ชื่อเรื่อง สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$

สุธน ตาดี

รายงานโดย
63090500006 ชลธิชา พ่วงเฟื่อง
อาจารย์ที่ปรึกษาสัมมนา : ผศ. ดร.ทรงพล ศรีวงค์ษา

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์(Diophantine equation) ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่ได้ศึกษากันอย่างมากมายและศึกษาในหลายรูปแบบ รูปแบบหนึ่งที่ได้ศึกษากันอย่างกว้างขวางคือ สมการที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ ในงานวิจัยนี้เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟน-ไทน์ โดยดังกล่าวได้มีการนำเสนอทฤษฎีบทและแนวคิดบางประการที่เกี่ยวข้องกับ สมการไดโอแฟนไทน์และนำข้อความคาดการณ์กาตาลัน(Catalan's conjecture) มาใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ครั้งนี้โดยแยกกรณี แล้วหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็ม ที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \ (mod 4)$ จะแสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์นี้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{(2 + log\_2\ (p+1)), p, 2, p+2) : log\_2\ (p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ข้อความคาดการณ์กาตาลัน

1.บทนำ

1.1ที่มาและความสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่เราสนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ในการหาคำตอบจะไม่ค่อยพบทฤษฎีโดยทั่ว ๆ ไปที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับสมการหลาย ๆ ประเภท มักจะพบเทคนิคเฉพาะที่ใช้ในการแก้สมการแต่ละรูปแบบเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ผู้จัดทำศึกษาเรื่องความสวยงามทางคณิตศาสตร์ของสมการไดโอแฟนไทน์

1.2ความรู้พื้นฐาน

สมการไดโอแฟนด์ไทน์

สมการไดโอแฟนด์ไทน์ คือ สมการที่เราสนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอาจเป็นสมการดีกรีหนึ่ง หรือดีกรีที่มากกว่าหนึ่ง อาจมีตัวแปรหนึ่งตัวหรือหลายตัวหรืออาจเป็นระบบสมการที่กำหนดตัวแปรมากกว่าจำนวนของสมการ เช่น $6x+8y=46$, $x^2+y^2=z^2$, $10x^2-7y=17$, $x\left(y+1\right)^2=243y$ เป็นต้น สมการ $ax+by=c$ และ $x^n+y^{n}=z^n$ ตัวอย่างของสมการไดโอแฟนไทน์ อย่างไรก็ตาม ในการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ เราจะไม่ค่อยพบทฤษฎีบททั่ว ๆ ไป ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับสมการหลาย ๆ ประเภท แต่เรามักจะพบเทคนิคเฉพาะที่ใช้ในการแก้สมการในแต่ละรูปแบบเท่านั้น

นิยามและคุณสมบัติของคอนกรูเอนซ์

<u>นิยาม</u>

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็ม a และ b

จะกล่าวว่า a คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a\equiv b\pmod n$ ก็ต่อเมื่อ n หาร a - b ลงตัว

และถ้า n หาร a - b ไม่ลงตัว จะกล่าวว่า a ไม่คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล n แทนด้วย $a\not\equiv b\pmod n$ เรียก n ว่า มอดุลัส (*modulus*)

2.ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)
ให้ a,b,x และ y เป็นจำนวนเต็ม
โดยที่ $min\{a,b,x,y\}>1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x-b^y=1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว
คือ $(a,b,x,y)=(3,2,2,3)$
ทฤษฎีบท 2 [3] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+1=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว
คือ $(x,z)=(3,3)$
ทฤษฎีบท 3 [1] ถ้า $p\neq 2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $1+p^y=z^2$มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่
ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p,y,z)=(3,1,2)$
ทฤษฎีบท 4 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ และ $p\neq 2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+p^y=z^2$
มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ
$(x,p,y,z)\in\left\{(4,3,2,5),\left(2r,2^{r+1}+1,1,2^r+1\right)\right\}$
เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
ทฤษฎีบท 5 [2] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+3^y=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
เพียงสามผลเฉลย คือ $(x,y,z)\in\{(3,0,3),(0,1,2),(4,2,5)\}$

ทฤษฎีบท 6 ถ้า $x\neq 1$ และ $p\equiv 3 \pmod 4$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x+p^y=z^2 \tag{1}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x,p,y,z)\in\{(3,p,0,3)\}\cup\{(0,3,1,2)\}\cup\{(2+\log_2(p+1),p,2,p+2):\log_2(p+1)\in\mathbb{Z}\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $x\neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p\equiv 3 \pmod 4$
$\therefore p\neq 2$
ถ้า $p=3$ จาก **ทฤษฎีบท 5** จะได้ว่า $(x,y,z)\in\{(3,3,0,3),(0,3,1,2),(4,3,2,5)\}$
เหลือพิสูจน์เพียง กรณีที่ $p\neq 3$ จาก **ทฤษฎีบท 3** จะได้ว่า $x\neq 0$ *(Contrapositive)*
ดังนั้น กรณีที่ $x=0$ ไม่สามารถหาผลเฉลยได้

กรณีที่ x เป็นจำนวนคู่ (Even) : $x = 2n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{Z}$
จาก $p \neq 2, 3$ และ**ทฤษฎีบท 4** จะได้ว่า $p = 2^{n+1} + 1$
$\therefore p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$

กรณีที่ x เป็นจำนวนคี่ (Odd) :

<u>กรณีย่อย1</u> $y = 0$: จาก **ทฤษฎีบท 2** จะได้ว่า $(x, z) = (3, 3)$
$\therefore \quad (x, p, y, z) = (3, p, 0, 3)$
<u>กรณีย่อย2</u> $y \geq 1$ เป็นจำนวนคู่ : $y = 2k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$
จาก $2^x + p^y = z^2$ ใน (1)
จะได้ว่า $2^x + p^{2k} = z^2$

$$2^x = z^2 - p^{2k}$$
$$2^x = \left(z - p^k\right)\left(z + p^k\right)$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$\left(z - p^k\right) = 2^v \qquad (2)$$

และ

$$\left(z + p^k\right) = 2^{x-v} \qquad (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$(3) - (2)$:
$$2p^k = 2^{x-v} - 2^v$$
$$2p^k = 2^v\left(2^{x-2v} - 1\right) \qquad (4)$$

จาก (4) เนื่องจาก $2 \mid \left(2p^k\right)$ จะได้ว่า $2 \mid \left(2^v\left(2^{x-2v} - 1\right)\right)$ และ $2 \mid \left(2^v\right)$
เนื่องจาก $p \neq 2$ ดังนั้น $2 \nmid p^k$ จะได้ว่า $4 \nmid 2p^k$ แล้ว $4 \nmid 2^v\left(2^{x-2v} - 1\right)$
$2 \mid 2^v$ นั่นคือ $v \geq 1$, $4 \nmid 2^v$ ดังนั้น $v = 1$
แทน $v = 1$ ใน (4) จะได้

$$2p^k = 2^1\left(2^{x-2(1)} - 1\right) \Rightarrow p^k = 2^{x-2} - 1 \Rightarrow 1 = 2^{x-2} - p^k \qquad (5)$$

พิจารณา (5) : $1 = 2^{x-2} - p^k$
เนื่องจาก $y \geq 1$ ซึ่ง $y = 2k$ ดังนั้น $k > 0$
พิจารณา $k > 0$ จะได้ว่า

$$p^k > p^0 = 1$$
$$p^k + 1 > 1 + 1$$
$$1 + p^k > 2$$

เนื่องจาก $1 = 2^{x-2} - p^k$ จะได้ว่า $2^{x-2} = 1 + p^k > 2$

$$\log_2 2^{x-2} > \log_2 2$$
$$x - 2 > 1$$

พิจารณา (5) ซึ่ง $1 = 2^{x-2} - p^k$
จาก $x > 3$ จะได้ว่า $x - 2 > 1$, $2 > 1$ และ $p > 1$
โดย **ทฤษฎีบท 1** (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)
มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$
ดังนั้น จะได้ว่า $k = 1$
ดังนั้น ไม่มีผลเฉลย

จาก (2) : $\left(z - p^k\right) = 2^v$ จะได้ $\left(z - p^1\right) = 2^1 \Rightarrow z = p + 2$
และจาก (5) จะได้ว่า $1 = 2^{x-2} - p^1 \Rightarrow 1 = 2^{x-2} - p$

$$1 = 2^{x-2} - p$$

$$1 + p = 2^{x-2}$$

$$2^2 \cdot (1 + p) = 2^x$$

$$\log_2 2^2 \cdot (1 + p) = \log_2 2^x$$

$$2 + \log_2 (1 + p) = x$$

$$x = 2 + \log_2 (1 + p) \text{ เมื่อ } \log_2 (1 + p) \in \mathbb{Z}$$

เพราะฉะนั้น $(x, p, y, z) = (2 + \log_2 (1 + p), p, 2, p + 2)$
เป็นผลเฉลยของ (1)

<u>กรณีย่อย3</u> $y \geq 1$ เป็นจำนวนคี่
จาก $x \neq 0$ และ $p \neq 2$ โดย (1) จะได้ว่า $2 \nmid z^2$ ดังนั้น z เป็นจำนวนคี่
เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 4$
จาก $p \equiv 3 \pmod 4$ จะได้ว่า $p \equiv -1 \pmod 4$

$$p^y \equiv (-1)^y \pmod 4$$

$$p^y \equiv -1 \pmod 4$$

เนื่องจาก $x \neq 1$ และ $x \geq 3$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $2^x \equiv 0 \pmod 4$
แล้ว $2^x + p^y \equiv -1 \pmod 4$ นั่นคือ $z^2 \equiv -1 \pmod 4$
ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $z^2 \equiv 1 \pmod 4$
ดังนั้น ไม่มีผลเฉลย

4.บทสรุป

สรุปผลการศึกษา

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มและไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ กรณีที่ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{(2+\log_2(p+1), p, 2, p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Khan, M., Rashid, A. and Uddin, M .S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$ 2. Journal of Applied Mathematics and Physics, 4, p. 762 –765.

[2] Sroysang, B.(2013). More on The Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. InternationalJournal of Pure and Applied Mathematics, 84(2), p. 133 –137.

[3] Tanakan, S. (2014).On The Diophantine Equation $19^x + 2^y = z^2$. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 9(4), p. 159 –162.

[4]รองศาสตร์ตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่มและผู้ช่วยศาสตร์ตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์, **ทฤษฎีจำนวน**, หน้า 170-178.