สมการไดโอแฟนต์ไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$

สุธน ตาดี

นำเสนอโดย

นางสาวชลธิชา พ่วงเฟื่อง

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ. ดร.ทรงพล ศรีวงค์ษา

สมการไดโอแฟนด์ไทน์คืออะไร ?

สมการไดโอแฟนด์ไทน์ คือ สมการที่เราสนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอาจเป็นสมการดีกรีหนึ่ง หรือดีกรีที่มากกว่าหนึ่ง อาจมีตัวแปรหนึ่งตัวหรือหลายตัวหรืออาจเป็นระบบสมการที่กำหนดตัวแปรมากกว่าจำนวนของสมการ เช่น

$6x+8y=46$, $x^2+y^2=z^2$, $10x^2-7y=17$, $x\left(y+1\right)^2=243y$ เป็นต้น
สมการ $ax+by=c$ และ $x^n+y^n=z^n$ คือตัวอย่างของสมการไดโอแฟนไทน์

อย่างไรก็ตาม ในการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ เราจะไม่ค่อยพบทฤษฎีบททั่ว ๆ ไป ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับสมการหลาย ๆ ประเภท แต่เรามักจะพบเทคนิคเฉพาะที่ใช้ในการแก้สมการในแต่ละรูปแบบเท่านั้น

นิยามและคุณสมบัติของคอนกรูเอนซ์

นิยาม

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็ม a และ b
จะกล่าวว่า a คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ n หาร a - b ลงตัว
และถ้า n หาร a - b ไม่ลงตัว จะกล่าวว่า a ไม่คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล n แทนด้วย $a \not\equiv b \pmod{n}$ เรียก n ว่า มอดุลัส (modulus)

ทฤษฎีบท 1 (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)
ให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม
โดยที่ $min\{a, b, x, y\} > 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว
คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ทฤษฎีบท 2 [3] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว
คือ $(x, z) = (3, 3)$

ทฤษฎีบท 3 [1] ถ้า $p \neq 2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่
ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, y, z) = (3, 1, 2)$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ และ $p \neq 2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$
มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ
$(x, p, y, z) \in \{(4, 3, 2, 5), (2r, 2^{r+1} + 1, 1, 2^r + 1)\}$
เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 5 [2] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
เพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (0, 1, 2), (4, 2, 5)\}$

ทฤษฎีบท 6 ถ้า $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x + p^y = z^2 \qquad (1)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{(2+\log_2(p+1),p,2,p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

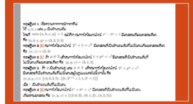
บทพิสูจน์ ให้ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$

$\therefore p \neq 2$

ถ้า $p = 3$ จาก **ทฤษฎีบท 5** จะได้ว่า $(x,y,z) \in \{(3,3,0,3),(0,3,1,2),(4,3,2,5)\}$

เหลือพิสูจน์เพียง กรณีที่ $p \neq 3$ จาก **ทฤษฎีบท 3** จะได้ว่า $x \neq 0$ *(Contrapositive)*

ดังนั้น กรณีที่ $x = 0$ ไม่สามารถหาผลเฉลยได้



กรณีที่ x เป็นจำนวนคู่ (Even) : $x = 2n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{Z}$

จาก $p \neq 2, 3$ และ**ทฤษฎีบท 4** จะได้ว่า $p = 2^{n+1} + 1$

$\therefore p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$

กรณีที่ x เป็นจำนวนคี่ (Odd) :

<u>กรณีย่อย1</u> $y = 0$: จาก **ทฤษฎีบท 2** จะได้ว่า $(x, z) = (3, 3)$

$\therefore \quad (x, p, y, z) = (3, p, 0, 3)$

<u>กรณีย่อย2</u> $y \geq 1$ เป็นจำนวนคู่ : $y = 2k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$

จาก $2^x + p^y = z^2$ ใน (1)

จะได้ว่า $2^x + p^{2k} = z^2$

$$2^x = z^2 - p^{2k}$$
$$2^x = \left(z - p^k\right)\left(z + p^k\right)$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$(z - p^k) = 2^v \qquad (2)$$

และ $$(z + p^k) = 2^{x-v} \qquad (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

(3) – (2) : $$2p^k = 2^{x-v} - 2^v$$

$$2p^k = 2^v\left(2^{x-2v} - 1\right) \qquad (4)$$

จาก (4) เนื่องจาก $2|\left(2p^k\right)$ จะได้ว่า $2|\left(2^v\left(2^{x-2v}-1\right)\right)$ และ $2|\left(2^v\right)$

เนื่องจาก $p \neq 2$ ดังนั้น $2 \nmid p^k$ จะได้ว่า $4 \nmid 2p^k$ แล้ว $4 \nmid 2^v\left(2^{x-2v}-1\right)$

$2|2^v$ นั่นคือ $v \geq 1$, $4 \nmid 2^v$ ดังนั้น $v = 1$

แทน $v = 1$ ใน (4) จะได้

$$2p^k = 2^1\left(2^{x-2(1)} - 1\right) \Rightarrow p^k = 2^{x-2} - 1 \Rightarrow 1 = 2^{x-2} - p^k \qquad (5)$$

พิจารณา (5) : $1 = 2^{x-2} - p^k$

เนื่องจาก $y \geq 1$ ซึ่ง $y = 2k$ ดังนั้น $k > 0$

พิจารณา $k > 0$ จะได้ว่า $p^k > p^0 = 1$

$$p^k + 1 > 1 + 1$$

$$1 + p^k > 2$$

เนื่องจาก $1 = 2^{x-2} - p^k$ จะได้ว่า $2^{x-2} = 1 + p^k > 2$

$$\log_2 2^{x-2} > \log_2 2$$

$$x - 2 > 1$$

พิจารณา (5) ซึ่ง $1 = 2^{x-2} - p^k$

จาก $x > 3$ จะได้ว่า $x - 2 > 1$, $2 > 1$ และ $p > 1$

โดย **ทฤษฎีบท 1** (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)

มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ดังนั้น จะได้ว่า $k = 1$

ดังนั้น ไม่มีผลเฉลย

จาก (2) : $\left(z - p^k\right) = 2^v$ จะได้ $\left(z - p^1\right) = 2^1 \Rightarrow z = p + 2$

และจาก (5) จะได้ว่า $1 = 2^{x-2} - p^1 \Rightarrow 1 = 2^{x-2} - p$

$$1 = 2^{x-2} - p$$

$$1 + p = 2^{x-2}$$

$$2^2 \cdot (1 + p) = 2^x$$

$$\log_2 2^2 \cdot (1 + p) = \log_2 2^x$$

$$2 + \log_2 (1 + p) = x$$

$$x = 2 + \log_2 (1 + p) \quad \text{เมื่อ} \quad \log_2 (1 + p) \in \mathbb{Z}$$

เพราะฉะนั้น $(x, p, y, z) = (2 + \log_2 (1 + p), p, 2, p + 2)$

เป็นผลเฉลยของ (1)

<u>กรณีย่อย3</u> $y \geq 1$ เป็นจำนวนคี่

จาก $x \neq 0$ และ $p \neq 2$ โดย (1) จะได้ว่า $2 \nmid z^2$ ดังนั้น z เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 4$

จาก $p \equiv 3 \pmod 4$ จะได้ว่า $p \equiv -1 \pmod 4$

$$p^y \equiv (-1)^y \pmod 4$$

$$p^y \equiv -1 \pmod 4$$

เนื่องจาก $x \neq 1$ และ $x \geq 3$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $2^x \equiv 0 \pmod 4$

แล้ว $2^x + p^y \equiv -1 \pmod 4$ นั่นคือ $z^2 \equiv -1 \pmod 4$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $z^2 \equiv 1 \pmod 4$

ดังนั้น ไม่มีผลเฉลย

สรุปผลการศึกษา

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มและไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$
กรณีที่ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$
อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{(2+\log_2(p+1), p, 2, p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Khan, M., Rashid, A. and Uddin, M .S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$ 2. Journal of Applied Mathematics and Physics, 4, p. 762 –765.

[2] Sroysang, B.(2013). More on The Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. InternationalJournal of Pure and Applied Mathematics, 84(2), p. 133 –137.

[3] Tanakan, S. (2014).On The Diophantine Equation $19^x + 2^y = z^2$. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 9(4), p. 159 –162.