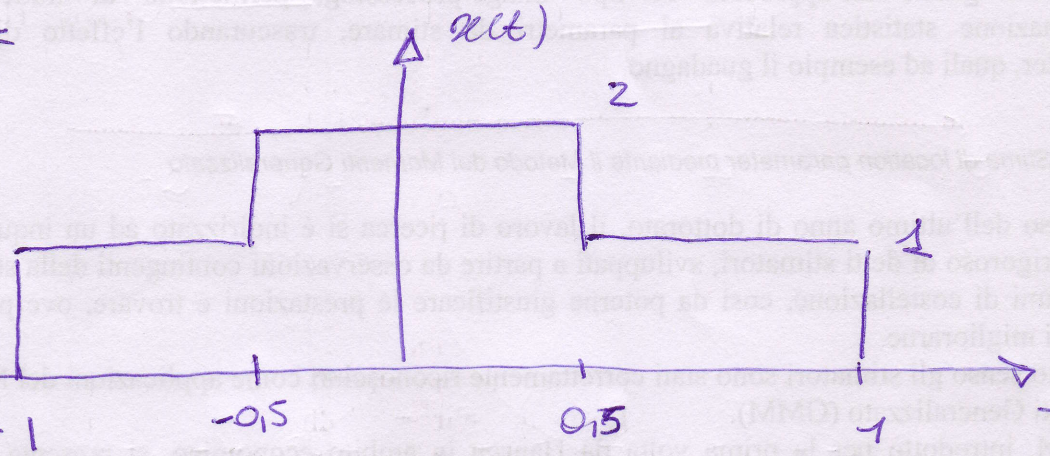
Esercizio

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale

$$x(t) = \begin{cases} 2 & |t| \le 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \le |t| \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

= SOLUZIONE =



Data la proprietà di linearità si può calcolare la tdF di x(t) come la sovrapposizione delle trasformate dei seguenti segnali

$$x_1(t) = \mathrm{rect}_{0,5}(t+0{,}75)$$

$$x_2(t) = 2\,\mathrm{rect}_1(t)$$

$$x_3(t) = \mathrm{rect}_{0,5}(t-0{,}75)$$

$$\hookrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right) e^{j2\pi f\cdot\frac{3}{4}} + 2\,\mathrm{sinc}(\pi f) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right) e^{-j2\pi f\frac{3}{4}}$$

(segue)

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\left[e^{j\frac{3}{2}\pi f} + e^{-j\frac{3}{2}\pi f}\right] + 2\,\mathrm{sinc}\left(\pi f\right)$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\pi f\right)$$

Il primo termine può riscriversi come segue

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}f}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right)\right]$$

Per la formula di Werner

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Possiamo riscrivere

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}f}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}f}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin(2\pi f) - \sin(\pi f)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\pi}{2}f}\sin(2\pi f) - \frac{1}{\frac{\pi}{2}f}\frac{1}{2}\sin(\pi f)}_{2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)\ -\ \mathrm{sinc}(\pi f)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}f\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi f\right) = 2\,\mathrm{sinc}(2\pi f) - \mathrm{sinc}(\pi f)$$

Possiamo quindi riscrivere la trasformata di Fourier di $x(t)$ come

$$X(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2\pi f) - \mathrm{sinc}(\pi f) + 2\,\mathrm{sinc}(\pi f)$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}(2\pi f) + \mathrm{sinc}(\pi f).$$

Quest'ultimo risultato può ottenersi anche considerando il segnale $x(t)$ come la seguente sovrapposizione

$$x(t) = \mathrm{rect}_2(t) + \mathrm{rect}_1(t).$$