

1. จงแสดงว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \geq 5$ แล้ว $p^2 + 2$ เป็นจำนวนประกอบ

พิสูจน์. สมมติให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \geq 5$

. พิจารณา $p = 5$ และ $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$p = 7 \text{ และ } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p = 11 \text{ และ } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p = 13 \text{ และ } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p = 17 \text{ และ } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p = 19 \text{ และ } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

. จะได้ว่า p สามารถเขียนอยู่ในรูป $p = 3k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$

. นั่นคือ

$$\begin{aligned} p^2 + 2 &= (3k + 1)^2 + 2 \\ &= (9k^2 + 6k + 1) + 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

. เป็นจริง

