1. 14.Prove Chain Rule Theorem: Let I, J be intervals, $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ such that $f(J) \subseteq I$, and $c \in J$. If f is differentiable at c and g is differentiable at $f(c)$, then the composite function $g \circ f$ is differentiable at c and $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

เริ่มจากสมการต่อไปนี้

$$\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} = \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

เมื่อใส่ลิมิต x เข้าใกล้ c ทั้งสองข้าง อาจจะเกิดกรณีที่ $f(x) - f(c) = 0$ ได้ ถึงแม้ว่า $x \neq c$ เพื่อเลี่ยงปัญหาดังกล่าว จะสร้างฟังก์ชันใหม่ขึ้นมา ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

พิสูจน์. ให้ $b = f(c)$ และกำหนดฟังก์ชัน $h : I \to \mathbb{R}$ โดยที่

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, y \neq b \\ g'(b), y = b \end{cases}$$

จะได้ว่า h มีความต่อเนื่องที่ b เพราะว่า g มีอนุพันธ์ที่ $b = f(c)$
สังเกตว่า $g(y) - g(b) = h(y)(y - b)$ ทุก $y \in I$
แทน $y = f(x)$ และ $b = f(c)$ จะได้ว่า $g(f(x)) - g(f(c)) = h(f(x))(f(x) - f(c))$
ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} &= h(f(x)) \cdot \frac{(f(x) - f(c))}{x - c} \\ \lim_{x \to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} &= \lim_{x \to c} h(f(x)) \cdot \lim_{x \to c} \frac{(f(x) - f(c))}{x - c} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$\lim_{x \to c} h(f(x)) = h(f(c)) = h(b)$$

ฉะนั้น

$$\lim_{x \to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} = h(f(c)) \cdot f'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

นั่นคือ

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c)$$

□