

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

학번:

이름:

- 함수 $f(x)$ 의 미분계수를 다음 유한차분 방식으로 수치 계산할 때 발생하는 truncation error와 rounding error에 대해서 설명하고, ϵ 의 크기에 따라서 각 오차의 크기는 어떻게 달라지는지 쓰시오. 수식을 사용할 필요 없음. (10점)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon}$$

- Explicit FDM으로 기초자산이 1개인 옵션 가격을 계산하는 함수를 구현하였다. Grid에서 기초자산과 시간 간격은 각각 ΔS 와 Δt 라고 한다. 다음에 답하시오. (10점)
 - FDM으로 계산한 가격의 오차를 줄이고자 한다. 계산 시간을 최소화하면서 오차를 줄이기 위한 방법은? (5점)
 - 시장 변수가 변화하면서 가격이 수렴하지 않고 발산하는 현상이 나타났다. 가능성이 높은 시장 변수 변화로 추정할 수 있는 상황은? 그리고 정확도를 유지하면서 수렴하도록 조정할 수 있는 방법은? (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

3. 컴퓨터에서 실수(float)를 표현하기 위한 방법으로 floating point가 사용된다. 실수(float)를 5bit를 이용해서 표현할 때 다음 질문에 답하시오. (10점)

(1) 5bit로 표현 가능한 실수의 개수는 몇 개인가? (5점)

(2) 5bit 가운데 1bit는 부호, 2bit는 지수부 e , 2bit는 가수부 n 에 사용되며, 실수 x 는 다음과 같은 수식으로 표현된다고 할 때, 해당 floating point의 precision(machine epsilon) 값은 얼마인가? (5점)

s	e_1	e_2	n_1	n_2
-----	-------	-------	-------	-------

위의 5bit 값에서 실수는 2진수로 다음과 같이 표현된다.

$$x = (-1)^s \times 1.n_1n_2 \times 2^{e-1}$$

예를 들어, 01011는 $(-1)^0 \times 1.11 \times 2^{10_{(2)}-1} = -11.1_{(2)}$ 이고, 10진수로 변환하면 $(2+1+0.5)=3.5$ 임.

4. 최적화에서 fixed point iteration은 최적의 방향으로 x 값을 반복적으로 수렴할 때까지 업데이트하는 방법이다. 대표적으로 Newton's method가 있다. (10점)

(1) Newton's method에서 단변량 함수 $f(x)$ 의 최적해를 구하는 업데이트 함수를 구하시오. (5점)

(2) x 가 다변량 변수의 벡터인 경우, Gradient 벡터와 Hessian 행렬을 사용하여 x 를 업데이트한다. Gradient를 $\nabla f(x)$ 라고 하고 Hessian을 $\nabla^2 f(x)$ 이라고 할 때, 업데이트 방법을 설명하시오.(5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

5. $Ax = b$ 의 선형방정식을 SOR 방법으로 풀고자 한다. SOR의 overrelaxation 파라미터를 $\omega = 2$ 라고 할 때, 다음에 답하시오. (15점)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (1) 방정식을 다음의 반복식으로 변환할 때, M 과 N 을 구하시오. (도출과정을 포함 10점, 답만 쓰면 3점)

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

- (2) $x^{(k)}$ 의 오차 $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ 가 $[-1, 1]^T$ 일 때, 위의 식을 이용하여 $e^{(k+1)}$ 을 구하시오. (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

6. 수치적 불안정성(numerical instability) 문제와 악조건(ill-conditioned) 문제에 대해서 설명하고 각각의 문제를 완화할 수 있는 방법에 대해서 간단히 쓰시오. (10점)
7. Implicit FDM을 구현하기 위해서 PDE를 이산화하고 $N - 1$ 개의 미지수를 가지는 선형방정식 시스템으로 변환하고자 한다. 풀고자 하는 PDE는 $V_t + aV_{SS} + bV_S + cV = 0$ (a, b, c 는 상수임)이며, v_i^k 는 $S = S_{min} + i\Delta S$ ($i = 0, \dots, N$), $t = T - k\Delta t$ ($k = 0, \dots, M$)에서 $V(t, S)$ 의 값을 의미한다.
- (1) k 에서 $k + 1$ 시점의 값을 구할 때, v_{i-1}^{k+1} , v_i^{k+1} , v_{i+1}^{k+1} 와 v_i^k ($i = 2, 3, \dots, N - 2$ 에 대해서)의 관계식을 표현하시오. (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

(2) $V_{SS}(S_{max}) = V_{SS}(S_{min}) = 0$ 인 경계조건(boundary condition)일 때, v_1^{k+1} , v_2^{k+1} , v_1^k 의 관계식과 v_{N-1}^{k+1} , v_{N-2}^{k+1} , v_{N-1}^k 의 관계식을 구하시오. (각 5점)

(3) down-and-out 옵션을 평가할 때, 경계조건을 이용하여 v_1^{k+1} , v_2^{k+1} , v_1^k 의 관계식을 구하시오.
 S_{min} 는 knock-out 베리어와 같다. (5점)

금융수치해석기법 기말고사

2024. 10. 21.

8. $Ax = b$ 의 선형방정식 시스템을 풀 때, A 의 역행렬을 구하지 않고 효율적으로 풀 수 있는 방법에 대해서 설명하시오. 반복법이 아닌 직접법으로 푸는 방법을 설명하고, A 의 형태에 따라서 가장 효율적으로 풀 수 있는 구체적인 방법과 절차를 제시하시오. (15점)