1

Francesca Cuomo

Lo strato Fisico
Parte 3

Caratterizzazione dei canali di comunicazione e limiti fondamentali delle comunicazioni digitali

2

Canali di comunicazione

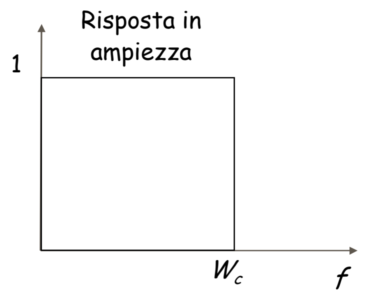
- **Per *canale di comunicazione* si intende l'unione dei mezzi trasmissivi e dei dispositivi (elettronici o ottici) che sono attraversati dal segnale lungo il percorso tra sorgente e destinazione**
  - Equalizzatori, amplificatori, ecc.
- **Spesso si usa il termine filtro per indicare gli effetti del canale sul segnale che lo attraversa**

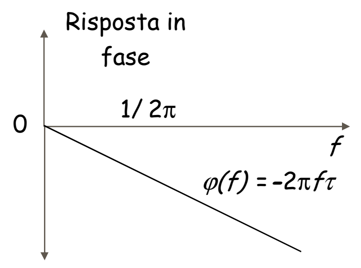
3

Filtro passa basso ideale

- **Filtro passa basso ideale**
  - tutte le frequenze $f<W_c$ non subiscono attenuazione e sono ritardate di τ secondi
  - le frequenze $f>W_c$ sono bloccate

$$y(t) = A_{in}\cos(2\pi ft - 2\pi f\tau) = A_{in}\cos(2\pi f(t-\tau)) = x(t-\tau)$$

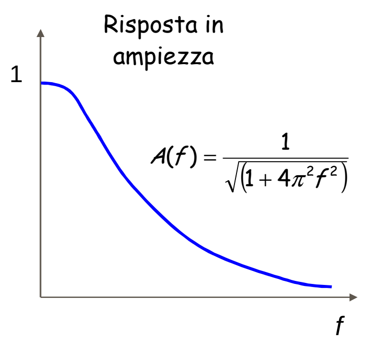


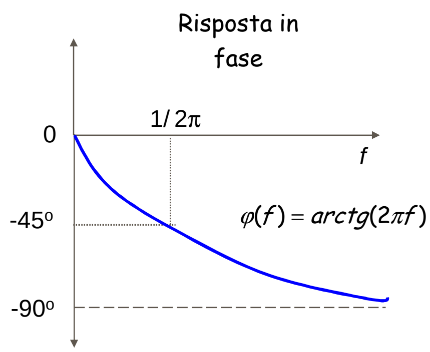


4

Filtro passa basso reale

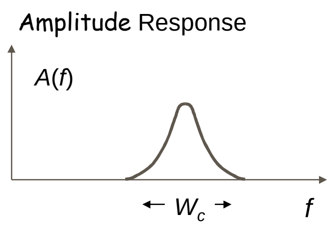
- **Filtro passa basso reale**
  - le frequenze sono attenuate in modo diverso e subiscono ritardi diversi





5

Canale passabanda



- **Alcuni canali di comunicazione si comportano come un filtro passa-banda**
  - bloccano le basse e le alte frequenze
- ***La larghezza di banda*** **è l'ampiezza dell'intervallo di frequenze per cui il segnale in uscita ha una potenza non trascurabile**

6

Distorsione

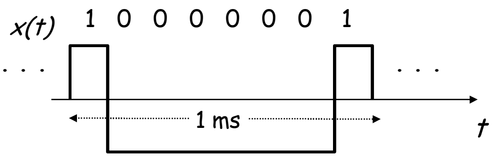
$$x(t) = \sum a_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k) \longrightarrow \boxed{\text{Canale}} \longrightarrow y(t)$$

- **Il canale introduce sul segnale in ingresso x(t) due effetti**
  - Se la risposta in frequenza non è "piatta", le componenti di frequenza del segnale d'uscita y(t) avranno ampiezza diversa rispetto a quelle del segnale d'ingresso x(t)
  - Se la risposta in fase non è "piatta", le componenti di frequenza del segnale d'ingresso x(t) subiranno ritradi diversi

$$y(t) = \sum A(f_k)\, a_k \cos\left[2\pi f_k t + \theta_k + \Phi(f_k)\right]$$

7

Esempio: Distorsione di ampiezza (1)

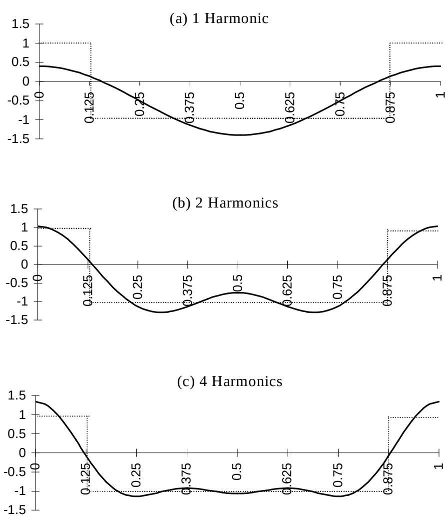


$$x(t) = -0{,}5 + \frac{4}{\pi} sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2\pi 1000t) +$$
$$+ \frac{4}{\pi} sen\left(\frac{2\pi}{4}\right)\cos(2\pi 2000t) +$$
$$+ \frac{4}{\pi} sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(2\pi 3000t) + \ldots$$

- Sia *x(t)* il segnale in ingresso ad un canale che si comporta come un filtro passa basso ideale
  - ritardo nullo
  - W_c = 1.5 kHz, 2.5 kHz, o 4.5 kHz
- *Se* W_c = 1.5 kHz passano solo i primi due termini
- *Se* W_c = 2.5 kHz passano solo i primi tre termini
- W_c = 4.5 kHz passano solo i primi cinque termini

8

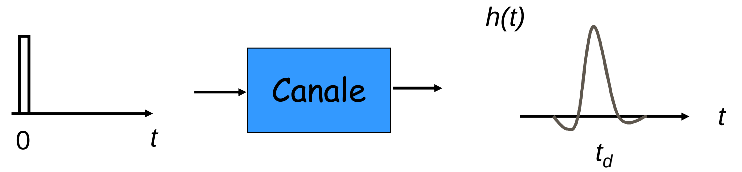
Esempio: Distorsione di ampiezza (2)



- Tanto maggiore è la banda del canale, tanto minore sarà la distorsione introdotta dal canale sul segnale di ingresso

9

Caratterizzazione nel dominio del tempo



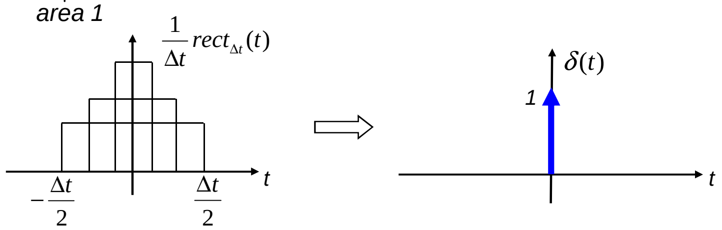
- **La caratterizzzione di un canale nel dominio del tempo richiede la conoscenza della risposta impulsiva h(t)**
  - Si applica in ingresso al canale un impulso di durata molto breve si osserva il segnale in uscita
  - tipicamente h(t) è una copia ritardata e distorta dell'impulso in ingresso
- **La larghezza della risposta impulsiva fornisce un'indicazione di quanto velocemente l'uscita segue l'ingresso e quindi di quanto velocemente possono essere trasmessi gli impulsi in ingresso**

10

L'impulso matematico

- **Rappresenta un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) il cui integrale è unitario**

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} rect_{\Delta t}(t)}_{\text{area 1}} \qquad \delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Impulso matematico

- **Proprietà**
  - l'impulso matematico ha area unitaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)dt = 1, \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

  - proprietà di campionamento dell'impulso matematico

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Risposta impulsiva di un sistema lineare

- **La risposta impulsiva h(t) di un sistema lineare e permanente (filtro) è definita come l'uscita y(t) del sistema quando all'ingresso è applicato l'impulso unitario x(t)=δ(t)**
- **Proprietà elementari di h(t)**
  - permanenza $x(t) = \delta(t-t_0) \rightarrow y(t) = h(t-t_0)$
  - linearità $x(t) = a\delta(t_0) + b\delta(t_0) \rightarrow y(t) = ah(t) + bh(t)$

Convoluzione

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Filtro } h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Se un filtro è LP con risposta impulsiva h(t), allora l'uscita y(t) corrispondente ad un generico segnale di ingresso x(t) è pari a

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

- L'integrale precedente è detto integrale di convoluzione tra l'ingresso x(t) e la risposta impulsiva h(t) del filtro

Convoluzione

- L'operazione di convoluzione è commutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- L'operazione di convoluzione è associativa

$$[x(t) * h(t)] * z(t) = x(t) * [h(t) * z(t)]$$

- L'operazione di convoluzione è distributiva rispetto alla somma

$$[x(t) + z(t)] * h(t) = [x(t) * h(t)] + [h(t) * z(t)]$$

- La convoluzione di x(t) con $\delta(t-t_0)$ trasla x(t) di t_0

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

15

Risposta in frequenza di un filtro

- **La trasformata di Fourier della convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate**

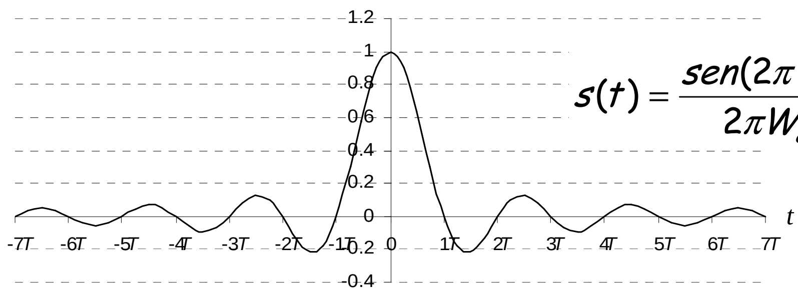
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y(f) = X(f)H(f)}$$

- **dove H(f)=FT{h(t)}**
- **H(f) è detta risposta in frequenza del filtro o funzione di trasferimento del filtro**

16

Risposta impulsiva di un filtro ideale

- **Per canali ideali passa basso di larghezza di banda W_c, la risposta impulsiva è rappresentata dalla funzione impulso di Nyquist $h(t)=s(t-\tau)$, dove $T = 1/2\ W_c$, e**



$$s(t) = \frac{sen(2\pi W_c t)}{2\pi W_c t}$$

- **s(t) vale zero in t = kT, k = ±1, ±2, …**
  - Gli impulsi possono essere inviati ogni T secondi senza interferenza (si sovrappongono in corrispondenza degli zeri)

17

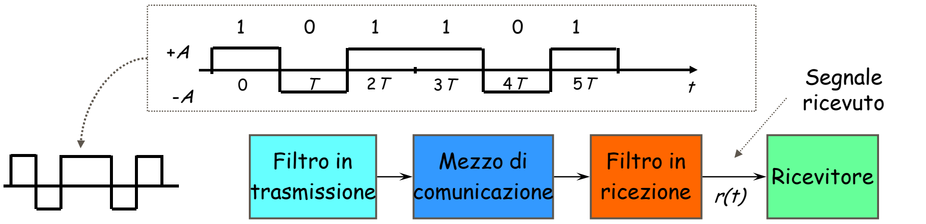
Trassmissione in banda base

- Sia p(t) il segnale ricevuto dal ricevitore in risposta alla trasmissione di un singolo impulso
- sia r(t) il segnale che viene ricevuto a seguito della trasmissione di una sequenza di impulsi
- In generale se si campiona il segnale r(t) negli istanti t=KT il valore del campione è alterato dalla presenza di Interferenza Intersimbolica (ISI); ad esempio per t=0
- Se p(t)=s(t), quindi p(t) sono impulsi di Nyquist, il segnale r(t) ha ISI nulla negli istanti t=KT

Segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation)

$$r(t) = \sum_k A_k p(t - kT)$$

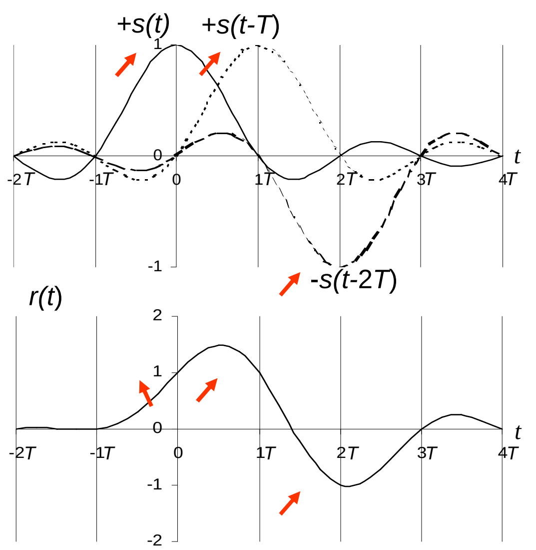
$$r(0) = A_0 p(0) + \sum_{k \neq 0} A_k p(-kT)$$



18

Esempio

- **Tre impulsi di Nyquist sovrapposti**
  - *s(t), s(t-T); -s(t-2 T)*
- **Forma d'onda complessiva**
  - *r(t) = s(t)+s(t-T)-s(t-2T)*
- **r(t) campionato in corrispondenza degli istanti**
  - r(0)=s(0)+s(-T)-s(-2T)=+1
  - r(T)=s(T)+s(0)-s(-T)=+1
  - r(2T)=s(2T)+s(T)-s(0)=-1
- Interferenza intersimbolica (ISI) nulla agli istanti di campionamento t=KT



Trasmissione in banda base

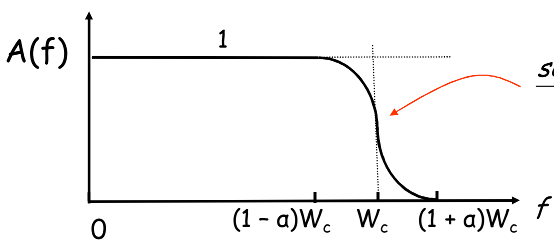
- **Se il canale si comporta come un filtro passa basso ideale con larghezza di banda W_c, il massimo rate di trasmissione di una sequenza di impulsi senza ISI è uguale a $2W_c$ (Nyquist Signalling Rate)**

$$r_{max} = 2W_c$$

- **Si noti che s(t) è un esempio della classe degli impulsi di Nyquist con ISI nulla**
  - L'ampiezza dei lobi laterali di s(t) può causare errori anche notevoli se si commettono errori anche piccoli negli istanti di campionamento del segnale
  - Richiede una sincronizzazione molto accurata

Trasmissione in banda base

- **La funzione coseno rialzato (raised cosine) è un ulteriore esempio di funzione a zero ISI**
  - Richiede una banda leggermente superiore a W_c
  - I lobi laterali decadono come $1/t^3$ e quindi è più robusta ad errori di temporizzazione (sincronizzazione meno accurata)



$$\frac{sen(\pi t/T)}{\pi t/T}\,\frac{\cos(\pi\alpha t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}$$

21

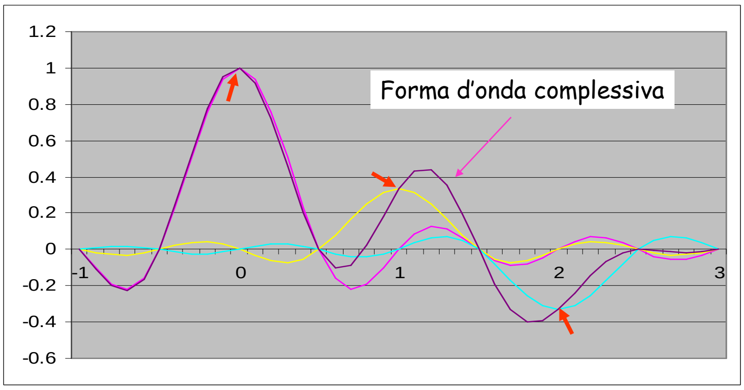
Trasmissione multilivello

- **Il criterio di Nyquist impone che il massimo rate in trasmissione con ISI=0 sia**
  - $2W_c$ impulsi al secondo
  - $2W_c$ impulsi/Wc Hz = 2 impulsi/Hz
- **Se si usano due livelli di segnale ogni impulso trasporta 1 bit informativo**
  - Bit rate = $2W_c$ bit/s
- **Con M = 2m livelli, ogni impulsi trasporta m bit**
  - Bit rate = $2W_c$ impulsi/s * m bit/impulso = $2W_c$ m bit/s
- **Il bit rate può essere aumentato incrementando il numero di livelli, tuttavia …**
- **Il segnale r(t) include il rumore additivo che limita il numero di livelli che possono essere usati**

22

Esempio di trasmissione multilivello

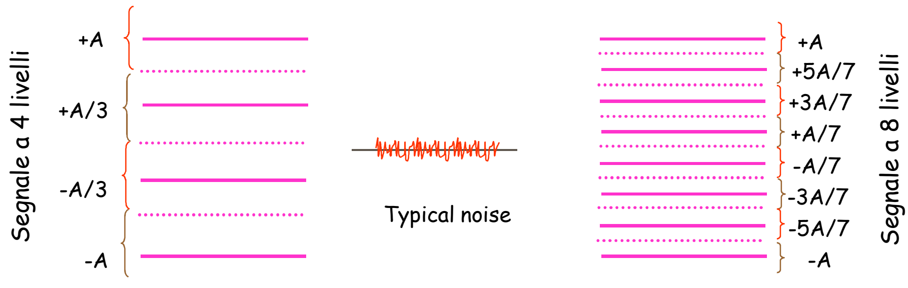
- **Quattro levelli {-1, -1/3, 1/3, +1} per {00,01,10,11}**
- **Forme d'onda per 11,10,01 con ampiezze +1, +1/3, -1/3**
- **Zero ISI negli istanti di campionamento (t=KT)**



23

Effetto del rumore

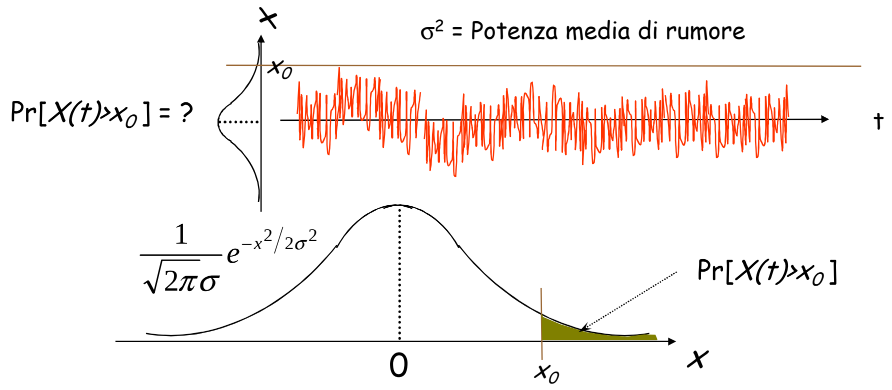
- **Il ricevitore prende le decisioni in base al segnale che è la somma dell'impulso trasmesso + rumore**
- **Il tasso di errore dipende dal valore relativo dell'ampiezza del rumore rispetto alla spaziatura tra i livelli**
- **Grandi valori di rumore possono comportare decisioni errate**
  - Nell'esempio il rumore ha influenza maggiore sul segnale a 8 livelli piuttosto che su quello a 4 livelli



24

Caratterizzazione del rumore

- **Il rumore termico è inevitabile**
- **Il rumore può essere caratterizzato mediante la densità di probabilità dell'ampiezza dei campioni**
- **La distribuzione del rumore è Gaussiana**



Probabilità di errore

- Un errore accade se il valore di rumore supera un determinato valore di ampiezza
- Si osservi che la Prob. di avere grandi valori di rumore decade rapidamente con la distribuizione Gaussiana
- In una trasmissione a M livelli di un segnale di ampiezza [-A;A], la separazione δ tra livelli adiacenti è uguale a

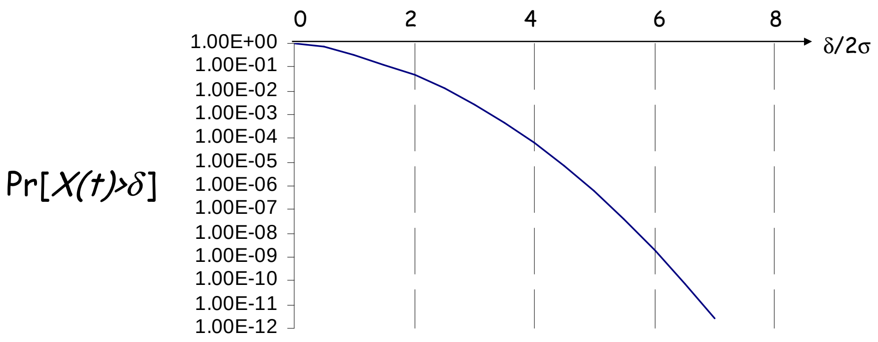
$$\delta = 2A/(M-1)$$

- La probabilità d'errore (P_e) è data dalla probabilità che il rumore superi il valore δ/2 o sia inferiore a -δ/2

$$P_e = \int_{-\infty}^{-\delta/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx + \int_{\delta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 2 \int_{\delta/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2Q\left(\frac{\delta}{2\sigma}\right)$$

Probabilità di errore

- Tabulando la funzione precedente si ha



27

Capacità limite di Shannon

- Dato un canale con banda W e rumore Gaussiano e fissato un valore di S/N, il massimo rate di trasmissione raggiungibile per cui è ottenibile un BER arbitrariamente piccolo è dato da

$$C = W \log_2 (1 + S/N) \text{ bit/s}$$

- Si ottiene un BER arbitrariamente piccolo mediante un'opportuna Codifica di Linea

28

Esempio

- Si consideri un canale con banda W=3 kHz e si utilizzi una trasmissione a 8 livelli. Si confronti il bit rate (R) ottenibile con la capacità limite di Shannon a SNR=20 dB

$$R = 2*3000 \text{ impulsi/sec} * 3 \text{ bit/impulso} =$$
$$= 18 \text{ kbit/s}$$

- 20 dB SNR significa $10 \log_{10} S/N = 20$, quindi $S/N = 100$
- La capacità limite di Shannon è quindi

$$C = 3000 \log_2 (1+100) = 19{,}963 \text{ bits/second}$$

Appendice

CONDIZIONI DI NYQUIST

Condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza

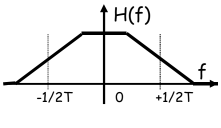
- Se h(t) soddisfa le condizioni di Nyquist nel dominio del tempo:

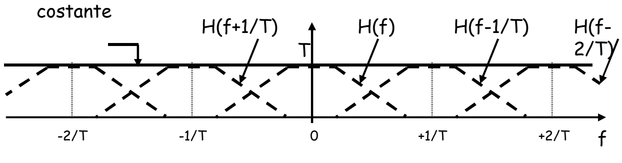
$$h(kT) = \begin{cases} 1 & per \quad k = 0 \\ 0 & \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

la sua trasformata di Fourier H(f) soddisfa la seguente condizione di Nyquist nel dominio della frequenza

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{m}{T} \right) = \text{T}$$

- ***Esempio:***





Banda minima per la trasmissione di segnali PAM senza ISI

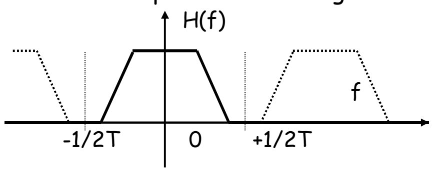
31

- ✓ Dalle condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza si deduce che non è possibile avere forme di impulso h(t) senza interferenza intersimbolo se H(f) occupa una banda minore di

$$Wc = \frac{1}{2T} = \frac{f_s}{2} = \frac{\text{velocità di simbolo}}{2}$$

Banda di Nyquist

- ✓ Infatti, la somma delle repliche traslate di una H(f) di frequenza massima minore di Wc non può mai dare luogo a una costante.

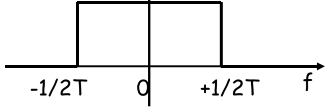


Forma d'impulso di Nyquist a banda limitata - passa-basso di Nyquist

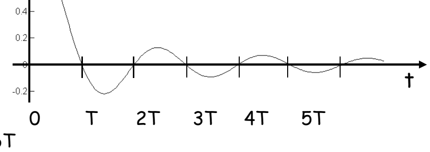
32

- ✓ Una particolare forma di impulso $h_0(t)$
  - ✓ **limitato in banda**
  - ✓ **che soddisfa le *condizioni di Nyquist***
- ✓ è quella la cui trasformata di Fourier $H_0(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro passa-basso ideale (moltiplicata per il fattore costante T):

$$H_0(f) = \begin{cases} T & \text{per } |f| \le \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{per } |f| > \frac{1}{2T} \end{cases}$$



$$h_0(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}}$$

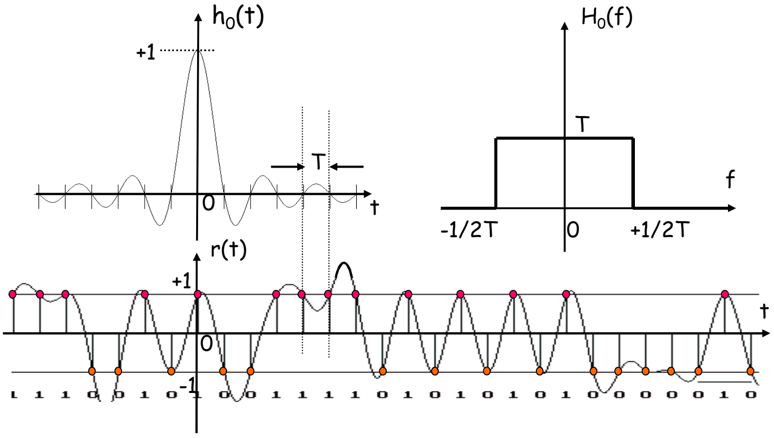


Forma d'impulso di Nyquist a banda limitata

33

Esempio:

✓ Segnale PAM privo di ISI nel caso di forma di impulso $h_0(t)$



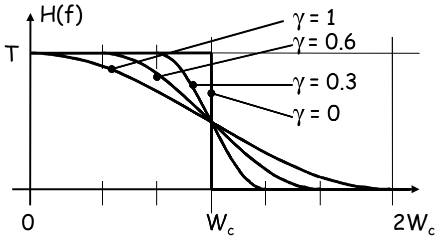
Forma d'impulso di Nyquist a coseno rialzato (1/3)

34

✓ Forma d'impulso di Nyquist a coseno rialzato

$$H(f)=\begin{cases} \mathrm{T}, \text{ per } \quad 0 \le f \le (1-\gamma) f_N \\ \dfrac{\mathrm{T}}{2}\left[1-\sin\left(\dfrac{\pi T}{\gamma}(|f|-f_N)\right)\right], \text{ per } \ (1-\gamma) f_N \le |f| < (1+\gamma) f_N \\ 0 \quad \text{per} \quad |f| > (1+\gamma) f_N \end{cases}$$

$f_N = W_c$



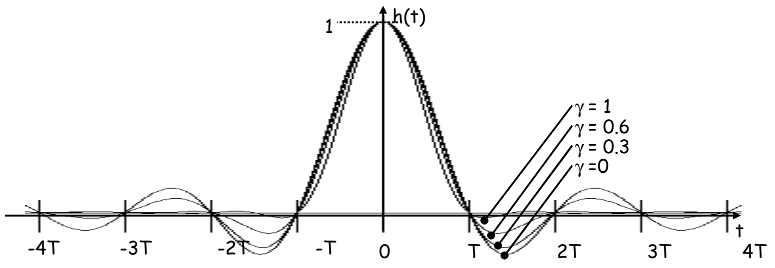
γ *fattore di roll-off,*

$0 < \gamma \le 1$

Forma d'impulso di Nyquist a coseno rialzato (2/3)

35

- ✓ All'aumentare del *fattore di roll-off* γ da 0 (filtro passabasso ideale) a 1 le oscillazioni della h(t) ai due lati del picco dell'impulso si smorzano più rapidamente



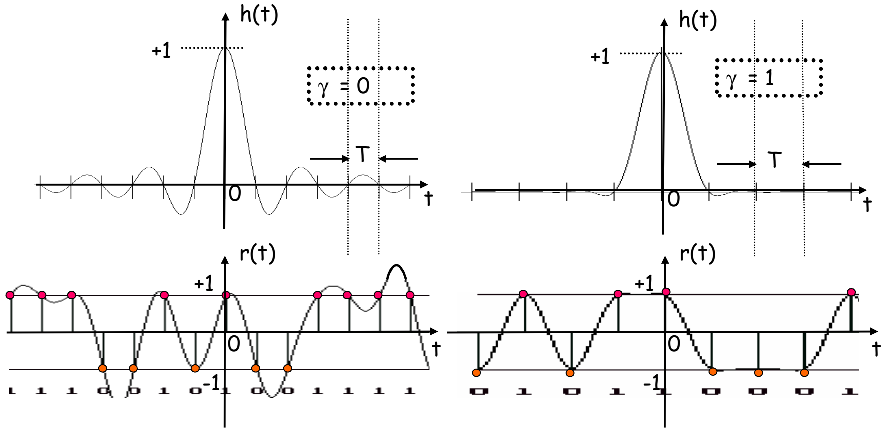
- ✓ Minore criticità nel campionamento in ricezione.
- ✓ La banda occupata aumenta da W_c a $W_c(1 + \gamma)$

Forma d'impulso di Nyquist a coseno rialzato (3/3)

36

Esempio:

- ✓ Segnali PAM privo di ISI per forma di impulso h (t) a coseno rialzato, (γ =0 e γ = 1)



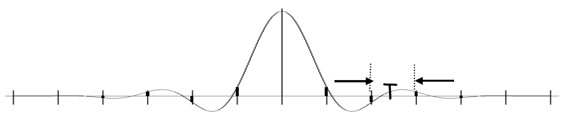
Ricezione in presenza di interferenza intersimbolo

37

- ✓ Se la forma dell'impulso h(t) non rispetta le condizioni di Nyquist, i campioni del segnale ricevuto sono affetti da interferenza intersimbolo

Esempio:

- ✓ Impulso h(t) che **non** soddisfa le condizioni di Nyquist [in neretto i valori non nulli di h(kT), per $k \neq 0$]



- ✓ Segnale PAM corrispondente [i valori campionati sono diversi dai valori di ampiezza trasmessi ± 1]