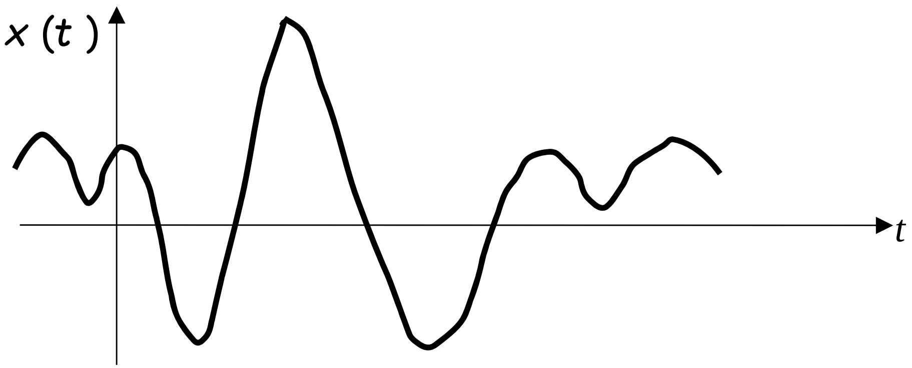
Marco Listanti

Lo strato Fisico

Parte 2
Rappresentazione dei segnali e teorema del campionamento

Segnale analogico

- **Segnale tempo-continuo**
  - andamento nel tempo di una grandezza perturbata

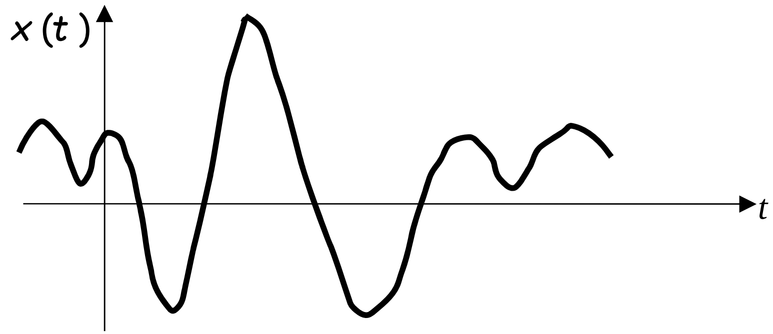


$$x(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

- **Esempi**
  - Voce, temperatura ambiente, musica, televisione, tensione d'uscita di un microfono

Potenza di un segnale x(t)

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 dt \geq 0$$



- Un segnale è detto "di potenza" se $0<P_x<+\infty$

- Esempio (1): segnale costante $x(t)=c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |c|^2 dt = |c|^2 \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = |c|^2$$

Potenza di un segnale x(t)

- **Esempio (2): segnale periodico sinusoidale**

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad T = 1/f_0$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt = \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[1+\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)]dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}dt + \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right) + 0 \quad \text{(il coseno ha area nulla)} = \frac{A^2}{2}$$

Sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico

Segnale periodico, periodo T : $$x(t) = x(t+T) = \sum_n g(t-nT)$$

Frequenza fondamentale: $F = \frac{1}{T}$ **Armonica *n*-esima:** $f_n = nF = n/T$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t} \\ X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \end{cases}$$

Sviluppo in serie di Fourier

Coefficienti dello sviluppo

$$\{X_n\} = \{\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots\}$$ **è una rappresentazione di x(t)**

Sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico

- **Si osservi che**

$$e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}, \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$

quindi

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi f_n t}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(2\pi f_n t)dt - j\int_{-T/2}^{T/2} x(t)sen(2\pi f_n t)dt = R_n + jI_n = M_n\, e^{j\varphi_n}$$

da cui

$$R_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(2\pi f_n t\right)dt = R_{-n} \qquad M_n = \sqrt{R_n^2 + I_n^2} = M_{-n}$$

$$I_n = -\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)sen\left(2\pi f_n t\right)dt = -I_{-n} \qquad \varphi_n = arctg\left(\frac{I_n}{R_n}\right) = -\varphi_{-n}$$

$$\boxed{X_{-n} = X_n^*}$$

Sviluppo in serie di un segnale reale periodico

- **x(t) segnale periodico reale**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t} = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[X_n e^{j2\pi f_n t} + X_{-n} e^{-j2\pi f_n t}\right] =$$

$$= R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[M_n e^{j(2\pi f_n t + \varphi_n)} + M_{-n} e^{-j(2\pi f_n t + \varphi_{-n})}\right] =$$

$$= R_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} M_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

- **Sviluppo con solo coseni di opportuna ampiezza e fase**

Teorema di Parseval

- **Potenza di un segnale periodico x(t)**

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t} \sum_n X_n^* e^{-j2\pi f_n t}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_n X_n X_n^* = \sum_n |X_n|^2$$

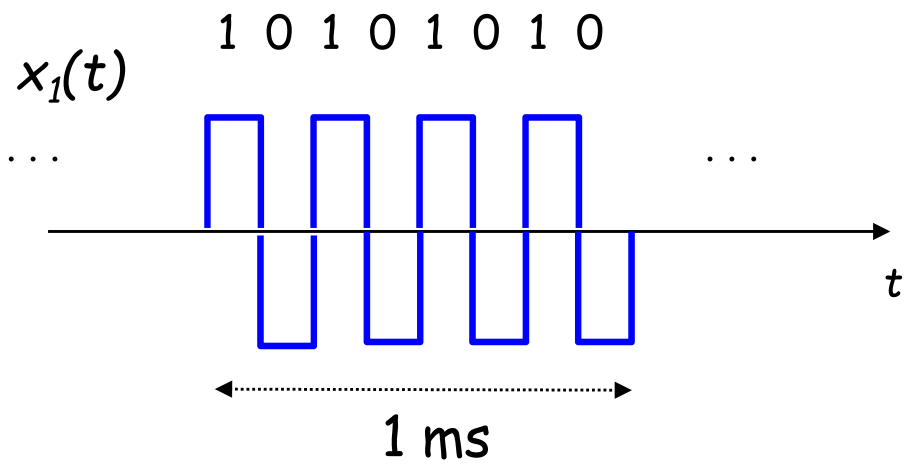
- **$|X_n|^2$ è la potenza della singola armonica n/T**

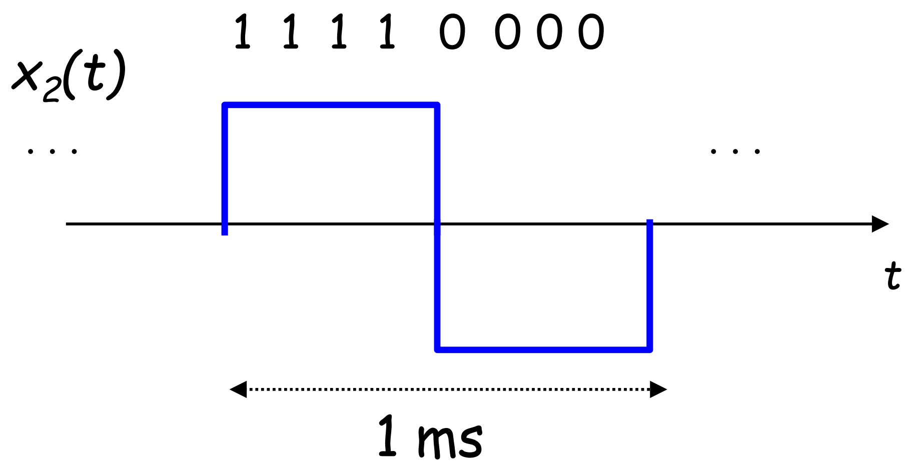
Digitalizzazione di segnali analogici

1. **Campionamento: estrazione di campioni del segnale x(t) uniformemente spaziati nel tempo**
2. **Quantizzazione: codifica di ogni campione con una stringa di bit (con precisione finita)**
   - Telefonia: Pulse Code Modulation (PCM)
   - CD audio
3. **Compressione: applicazione di metodi di riduzione del bit rate**
   - Codifica differenziale: telefonia cellulare
   - Subband coding: MP3 audio

Frequenza di campionamento e larghezza di banda

- Segnali che variano più velocemente nel tempo devono essere campionati con maggiore frequenza
- *Larghezza di banda* (*Bandwidth*): misura quanto velocemente varia un segnale





- Come si misura la banda di un segnale ?
- Qual'è la relazione tra bandwidth e frequenza di campionamento (sampling rate) ?

Segnali periodici

- **Un segnale reale periodico di periodo T può essere rappresentato come somma di sinusoidi usando lo sviluppo in serie di Fourier**

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + a_2\cos(2\pi 2 f_0 t + \varphi_2) + \ldots + a_k\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) + ..$$

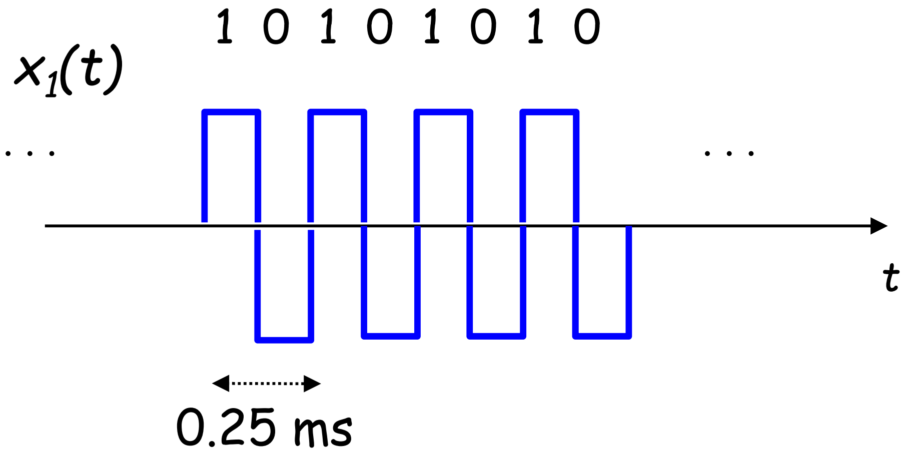
"Componente continua"; media a lungo termine

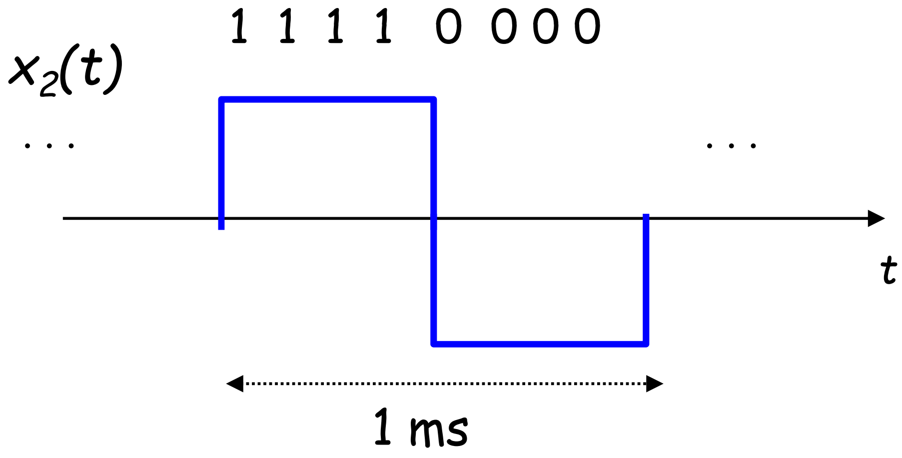
Frequenza fondamentale $f_0=1/T$ (prima armonica)

k-ma armonica

- $|a_k|$ determina la potenza della k-ma armonica
- **Spettro di ampiezza** = $\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots\}$

Esempio di sviluppo in serie di Fourier





$$x_1(t) = 0 + \frac{4}{\pi}\cos(2\pi 4000t) + \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi 3(4000)t) + \frac{4}{5\pi}\cos(2\pi 5(4000)t) + \ldots$$

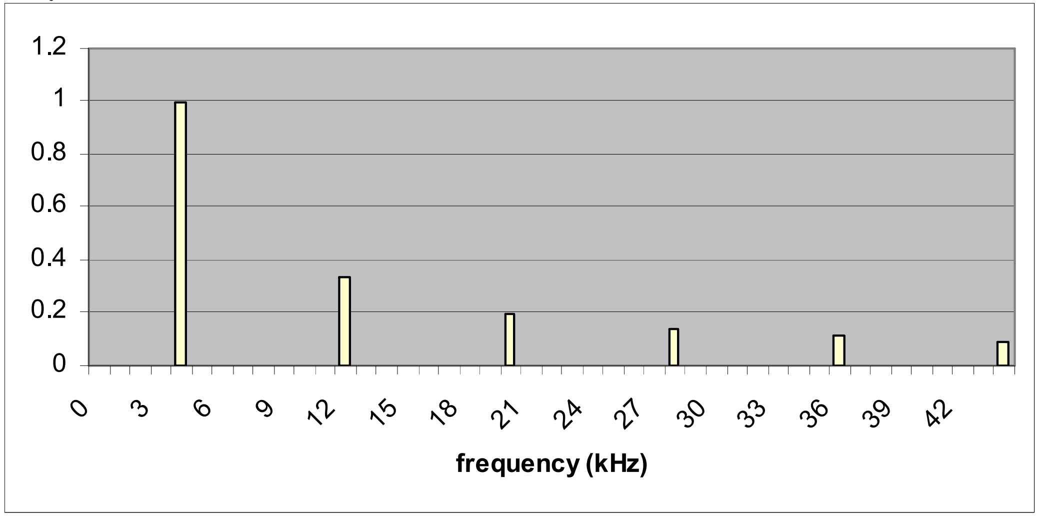
$$x_2(t) = 0 + \frac{4}{\pi}\cos(2\pi 1000t) + \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi 3(1000)t) + \frac{4}{5\pi}\cos(2\pi 5(1000)t) + \ldots$$

- **Sono presenti solo le armoniche dispari (k=1,3,5,..)**

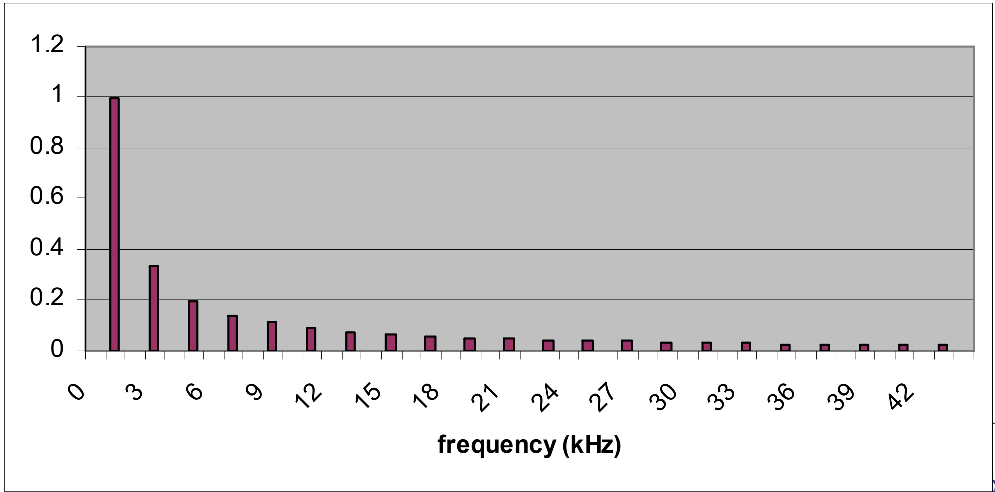
Spettro & Bandwidth di un segnale

- Lo Spettro di un segnale è rappresentato dalle ampiezze di ciascuna componente di frequenza
- $x_1(t)$ varia più velocemente nel tempo e quindi ha un contenuto di alte frequenze maggiore di $x_2(t)$
- La larghezza di banda (Bandwidth) W_s di un segnale è definita come l'intervallo di frequenze del segnale che hanno potenza non trascurabile
  - intervallo di banda che contiene il 99% della potenza totale del segnale

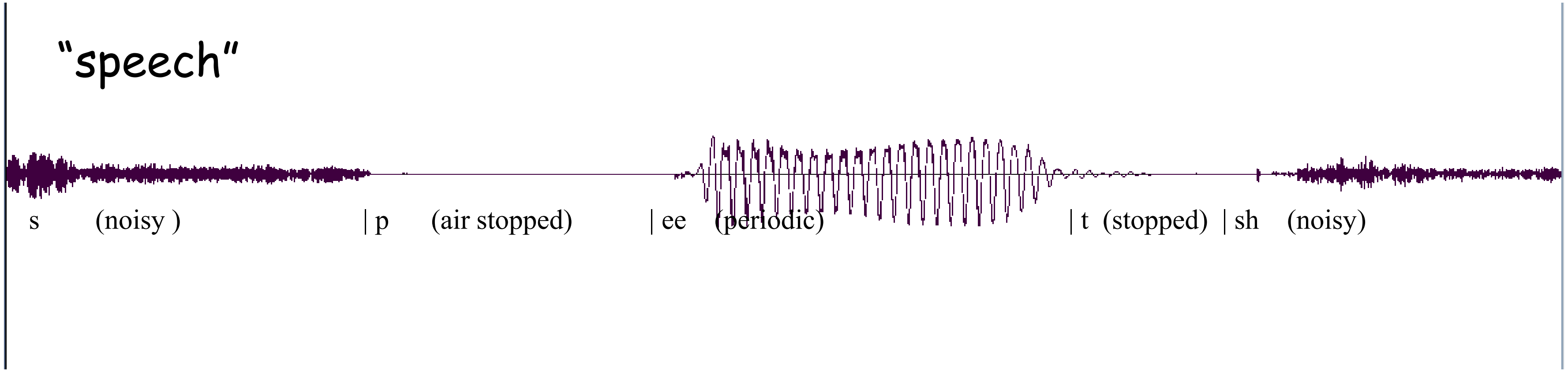
Spettro di $x_1(t)$



Spettro di $x_2(t)$



Bandwidth di segnali generici



- **Non tutti i segnali sono periodici**
  - Es. segnale vocale
- **Per la determinazione dello spettro di un segnale generico si utilizza la Trasformata di Fourier**
  - Segnale telefonico: 4 kHz
  - CD Audio: 22 kHz

Trasformata di Fourier

- Dato un **segnale impulsivo** x(t) per cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$$

- si ha

$$FT: \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt = FT\{x(t)\} \qquad -\infty < f < +\infty$$

$$FT^{-1}: \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df = FT^{-1}\{X(f)\} \qquad -\infty < t < +\infty$$

- X(f) è una rappresentazione di x(t) nel dominio della frequenza anziché del tempo

Trasformata di Fourier di segnali reali

- se x(t) è un segnale reale

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt =$$

$$= R(f) + j\,I(f)$$

- poichè

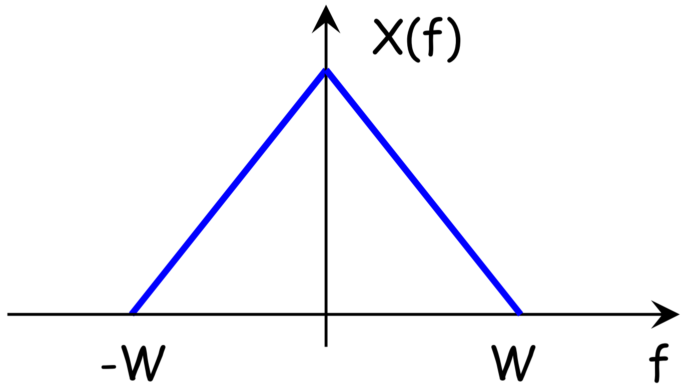
$$R(f) = R(-f) \qquad I(f) = -I(-f)$$

$$M(f) = M(-f) \qquad \varphi(f) = -\varphi(-f)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(f) = X^*(-f)}$$

Larghezza di banda di un segnale

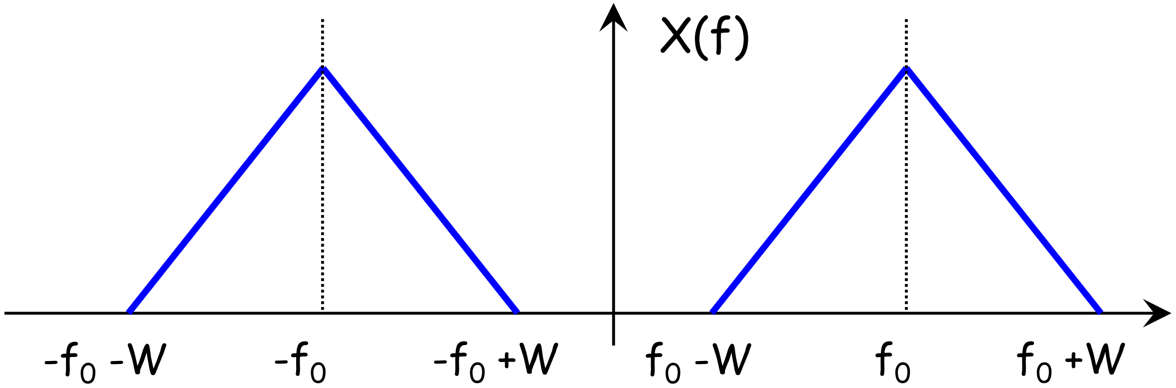
- Un segnale reale x(t) si dice **limitato in banda [-W,W]** se la sua trasformata di Fourier X(f) è nulla per $f \notin [-W,W]$



- La quantità W è definita come la **Larghezza di Banda** del segnale x(t)
- Poiché $X(f) \neq 0$ in un intorno [-W,W] di f=0, il segnale x(t) si dice **segnale di banda base**

Larghezza di banda di un segnale

- Un segnale reale $x(t)$ si dice limitato in banda, con banda 2W centrata intorno alla frequenza f_0 se
  - $f_0 > W$
  - $X(f)$ è identicamente nulla per $f \notin [-f_0-W, -f_0+W] \cup [f_0-W, f_0+W]$

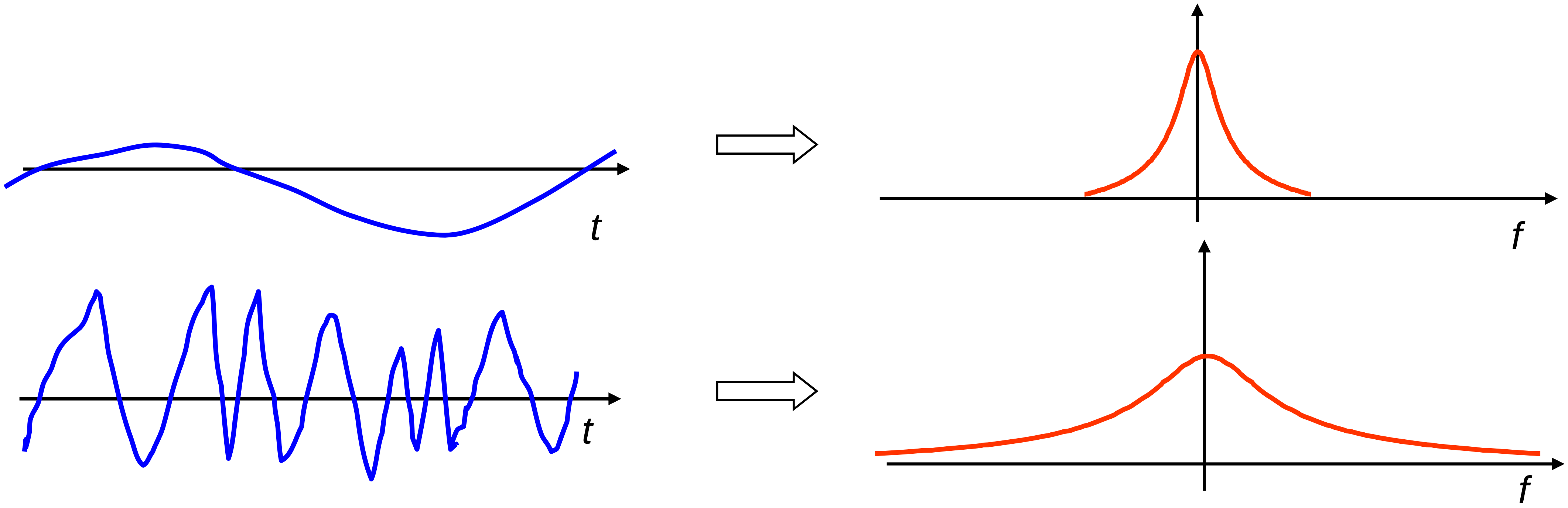


- La quantità 2W è la larghezza di banda del segnale $x(t)$
- Poiché $X(f) \neq 0$ in un intorno di $\pm f_0$ non adiacente all'origine, il segnale $x(t)$ si dice "segnale in banda traslata".

Relazioni tempo-frequenza

Segnali *lentamente varianti in t* ⟶ banda stretta (in f)

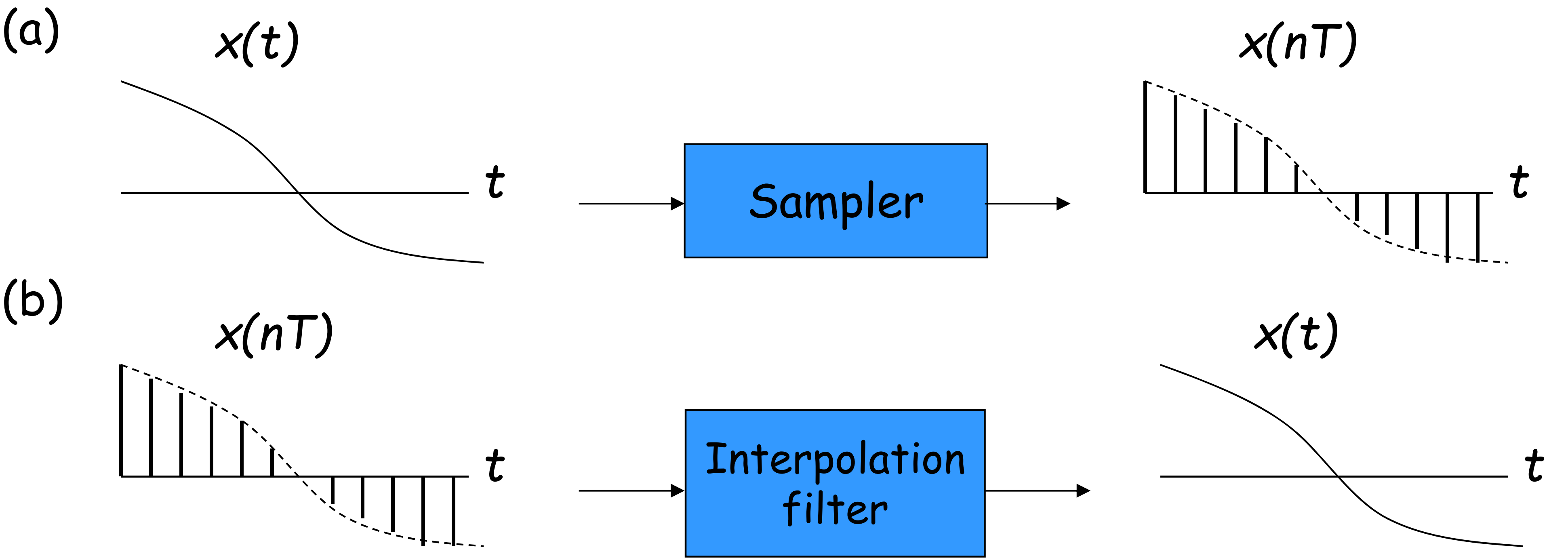
Segnali *rapidamente varianti in t* ⟶ banda larga (in f)



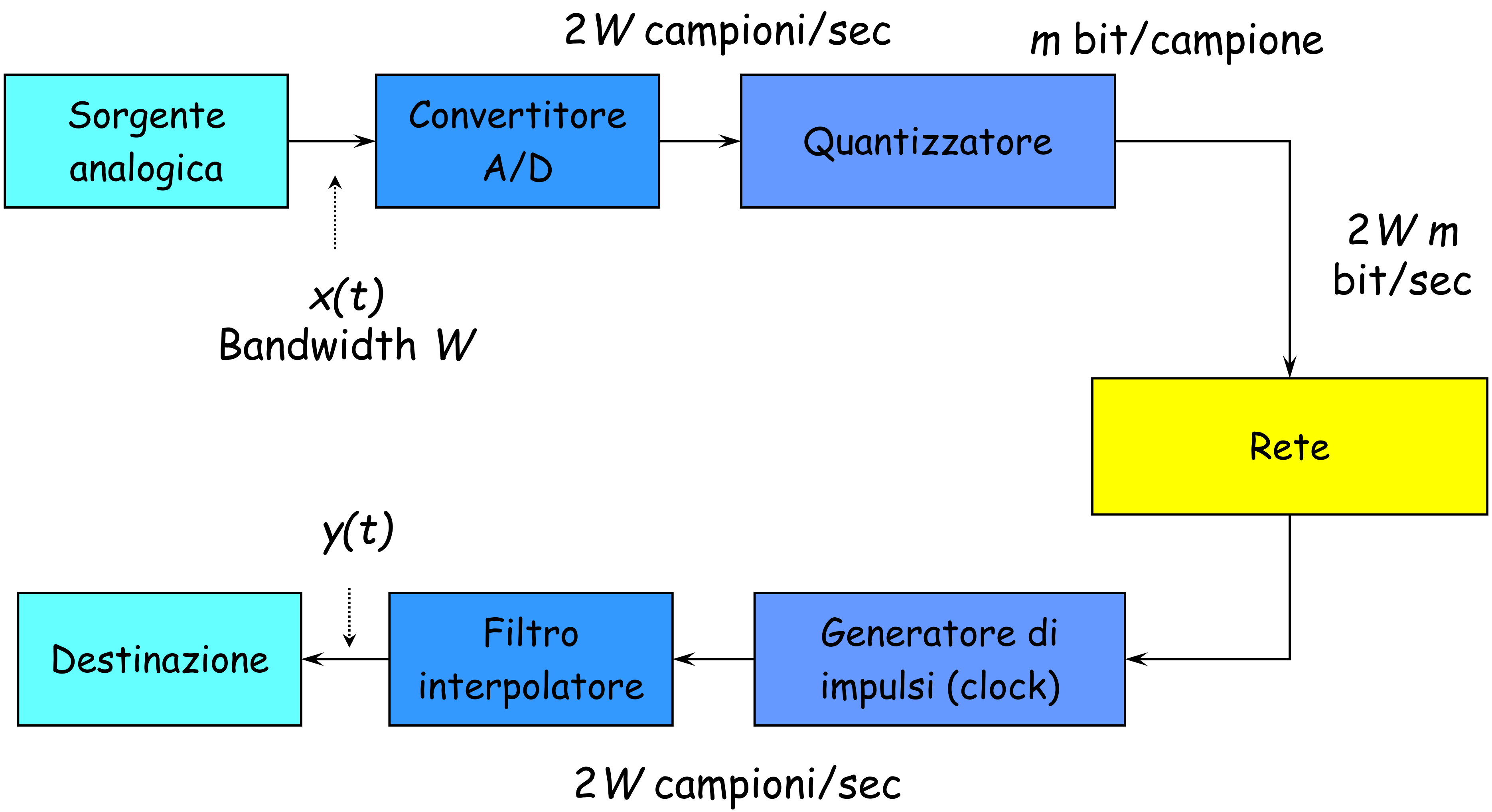
Teorema del campionamento

- Un segnale limitato in banda W_s può essere perfettamente ricostruito a partire dalla sequenza dei suoi campioni se la frequenza di campionamento

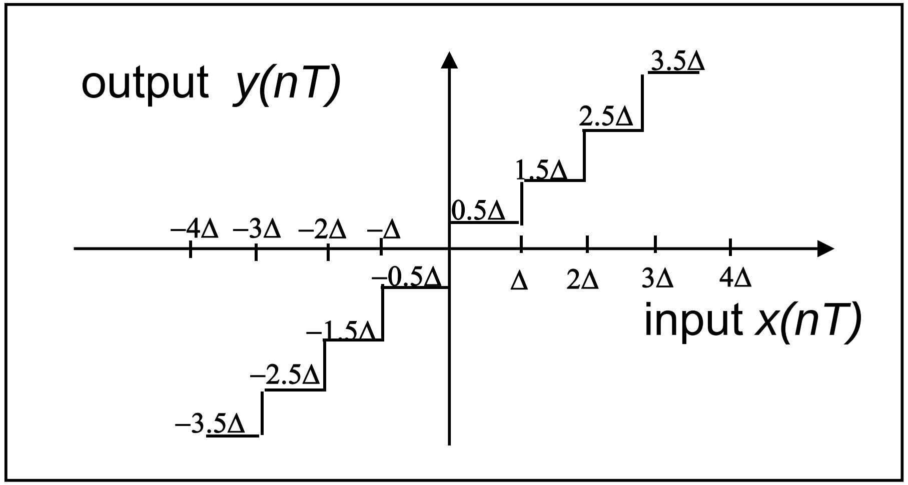
$F_c = 1/T > 2W_s$ (**Frequenza di Nyquist**)



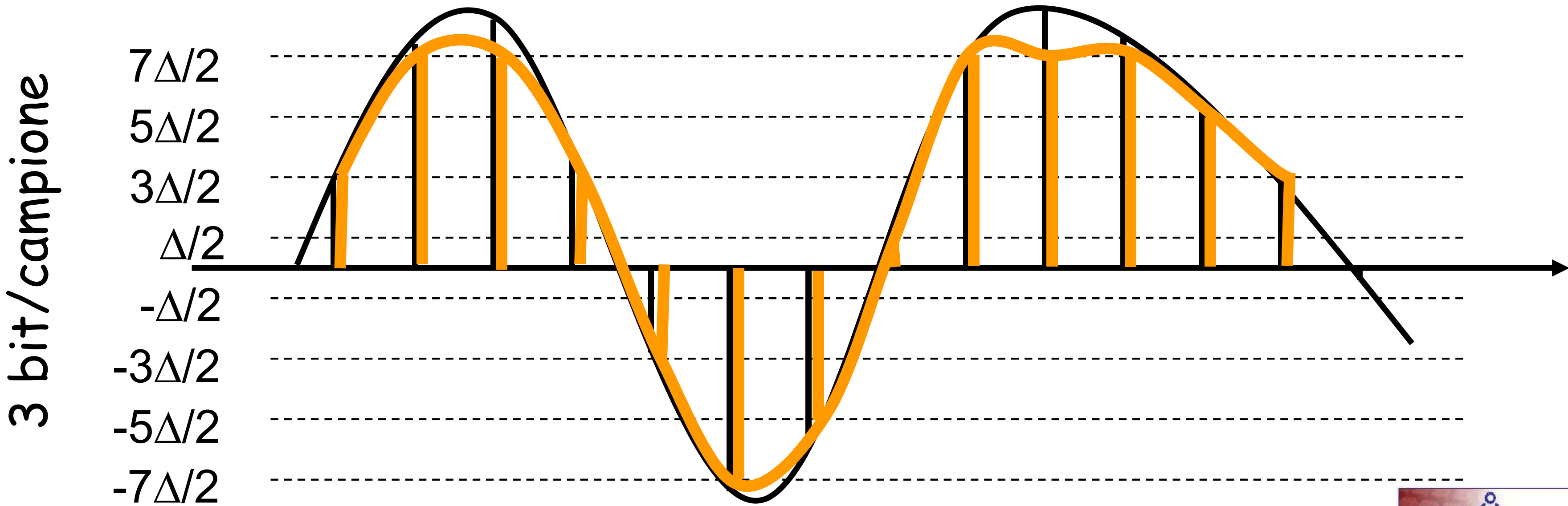
Trasmissione digitale di informazioni analogiche



Quantizzazione di segnali analogici

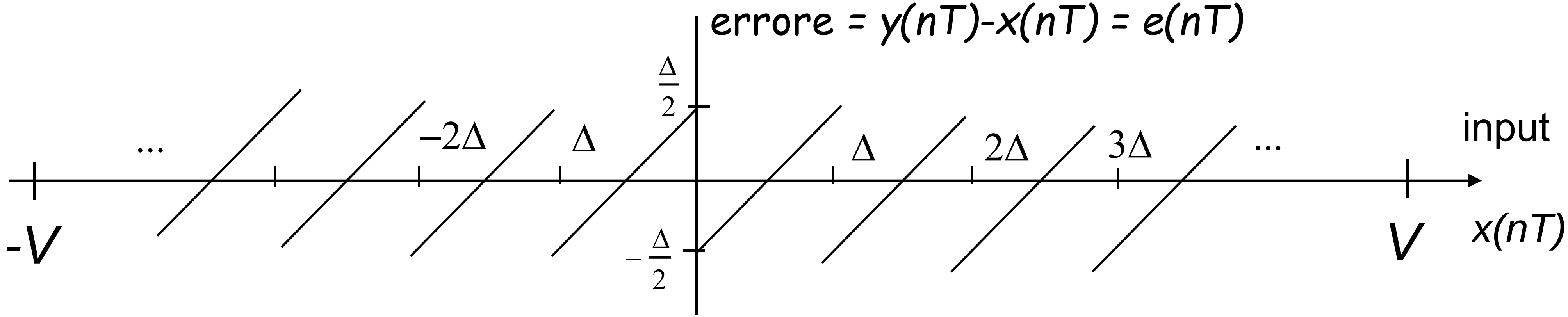


- Il quantizzatore associa il valore di ingresso al valore 2^m (livello) più vicino
- Errore di quantizzazione (rumore di quantizzazione) = $y(nT) - x(nT)$



Prestazioni del quantizzatore

- $M = 2^m$ livelli, Dynamic range(-V,V); $\Delta = 2V/M$



- Se il numero di livelli M è sufficientemente elevato, allora l'errore è uniformemente distribuito tra (-Δ/2, Δ/2)
- Potenza media del rumore di quantizzazione (Errore quadratico medio)

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2\, dx = \frac{\Delta^2}{12}$$

Prestazioni del quantizzatore

- **Figura di merito**
  - Signal-to-Noise Ratio (SNR) = Potenza media del segnale / Potenza media di rumore
- **Sia σ_x^2 potenza del segnale si ha**

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\Delta^2/12} = \frac{12\sigma_x^2}{4V^2/M^2} = 3\left(\frac{\sigma_x}{V}\right)^2 M^2 = 3\left(\frac{\sigma_x}{V}\right)^2 2^{2m}$$

- **usualmente $V/\sigma=4$, quindi esprimendo SNR in dB**

$$SNR\,(dB) = 10\log_{10}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10\log_{10}\left(3\;4^{-2}\;2^{2m}\right) = 6m - 7.27 \quad dB$$

Esempio: Segnale telefonico

- **Banda del segnale telefonico W=4 kHz**
- **In base al teorema del campionamento si ha**
  - $F_c = 2W = 8000$ campioni/secondo
- **Se si suppone un requisito massimo di errore del 1%, si ha un valore di SNR obiettivo uguale a**

$$SNR = 10 \log(1/.01)^2 = 40 \text{ dB}$$

- **Assume $V/\sigma_x=4$ si ha**

$$40 \text{ dB} \leq 6m - 7$$

quindi

$$m \geq 8 \text{ bit/campione}$$