Marco Listanti

Esercizi 5

Rivelazione d'errore

Esercizio 1 (1)

- **Si applichi alla stringa P=1110 il meccanismo di generazione di una stringa binaria lato emettitore con CRC ottenuto attraverso un polinomio generatore $G(x)=x^3+x+1$**
- **Si derivi:**
  - 1) La stringa binaria T emessa lato emettitore
  - 2) Una stringa d'errore E1 che sommata a T **NON** dia errore in ricezione (E1 deve essere diversa da E=0001011)
  - 3) Una stringa d'errore E2 che sommata a T dia errore in ricezione

Esercizio 1 (2)

- La stringa P=1110 deve essere letta come un polinomio P(x) di grado 3 avente la struttura

$$P(x) = x^3 + x^2 + x$$

- Il polinomio generatore $G(x)=x^3+x+1$ ha grado z=3 quindi occorre trovare il resto della divisione

$$\frac{x^3 P(x)}{G(x)} = \frac{x^3\left(x^3 + x^2 + x\right)}{x^3 + x + 1}$$

Divisore G(x)

$$x^3 + x + 1$$

Quoziente Q(x)

$$x^3 + x^2$$

Dividendo x^3 P(x)

$$\begin{array}{l}
x^6 + x^5 + x^4 \\
x^6 \qquad\quad + x^4 + x^3 \\
\hline
\quad + x^5 \qquad + x^3 \\
\quad + x^5 \qquad + x^3 + x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad + x^2
\end{array}$$

Resto R(x)

R(x) = 1 0 0

Esercizio 1 (2a)

- **Equivalentemente**
  - R(x) = 1 0 0

Dividendo x^3 P(x)		
1 1 1 0 0 0 0	1 0 1 1	Divisore G(x)
1 0 1 1	1 1 0 0	Quoziente Q(x)
= 1 0 1 0		
1 0 1 1		
= 0 0 1 0		
0 0 0 0		
= 0 1 0 0		
0 0 0 0		
= 1 0 0		
Resto R(x)		

Esercizio 1 (3)

- **Dalla divisione precedente si ha che la stringa CRC è data da 100**
- **La sequenza T trasmessa sarà quindi**

$$T = 1110 \quad 100$$

- **Una configurazione d'errore che non può essere rivelata dal codice CRC deve essere tale da trasformare la sequenza T in una sequenza T' che sia divisibile per il polinomio G(x)**
  - Ad esempio, se si moltiplica G(x) per un polinomio quoziente Q'(x) di grado 3 del tipo

$$Q'(x) = x^3 + 1$$

  - Si ha

$$T'(x) = Q'(x) \cdot G(x) = \left(x^3 + 1\right) \cdot \left(x^3 + x + 1\right) = x^6 + x^4 + x^3 + x^3 + x + 1 = x^6 + x^4 + x + 1$$

  - Il polinomio $T'(x)=x^6+x^4+x+1$ è divisibile per G(x) quindi una configurazione d'errore E(x) che trasformi la sequenza originale T=1110 100 in T'=1010 011 non è rivelabile dal codice CRC, quindi

$$E(x) = 0100 \quad 111$$

Esercizio 1 (4)

- **Dimostrazione**

Divisore G(x)

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^3+1 & & & \\
\hline
x^3+x+1 & x^6 & +x^4 & & +x+1 \\
 & x^6 & +x^4 & +x^3 & \\
\hline
 & & & +x^3 & +x+1 \\
 & & & +x^3 & +x+1 \\
\hline
 & & & & ----------
\end{array}
$$

Resto R(x) nullo

Dividendo x^3 P(x)	Divisore G(x)
1 0 1 0 0 1 1	1 0 1 1
1 0 1 1	1 0 0 1 (Quoziente Q(x))
= 0 0 1 0	
0 0 0 0	
= 0 1 0 1	
0 0 0 0	
= 1 0 1 1	
1 0 1 1	
= 0 0 0	

Resto R(x)

Esercizio 1 (5)

- In base alla risposta al quesito precedente una sequenza

$$T'(x) = x^6 + x^4 + x$$

non è divisibile per Q(x) e quindi il codice CRC rivela l'errore

- La configurazione d'errore E(x) che trasforma T(x) in T'(x)

$$E(x) = 0100 \quad 011$$

Divisore G(x)

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^3 + 1 & & & \\
\hline
x^3 + x + 1 & x^6 & + x^4 & & + x \\
 & x^6 & + x^4 & + x^3 & \\
\cline{2-5}
 & & & + x^3 & + x \\
 & & & + x^3 & + x + 1 \\
\cline{2-5}
 & & & & + 1
\end{array}
$$

Resto R(x) non nullo

Esercizio 2 (1)

- Applicare la tecnica di riempimento bit stuffing alla seguente sequenza

0111011111 1001110111 0101111111 1011110111 111

- Sempre facendo riferimento alla tecnica bit stuffing , si supponga che viene ricevuto la seguente sequenza di bit

0111111011 1011111011 1110111110 1111011000 1111101010 0001111110

Si cancellino i bit addizionali e si ricostruisca la frame originale

Esercizio 2 (2)

- Considerando che occorre inserire uno "0" di stuffing dopo cinque "1" consecutivi, la sequenza da trasmettere sarà

0111011111 0 1001110111 01011111 0 1110111101 1111 0 1

- In ricezione occorre eliminare gli "0" trasmessi dopo cinque "1" consecutivi

01111110 11 1011111 0 11111 0 11111 0 1111011000 11111 0 101000 01111110

Flag — Destuffing — Destuffing — Destuffing — Destuffing — Flag

Esercizio 3 (1)

- **Si consideri una parola di codice T=1011100 ottenuta da un polinomio P(X) e un resto R(X) attraverso l'uso di un polinomio generatore $G(x)=x^3+x^2+1$**
  - 1) Supponendo che durante la trasmissione si verifichi un errore su terzo e sul quarto bit di T (a partire dal piu' significativo), qual è il polinomio resto ottiene il ricevitore quando effettua il suo controllo d'errore ?
  - 2) Che parola di codice sarebbe stata trasmessa se il polinomio generatore fosse stato $G(x)= x^4+x+1$

Esercizio 3 (2)

- **Le sequenze trasmesse e ricevuto (T e T') sono**

$$T = 1011100$$

$$T' = 1000100$$

- **Poiché il polinomio generatore G(x) è $G(X)=x^3+x^2+1$ il polinomio resto R(x) calcolato dal ricevitore sarà diverso da 0**

$$R(x) = x$$

- **Il codice quindi rivela l'errore**

G(x)

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 + 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\
\hline
 & x^6 \qquad\qquad\qquad + x^2 \quad \text{T'(x)} \\
 & x^6 + x^5 \qquad + x^3 \\
\hline
 & \quad + x^5 \qquad + x^3 + x^2 \\
 & \quad + x^5 + x^4 \qquad + x^2 \\
\hline
 & \qquad + x^4 + x^3 \\
 & \qquad + x^4 + x^3 \qquad + x \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad + x
\end{array}$$

Resto R(x)

Esercizio 3 (2a)

- **In modo equivalente**

Dividendo x^3 P(x) | **Divisore G(x)**

```
1 0 0 0 1 0 0   | 1 1 0 1
1 1 0 1         |--------
--------------- | 1 1 1
= 1 0 1 1       |
  1 1 0 1       | Quoziente Q(x)
---------------
  = 1 1 0 0
    1 1 0 1
---------------
    = 0 0 1 0
      0 0 0 0
---------------
      = 0 1 0
```

Resto R(x)

Esercizio 3 (4)

- Poiché la sequenza T del punto precedente era stata ottenuta mediante un polinomio generatore di terzo grado, il numero di bit del codice CRC era di 3 bit ("100")
- La sequenza da trasmettere è quindi "1011" da cui il polinomio P(x) risulta

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

- Poiché il polinomio generatore G(x) è in questo caso G(X)=x^4+x+1 il polinomio resto R(x) calcolato dal ricevitore sarà

$$R(x) = x^3 + x^2 + x$$

G(x)

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x + 1 & x^3 + x \\
\hline
 & x^7 \qquad + x^5 + x^4 \qquad x^4P\ (x) \\
 & x^7 \qquad\qquad + x^4 + x^3 \\
\hline
 & \qquad + x^5 \qquad + x^3 \\
 & \qquad + x^5 \qquad\qquad + x^2 + x \\
\hline
 & \text{Resto R(x)} \quad + x^3 + x^2 + x
\end{array}$$

Dividendo x^4 P(x)

$$\begin{array}{r|l}
1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \quad \text{Divisore G(x)} \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ \ \ \ \ \ \ \ \ & \\
\hline
= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ \ \ \ \ \ & 1\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ \ \ \ \ \ & \text{Quoziente Q(x)} \\
\hline
= 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ \ \ & \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ \ \ \ & \\
\hline
= 0\ 1\ 1\ 1\ 0 & \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0 & \\
\hline
\text{Resto R(x)} \quad = 1\ 1\ 1\ 0 &
\end{array}$$

Esercizio 4 (1)

- **Vogliamo trasmettere il messaggio 11001001 e proteggerlo da errori usando il polinomio CRC $G(x)=x^3 +1$**
  - 1) Quale messaggio deve essere trasmesso ?
  - 2) Supponendo che il bit più significativo del messaggio sia invertito in ricezione. Qual è il risultato del controllo CRC del ricevente?
  - 3) In che modo il ricevitore riconosce l'occorrenza dell'errore?

Esercizio 4 (2)

- Data la sequenza da trasmettere (T=11001001), il polinomio P(x) associato è il seguente

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^3 + 1$$

- Il polinomi generatore G(x) è

$$G(x) = x^3 + 1$$

- L'operazione da effettuare lato trasmittente è il calcolo del resto della divisione

$$\frac{x^3 \cdot P(x)}{G(x)} = \frac{x^3 \cdot (x^7 + x^6 + x^3 + 1)}{x^3 + 1} = \frac{x^{10} + x^9 + x^6 + x^3}{x^3 + 1}$$

Esercizio 4 (3)

- **quindi**

$$R(x) = x + 1$$

- **la sequenza CRC sarà**

$$CRC = 011$$

- **la sequenza complessiva trasmessa**

$$T = 11001001 \quad 011$$

G(x) $x^3 + 1$

$$
\begin{array}{l|cccccccccc}
 & x^7 & + x^6 & & + x^4 & & & + x & + 1 & & \\
\hline
x^3+1 & x^{10} + x^9 & & + x^6 & & & + x^3 & & & \text{x}^3\,\text{P(x)} \\
 & x^{10} & + x^7 & & & & & & & \\
\cline{2-10}
 & + x^9 & + x^7 & + x^6 & & & + x^3 & & & \\
 & + x^9 & & + x^6 & & & & & & \\
\cline{2-10}
 & & + x^7 & & & & + x^3 & & & \\
 & & + x^7 & & + x^4 & & & & & \\
\cline{2-10}
 & & & & + x^4 & & + x^3 & & & \\
 & & & & + x^4 & & & + x & & \\
\cline{2-10}
 & & & & & & + x^3 & + x & & \\
 & & & & & & + x^3 & & + 1 & \\
\cline{2-10}
 & & & & & \text{Resto R(x)} & & + x & + 1 & \\
\end{array}
$$

Esercizio 4 (4)

- Nel caso di errore sul bit più significato di T la sequenza ricevuta T' sarà

$$T' = 01001001 \quad 011$$

- La divisione con il polinomio generatore G(x) fornisce un resto R(x) non nullo

$$R(x) = x$$

- Il codice rivela l'errore

$$
\begin{array}{c|lllll}
\text{G(x)} & x^6 + 1 & & & & \\
\cline{2-6}
x^3 + 1 & x^9 & + x^6 & + x^3 & + x + 1 & \text{T'(x)} \\
 & x^9 & + x^6 & & & \\
\cline{2-6}
 & & & + x^3 & + x + 1 & \\
 & & & + x^3 & \quad + 1 & \\
\cline{2-6}
 & & & & + x & \\
 & & & & \text{Resto R(x)} & \\
\end{array}
$$

Esercizio 5

- **Per la stringa M=1011000101101010 calcolare:**
  - 1) Il valore di internet checksum a 8 bit;
  - 2) Il valore di CRC relativo al polinomio di $G(x)=x^3+1$

- La stringa M (16 bit) è divisa in due parole M1 e M2 di 8 bit ciascuna

$$M1 = 10110001 \quad \Rightarrow \quad 177 \qquad\qquad M2 = 01101010 \quad \Rightarrow \quad 106$$

- Si ha

$$(M1 + M2) \bmod (2^8 - 1) = 283 \bmod (255) = 28$$

- quindi

$$M3 = -28 \bmod (255) = 227 \quad \Rightarrow \quad 11100011$$

  - infatti

$$-28 \bmod 255 = -28 - 255 \cdot \left\lfloor \frac{-28}{255} \right\rfloor = -28 - 255 \cdot (-1) = 227$$

Esercizio 6 (1)

- **Si consideri un header con parole da 4 bit**
  - B0=1001 $\Rightarrow$ 9
  - B1=1100 $\Rightarrow$ 12
  - B2=1010 $\Rightarrow$ 10
  - B3=0011 $\Rightarrow$ 3
- **Si calcoli la quinta parola che costituisce il checksum**

Esercizio 6 (2)

- **Analogamente al procedimento dell'esercizio 5 si ha**

$$(B0 + B1 + B2 + B3) \bmod(2^4 - 1) = 34 \bmod(15) = 4$$

- quindi

$$B4 = -4 \bmod(15) = 11 \quad \Rightarrow \quad 1011$$

- infatti

$$-4 \bmod 15 = -4 - 15 \cdot \left\lfloor \frac{-4}{15} \right\rfloor = -4 - 15 \cdot (-1) = 11$$