Informal Notes on Mathematics
By Yuanjue Chou
2022 - 04 - 11

矩阵的逆：A是可逆的当且仅当存在一个矩阵A^{-1}使得：

$$A^{-1}A = I \quad 且 \quad AA^{-1} = I$$

Note 1：逆存在当且仅当消元产生n个主元（pivot，梯矩阵中非零行的首非零元）

Note 2：A不可能有两个不同的逆

Note 3：如果A可逆，$Ax=b$的唯一解为$x=A^{-1}b$

Note 4：☆ 如果有一个非零向量x使得$Ax=0$，则A不可逆

⇓

如果A可逆，则$Ax=0$的唯一解为$x=0$ ⇒ 即每行都线性无关

Note 5：一个2x2矩阵可逆当且仅当$ad-bc$非零：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

（实际上，$ad-bc$是矩阵的行列式，矩阵可逆仅当其行列式不为0）

Note 6：对角矩阵的逆：

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad then \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

计算：首先引入几个概念：

在n阶行列式中，把a所在的第o行和第e列划去，留下的n-1阶行列式叫a的余子式，将其乘以$(-1)^{o+e}$，记为A，A称为a的代数余子式。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$，记A_{ij}为a_{ij}的代数余子式。

则A的伴随矩阵A^*为：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ （Note：排列顺序是A转置过的）

此时有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

这被称为伴随矩阵，通用但是计算量大；另一种常用的方案是高斯消元：

对可逆矩阵M做行变换意味着左乘一个矩阵R。假使某种行变换使M变为I：

即 $RM = I$

那么由定义 $R = M^{-1}$。 利用这个性质，可以同时对 M 和 I 做相同的行变换，当 M 变为 I 后，I 就变为 M^{-1}：

$$RM = I, \quad RI = M^{-1}$$

例1：求 $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ 的逆

解：$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Row1 ×(-2) add to Row2 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Row2 ×(-4) add to Row1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore M^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

这里在顺路一提旋转矩阵：

我们之前学过的“平面旋转变换”属于线性变换，以下用矩阵 $\mathbf{R}_2$ 表示．虽然我们可以直接把式 1 到式 4 写成矩阵乘以列矢量的形式，得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

但这里我们用另一种方法推导一次，能更好地帮助理解和记忆．

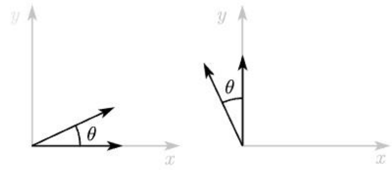

图 1：把单位矢量 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 逆时针旋转 θ

已知单位矢量 $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0), \hat{\mathbf{y}} = (0, 1)$ 逆时针旋转 θ 得（图 1）

$$\mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

要求任意矢量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 的旋转矩阵，可以将 $\mathbf{v}$ 表示成 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 的线性组合（式 11）$\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{x}} + v_2\hat{\mathbf{y}}$．由式 17，该线性组合的旋转变换等于 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ 分别做旋转变换再做同样的线性组合，即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(v_1\hat{\mathbf{x}} + v_2\hat{\mathbf{y}}) &= v_1\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{x}} + v_2\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{y}} \\ &= v_1\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

所以旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

这与平面旋转变换得出的结果一致．

把这个推导推广到一般情况，就是如果已知每个基底 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的线性变换（记变换矩阵为 $\mathbf{A}$）结果为 $\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_i$，那么变换矩阵的第 i 列就是第 i 个列矢量 $\boldsymbol{\alpha}_i$．

绕任意点旋转

由式 5 可得绕任一点 (x_0, y_0) 旋转为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

可见绕任意点旋转并不能简单表示为单个矩阵和 $(x\ y)^{\mathrm{T}}$ 相乘，所以不是线性变换．习惯上讨论旋转变换时都是默认关于原点旋转．