Informal Notes on Mathematics

By Yuanjue Chou

2022 - 04 - 09

今天的主题是回顾一元微积分、常微分方程、线性代数和多元微分。由于一些非常不愉快的因素拖延了大量时间，恐怕是达不到想要的目标了。

首先是于品老先生的数学分析教材，现在我深感他写书几乎可以说是与李文威并驾齐驱的"恶人"，从实数构造、乘积级数到拓扑空间、极大理想，能想到的全讲了之后才讲基本微分，后来又是测度又是微分流形，不胜枚举，堪与德国的Amann、法国的Godement和俄国的Zorich齐名。为了避免误入歧途(x)，我们从第156页开始。

Faà di Bruno 公式：

$$(f\circ g)^{(n)}(x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\Gamma(m)} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f^{(m)}(g(x)) \left(\frac{g^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{g^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}$$

其中 Γ_m 定义如下：

$$\Gamma(m) = \{k_1,k_2\dots k_n \mid k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ k_1+k_2+\dots+k_n=m,\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n\}$$

算了，显然我从中体味不到半点美感和所谓的"直观"，我们转弯直接去Демидович找题做吧。
以下是几个和 Leibniz 符号打交道的游戏：

De. 1179：视 x 为某个自变量的函数，由 $y=f(x)$ 求 d^2y，d^3y 及 d^4y

解：
$$dy = f'(x)dx$$
$$d^2y = d(f'(x)dx) = df'dx + d(dx)f' = f''(x)dx^2 + d^2x f'(x)$$

[如果令 $x=x(t)$，那么实质就是链式法则：
$$y=f'(x(t)),\quad \frac{dy}{dt} = f''(x(t))(x'(t)) = f''(x)dx\ ]$$

$$d^3y = d(f''(x)dx^2 + d^2x f'(x)) = d(f''(x)dx^2) + d(d^2x f'(x))$$
$$= f'''(x)dx^3 + f''(x)\cdot 2dx\cdot d(dx) + f'(x)d^3x + d(f'(x))d^2x$$
$$= f'''(x)dx^3 + 2f''(x)dx\,d^2x + f'(x)d^3x + f''(x)dx\,d^2x$$
$$= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx\,d^2x + f'(x)d^3x$$

De. 1180：以 x 和 y 的逐次微分来表示 $y=f(x)$ 的导数 y'' 和 y'''，不假定 x 为自变量

解：
$$y' = \frac{dy}{dx}$$
$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(dy)dx - d(dx)dy}{dx^2}\Big/dx = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3}$$
$$y''' = \frac{d\left(\frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d(dx^3)\det + d(\det)dx^3}{dx^6}\Big/dx = \frac{dx^3 d(\det) - 3d^2x\,dx^2\det}{dx^7}$$
$$= \frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y\end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}$$

这里用到了行列式的微分：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

正好，借此良机，我们去看看线代，这里我们采用 G. Strang 的 An Introduction to Linear Algebra；这的确是最友善的教材之一。由于过度友善，我们暂且跳过前49页。

这里提了一下 $Ax=b$ 的解法，通过我们常用的加减消元化成上三角矩阵，解新方程 $Ux=c$

基于同样的原因，我们再跳20页，从70页开始。

矩阵乘法： $A(BC)=(AB)C$ ，通常情况下，$AB \neq BA$

(由此我们可知所有非零矩阵在乘法下构成非阿贝尔群，此为后话，不表)

$$A_{m\times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n}\times p} = C_{m\times p}$$

$$\begin{bmatrix} & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{sj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & (AB)_{ij} & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

A : 4 by 5 　　B : 5 by 6 　　C : 4 by 6

这里 $i=2$，$j=3$，$\therefore (AB)_{23}=$ 所有 $a_{2k}b_{k3}$ 之和

举个例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

分块乘法：望文生义，如 $A=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$

$\therefore$ 若 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$

适当分块可以减小乘法计算量

分块消元：现在我们想从 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ 中消去 C

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D-CA^{-1}B \end{array}\right]$$

最后的那块 $D-CA^{-1}B$ 我们称之为 Schur complement

例 (用分块解决问题) 2021丘班0试：

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$A^{10}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$，求 b_{22}

解：令 $\alpha=[0\ 0]$，$\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A=\left[\begin{array}{c|c} 2 & \alpha \\ \hline \beta & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline \beta & B \end{array}\right]$ 　$\because$ 右上为0矩阵 $\therefore A^{10}$ 右下为 B^{10}

对B进行对角化：$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore B^{10}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore B^{10}$ 左上 $=[-1\ 1]\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 4^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2^{19}+2^{9} = 524800$

即 $b_{22}=524800$