i\right]=e^{\frac{\gamma+\log(T_i)}{\theta}}=e^{\frac{\gamma}{\theta}}\cdot(T_i)^{\frac{1}{\theta}}=e^{\frac{\gamma}{\theta}}\cdot T_i^{1/\theta}$ （6）[3]

同理，可知：

$V\left[Z_i\right]=\dfrac{\pi^2}{6\theta^2}$ （7）

即：

$STD\left[Z_i\right]=\dfrac{\pi}{\sqrt{6\theta^2}}=\dfrac{\pi}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\pi\Big/\left(\theta\cdot\sqrt{6}\right)$ （8）[4]

由（4）式到（8）式可以设定技术水平在全球范围内部分的全貌。其中，T_i 和 θ 分别表示国

---

[1] 对比前文中（5）式以及 Frechet 分布方差存在的性质，可以很容易的得出这一结果。显然这里假定不同国家技术水平满足 i.i.d。

[2] 前文中随机变量 X 满足：$P(X \ge y^{-\theta})=e^{-\lambda \cdot y^{-\theta}}$（5）时，有：$E\left[\log(y)\right]=-\left(\dfrac{-\gamma-\log(\lambda)}{\theta}\right)=\dfrac{\gamma+\log(\lambda)}{\theta}$；$V\left[\log(y)\right]=\dfrac{\pi^2}{6\theta^2}$（11）式。这里只需要将随机变量 X 替换成 Z 即可。

[3] 此处的 $\gamma=-\int_0^{\infty}\left[e^{-z}\cdot\log(z)\right]dz$ 仍表示欧拉常数，文章中设定欧拉常数为 $\gamma=.577$。

[4] 文章中设定 $\pi=3.14$。

家 i 的技术水平以及全球技术水平在不同国家之间的分布情况。T_i 反映在差异化连续统商品生产过程中国家 i 的绝对优势。θ 则反映了差异化连续统商品生产过程中国家间的比较优势。后文则会正式阐述比较优势如何在国际贸易中发挥比地理区位更为重要的作用。

3.价格的 Frechet 分布

考虑（1）式的进口商品价格方程：$p_{ni}(j)=\left[c_i/z_i(j)\right]\cdot d_{ni}$ （1）。且 $p_{ni}(j)=\min\left\{p_{n1}(j),p_{n2}(j),...,p_{ni}(j);i=1,2,...,N\right\}$（2）。由于（1）式中 c_i 和 d_{ni} 均可以看做是常数。于是关于价格 $p_{ni}(j)$ 的 Frechet 分布可写为：

$G_{ni}(p)=\Pr\left[P_{ni}\le p\right]=1-F_i(c_i\cdot d_{ni}/p)$（9）

利用 Corllary I 可知（9）式等价于：

$$\begin{aligned}G_{ni}(p)&=\Pr\left[P_{ni}\le p\right]=1-e^{-T_i\cdot\left[(c_i\cdot d_{ni}/p)\right]^{-\theta}}\\&=1-e^{-T_i\cdot\left[(c_i\cdot d_{ni})\right]^{-\theta}\cdot\left[(p)^{-1}\right]^{-\theta}}\\&=1-e^{-T_i\cdot\left[(c_i\cdot d_{ni})\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\end{aligned}$$
（10）【文中（5）式】[1]

由于全球范围内 n 国的差异化商品采购价满足（2）式：$p_{ni}(j)=\min\left\{p_{ni}(j)\right\}$。于是国家 n 进口商品的价格概率函数满足：

$G_n(p)=\Pr\left[P_{ni}=\min\left\{p_{ni}(j)\right\}\le p\right]$（11）

于是有由于全球范围内 n 国的差异化商品采购价格概率表示为：

$G_n(p)=1-\prod_{i=1}^{N}\left[1-G_{ni}(p)\right]$（12）

将（10）式代入（12）式，可得：

$$\begin{aligned}G_n(p)&=1-\prod_{i=1}^{N}\left[e^{-T_i\cdot\left[(c_i\cdot d_{ni})\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\right]\\&=1-\left[e^{-T_1\cdot\left[(c_1\cdot d_{n1})\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\cdot e^{-T_2\cdot\left[(c_2\cdot d_{n2})\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\cdot\ldots\cdot e^{-T_N\cdot\left[(c_N\cdot d_{nN})\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\right]\\&=1-\left\{e^{-\left[T_1\cdot\left[(c_1\cdot d_{n1})\right]+T_2\cdot\left[(c_2\cdot d_{n2})\right]+\ldots+T_N\cdot\left[(c_N\cdot d_{nN})\right]\right]^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\right\}\\&=1-e^{-\sum_{i=1}^{N}T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}\cdot p^{\theta}}\\&=1-e^{-\Phi_n\cdot p^{\theta}}\end{aligned}$$
（13）【文中（6）式】

---

[1] 由 Corllary I ：当 $Z_i\sim Frechet(T_i,\theta)$ 则 $Y_i=k_i\cdot Z_i\sim Frechet(T_i\cdot k_i^{\theta},\theta)$，将 k_i 替换为 $c_i\cdot d_{ni}$ 代入左式，即可得：$Y_i=\left(c_i\cdot d_{ni}\right)\cdot Z_i\sim Frechet\left[T_i\cdot\left(c_i\cdot d_{ni}\right)^{\theta},\theta\right]$，再代入正文（4）式，于是有：$G_{ni}(p)=\Pr\left[P_{ni}\le p\right]=1-e^{-T_i\cdot\left[(c_i\cdot d_{ni}/p)\right]^{-\theta}}$，简单化解即可得（10）式。

其中，

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{N} T_i \cdot (c_i \cdot d_{ni})^{-\theta}$$ （14）【文中（7）式】

（14）式表示不同国家技术水平、中间品投入成本以及空间距离的分布情况。进一步地可以得出国家 n 采购差异化商品价格 p 的分布特征。

性质 1：国家 n 向非 n 国（除国家 n）全球商品采购价格概率值等于 $T_i \cdot (c_i \cdot d_{ni})^{-\theta} / \Phi_n$

由于不同国家 i 的技术水平满足 Frechet 独立同分布。于是求解（11）式的期望和方差问题等价于求解常数倍数多个 Frechet 独立同分布的最小值期望和方差的问题（可直接利用 Corllary VI），于是有：

$$\pi_{ni} = \Pr\left[\frac{c_i \cdot d_{ni}}{z_i(j)} \le \min_{i \ne j}\left(\frac{c_i \cdot d_{ni}}{z_i(j)}\right)\right] \Leftrightarrow \frac{T_i \cdot (c_i \cdot d_{ni})^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n} T_j \cdot (c_i \cdot d_{ni})^{-\theta}}$$ （15）【文中（8）式】[1]

性质 2：国家 n 向全球（包括国家 n 自己）商品采购价格概率同样满足 $G_n(p)$。

直接利用 Corllary V 即可。

性质 3：CES 价格指数的分布为

Step 1 先求出商品连续统的 CES 价格指数（常规操作）：

Max $$U = \left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$ （16）

S.t. $\int_0^1 p(j) \cdot Q(j) d_j = I$

构建拉氏函数并求解一阶条件：

$$L = \left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \lambda \cdot \left[I - \int_0^1 p(j) \cdot Q(j) d_j\right]$$ （17）

$$\frac{\partial L}{\partial Q(j)} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \cdot \left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma} \cdot Q(j)^{\frac{-1}{\sigma}} - \lambda \cdot p(j) = 0$$ （18）

$$\frac{\partial L}{\partial Q(j^-)} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \cdot \left[\int_0^1 Q(j^-)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma} \cdot Q(j^-)^{\frac{-1}{\sigma}} - \lambda \cdot p(j^-) = 0$$ （19）

（18）式比（19）式，可得：

---

[1] 直接利用 Corllary VI 的结论：多个独立同分布最小值常数的概率等于 $P\left[\frac{k_i}{X_i} \le \min_{i \ne j}\left(\frac{k_j}{X_j}\right)\right] = \frac{\lambda_i \cdot k_i^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot k_j^{-\theta}}$。证明参见 Corllary VI 的具体过程。这里直接将 k_i 替换为 $c_i \cdot d_{ni}$，λ_i 替换为 T_i，即可得（11）式。

$$\left[\frac{Q(j)}{Q(j^-)}\right]^{-\frac{1}{\sigma}}=\frac{p(j)}{p(j^-)}$$（20）

于是有：

$$Q(j)=\left[\frac{p(j)}{p(j^-)}\right]^{-\sigma}\cdot Q(j^-)$$（21）

（21）式两边同时乘以 $p(j)$，于是有：$p(j)\cdot Q(j)=p(j)\cdot\left[\frac{p(j)}{p(j^-)}\right]^{-\sigma}\cdot Q(j^-)$，对左式加总，可得：$\int_0^1 p(j)\cdot Q(j)dj=\int_0^1 p(j)\cdot\left[\frac{p(j)}{p(j^-)}\right]^{-\sigma}\cdot Q(j^-)dj=I$。进而得出：$Q(j^-)=\frac{I\cdot p(j^-)^{-\sigma}}{\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj}$，同理可得：$Q(j)=\frac{I\cdot p(j)^{-\sigma}}{\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj}$，将 $Q(j)$ 代入效用函数（16）式可得间接效用函数：

$$U=\left\{\int_0^1\left[\frac{I\cdot p(j)^{-\sigma}}{\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj}\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}dj\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}=I\cdot\left[\int_0^1\frac{p(j)^{1-\sigma}}{\left[\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$=I\cdot\left[\frac{\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj}{\left[\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}=I\cdot\left[\left(\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right)^{1-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad (22)$$

$$=I\cdot\left[\left(\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$=I\cdot\left(\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

于是令（22）=I，可得差异化商品 j 的综合价格指数=U/I:

$$P=\left(\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$（23）

于是把（23）式代入 $Q(j)=\frac{I\cdot p(j)^{-\sigma}}{\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj}$，可得差异化商品需求为:

$$Q(j)=\frac{I\cdot p(j)^{-\sigma}}{P^{1-\sigma}}=\frac{I}{P}\cdot\left(\frac{p(j)}{P}\right)^{-\sigma}$$（24）

Step 2 代入价格 Frechet 分布条件求解综合价格指数的分布函数：

由综合价格指数（23）式，可知：$P^{1-\sigma}=\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj$。由于国家 n 从国家 i 只进口一种价格最低的差异化产品。这里不同于 Melitz（2003）的专业化分工假定。因此，j 种差异化产品

就是来自全球范围内的具有最小值价格的商品。于是有：

$$\begin{aligned} & P^{1-\sigma}=\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dj \\ & \Leftrightarrow P^{1-\sigma}=\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}dG_n(p) \end{aligned} \quad (25)$$

将全球范围内 n 国的差异化商品采购价格概率（13）式子代入（25）式，可得：

$$P^{1-\sigma}=\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}\frac{dG_n(p)}{dp}\cdot dp=\int_0^1 p(j)^{1-\sigma}\underbrace{\frac{d\left[1-e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\right]}{dp}}_{\text{代入}G_n(p)\text{,求关于}p\text{的偏导}}\cdot dp \quad (26)$$

由（26）中 $\frac{d\left[1-e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\right]}{dp}=\underbrace{\left[1-e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\right]'_p}_{\text{这里注意是对p求偏导}}=e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\cdot\theta\cdot p^{\theta-1}\cdot\Phi_n$，代入（26）式。于是（26）式等价于[1]：

$$\begin{aligned} & P^{1-\sigma}=\int_0^1 p^{1-\sigma}\cdot e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\cdot\theta\cdot p^{\theta-1}\cdot\Phi_n\cdot dp \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\int_0^1 p^{1-\sigma}\cdot e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}\cdot\theta\cdot p^{\theta-1}\cdot\Phi_n\cdot dp \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\theta\cdot\Phi_n\cdot\int_0^1 p^{\theta-\sigma}\cdot e^{-\Phi_n\cdot p^\theta}dp \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\theta\cdot\Phi_n\cdot\int_0^1 p^{\theta-\sigma}\cdot\exp\left(-\Phi_n\cdot p^\theta\right)dp \end{aligned} \quad (27)$$

其中，

不妨设 $\Omega=\Phi_n\cdot p^\theta$，此时有 $\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{1}{\theta}}=p$，于是：$\frac{dp}{d\Omega}=\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{1}{\theta}-1}\cdot\frac{1}{\Phi_n}\cdot d\Omega$ [2]。将二者代入（27）式，可得：

$$\begin{aligned} & P^{1-\sigma}=\theta\cdot\Phi_n\cdot\int_0^1\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{\theta-\sigma}{\theta}}\cdot\exp\left(-\Omega\right)\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{1}{\theta}-1}\cdot\frac{1}{\Phi_n}\cdot d\Omega \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\int_0^1\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{\theta-\sigma}{\theta}}\cdot\exp\left(-\Omega\right)\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{1}{\theta}-1}\cdot d\Omega \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{\theta-\sigma}{\theta}+\frac{1}{\theta}-1}\cdot\int_0^1\cdot\exp\left(-\Omega\right)\cdot d\Omega \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\left[\frac{\Omega}{\Phi_n}\right]^{\frac{1-\sigma}{\theta}}\cdot\int_0^1\cdot\exp\left(-\Omega\right)\cdot d\Omega \\ & \Rightarrow P^{1-\sigma}=\left[\Phi_n\right]^{-\frac{1-\sigma}{\theta}}\cdot\int_0^1\cdot\Omega^{\frac{1-\sigma}{\theta}}\exp\left(-\Omega\right)\cdot d\Omega \\ & \Rightarrow P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\left[\int_0^1\cdot\Omega^{\frac{1-\sigma}{\theta}}\exp\left(-\Omega\right)\cdot d\Omega\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned} \quad (28)[3]$$

[1] 参见《Frechet 分布函数的基本性质》中由（5）式到（6）式的过程。

[2] 注意积分变化后变量由 dp 转为了 $d\Omega$ 。

[3] 参见《Frechet 分布函数的基本性质》中由（7）式的过程。

定义一个伽马函数为：

$\Gamma(t)=\int_0^1 \cdot\Omega^{t-1}\exp(-\Omega)\cdot d\Omega$，令 $t=\dfrac{1-\sigma+\theta}{\theta}$。于是有：

$$\Gamma(t)=\int_0^1 \cdot\Omega^{\frac{1-\sigma+\theta}{\theta}-1}\exp(-\Omega)\cdot d\Omega=\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\theta}{\theta}\right) \quad (29)$$

将（29）式的伽马函数代入（28）式，可得：

$$P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\theta}{\theta}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$$ （30）【文中（9）式】

其中，$\gamma=\left[\Gamma\left(\dfrac{1-\sigma+\theta}{\theta}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$

4.贸易流与引力模型

由前文的性质 2 可以推导国家 n 对每一种商品的平均支出与进口来源国的资源无关。因此，国家 n 从国家 i 购买商品的比重满足性质 1。这一比重正是购买国家 i 商品的支出比重，于是有：

$$\pi_{ni}=\Pr\left[\frac{c_i\cdot d_{ni}}{z_i(j)}\le\min_{i\neq j}\left(\frac{c_i\cdot d_{ni}}{z_i(j)}\right)\right]=\frac{X_{ni}}{X_n}=\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n}=\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}$$ （31）【文中（10）式】

（31）式中，X_n 表示国家 n 在进口商品中的总支出。X_{ni} 表示从国家 i 进口商品的支出，或者说是国家 n 花费在国家 i 的贸易比重。这里简单讨论一下双边贸易过程中的传统引力模型。由（31）式可知：

$$X_{ni}=\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n}\cdot X_n \quad (32)$$

（32）表示 n 国从特定国家 i 进口商品数量。于是加总（32）式可得国家 n 从全球范围内进口商品的总数量表示为：

$$Q_i=\sum_{m=1}^{N}X_{mi}=\sum_{m=1}^{N}\underbrace{\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{mi})^{-\theta}}{\Phi_m}\cdot X_m}_{\text{注意这是一个整体}}=T_i\cdot(c_i)^{-\theta}\cdot\sum_{m=1}^{N}\underbrace{\frac{(d_{mi})^{-\theta}\cdot X_m}{\Phi_m}}_{\text{注意这是一个整体}} \quad (33)$$

（33）式表示全球商品销往国家 n 的总数量。于是求解（33）式中的 $T_i\cdot(c_i)^{-\theta}$ 并代入（32）式可得标准引力模型方程：

由（33）可知：

$$T_i\cdot\left(c_i\right)^{-\theta}=\left[\underbrace{\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}\cdot X_m}{\Phi_m}}_{\text{整体加总}}\right]^{-1}\cdot Q_i \text{（34）}$$

将（34）代入（32），可得：

$$\begin{aligned}X_{ni}&=\frac{T_i\cdot\left(c_i\cdot d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n}\cdot X_n=\frac{\left[\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}\cdot X_m}{\Phi_m}\right]^{-1}\cdot Q_i\cdot X_n}{\Phi_n}\\&=\frac{\left(d_{ni}\right)^{-\theta}\cdot X_n\cdot Q_i}{\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}\cdot X_m}{\Phi_m}\right)\cdot\Phi_n}=\frac{\left[\frac{\left(d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n}\right]\cdot X_n\cdot Q_i}{\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}}{\Phi_m}\cdot X_m\right)}\end{aligned}\text{（35）}$$

再由 $P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\theta}{\theta}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$（30）综合价格指数可改写为：

$$\left(\frac{P_n}{\gamma}\right)^{-\theta}=\Phi_n \text{且} \left(\frac{P_m}{\gamma}\right)^{-\theta}=\Phi_m \text{（36）}$$

将（36）代入（35）可得：

$$X_{ni}=\frac{\left[\frac{\left(d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n}\right]\cdot X_n\cdot Q_i}{\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}}{\Phi_m}\cdot X_m\right)}=\frac{\left[\frac{\left(d_{ni}\right)^{-\theta}}{\left(\frac{P_n}{\gamma}\right)^{-\theta}}\right]\cdot X_n\cdot Q_i}{\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\left(d_{mi}\right)^{-\theta}}{\left(\frac{P_m}{\gamma}\right)^{-\theta}}\cdot X_m\right)}=\frac{\left(\frac{d_{ni}}{P_n}\right)^{-\theta}\cdot X_n\cdot Q_i}{\left[\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{d_{mi}}{P_m}\right)^{-\theta}\cdot X_m\right]}=\frac{\left(\frac{d_{ni}}{P_n}\right)^{-\theta}\cdot X_n}{\left[\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{d_{mi}}{P_m}\right)^{-\theta}\cdot X_m\right]}\cdot Q_i$$

（37）【文中（11）式】

（37）式是一个标准的引力模型。国家 n 从国家 i 进口的差异化商品 X_{ni} =全球出口商总出口 Q_i *给定出口目国（进口竞争国非 n）的商品销售占全球贸易比重 $\frac{\left(\frac{d_{ni}}{P_n}\right)^{-\theta}\cdot X_n}{\left[\underbrace{\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{d_{mi}}{P_m}\right)^{-\theta}\cdot X_m}_{\text{整体加总}}\right]}$。国家 m 与国家 i 之间的地理距离 d_{mi} 被差异化商品的进口价格综合指数 P_m 平减。因此，贸易地理距离相当于对进口商品的综合价格指数影响，进而影响双边贸易。或者说，一旦进口竞争市场

m 更激烈的竞争减少了 P_m，等价于增加地理距离 d_{mi}。如何我们把 $\left(\frac{d_{mi}}{P_m}\right)^{-\theta}\cdot X_m$ 看做国家 i 进口替代市场国家的市场份额。（37）式右边就可以看作是出口国 i 的世界市场。于是，

$$\frac{\left(\frac{d_{ni}}{P_n}\right)^{-\theta}\cdot X_n}{\left[\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{d_{mi}}{P_m}\right)^{-\theta}\cdot X_m\right]}$$ 可表示国家 n 对于国家 i 的有效市场规模。

做一个 EK 与阿明顿（Armington）模型或垄断竞争模型的比较：

在阿明顿（Armington）假设下，不同来源生产的商品由于其原产地而本质上是不完美的替代品。在垄断竞争下，每个国家都选择专门从事一系列不同的商品。不同国家的商品替代性越强，贸易对生产成本和地理壁垒的敏感性就越高。相反，在我们的模型中，贸易对成本和地理壁垒的敏感性取决于技术参数 θ（反映生产中商品的异质性）而不是偏好参数（反映消费中商品的异质性 σ）。

如下机制会在本模型中发生：当进口来源国的商品价格提升，或者国家更倾向于减少出口商品的种类时，贸易比重则更多地在拓展边际（Extension Margin）上对成本和地理障碍做出反应。相反，在阿明顿（Armington）或垄断竞争的模型中，商品出口的比重的调整更多发生在集约边际上（Intensive Margin）以致于：较高的成本或地理障碍使交易的商品种类不受影响，但在每种进口商品上的花费却更少。

5.贸易、地理与价格

利用（30）和（31）式，考察商品价格差异对贸易流向的影响，将（31）代入（30），可得：

$$\frac{\frac{X_{ni}}{X_n}}{\frac{X_{ii}}{X_i}}=\frac{X_{ni}/X_n}{X_{ii}/X_i}=\frac{\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n}}{\frac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ii})^{-\theta}}{\Phi_i}}=\frac{\Phi_i}{\Phi_n}\cdot\left(\frac{d_{ni}}{d_{ii}}\right)^{-\theta}=\frac{\left(\frac{P_i}{\gamma}\right)^{-\theta}}{\left(\frac{P_n}{\gamma}\right)^{-\theta}}\cdot\left(\frac{d_{ni}}{d_{ii}}\right)^{-\theta}=\left(\frac{P_i}{P_n}\right)^{-\theta}\cdot\left(\frac{d_{ni}}{d_{ii}}\right)^{-\theta} \quad (38)$$

（38）中，显然 $d_{ii}=1$，于是有（38）等价于：

$$\frac{X_{ni}/X_n}{X_{ii}/X_i}=\left(\frac{P_i\cdot d_{ni}}{P_n}\right)^{-\theta}$$ （39）【文中（12）式】

将左侧变量，即 i 国出口至 n 国的商品份额相对于 i 在本国国内的消费份额，称为 i 国在 n 国的标准化进口份额（Normalized Share）。

作者接着讨论了（39）式的性质：

当进入国家 n 国内市场的商品价格相对与进入国家 i 的国内市场的商品价格下降时，P_i/P_n 变

大，或国家 n 相对于国家 i 更为闭塞，d_{ni} 变大。（39）式所表示的标准化进口份额就会下降。若国家间技术水平的差异程度越小，技术扩散的程度不足，θ 变大，也会导致（39）式下降。作者使用 1990 年 19 个 OECD 国家 50 个制造业行业 342 个观察值双边贸易数据校准 $\frac{P_i \cdot d_{ni}}{P_n}$ 。

作者首先定义了相对价格对数差分：$r_{ni}(j)=\ln\left[\frac{p_n(j)}{p_i(j)}\right]=\ln p_n(j)-\ln p_i(j)$ 。按照进口国 n 和出口国 i 进行第 j 种商品的价格配对。作者先使用地理距离校准 d_{ni}，但结果不理想。于是，作者对于距离 d_{ni} 而言，取了对数 $\ln d_{ni}$，并且设定了一个地理距离对数的边界，若国家 n 么有从国家 i 进口，则定义 $r_{ni}(j)\le \ln d_{ni}$，作者使用第二大的定义距离边界，于是有经济距离（姑且这么称呼）：

$$D_{ni}=\frac{\max 2_j\left\{r_{ni}(j)\right\}}{\sum_{j=1}^{50} r_{ni}(j) \Big/ 50}$$ （40）【文中（13）式】

最后，作者使用 OLS 方法计量估计出一个均值的 θ，作为技术水平 Frechet 分布的参数值[1]。

6.一般均衡（中间品投入+劳动力市场）

6.1 生产

6.1 至 6.3 都与 Frechet 价格和技术水平无关。仅仅是 CD 函数和劳动力自由流动的传统操作。

假设企业生产最终产品为（3）$Q=\left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$，差异化产品的综合价格指数为（9）$P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$，考虑一个包含劳动力工资和中间品价格的国内中间产品投入的成本函数：

$$c_i=w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}$$ （41）【文中（14）式】

首先，由（31）$\pi_{ni}=\frac{X_{ni}}{X_n}=\frac{T_i\cdot\left(c_i\cdot d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n}=\frac{T_i\cdot\left(c_i\cdot d_{ni}\right)^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot\left(c_i\cdot d_{ni}\right)^{-\theta}}$，可得：

$$\pi_{ii}=\frac{X_{ii}}{X_n}=\frac{T_i\cdot\left(c_i\cdot d_{ii}\right)^{-\theta}}{\Phi_n}=\frac{T_i\cdot\left(c_i\right)^{-\theta}}{\Phi_n}$$ （42）

于是有：

$$\frac{\pi_{ii}\cdot\Phi_n}{T_i}=\left(c_i\right)^{-\theta}\Leftrightarrow c_i=\left(\frac{\pi_{ii}\cdot\Phi_n}{T_i}\right)^{-\frac{1}{\theta}}=\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}\cdot\Phi_n}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$ （43）

[1] 文章中作者还使用了其他方法估计出 θ，具体方法参见文章，这里不再赘述。

又由（30）$P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma=p_i$，代入（41），同时也将（43）代入（41）可得：

$\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}\cdot\Phi_n}\right)^{\frac{1}{\theta}}=w_i^{\beta}\cdot(p_i)^{-\beta}\cdot\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$，于是有，$\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}}\right)^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}}=w_i\cdot(p_i)^{-1}\cdot(\gamma)^{\frac{1}{\beta}}$，因此：

$w_i\cdot(p_i)^{-1}=\frac{w_i}{p_i}=\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}}\right)^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}}\cdot(\gamma)^{-\frac{1}{\beta}}$（44）【文中（15）式】

封闭条件下有：$\pi_{ii}=1$。于是（44）对应封闭条件下的福利效应。

6.2 综合价格与进口比

直接将（41）$c_i=w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}$ 代入（14）$\Phi_n=\sum_{i=1}^{N}T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}$，可得：

$\Phi'_n=\sum_{i=1}^{N}T_i\cdot(w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni})^{-\theta}$（45）

于是有国家 n 的综合价格指数 P'_n 表示为：

$P'_n=\Phi_n'^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\theta}{\theta}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}=\left[\sum_{i=1}^{N}T_i\cdot(w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni})^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$（46）【文中（16）式】

同理，由（32）式，此时的 X'_{ni} 满足如下形式：

$X'_{ni}=T_i\cdot\left(\frac{c_i\cdot d_{ni}}{\Phi_n'^{-\frac{1}{\theta}}}\right)^{-\theta}\cdot X'_n$，因此，$\frac{X'_{ni}}{X'_n}=T_i\cdot\left(\frac{c_i\cdot d_{ni}}{\Phi_n'^{-\frac{1}{\theta}}}\right)^{-\theta}$，将（41）和（46）代入左式，于是有：

$\frac{X'_{ni}}{X'_n}=T_i\cdot\left(\frac{w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni}}{\frac{P'_n}{\gamma}}\right)^{-\theta}=T_i\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni}}{P'_n}\right)^{-\theta}$（47）【文中（17）式】

6.3 劳动力市场均衡

考虑厂商的最优化条件，厂商使用劳动力和中间产品两种生产要素生产最终产品，最终产品 Q 为中间产品的 CES 函数形式：于是有：$Q=\left[\int_0^1 Q(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}dj\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$。最终产品综合价格指数为仍（9）$P=\Phi_n^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$。单位中间产品成本为 $c_i=w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}$（41）。于是厂商中间产品的生产过程满足如下最优化问题：

Min $c_i=w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}$（48）[1]

---

[1] $TC=w_i\cdot L_i+p_i\cdot q_i$ 表示国家 n 在中间产品生产过程中的总支出。后面的过程都不涉及差异化商品 j 及其替代弹性 σ。参考 Alvarez 和 Lucas（2006）。

S.t. $TC = w_i \cdot L_i + p_i \cdot q_i$

构建拉式函数求解上述最优化问题：

$$\underset{\{w_i, p_i\}}{L} = w_i^{\beta} \cdot p_i^{1-\beta} + \lambda \cdot \left(TC - w_i \cdot L_i - p_i \cdot q_i\right) \quad (49)$$

于是有工资偏导的一阶条件为：

$$\partial L / \partial w_i = \beta \cdot w_i^{\beta-1} \cdot p_i^{1-\beta} = \lambda \cdot L_i \quad (50)$$

$$\partial L / \partial p_i = (1-\beta) \cdot w_i^{\beta} \cdot p_i^{-\beta} = \lambda \cdot q_i \quad (51)$$

由（50）和（51）可知：

$$\frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot \left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-1} = \frac{L_i}{q_i} \Rightarrow \frac{w_i}{p_i} = \frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot \left(\frac{L_i}{q_i}\right)^{-1} \quad (52)$$

（52）两边乘以 L_i，可得：$w_i \cdot L_i = \frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot p_i \cdot q_i$，代入 TC，可得：

$$\left[\frac{\beta}{(1-\beta)} + 1\right] \cdot p_i \cdot q_i = TC \Leftrightarrow p_i \cdot q_i = (1-\beta) \cdot TC \quad (53)$$

再代入 $w_i \cdot L_i = \frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot p_i \cdot q_i$，可得：

$$w_i \cdot L_i = \beta \cdot TC \quad (54)$$

由（53）和（54）可知，国家 n 在中间产品生产过程中对于进口国家 i 的中间产品消费支出为中间产品生产总支出的 $(1-\beta)$ 倍，在使用国家 i 劳动力方面的总支出则为 β 倍，于是：在 CD 中间产品生产成本函数设定下，劳动力工资弹性和中间产品弹性分别表示中间产品生产过程中劳动力和进口中间产品的支出份额。

将上述情况拓展到双边贸易层面，于是出口方 i 国——假设出口国 i 的制造业劳动力总收入等于该国出口产品占全球制造业出口比重的函数可改写为：

$$\underset{\text{国家i劳动力工资}}{w_i} \cdot \underset{\text{国家i劳动力数量}}{L_i} = \underset{\text{劳动力支出份额}}{\beta} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \underset{\text{国家n从国家i的进口比重}}{\pi_{ni}} \cdot \underset{\text{国家n制造业总支出}}{X_n}}_{\text{整体加总}} \quad (55)^{1}\text{【文中（18）式】}$$

进口方 n 国——假设国家 n 的总支出为 Y_n，其中 $\alpha \cdot Y_n$ 部分支付在制造业商品购买。又由于 $w_i \cdot L_i = \frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot p_i \cdot q_i$，可知：$p_n \cdot q_n = \frac{(1-\beta)}{\beta} \cdot w_n L_n$。于是国家 n 的总制造业进口表示为：

---

[1] 这里的劳动力支出份额 β 的推导来自（48）至（54）式。

$$X_n=\underbrace{\frac{1-\beta}{\beta}\cdot w_n\cdot L_n}_{\substack{\text{国家n制造业}\\ \text{中间品需求}=p_n q_n}}+\underbrace{\alpha\cdot Y_n}_{\substack{\text{国家n制造业}\\ \text{最终品需求}}}$$ （56）【文中（19）式】

其中，国家 n 最终支出 Y_n=制造业增加值收入 $Y_n^M=w_n\cdot L_n$+非制造业收入 Y_n^O。

考虑两种极端情况（跨国劳动力市场完全开放 vs 跨国劳动力市场完全封闭）：

Case A :

国家 n 国内存在制造业和非制造业部门，且劳动力可以在国家间自由流动。制造业工资 w_n 由非制造业部门生产率决定，总收入水平 Y_n 外生。于是将（56）式代入（55），可得：

$$w_i\cdot L_i=\beta\cdot\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot\left[\frac{1-\beta}{\beta}\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot Y_n\right]=\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot\left[(1-\beta)\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot\beta\cdot Y_n\right]$$ （57）【文中（20）式】

（50）决定了出口方国家 i 的劳动力需求 L_i。

Case B :

国家 n 国内存在制造业和非制造业部门，且劳动力部门间完全不能流动。制造业工人数量 L_n 是固定的。非制造业部门收入水平外生 Y_n^O。此时，将 $Y_n=Y_n^M+Y_n^O=w_n\cdot L_n+Y_n^O$ 代入（56），可得：

$$X_n=\frac{1-\beta}{\beta}\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot Y_n=\frac{1-\beta}{\beta}\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot\left(w_n\cdot L_n+Y_n^O\right)=\left(\frac{1-\beta+\alpha\cdot\beta}{\beta}\right)\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot Y_n^O$$ （58）

再将（58）代入（55），可得：

$$w_i\cdot L_i=\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot\left[(1-\beta+\alpha\cdot\beta)\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot\beta\cdot Y_n^O\right]$$ （59）【文中（21）式】

（59）决定了出口方国家 i 的劳动力工资 w_i。

6.4 零引力的封闭稳态

重新回到 Frechet 的价格决定一般均衡的计算中。这里仅考虑不存在地理距离 $d_{ni}=1$ 和地理距离无穷大 $d_{ni}\to\infty$ 两种极端情况（地理距离中间情况的计算过于复杂）。

Case I：没有地理距离 $d_{ni}=1$。

此时一价定律成立，由 $\pi_{ni}=\dfrac{T_i\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot(c_i\cdot d_{ni})^{-\theta}}$（31）变为 $\pi_{ni}=\dfrac{T_i\cdot(c_i)^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot(c_i)^{-\theta}}$，将 $c_i=w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}$（41）

代入，可得：$$\pi_{ni}=\frac{T_i\cdot\left(w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\right)^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot\left(w_j^{\beta}\cdot p_j^{1-\beta}\right)^{-\theta}}=\frac{T_i\cdot\left(w_i^{\beta}\right)^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot\left(w_j^{\beta}\right)^{-\theta}}=\frac{T_i\cdot w_i^{-\theta\cdot\beta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot w_j^{-\theta\cdot\beta}}$$ （60）[1]

[1] 此时，根据一价定律，有：$p_i=p_j$。

把 i 替换成 j 即可同理得到：

$$\pi_{nj}=\frac{T_j\cdot w_j^{-\theta\cdot\beta}}{\sum_{j=1}^{n}T_j\cdot w_j^{-\theta\cdot\beta}}$$ （61）

由 $w_i\cdot L_i=\beta\cdot\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot X_n$ （55）式同理可得： $w_j\cdot L_j=\beta\cdot\sum_{n=1}^{N}\pi_{nj}\cdot X_n$ 。于是有：

$$\frac{w_i\cdot L_i}{w_j\cdot L_j}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot X_n}{\sum_{n=1}^{N}\pi_{nj}\cdot X_n}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}}{\sum_{n=1}^{N}\pi_{nj}}=\frac{T_i\cdot w_i^{-\theta\cdot\beta}}{T_j\cdot w_j^{-\theta\cdot\beta}}\Rightarrow\frac{w_i\cdot L_i}{w_j\cdot L_j}=\frac{T_i\cdot w_i^{-\theta\cdot\beta}}{T_j\cdot w_j^{-\theta\cdot\beta}}\Rightarrow\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1+\theta\cdot\beta}\cdot\frac{L_i}{L_j}=\frac{T_i}{T_j}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1+\theta\cdot\beta}=\frac{T_i}{T_j}\cdot\left(\frac{L_i}{L_j}\right)^{-1}\Rightarrow\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1+\theta\cdot\beta}=\frac{T_i/L_i}{T_j/L_j}\Rightarrow\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1+\theta\cdot\beta}=\frac{T_i}{T_j}\cdot\left(\frac{L_i}{L_j}\right)^{-1}$$ （62）【文中（22）式】[1]

$$\Rightarrow\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1+\theta\cdot\beta}=\frac{T_i/L_i}{T_j/L_j}\Rightarrow\frac{w_i}{w_j}=\left(\frac{T_i/L_i}{T_j/L_j}\right)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\Leftrightarrow\frac{w_i}{w_N}=\left(\frac{T_i/L_i}{T_N/L_N}\right)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}$$

在劳动力自由流动的条件下，（62）式决定了国家之间劳动力配置水平，即：由 $w_i=\left(T_i/L_i\right)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}$，可得：$\left(w_i\right)^{1+\theta\cdot\beta}=T_i/L_i\Rightarrow L_i=T_i\big/\left(w_i\right)^{1+\theta\cdot\beta}$ 。因此，一国技术水平高于工资水平则会更加专业化生产制造业产品。在劳动力无法流动的条件下，（62）给出国家之间制造业部门的相对工资水平。当国家 i 的平均技术水平 T_i 不变时，劳动力供给增加会降低工资。

假定全球范围内国家只有制造业部门，此时 $\alpha=1$，且出口国 i 国内收入为劳动力工资总收入，于是有：$Y_i=w_i\cdot L_i$。定义一个出口国 i 的国内实际福利水平为名义收入与国内综合价格指数的比值：$Welafre_i=\left(Y_i/L_i\right)/P_n'=w_i/P_n'=w_i/p_i$ [2]。于是由 $P_n'=\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot(w_k^{\beta}\cdot p_k^{1-\beta}\cdot d_{nk})^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$（16）可知： $P_n'=\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot(w_k^{\beta}\cdot p_k^{1-\beta})^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$ ；以及 $w_i=\left(T_i/L_i\right)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}$ （22）可求得国家 i 的福利水平可由技术水平和相对劳动力供给表示。

首先由 $P_n'=\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot(w_k^{\beta}\cdot p_k^{1-\beta})^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$ 可知：国家 i 的综合价格指数是 i-和 n-国家差异化中间品价格指数的函数，可表示为：$p_i=\gamma\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\cdot\left(p_k\right)^{1-\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$。在一价定律的条件下：$p_k=p_i$，

[1] 最后一步将 j 替换成 N 即可。

[2] 福利水平参见封闭条件下的国内福利表达式： $w_i\cdot\left(p_i\right)^{-1}=\frac{w_i}{p_i}=\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}}\right)^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}}\cdot\left(\gamma\right)^{-\frac{1}{\beta}}$ （44）【文中（15）式】。

于是有：$p_i=\gamma\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\cdot(p_i)^{1-\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$。左式简单变换可得：$p_i=\gamma\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot(p_i)^{1-\beta}$，

两边同除 p_i 可得：$1=\gamma\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot(p_i)^{-\beta}$，两边同乘 $(w_i)^{-\beta}$，可得：

$(w_i)^{-\beta}=\gamma\cdot[w_i]^{-\beta}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot(p_i)^{-\beta}$。于是有：

$$\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot[w_i]^{-\beta}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[w_k^{\beta}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (63)$$

将 $w_i=(T_i/L_i)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}$ 以及 $w_k=(T_k/L_k)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}$ 代入（63），可得：

$$\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot\left[\left(\frac{T_i}{L_i}\right)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\beta}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left[\left(\frac{T_k}{L_k}\right)^{\frac{\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot\left(\frac{T_i}{L_i}\right)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot\left(\frac{T_k}{L_k}\right)^{\frac{-\theta\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot\left(\frac{T_i}{L_i}\right)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k\cdot T_k^{\frac{-\theta\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot L_k^{\frac{\theta\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot\left(\frac{T_i}{L_i}\right)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot L_k^{\frac{\theta\cdot\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (64)$$

由（64）进一步进行整理化简：

$$(64)式\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot(T_i)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{T_k^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot L_k^{\frac{\theta\cdot\beta}{1+\theta\cdot\beta}}}{L_i^{\frac{\theta\beta}{1+\theta\cdot\beta}}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot(T_i)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left(\frac{L_k}{L_i}\right)^{\frac{\theta\cdot\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad (65)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{-\beta}=\gamma\cdot(T_i)^{\frac{-\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot(L_k/L_i)^{\frac{\theta\cdot\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

（65）等价于：

$$W_i=w_i/p_i=\gamma^{-\frac{1}{\beta}}\cdot(T_i)^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}T_k^{\frac{1}{1+\theta\cdot\beta}}\cdot(L_k/L_i)^{\frac{\theta\cdot\beta}{1+\theta\cdot\beta}}\right]^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}} \quad (66)【文中（23）式】$$

显然由（66）可知，非 i 国 k 国内技术水平 T_k 提升会增加出口国 i 的工资水平，国家 i 国内技术水平 T_i 提升同样也会增加国家 i 的工资，与此同时，国家 k 技术水平对国家 i 的工资拉动作用取决于国家 k 和国家 i 的劳动力比重 L_k/L_i。若国家 i 的国内劳动力数量 L_i 越少，则对应其福利水平 w_i/p_i 提升更快。

对于单一国家的国内福利影响因素而言，可以直接求解当 $\pi_{ii}=1$ 时的（44）式。由（44）

$$\frac{w_i}{p_i}=\left(\frac{T_i}{\pi_{ii}}\right)^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}}\cdot(\gamma)^{-\frac{1}{\beta}}$$，令 $\pi_{ii}=1$，可得：

$$W_i=\frac{w_i}{p_i}=(T_i)^{\frac{1}{\theta\cdot\beta}}\cdot(\gamma)^{-\frac{1}{\beta}}$$（67）【文中（24）式】

7.估计贸易方程

7.1 解出引力模型

一般均衡由（46 or paper-16）（47 or paper-17）（57 or paper-20）或（59 or paper-21）构成。

$$P'_n=\left[\sum_{i=1}^{N}T_i\cdot(w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni})^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\gamma$$（46）【文中（16）式】

$$\frac{X'_{ni}}{X'_n}=T_i\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni}}{P'_n}\right)^{-\theta}$$（47）【文中（17）式】

$$w_i\cdot L_i=\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot\left[(1-\beta)\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot\beta\cdot Y_n\right]$$（57）【文中（20）式】

$$w_i\cdot L_i=\sum_{n=1}^{N}\pi_{ni}\cdot\left[(1-\beta+\alpha\cdot\beta)\cdot w_n\cdot L_n+\alpha\cdot\beta\cdot Y_n^{O}\right]$$（59）【文中（21）式】

由（47）可知进口国国内销售比重为：

$$\frac{\frac{X'_{ni}}{X'_n}}{\frac{X'_{nn}}{X'_n}}=\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\frac{T_i\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ni}}{P'_n}\right)^{-\theta}}{T_n\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_n^{\beta}\cdot p_n^{1-\beta}\cdot d_{nn}}{P'_n}\right)^{-\theta}}=\frac{T_i}{T_n}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\beta\cdot\theta}\cdot\left(\frac{p_i}{p_n}\right)^{-\theta\cdot(1-\beta)}\cdot\left(\frac{d_{ni}}{d_{nn}}\right)^{-\theta}=\frac{T_i}{T_n}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\beta\cdot\theta}\cdot\left(\frac{p_i}{p_n}\right)^{-\theta\cdot(1-\beta)}\cdot(d_{ni})^{-\theta}$$

（68）【文中（25）式】[1]

再由（47），令 $P'_n=p_i$，可以解出本国 i 国内销售比重为：

$$\frac{X'_{ni}}{X'_i}=T_i\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}\cdot d_{ii}}{p_i}\right)^{-\theta}=T_i\cdot\left(\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{-\beta}\right)^{-\theta}$$（69）[2]

由（69）解出：

---

[1] 其中，$d_{nn}=1$。

[2] 其中，$d_{ii}=1$。

$$\frac{X'_{ii}}{X'_i}=T_i\cdot\left(\frac{\gamma\cdot w_i^{\beta}\cdot p_i^{1-\beta}}{p_i}\right)^{-\theta}=T_i\cdot\left(\gamma\cdot w_i^{\beta}\right)^{-\theta}\left(p_i^{-\beta}\right)^{-\theta}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{X'_{ii}}{X'_i}\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}=\left(T_i\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\gamma\cdot w_i^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}\cdot p_i$$

$$\Rightarrow p_i=\left(\frac{X'_{ii}}{X'_i}\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\left(T_i\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\gamma\cdot w_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad （70）$$

$$\Rightarrow p_i=\left(\frac{X'_{ii}}{X'_i}\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\left(T_i\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot w_i$$

$$\Rightarrow p_i=w_i\cdot\left(\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(T_i\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(X'_{ii}/X'_i\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}$$

由（70）同理可知国家 n 的本国消费中间品价格指数为：

$$p_n=w_n\cdot\left(\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(T_n\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(X'_{nn}/X'_n\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}} \quad （70）'$$

用（70）/（70）'，可得：

$$\frac{p_i}{p_n}=\frac{w_i\cdot\left(\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(T_i\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(X'_{ii}/X'_i\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}}{w_n\cdot\left(\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(T_n\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(X'_{nn}/X'_n\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}}}=\frac{w_i}{w_n}\cdot\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\frac{X'_{ii}/X'_i}{X'_{nn}/X'_n}\right)^{\frac{1}{\beta\cdot\theta}} \quad （71）$$

$$\Leftrightarrow\frac{p_i}{p_n}=\frac{w_i}{w_n}\cdot\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}$$

将（71）式代入（68）式，可得国家 i 出口国家 n 的相对比重与国家 n 国内自我消费的商品对数差分如下：

$$\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\frac{T_i}{T_n}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\beta\cdot\theta}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\cdot\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\cdot\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\right)^{-\theta\cdot(1-\beta)}\cdot\left(d_{ni}\right)^{-\theta}$$

$$\Rightarrow\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\frac{T_i}{T_n}\cdot\left[\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\right]^{-\theta\cdot(1-\beta)}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\beta\cdot\theta}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\theta\cdot(1-\beta)}\left(\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{-\frac{1}{\beta\cdot\theta}}\right)^{-\theta\cdot(1-\beta)}\cdot\left(d_{ni}\right)^{-\theta} \quad （72）$$

$$\Rightarrow\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\frac{T_i}{T_n}\cdot\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\theta}\cdot\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\left(d_{ni}\right)^{-\theta}$$

$$\Rightarrow\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\theta}\cdot\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\left(d_{ni}\right)^{-\theta}$$

对（72）两边取对数，可得：

$$\ln\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\ln\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}+\ln\left(\frac{w_i}{w_n}\right)^{-\theta}+\ln\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}+\ln(\ \ )^{-\theta}$$

$$\Rightarrow\ln\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}=\frac{1}{\beta}\cdot\ln\frac{T_i}{T_n}+(-\theta)\cdot\ln\frac{w_i}{w_n}+(-\theta)\cdot\ln d_{ni}+\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(X'_i/X'_{ii}\right)-\ln\left(X'_n/X'_{nn}\right)\right] \quad (73)$$

$$\Rightarrow\underbrace{\ln\frac{X'_{ni}}{X'_{nn}}-\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(\frac{X'_i/X'_{ii}}{X'_n/X'_{nn}}\right)\right]}_{\text{重新定义一个}\ln X''}=\frac{1}{\beta}\cdot\ln\frac{T_i}{T_n}+(-\theta)\cdot\ln\frac{w_i}{w_n}+(-\theta)\cdot\ln d_{ni}$$

为了简化表达式（73），LHS 重新定义：$\ln X''_{ni}=\ln X'_{ni}-\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(X'_i/X'_{ii}\right)\right]$，同理有：

$\ln X''_{nn}=\ln X'_{nn}-\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(X'_n/X'_{nn}\right)\right]$[1]。将二者代入（73），可得（73）的 LHS 改写为：

$\ln\frac{X''_{ni}}{X''_{nn}}=\frac{1}{\beta}\cdot\ln\frac{T_i}{T_n}+(-\theta)\cdot\ln\frac{w_i}{w_n}+(-\theta)\cdot\ln d_{ni}$ （74）【文中（26）式】

将（74）中非地理距离因素剥离出来，定义：

$S_i=\frac{1}{\beta}\cdot\ln T_i-\theta\cdot\ln w_i$ （75）【文中（27）式】[2]

将（75）代入（73），可得：

$\ln\frac{X''_{ni}}{X''_{nn}}=-\theta\cdot\ln d_{ni}+S_i-S_n$ （76）【文中（28）式】[3]

以上（76）式便是 EK 模型的主要校准模型。（76）的左边实际上表示的是国家 i 向国家 n 的双边出口贸易量占国家 n 全球贸易量比重的对数值。

7.2 来源国效应估计 θ（后面的内容都是基于前文的模型进行，可参考文章部分）

校准时作者设定 belta=0.21。Si 则使用工资数据和各国平均技术水平进行校准。值得一提的是作者对于距离的处理。

7.2.1 距离的处理

---

[1] 回忆 $X_n=\underbrace{\frac{1-\beta}{\beta}\cdot w_n\cdot L_n}_{\substack{\text{国家n制造业}\\\text{中间品需求}=p_nq_n}}+\underbrace{\alpha\cdot Y_n}_{\substack{\text{国家n制造业}\\\text{最终品需求}}}$ （56）。将 $\ln X''_{ni}=\ln X'_{ni}-\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(X'_i/X'_{ii}\right)\right]$ 理解为国家 i 的总进口（总收入）中扣除国家 i 本国进口 $\left[\ln\left(X'_i/X'_{ii}\right)\right]$ 的部分，也就是国家 i 向国家 n 双边净出口的贸易流量。同理，$\ln X''_{nn}=\ln X'_{nn}-\left[(1-\beta)/\beta\right]\cdot\left[\ln\left(X'_n/X'_{nn}\right)\right]$ 则可以理解为国家 n 制造业部门的消费品扣除向国家 n 国内自身提供制造业消费品的全球贸易采购数量。

[2] 可理解为出口方国家 i 国内技术水平 T_i 与名义工资 w_i 的差距，或者类似文章中理解为国家竞争力。

[3] EK 在文章中给了一个注释，要强调一下：若不考虑制造业部门比重 $\beta=1$ 并定义国家竞争力就等于国家收入 $S_i=\ln Y_i$，$S_n=\ln Y_n$，则根据（76）式可得：$\ln\frac{X''_{ni}}{X''_{nn}}=-\theta\cdot\ln d_{ni}+\ln Y_i-\ln Y_n\Leftrightarrow\frac{X''_{ni}}{X''_{nn}}=\left(d_{ni}\right)^{-\theta}\cdot Y_i\cdot Y_n$，或者：$X_{ni}=\kappa\cdot d_{ni}^{-\theta}\cdot Y_i\cdot Y_n$。这是一个标准的引力模型。

地理距离满足如下经济距离函数形式：

$\ln d_{ni} = d_k + b + l + e_h + m_n + \delta_{ni}$ （77）【文中（29）式】

$d_k (k = 1, 2, \ldots, 6)$ 表示六分位等分的地理距离，区间为 k 。b 表示是否共同边境（边界）。l 表示是否共同语言。$e_h (h = 1, 2)$ 是否属于贸易区域范围。$m_n (n = 1, 2, \ldots, 19)$ 为全局贸易目的地效应虚拟变量（一共 20 个国家，所以对于任意一个国家而言，n=19）。δ_{ni} 表示随机误差项[1]。六个地理距离区间设定为：[0，375)，[375,750)，[750，1500)，[1500，3000)，[3000，6000)，[6000，+∞)。两个贸易区域是欧元区（EC）和欧洲自贸区（EFTA）。随机误差项由两部门组成：$\delta_{ni} = \delta_{ni}^2 + \delta_{ni}^1$，$\delta_{ni}^2 = \delta_{in}^2 = \sigma_2^2$，$\delta_{ni}^1 = \sigma_1^2$ 分别体现双边贸易和单边贸易的影响。于是（77）可改写为：

$\ln d_{ni} = d_k + b + l + e_h + m_n + \delta_{ni}^2 + \delta_{ni}^1$ （78）

将（78）代入（76），可得：

$\ln \frac{X''_{ni}}{X''_{nn}} = -\theta \cdot \left(d_k + b + l + e_h + m_n + \delta_{ni}^2 + \delta_{ni}^1 \right) + S_i - S_n$ （79）【文中（30）式】

作者使用 GLS 估计（79），得到 θ

7.3.替代方式 I：利用工资数据估计 θ

这里提供一个利用技术水平方程和工资数据重新估计 θ 的替代方式。作者定义一个技术水平的待估计方程：

$S_i = \alpha_0 + \alpha_R \cdot \ln R_i - \alpha_H \cdot \left(\frac{1}{H_i} \right) - \theta \cdot \ln w_i + \tau_i$ （80）[2]

其中，R_i 是国家 i 的 R&D 资本投入存量，H_i 是平均入学年限，τ_i 为误差项。使用 OLS 和 2SLS 估计。

7.4.替代方式 II：利用价格数据估计 θ

同样使用来源国估计中的处理对 $\ln \frac{X''_{ni}}{X''_{nn}} = -\theta \cdot \ln d_{ni} + S_i - S_n$（76）【文中（28）式】进行估计，但这里的距离使用 $D_{ni} = \frac{\max 2_j \{ r_{ni}(j) \}}{\sum_{j=1}^{50} r_{ni}(j) / 50}$ （40）【文中（13）式】。显然，（40）中 $r_{ni}(j) = \ln \left[\frac{p_n(j)}{p_i(j)} \right] = \ln p_n(j) - \ln p_i(j)$，这样就可以利用商品价格的对数差分估计经济距离。再得到 θ 。

[1] 之所以搞得这么复杂，是因为原文图 1 中显示单纯使用地理距离对贸易数据的拟合程度不高。

[2] 这个方程式如何来的参见 EK（1997）。

后文不再赘述。

参考资料

[1] Cervantes, F. P. Notes on Frechet Distribution[R]. 道客巴巴. http://www.doc88.com/p-0147225142099.html。

[2] 国际贸易经典文献模型推导（八）—— E-K 模型[R]. 世经国贸学术联盟。

[3] Eaton, J., Kortum, S. Technology, Geography, and Trade[J]. Econometrica, 2002, 70(5):1741-1779.

[4] Alvarez, F., Lucas, R. J. General Equilibrium Analysis of the Eaton-Kortum Model of International Trade[J]. Journal of Monetary Economics, 2006, 54(6): 1726-1768.