Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет Информационных технологий
Кафедра Информационных систем и технологий
Специальность 1-98 01 03 «Программное обеспечение информационной безопасности мобильных систем»

ОТЧЁТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Теория вероятности математическая статистика»
Тема: «Критерии значимости»

Исполнитель:
студент 2 курса 8 группы
Солодкий Д. В.
Руководитель:
Волк А. М.

Минск 2022

Лабораторная работа 3.
Критерии значимости

Основные задачи математической статистики разделяют на две категории, тесно связанные между собой, но отличающиеся постановкой задач: оценивание параметров и проверка статистических гипотез. Основной задачей оценивания параметров является получение по выборке оценок, наилучших в том или ином смысле. При проверке гипотез задача ставится иначе: требуется по выборке принять или отвергнуть некоторое предположение о распределении генеральной совокупности, из которой извлечена выборка.

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде (***непараметрическая гипотеза***) или параметрах (***параметрическая гипотеза***) неизвестного распределения.

Одну из гипотез выделяют в качестве ***основной*** (или ***нулевой***) H_0, а другую, являющуюся логическим отрицанием H_0, – в качестве ***конкурирующей*** (или ***альтернативной***) гипотезы $\bar{H}$.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить проверяемую гипотезу, называется ***критерием проверки статистической гипотезы*** (***статистическим критерием***). При этом заранее выбирают допустимое значение ошибки вывода, которое называется ***уровнем значимости*** статистического критерия и обозначается α (это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна).

Статистические критерии, с помощью которых проверяются гипотезы о значениях параметров распределения или о соотношениях между ними в предположении, что тип распределения известен, называются ***критериями значимости,*** или ***параметрическими критериями***.

Рассмотрим критерии значимости, предназначенные для проверки гипотез о значениях параметров *в случае выборок из нормального распределения*, которое на практике встречается наиболее часто. (В случае нарушения предположения о нормальном распределении выборок необходимо использовать другие критерии.)

Нормальное распределение имеет два параметра: математическое ожидание a и дисперсию σ^2, которые оцениваются с помощью выборочного среднего $\bar{x}$ и выборочной дисперсии (исправленной выборочной дисперсии s^2) соответственно. Выборочное среднее является оценкой для среднего значения измеряемой величины и может служить оценкой того или иного показателя качества. Дисперсия характеризует разброс экспериментальных значений, а следовательно, служит мерой точности. Например, если произведено несколько измерений одной и той же величины, то дисперсия может характеризовать точность прибора, метода измерения и т. д.

1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания нормального распределения заданному значению.

Нулевая гипотеза $H_0:\ a = a_0$.

Альтернативная гипотеза $\bar{H}:\ a \neq a_0$.

Требуется по выборке объема n проверить гипотезу H_0 при заданном уровне значимости α. При этом предполагается, что выборка взята из нормально распределенной генеральной совокупности.

1 случай. Если дисперсия σ^2 *известна, то гипотеза* H_0 *принимается* (т. е. согласуется с результатами наблюдений) *при условии, что*

$$u_{\text{расч}} = \frac{|\bar{x} - a_0|}{\sqrt{\sigma^2 / n}} < u_{\text{табл}} = u_\alpha, \qquad (1)$$

где квантиль u_α удовлетворяет соотношению $\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

2 случай. Если дисперсия σ^2 неизвестна, то гипотеза H_0 принимается при

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\bar{x} - a_0|}{\sqrt{s^2 / n}} < t_{\text{табл}} = t_{\alpha;\, n-1}, \qquad (2)$$

где квантиль $t_{\alpha;\, n-1}$ определяется по таблице распределения Стьюдента.

2. Проверка гипотезы о равенстве заданному значению дисперсии нормального распределения.

Нулевая гипотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

Альтернативная гипотеза $\bar{H} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Гипотеза H_0 при заданном уровне значимости α *принимается, если*

$$\chi^2_{1-\alpha/2;\, n-1} < \chi^2_{\text{расч}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2;\, n-1}, \qquad (3)$$

где квантили $\chi^2_{1-\alpha/2;\, n-1}$ и $\chi^2_{\alpha/2;\, n-1}$ определяются по таблице распределения χ^2.

3. Сравнение двух дисперсий нормально распределенных признаков. Такая задача возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, методов измерения. Лучшим будет тот прибор, инструмент, метод, который дает меньший разброс результатов, т. е. меньшую дисперсию.

Нулевая гипотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Альтернативная гипотеза $\bar{H} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Пусть для первой дисперсии по выборке объема n_1 найдена несмещенная оценка s_1^2, для второй – по выборке объема n_2 оценка s_2^2.

Гипотеза H_0 *при заданном уровне значимости* α *принимается, если*

$$F_{\text{расч}} = \frac{s^2_{\max}}{s^2_{\min}} < F_{\text{табл}} = F_{\alpha/2;\, f_1;\, f_2}. \qquad (4)$$

Здесь $F_{\text{расч}}$ равно отношению *большей* несмещенной оценки дисперсии к *меньшей*, квантиль $F_{\alpha/2;\, f_1;\, f_2}$ определяется по таблице распределения Фишера, причем f_1 и f_2 – числа степеней свободы *соответственно* числителя и знаменателя, т. е. *большей* и *меньшей* оценок дисперсий.

Если гипотеза о равенстве дисперсий принимается, то эти дисперсии считаются ***однородными***. (Термин «однородные» в статистике означает «являющиеся оценкой одного и того же параметра».)

Замечание 1. Критерий Фишера (4) может использоваться также для проверки гипотезы о равенстве дисперсии заданному значению σ_0^2. В этом случае число степеней свободы известной дисперсии принимается равным $\infty : f_{\sigma_0^2} = \infty$.

Замечание 2. Критерий Фишера (4) может применяться также для проверки гипотезы о равенстве нескольких дисперсий нормально распределенных признаков. В этом случае проверяют гипотезу о равенстве наибольшей и наименьшей из сравниваемых дисперсий. Если они признаются однородными, то можно принять гипотезу о равенстве всех сравниваемых дисперсий.

4. Сравнение двух средних в случае независимых нормально распределенных признаков.

Нулевая гипотеза $H_0: a_1 = a_2$.

Альтернативная гипотеза $\bar{H}: a_1 \neq a_2$.

Требуется по выборкам объемов n_1 и n_2 проверить гипотезу H_0 при заданном уровне значимости α.

1 случай. Если дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 *известны*, то *гипотеза* H_0 *принимается при условии, что*

$$u_{\text{расч}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{\text{табл}} = u_\alpha, \tag{5}$$

где квантиль u_α удовлетворяет соотношению $\Phi(u_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

2 случай. Если дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 не известны, но на основании проверки соответствующей гипотезы по критерию Фишера признаны *однородными*, то *гипотеза* H_0 *принимается при*

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} < t_{\text{табл}} = t_{\alpha;\, f}, \tag{6}$$

где общая средневзвешенная дисперсия s^2 вычисляется по формуле

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

и имеет число степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$; значение $t_{\alpha;f}$ определяется по таблице квантилей распределения Стьюдента.

3 случай. Если дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 не известны и на основании проверки по критерию Фишера признаны *неоднородными*, то проверка также проводится по критерию Стьюдента, однако этот критерий является приближенным. В этом случае *гипотеза* H_0 *принимается, если*

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} < t_{\text{табл}} = t_{\alpha;f}, \tag{7}$$

где квантиль $t_{\alpha;f}$ определяется по таблице распределения Стьюдента при

$$f \approx \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

Отметим, что при сравнении двух средних в случае неизвестных дисперсий возникает необходимость проверки двух различных гипотез по одним и тем же данным. Сперва проверяют гипотезу о равенстве дисперсий, а затем гипотезу о равенстве средних.

5. Сравнение нескольких средних в случае независимых нормально распределенных признаков. Для сравнения нескольких средних в случае независимых нормально распределенных признаков используется специальная статистическая процедура, которая называется дисперсионным анализом. Однако можно сделать вывод и на основании критерия Стьюдента, проверив гипотезу о равенстве наибольшего и наименьшего средних.

Опишем процедуру ***однофакторного дисперсионного анализа.***

Пусть имеется N независимых выборок объемов $n_1, n_2, \ldots, n_N$ соответственно и задан уровень значимости α. Обозначим через $\overline{x}_i, s_i^2$ несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, полученные по *i*-й выборке, $f_i = n_i - 1$.

Нулевая гипотеза $H_0 : a_1 = a_2 = \ldots = a_N$.

Альтернативная гипотеза $\overline{H}$: не все эти математические ожидания равны между собой.

Условием применимости метода дисперсионного анализа является, помимо нормальности выборок, однородность дисперсий. Следовательно, как и в случае двух выборок, процедуре сравнения средних должно предшествовать сравнение дисперсий.

Идея однофакторного дисперсионного анализа заключается в разбиении общей дисперсии, которая получается при объединении всех наблюдений в одну выборку, на два независимых слагаемых – *факторную (межгрупповую)* дисперсию $s^2_{\text{факт}}$, порождаемую различием между группами (выборками), и *остаточную (внутригрупповую)* дисперсию $s^2_{\text{ост}}$, обусловленную случайными помехами и неучтенными факторами: $s^2_{\text{общ}} = s^2_{\text{факт}} + s^2_{\text{ост}}$. Дисперсионный анализ был первоначально предложен Р. Фишером и определен им как метод «отделения дисперсии, приписываемой одной группе причин, от дисперсии, приписываемой другим группам».

Межгрупповая дисперсия рассчитывается по формуле

$$s^2_{\text{факт}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 n_i,$$

где $\overline{\overline{x}}$ – выборочное среднее, рассчитанное по объединенной выборке; число степеней межгрупповой дисперсии равно $f_{\text{факт}} = N - 1$. Остаточная дисперсия представляет собой взвешенное среднее оценок дисперсий и рассчитывается по формуле

$$s^2_{\text{ост}} = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \ldots + f_N s_N^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_N}, \qquad f_{\text{ост}} = f_1 + f_2 + \ldots + f_N.$$

Гипотеза H_0 *при заданном уровне значимости* α *принимается (не противоречит экспериментальным данным), если*

$$F_{\text{расч}} = \frac{s^2_{\text{факт}}}{s^2_{\text{ост}}} < F_{\text{табл}} = F_{\alpha;\, f_{\text{факт}};\, f_{\text{ост}}},$$

где $F_{\alpha;\, f_{\text{факт}};\, f_{\text{ост}}}$ определяется по таблице квантилей распределения Фишера.

6. Сравнение двух средних в случае зависимых нормально распределенных признаков. Такая задача возникает, если две выборки взаимосвязаны. Например, проводятся измерения одних и тех же величин на одних и тех же объектах двумя разными методами и требуется определить, одинаковы ли результаты использования двух методов измерения. Либо если проводятся измерения какой-то характеристики для одних и тех же объектов до и после некоторого воздействия и требуется определить, влияет ли это воздействие на значение характеристики.

В этом случае имеются две выборки одинакового объема n :

$$x_{11},\quad x_{12},\quad \ldots,\quad x_{1n};$$

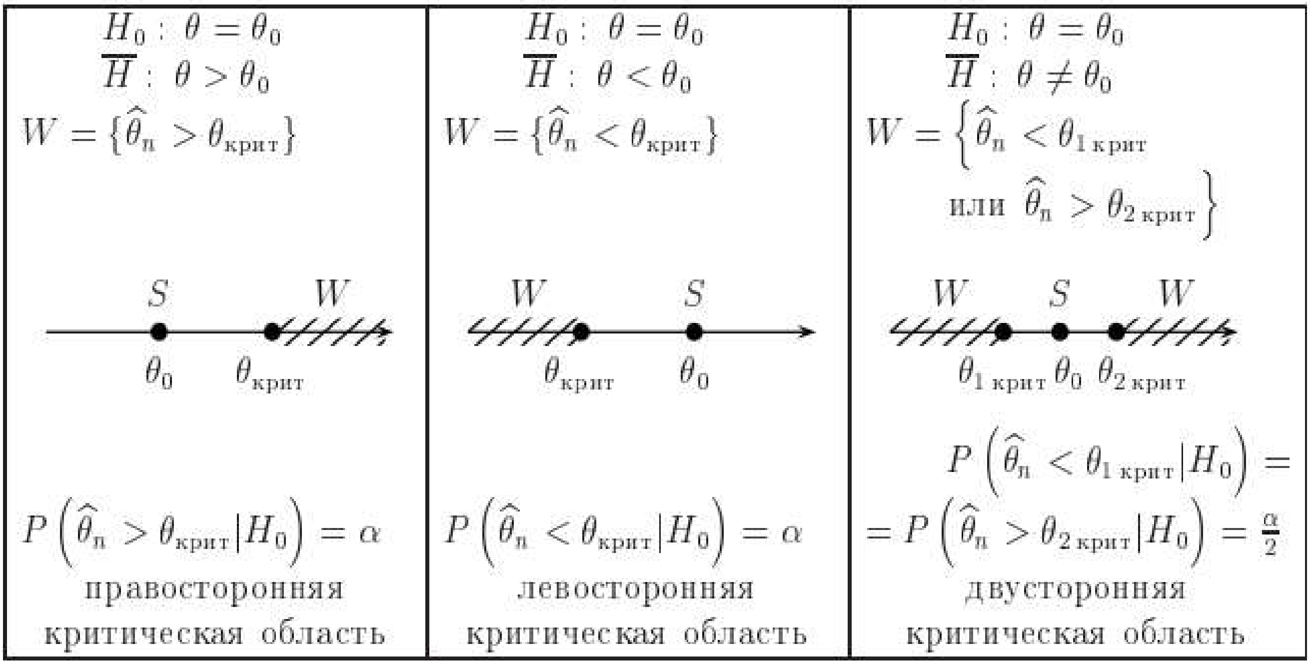
$$x_{21},\quad x_{22},\quad \ldots,\quad x_{2n}.$$

Поскольку значения в каждой паре x_{1i}, x_{2i} связаны (например, измерены на одном и том же объекте), то получим новую выборку с элементами $\Delta x_i = x_{1i} - x_{2i}$.

Задача сводится к проверке гипотезы о равенстве нулю среднего значения новой выборки, т. е. $H_0 : a_{\Delta x} = 0$. Эта проверка проводится по критерию (2).

Иногда возникает необходимость сравнения гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ с ***односторонней*** альтернативой $\bar{H}_1 : \theta > \theta_0$ или $\bar{H}_2 : \theta < \theta_0$. Например, если известно, что неравенство $\theta < \theta_0$ невозможно, то в качестве альтернативной рассматривается гипотеза $\bar{H} : \theta > \theta_0$.

Вид критической области W и области S принятия гипотезы зависит от вида альтернативной гипотезы.



Таким образом, в зависимости от вида альтернативной гипотезы $\bar{H}$ выбирают *правостороннюю*, *левостороннюю* или *двустороннюю* критическую область.

Например, при проверке гипотезы $H_0 : a = a_0$ против альтернативы $\bar{H}_1 : a > a_0$ требуется выяснить, соответствует ли выборочное среднее значение норме или превосходит ее. Пусть дисперсия σ^2 известна. Оценкой для параметра a является $\bar{x}$. Ясно, что если $\bar{x} < a_0$, то гипотезу H_0 следует предпочесть альтернативе $\bar{H}_1$. Если же $\bar{x} > a_0$, то *гипотеза* H_0 *принимается на уровне значимости* α, *если выполняется условие* (1) *с* $u_{\text{табл}} = u_{2\alpha}$, т. е. табличное значение определяется для удвоенного уровня значимости.

Аналогично с удвоенным уровнем значимости определяются табличные значения при использовании критериев (2), (5), (6), (7) в случае односторонних альтернатив.

Критерий (3) используется следующим образом. В случае альтернативы $\bar{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ *гипотеза* $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *при заданном уровне значимости* α *принимается, если*

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha;\, n-1};$$

в случае альтернативы $\overline{H}_2 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ гипотеза H_0 принимается, если

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha;\, n-1}.$$

Партия 1	1.98	2.31	2.25	2.07	1.89	2.13	2.22	2.01	1.86
Партия 2	2.19	2.26	2.28	1.9	2.03	2.08	2	2.04	2.32

Paired t-test		
Alpha	0.05	
Hypothesi:	0	
	Variable 1	**Variable 2**
Mean	2.046364	2.1425
Variance	0.026545	0.021839
Observatic	11	12
Pearson C(	0.000201	
Observed I	-0.07727	
Variance o	0.045862	
df	10	
t Stat	-1.19673	
P (T<=t) or	0.129506	
t Critical o	1.812461	
P (T<=t) tw	0.259012	
t Critical t	2.228139	

1.95	1.84	
2.02	2.24	2.35

Завод	X-mean	S^2	n	
A	120.8	8	50	
B	128.2	9.4	50	
A =	0.05			
F-rasch =	0.72431	F-tabl =	4.025994	

# партии	Продолжительность горения в часах							
1 партия	1600	1610	1650	1680	1700	1700	1800	
2 партия	1580	1640	1640	1700	1750			
3 партия	1460	1550	1600	1620	1640	1660	1740	1820
4 партия	1510	1520	1530	1570	1600	1680		

F-test

Alpha	0.05			
	Variable 1	**Variable 2**	**Variable 3**	**Variable 4**
Mean	1677.143	1662	1636.25	1568.333
Variance	4557.143	4220	12169.64	4136.667
Observatic	7	5	8	6
df	6	4	7	5
F	1.079892			
P (F<=f) rig	0.492962			
F Critical ri	6.163132			
P (F<=f) lef	0.507038			
F Critical le	0.220572			
P two-tail	0.985924			
F Critical t	0.160587	9.19731108		