

1

Francesca Cuomo

Lo strato Fisico

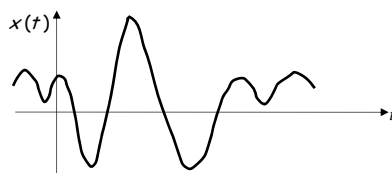
Parte 2 Rappresentazione dei segnali e teorema del campionamento

2

Segnale analogico

■ Segnale tempo-continuo

- andamento nel tempo di una grandezza perturbata




$$x(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

■ Esempi

- Voce, temperatura ambiente, musica, televisione, tensione d'uscita di un microfono

3

Potenza di un segnale $x(t)$

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 dt \geq 0$$


■ Un segnale è detto "di potenza" se $0 < P_x < +\infty$

■ Esempio (1): **segnale costante** $x(t)=c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |c|^2 dt = |c|^2 \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = |c|^2$$

4

Potenza di un segnale $x(t)$

■ Esempio (2): **segnale periodico sinusoidale**

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad T = 1/f_0$$

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt + \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) + 0 \quad (\text{il coseno ha area nulla}) = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico

5

Segnale periodico, periodo T : $x(t) = x(t + T) = \sum_n g(t - nT)$

Frequenza fondamentale: $F = \frac{1}{T}$ **Armonica n -esima**: $f_n = nF = n/T$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t} & \text{Sviluppo in serie di Fourier} \\ X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt & \text{Coefficienti dello sviluppo} \end{cases}$$

$\{X_n\} = \{\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots\}$ è una rappresentazione di $x(t)$

Sviluppo in serie di Fourier per un segnale periodico

6

■ Si osservi che

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

quindi

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt = R_n + jI_n = M_n e^{j\varphi_n} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt = R_n & M_n &= \sqrt{R_n^2 + I_n^2} = M_{-n} \\ I_n &= -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt = -I_{-n} & \varphi_n &= \arctg\left(\frac{I_n}{R_n}\right) = -\varphi_{-n} \end{aligned}$$

$$X_{-n} = X_n^*$$

7

Sviluppo in serie di un segnale reale periodico

■ $x(t)$ segnale periodico reale

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t} = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [X_n e^{j2\pi f_n t} + X_{-n} e^{-j2\pi f_n t}] = \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [M_n e^{j(2\pi f_n t + \varphi_n)} + M_{-n} e^{-j(2\pi f_n t + \varphi_{-n})}] = \\ &= R_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

■ Sviluppo con solo coseni di opportuna ampiezza e fase

8

Teorema di Parseval

■ Potenza di un segnale periodico $x(t)$

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \sum_n X_n e^{j2\pi f_n t} \right|^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t} \sum_n X_n^* e^{-j2\pi f_n t} \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_n X_n X_n^* = \sum_n |X_n|^2 \end{aligned}$$

■ $|X_n|^2$ è la potenza della singola armonica n/T

9

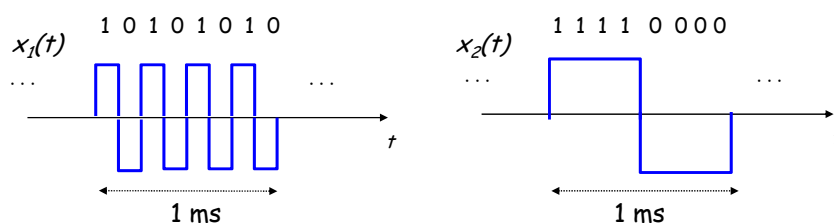
Digitalizzazione di segnali analogici

1. **Campionamento**: estrazione di campioni del segnale $x(t)$ uniformemente spazati nel tempo
2. **Quantizzazione**: codifica di ogni campione con una stringa di bit (con precisione finita)
 - Telefonia: Pulse Code Modulation (PCM)
 - CD audio
3. **Compressione**: applicazione di metodi di riduzione del bit rate
 - Codifica differenziale: telefonia cellulare
 - Subband coding: MP3 audio

10

Frequenza di campionamento e larghezza di banda

- Segnali che variano più velocemente nel tempo devono essere campionati con maggiore frequenza
- **Larghezza di banda (Bandwidth)**: misura quanto velocemente varia un segnale



- Come si misura la banda di un segnale ?
- Qual'è la relazione tra bandwidth e frequenza di campionamento (**sampling rate**) ?

11

Segnali periodici

- Un segnale reale periodico di periodo T può essere rappresentato come somma di sinusoidi usando lo **sviluppo in serie di Fourier**

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_0 t + f_1) + a_2 \cos(2\pi 2 f_0 t + f_2) + \dots + a_k \cos(2\pi k f_0 t + f_k) + \dots$$

“Componente continua”;
media a lungo termine

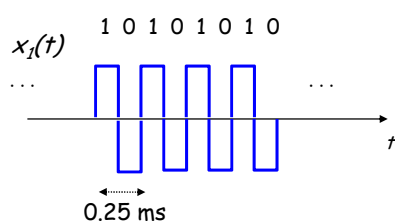
Frequenza
fondamentale $f_0 = 1/T$
(prima armonica)

k -ma armonica

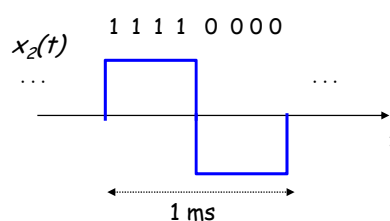
- $|a_k|$ determina la potenza della k -ma armonica
- **Spettro di ampiezza** = $\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots\}$

12

Esempio di sviluppo in serie di Fourier



$$x_1(t) = 0 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi 4000 t) + \frac{4}{3\pi} \cos(2\pi 3(4000) t) + \frac{4}{5\pi} \cos(2\pi 5(4000) t) + \dots$$



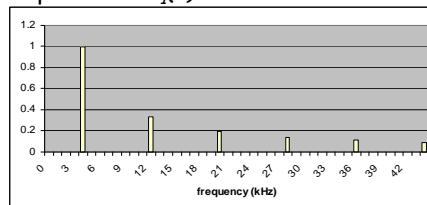
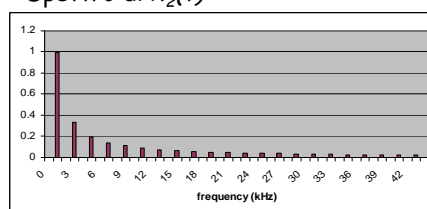
$$x_2(t) = 0 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi 1000 t) + \frac{4}{3\pi} \cos(2\pi 3(1000) t) + \frac{4}{5\pi} \cos(2\pi 5(1000) t) + \dots$$

- Sono presenti solo le armoniche dispari ($k=1,3,5,\dots$)

13

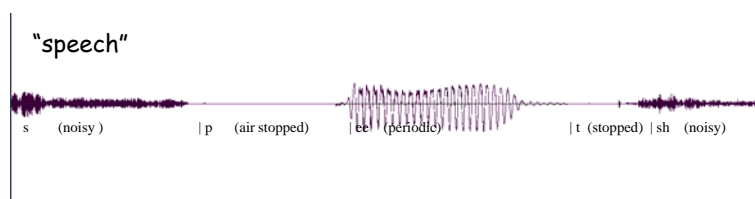
Spettro & Bandwidth di un segnale

- Lo Spettro di un segnale è rappresentato dalle ampiezze di ciascuna componente di frequenza
- $x_1(t)$ varia più velocemente nel tempo e quindi ha un contenuto di alte frequenze maggiore di $x_2(t)$
- La larghezza di banda (Bandwidth) W_s di un segnale è definita come l'intervallo di frequenze del segnale che hanno potenza non trascurabile
 - intervallo di banda che contiene il 99% della potenza totale del segnale

Spettro di $x_1(t)$ Spettro di $x_2(t)$ 

14

Bandwidth di segnali generici



- Non tutti i segnali sono periodici
 - Es. segnale vocale
- Per la determinazione dello spettro di un segnale generico si utilizza la **Trasformata di Fourier**
 - Segnale telefonico: 4 kHz
 - CD Audio: 22 kHz

15

Trasformata di Fourier

- Dato un **segnale impulsivo** $x(t)$ per cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

- si ha

$$FT: X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\} \quad -\infty < f < +\infty$$

$$FT^{-1}: x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = FT^{-1}\{X(f)\} \quad -\infty < t < +\infty$$

- $X(f)$ è una rappresentazione di $x(t)$ nel dominio della frequenza anziché del tempo

16

Trasformata di Fourier di segnali reali

- se $x(t)$ è un segnale reale

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = \\ &= R(f) + j I(f) \end{aligned}$$

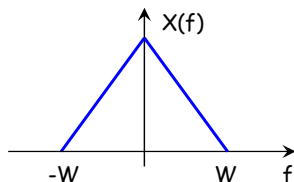
- poichè

$$\begin{aligned} R(f) &= R(-f) & I(f) &= -I(-f) \\ M(f) &= M(-f) & \phi(f) &= -\phi(-f) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X(f) = X^*(-f)}$$

17

Larghezza di banda di un segnale

- Un segnale reale $x(t)$ si dice **limitato nella banda $[-W, W]$** se la sua trasformata di Fourier $X(f)$ è nulla per $f \notin [-W, W]$

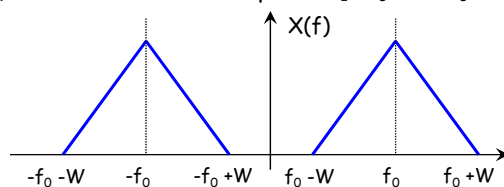


- La quantità W è definita come la **Larghezza di Banda** del segnale $x(t)$
- Poiché $X(f) \neq 0$ in un intorno $[-W, W]$ di $f=0$, il segnale $x(t)$ si dice **segnale di banda base**

18

Larghezza di banda di un segnale

- Un segnale reale $x(t)$ si dice **limitato in banda, con banda $2W$ centrata intorno alla frequenza f_0** se
 - $f_0 > W$
 - $X(f)$ è identicamente nulla per $f \notin [-f_0 - W, -f_0 + W] \cup [f_0 - W, f_0 + W]$

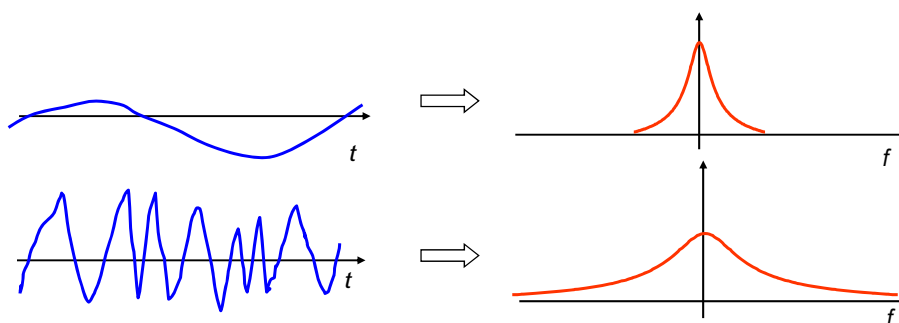


- La quantità $2W$ è la **larghezza di banda** del segnale $x(t)$
- Poiché $X(f) \neq 0$ in un intorno di $\pm f_0$ non adiacente all'origine, il segnale $x(t)$ si dice **"segnale in banda traslata"**.

19

Relazioni tempo-frequenza

Segnali *lentamente varianti in t* \longrightarrow banda stretta (in f)
 Segnali *rapidamente varianti in t* \longrightarrow banda larga (in f)

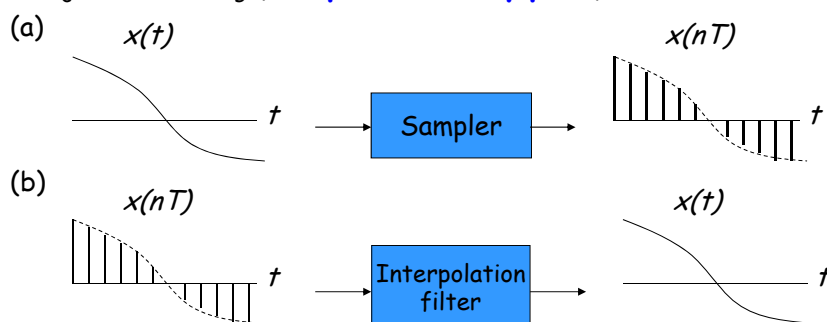


20

Teorema del campionamento

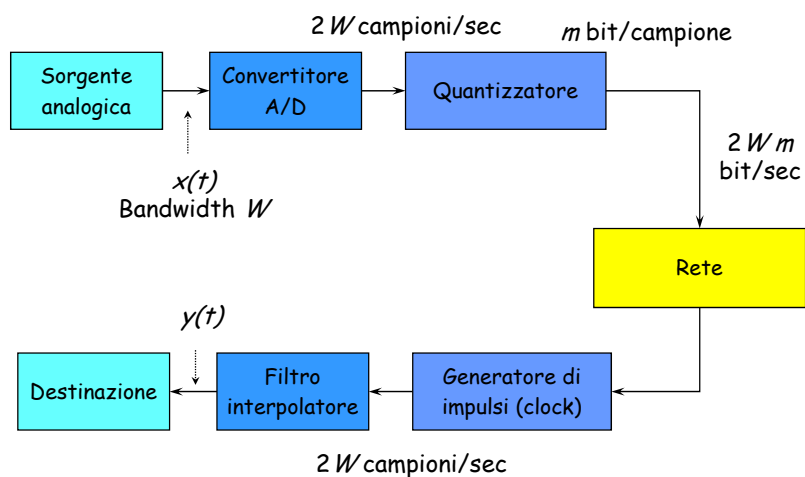
- Un segnale limitato in banda W_s può essere perfettamente ricostruito a partire dalla sequenza dei suoi campioni se la frequenza di campionamento

$$F_c = 1/T > 2W_s \text{ (Frequenza di Nyquist)}$$



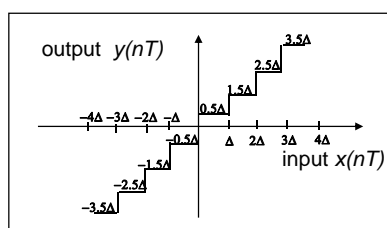
21

Trasmissione digitale di informazioni analogiche

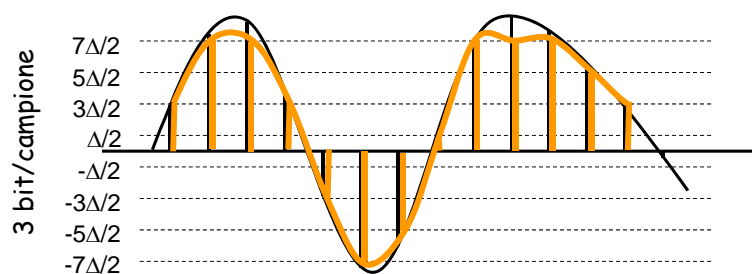


22

Quantizzazione di segnali analogici



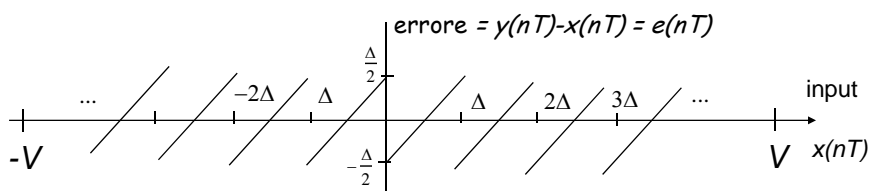
- Il quantizzatore associa il valore di ingresso al valore 2^m (livello) più vicino
- Errore di quantizzazione (rumore di quantizzazione) = $y(nT) - x(nT)$



23

Prestazioni del quantizzatore

- $M = 2^m$ livelli, Dynamic range $(-V, V)$; $\Delta = 2V/M$



- Se il numero di livelli M è sufficientemente elevato, allora l'errore è uniformemente distribuito tra $(-\Delta/2, \Delta/2)$
- Potenza media del rumore di quantizzazione (Errore quadratico medio)

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 dx = \frac{\Delta^2}{12}$$

24

Prestazioni del quantizzatore

- **Figura di merito**

- Signal-to-Noise Ratio (SNR) = Potenza media del segnale / Potenza media di rumore

- Sia σ_x^2 potenza del segnale si ha

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\Delta^2/12} = \frac{12\sigma_x^2}{4V^2/M^2} = 3 \left(\frac{\sigma_x}{V} \right)^2 M^2 = 3 \left(\frac{\sigma_x}{V} \right)^2 2^{2m}$$

- usualmente $V/\sigma_x = 4$, quindi esprimendo SNR in dB

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \log_{10} (3 \cdot 4^{-2} \cdot 2^{2m}) = 6m - 7.27 \text{ dB}$$

Esempio: Segnale telefonico

- Banda del segnale telefonico $W=4$ kHz
- In base al teorema del campionamento si ha
 - $F_c = 2W = 8000$ campioni/secondo
- Se si suppone un requisito massimo di errore del 1%, si ha un valore di SNR obiettivo uguale a

$$SNR = 10 \log(1/.01)^2 = 40 \text{ dB}$$

- Assume $V/\sigma_x=4$ si ha

$$40 \text{ dB} \leq 6m - 7$$

quindi

$$m \geq 8 \text{ bit/campione}$$