

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

학번:

이름:

1. 함수 $f(x)$ 의 미분계수를 다음 유한차분 방식으로 수치 계산할 때 발생하는 truncation error와 rounding error에 대해서 설명하고, ϵ 의 크기에 따라서 각 오차의 크기는 어떻게 달라지는지 쓰시오. 수식을 사용할 필요 없음. (10점)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon}$$

2. Explicit FDM으로 기초자산이 1개인 옵션 가격을 계산하는 함수를 구현하였다. Grid에서 기초자산과 시간 간격은 각각 ΔS 와 Δt 라고 한다. 다음에 답하시오. (10점)

(1) FDM으로 계산한 가격의 오차를 줄이고자 한다. 계산 시간을 최소화하면서 오차를 줄이기 위한 방법은? (5점)

(2) 시장 변수가 변화하면서 가격이 수렴하지 않고 발산하는 현상이 나타났다. 가능성이 높은 시장 변수 변화로 추정할 수 있는 상황은? 그리고 정확도를 유지하면서 수렴하도록 조정할 수 있는 방법은? (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

3. 컴퓨터에서 실수(float)를 표현하기 위한 방법으로 floating point가 사용된다. 실수(float)를 5bit를 이용해서 표현할 때 다음 질문에 답하시오. (10점)

(1) 5bit로 표현 가능한 실수의 개수는 몇 개인가? (5점)

(2) 5bit 가운데 1bit는 부호, 2bit는 지수부 e , 2bit는 가수부 n 에 사용되며, 실수 x 는 다음과 같은 수식으로 표현된다고 할 때, 해당 floating point의 precision(machine epsilon) 값은 얼마인가? (5점)

s	e_1	e_2	n_1	n_2
-----	-------	-------	-------	-------

위의 5bit 값에서 실수는 2진수로 다음과 같이 표현된다.

$$x = (-1)^s \times 1.n_1n_2 \times 2^{e-1}$$

예를 들어, 01011는 $(-1)^0 \times 1.11 \times 2^{10(2)-1} = -11.1_{(2)}$ 이고, 10진수로 변환하면 $(2+1+0.5)=3.5$ 임.

4. 최적화에서 fixed point iteration은 최적의 방향으로 x 값을 반복적으로 수렴할 때까지 업데이트하는 방법이다. 대표적으로 Newton's method가 있다. (10점)

(1) Newton's method에서 단변량 함수 $f(x)$ 의 최적해를 구하는 업데이트 함수를 구하시오. (5점)

(2) x 가 다변량 변수의 벡터인 경우, Gradient 벡터와 Hessian 행렬을 사용하여 x 를 업데이트한다. Gradient를 $\nabla f(x)$ 라고 하고 Hessian을 $\nabla^2 f(x)$ 이라고 할 때, 업데이트 방법을 설명하시오.(5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

5. $Ax = b$ 의 선형방정식을 SOR 방법으로 풀고자 한다. SOR의 overrelaxation 파라미터를 $\omega = 2$ 라고 할 때, 다음에 답하시오. (15점)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (1) 방정식을 다음의 반복식으로 변환할 때, M 과 N 을 구하시오. (도출과정을 포함 10점, 답만 쓰면 3점)

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

- (2) $x^{(k)}$ 의 오차 $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ 가 $[-1, 1]^T$ 일 때, 위의 식을 이용하여 $e^{(k+1)}$ 을 구하시오. (5점)

6. 수치적 불안정성(numerical instability) 문제와 악조건(ill-conditioned) 문제에 대해서 설명하고 각각의 문제를 완화할 수 있는 방법에 대해서 간단히 쓰시오. (10점)

7. Implicit FDM을 구현하기 위해서 PDE를 이산화하고 $N - 1$ 개의 미지수를 가지는 선형방정식 시스템으로 변환하고자 한다. 풀고자 하는 PDE는 $V_t + aV_{SS} + bV_S + cV = 0$ (a, b, c 는 상수임) 이며, v_i^k 는 $S = S_{min} + i\Delta S$ ($i = 0, \dots, N$), $t = T - k\Delta t$ ($k = 0, \dots, M$)에서 $V(t, S)$ 의 값을 의미한다.

(1) k 에서 $k + 1$ 시점의 값을 구할 때, v_{i-1}^{k+1} , v_i^{k+1} , v_{i+1}^{k+1} 와 v_i^k ($i = 2, 3, \dots, N - 2$ 에 대해서)의 관계식을 표현하시오. (5점)

(2) $V_{SS}(S_{max}) = V_{SS}(S_{min}) = 0$ 인 경계조건(boundary condition)일 때, v_1^{k+1} , v_2^{k+1} , v_1^k 의 관계식과 v_{N-1}^{k+1} , v_{N-2}^{k+1} , v_{N-1}^k 의 관계식을 구하시오. (각 5점)

(3) down-and-out 옵션을 평가할 때, 경계조건을 이용하여 v_1^{k+1} , v_2^{k+1} , v_1^k 의 관계식을 구하시오. S_{min} 는 knock-out 베리어와 같다. (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

8. $Ax = b$ 의 선형방정식 시스템을 풀 때, A 의 역행렬을 구하지 않고 효율적으로 풀 수 있는 방법에 대해서 설명하시오. 반복법이 아닌 직접법으로 푸는 방법을 설명하고, A 의 형태에 따라서 가장 효율적으로 풀 수 있는 구체적인 방법과 절차를 제시하시오. (15점)