[翻译] 重思集合论（ETCS简介）

数学

6周前

Yuanjue Chou 1楼 1月31日

原文名*Rethinking Set Theory*，作者Tom Leinster。

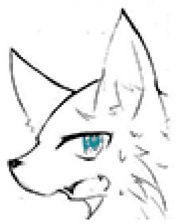
原文地址：amer.math.monthly.121.05.403

本文获2019年的Chauvenet奖。

> Chauvenet奖由1,000美元奖金和证书组成，在协会一月的年度会议上颁发给一篇关于数学主题的杰出说明性文章的作者。该奖于1925年首次颁发，以美国海军学院的数学教授William Chauvenet命名。它是由当时的MAA主席J.L.Coolidge在1925年赠予的。Chauvenet奖的获奖者都是最杰出的数学说明者之一。

详情见此：Chauvenet Prizes

该说不愧是说明性文章吗。。。真的是 ~~又臭又长~~ 不厌其详。翻译这种文章可真是累人呐。



由于笔者基本没有翻译经验且手边没有专有名词的中英对照表，如有翻译不妥处欢迎大家指摘。

最后祝各位除夕快乐 

2022.2.1更新

终于翻译完了！新年快乐各位！

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 2楼 1月31日

作为数学家，我们常常阅读到某个已知定理的很棒的新证明，我们享受这种不同的方法，但仍旧从我们最初所学的方法中获得内在的理解。这篇文章旨在大幅改变数学家思考与教学的方式。——Sheldon Axler[1]

数学家们在他们工作的几乎每一天都自信地操作集合。无论是在与实数或复数集、向量空间、拓扑空间、群还是诸如此类许多基于集合的结构打交道时，我们都是如此。这些潜藏其中的集合论操作是如此自然，以至于我们很少对它多加思考，并且我们处理集合时犯错的情况也极为少见。

然而，只有非常少的数学家能够正确的指出什么是被经常视作集合论的公理——除非查证它们。我们不会梦想在没有初步学习公理的情况下和李代数什么的打交道。然而，即使我们中的许多终其一生都没有研习集合论的所谓公理，我们工作的正确性也没有受到损害。这启示着我们，在有意识或无意识中，我们都携带了一套供我们使用的可靠的处理原则来操作集合【译注：从某种角度上来说，我们大多在以朴素集合论作为基础处理问题，这些够用了。早期朴素集合论所遇到的困难因公理化集合论的存在而消弭，而公理化集合论的不完全性遇到的问题我们往往忽略】 。

那么如果我们把这些原则中的一部分写下来，并且把它们看作集合的公理会怎么样呢？这篇文章就是为了表明这是可以被达成的，以一种简单可行的方式。我们根据 F.William Lawere 的[3,4]描述了一个公理体系，它们被非正式地呈现在下面的表格里。这些公理已足以应对几乎全部数学家对集合所做的事。所以只要我们想，我们就可以把古典的公理全部扔掉，并使用这些作为替代。

1.	函数的合成是结合的，并且具有单位元
2.	存在一个恰好只有一个元素的集合
3.	存在一个没有元素的集合
4.	一个函数由它对于元素的影响决定
5.	给定集合 X 和 Y, 可构造它们的笛卡尔积 $X \times Y$
6.	给定集合 X 和 Y,，可以构造从 X 到 Y的函数的集合
7.	给定 $f : X \longrightarrow Y$ 以及 $y \in Y$, 可以构造逆像 $f^{-1}(y)$.
8.	集合 X 的子集与 X 到 $\{0, 1\}$ 的函数相对应
9.	所有自然数构成一个集合
10.	每个满射都有一个右逆元

为何重思集合论？

传统的集合论公理体系是策梅洛-弗伦克尔集合论加上选择公理，通常记为 ZFC。以这个公理体系为基础，许多伟大的工作已经被达成。然而 ZFC 有一个主要的瑕疵：它对名词“集合”的使用与大多数数学家使用它的方式相冲突。

这个问题的根源在于在 ZFC 的架构中，集合的元素也是集合。因此，给定一个集合 X ，在 ZFC 中，询问" X 的元素的元素是什么"总应当是有意义的。现在，常规数学中集合最典型的例子就是 $\mathbb{R}$ 。呐，让我们随机从数学家中抽取一名幸运观众，问他，“ π 的元素是什么呢？”，那么他很有可能会认为他听错了，或者对你说你的问题没有任何意义。如果非要给出回答，他们可能会回复你实数是没有元素的。但是这就与 ZFC 对“集合”的用法相矛盾了：如果说 $\mathbb{R}$ 的所有元素都是集合，呐它们都没有元素，也就是说它们都是空集，这就意味着所有实数都是相等的。

好了，那我们是否——也许——能继续使用 ZFC 但是忽略集合中的元素必须是集合的要求呢？很可惜，不行。这会让我们无法陈述 ZFC 的公理。举个例子，有一个公理表述道：【译注：即正则公理，
$\forall X[X \neq \varnothing \rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge X \cap Y$
$= \varnothing)]$
】每一个非空集 X 中都存在某个元素 x ，使得 $x \cap X = \emptyset$ 。这仅当 X 的元素都是集合时才有意义。当 X 是一个一般的比如 $\mathbb{R}$ 的集合时，很少有人会把这条公理看做是有意义的：毕竟，$\pi \cap \mathbb{R}$ 是什么？

我能预料到对这些批评的反对意见。集合论的传统方法不仅包括 ZFC，而且还包括将许多不同类型的数学对象（实数、微分算子、随机变量、黎曼 Zeta 函数......）编码为集合的一系列方法。这类似于计算机软件将多种类型的数据（文本、声音、图像......）编码为二进制序列。在

这两种情况下，即使是设计者也会同意，编码方法是有些随意的。因此，有人可能会反对说，本就没有人声称像“π的元素是什么”这样的问题有着有意义的答案。

然而，前几段中的批评与编码问题无关。无可修饰的事实是，在 ZFC 中，问一个集合“它的元素有哪些”总应当是有效的，而在普通的数学实践中，它又是无效的。也许为这两个目的使用同一个词“集合 ”便是一种误导。

三个误解

下面介绍的公理化是 Lawvere 的集合范畴基本理论（Elementary Theory of the Category of Sets, ETCS），是在半个世纪前在[3,4]中首次提出的。在这里，它是以一种不需要任何范畴论知识的方式来表述的。由于这个公理化的范畴渊源，通常会出现三个误解。

首先是认为其基本动机是用范畴论来取代集合理论。 其实不然。这里描述的方法不是集合论的竞争对手：它就是集合论。

其次是认为这种公理化要求比其他公理化（如 ZFC）具有更多的数学复杂性。 这是不对的，但可以理解。几乎所有关于 Lawvere 的公理的工作都是在拓扑学中进行的——这是一个美丽而深刻的主题，但并不容易被外人理解。人们一直知道公理可以以完全初级的方式呈现——尽管一些作者强调了这一点 [3, 5, 6, 10, 11]，但它并没有得到应有的广泛重视。本文旨在使它变得浅显易懂。

第三个误解是，因为这些关于集合的公理来自范畴论，又因为范畴的定义涉及对象的集（collection）和箭头的集，而“集（collection）”可能意味着类似“集合（set）”的东西，所以存在着一种循环性； 为了将集合范畴公理化，我们必须已知什么是集合。但是，尽管我们的方法是受范畴启发的，它并不依赖于拥有一个一般的范畴的定义。事实上，我们的公理化（第 2 节）并不包含“范畴”这个词的任何一个实例。

换句话说，循环性在这里并不比在 ZFC 中更成问题。非正式地说，ZFC 说“有一些东西叫做集合，集合上有一种二元关系叫做隶属关系，并且一些公理成立”。而我们会说“有一些叫做集合的东西和一些叫做函数的东西，有一个叫做函数合成的操作，并且一些公理成立”。在这两种情况下，这些 "东西 "都不需要形成一个集合 (不管那是什么意思)。用逻辑学的术语说，这两种公理化都只是一阶理论。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 3楼 1月31日

1.序言：以函数作元素

数学家的词典上包括诸如集合、函数、元素、子集和等价关系等术语。任何关于集合的公理化都会选择其中一些概念作为基本概念，并推导出其他概念。传统的选择是集合和元素。我们使用集合和函数。

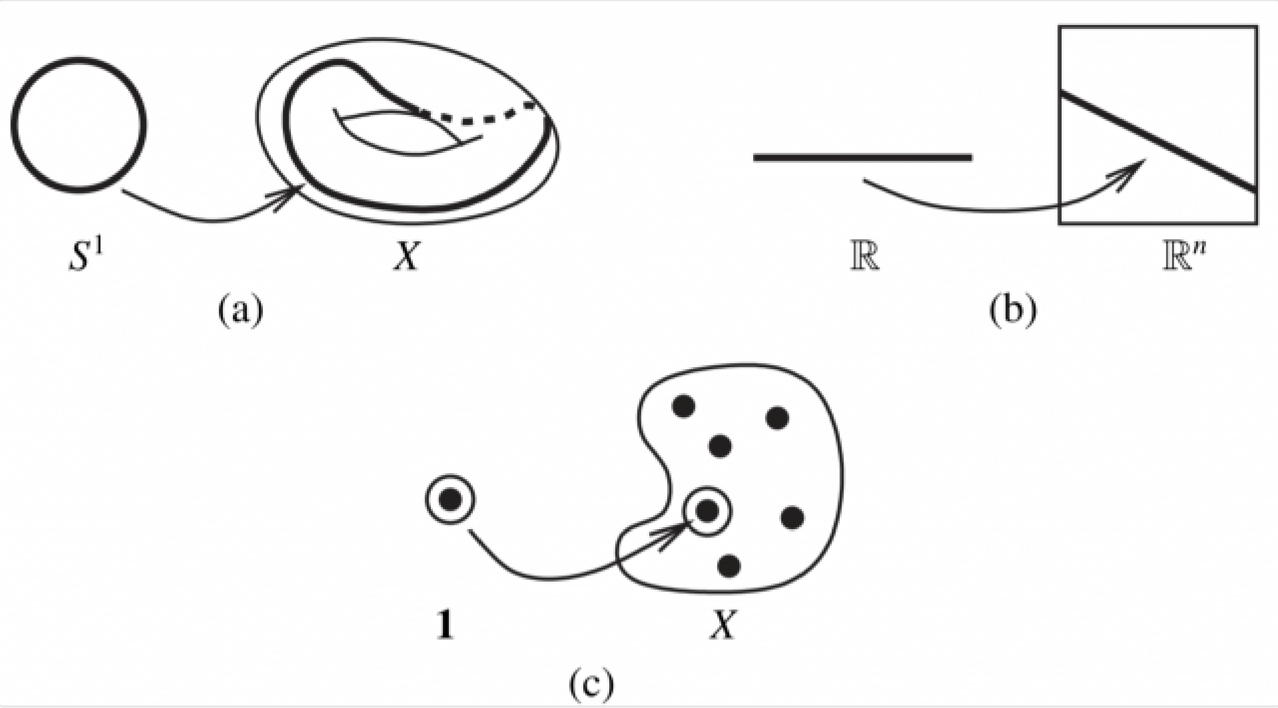
正式的公理化将在第2节中介绍。然而，提前考虑其中一个方面将是有益的：如何从函数的概念中推导出元素的概念。

假设我们已经知到了一个单点集的特征，而不知道元素是什么 (我们将在下面这样做)。 选定一个单点集 $\mathbf{1}=\{\bullet\}$ 。对于任何集合 X ，一个函数 $\mathbf{1} \longrightarrow X$ 本质上只是 X 的一个元素——毕竟这样一个函数 f 是由 f（$\bullet$） $\in X$ 的值唯一决定的（图2（c））。因此，

> 元素是函数的特殊情况

这是一个很travial的观察，以至于大家很容易把它当作一个单纯的形式上的把戏而不予理会。然而恰恰相反，类似的对应关系在整个数学领域都有发生。比如说 (见图2)：

- 拓扑空间 X 中的一个回路(loop)是一个 $S^1 \longrightarrow X$ 的连续映射
- $\mathbb{R}^n$ 中的一条直线是一个 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 的保距映射(distance-preserving map)
- 集合 X 中的一个序列是 $\mathbb{N} \longrightarrow X$ 的一个函数
- 方程 $x^2+y^2=1$ 在环 A 中的一对解 (x, y) 是一个同态 $\mathbb{Z}[X, Y] /\left(X^2+Y^2-1\right) \longrightarrow A$



在每一种情况下，“是”这个词既可以被看作是一个定义，也可以被看作是一个典型的、一一对应关系的论断。在第一种情况下，我们从圆中映射出来，但其是一个“独立的”回路；在第

二种情况下，$\mathbb{R}$ 是一条独立的线；在第三种情况下，$\mathbb{N}$ 的元素 0，1，2，$......$ 形成一个独立的序列；在最后，$\mathbb{Z}[X,Y]/\left(X^2+Y^2-1\right)$ 的一对元素 (X,Y) 是 $x^2+y^2=1$ 的独立的解 $(x，y)$ 。同样地，在我们travial的情况下，集合 $\mathbf{1}$ 是一个独立的元素，而集合 X 的一个元素只是一个映射 $\mathbf{1}\longrightarrow X$ 。

我们也可以挑剔一些，记 $\bar{x}$ ，来表示函数 $\mathbf{1}\longrightarrow X$，其自变量为 $x\in X$ 。但我们会把 $\bar{x}$ 写成 x ，模糊了区别。事实上，我们以后将*定义* X 的一个元素作为一个函数 $\mathbf{1}\longrightarrow X$ 。

这将使一些读者感到不舒服。你会同意在 X 的元素和 $\mathbf{1}\longrightarrow X$ 的函数之间有一个典型的一一对应的关系，但也许你在说 X 的一个元素实际上*是* $\mathbf{1}\longrightarrow X$ 的一个函数时在两者间划开了界限。如果是这样，这并不是什么大事。我们可以通过把“元素”加入到原始概念的表中来调整第二节中的公理化。然而，我们将需要进一步使其复杂化，增加条件来保证（除了别的以外）对于任何集合 X， X 的元素和函数 $\mathbf{1}\longrightarrow X$ 之间有一一对应关系。这完全可以做到，但我们选择更经济的路线。

我们已经看到，元素是函数的一个特例。还有一种函数和元素相互作用的基本方式：给定一个函数 $f\colon X\longrightarrow Y$ 和 X 中的一个元素 x ，我们可以在 x 处求 f 的值，得到一个新的元素，$f(x)\in Y$ 。把元素看作是 $\mathbf{1}$ 的函数，这个元素 $f(x)$ 只不过是 f 与 x 的合成。也就是说，$f(x)=f\circ x$ 可画图说明如下：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "f(x)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

因此，

> 求值是函数合成的特殊情况

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 4楼 1月31日

2.公理

在这里，我们以完全初级的术语陈述我们关于集合和函数的十个公理。

正式的公理化运用了不同的字体【译注：因为没有别的字体，这里会用下划线以示区分；公理正文直接扔引用框】，以区别于附带的评注。一些图表出现其中，但它们不是正式陈述的一部分。

首先我们说明我们的公理将适用于哪些数据。

有些东西被称作*集合*

对于每个集合 X 和 Y , 有些东西被称为*从 X 到 Y 的函数*, 写作 $f\colon X \longrightarrow Y$ 或者 $X \xrightarrow{f} Y$;

对于每个集合 X ， Y 和 Z ，一个运算赋给每个 $f\colon X \longrightarrow Y$ 和 $g\colon Y \longrightarrow Z$ 一个函数 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$;

对于每一个集合 X , 存在一个函数 $1_X\colon X \longrightarrow X$

这最后一项可以列入清单，也可以不列入，视个人口味而定。见下文第一条公理后的评论。

结合律和恒等律「Associativity and identity laws」

公理 1

对于所有集合 W, X, Y, Z 和函数

$$W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z,$$

我们有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. 对于所有集合 X, Y 和函数 $f\colon X \longrightarrow Y$ ，我们有 $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.

如果要从原始概念列表中省略恒等函数，必须用语句替换公理1的后半部分，即对所有集合 X ，存在一个函数 $1_X\colon X \longrightarrow X$ 使得对所有 $g\colon X \longrightarrow Y$ 有 $g \circ 1_X = g$ ，对所有 $f\colon W \longrightarrow X$ 有 $1_X \circ f = f$ 。这些条件表征 1_X 唯一。

单点集「One-element set」

我们想说“存在单点（元素）集”，但目前我们缺乏对“元素”的表达能力。但是，任何一个单点集 T 都应该具有这样的性质：对于每个集合 X ，恰恰有一个函数 $X \longrightarrow T$ 。而且，*只有*单点集应该具有此性质。这引起了以下定义和公理。

一个集合 T 是*终端（terminal）*，当且仅当如果对每一个集合 X ，都有唯一函数 $X \longrightarrow T$ 。

公理 2

存在一个终端集（terminal set）

从定义中很快跟上，如果 T 和 T' 是终端集，那么从 T 到 T' 存在唯一同构。(我们说一个函数 $f: A \longrightarrow B$ 是*同构*,当且仅当存在一个函数 $f': B \longrightarrow A$ 使得 $f' \circ f = 1_A$ 和 $f \circ f' = 1_B$ 。) 换句话说，终端集是唯一同构的。因此，一次性地确定终端集 $\mathbf{1}$ 是无害的。对此担忧的读者参见本节最后几段。

给定一个集合 X ，我们将 $x \in X$ 写成 $x: \mathbf{1} \longrightarrow X$ ，并称 x 为 X 的元素。给定 $x \in X$ 和函数 $f: X \longrightarrow Y$ ，我们将 Y 的元素 $f \circ x: \mathbf{1} \longrightarrow Y$ 写作 $f(x)$ 。

空集「Empty set」

> **公理 3**
>
> 存在一个没有元素的集合

函数和元素「Functions and elements」

从 X 到 Y 的函数应只是把 X 的元素变成 Y 的元素的一种方式。

> **公理 4**
>
> 令 X, Y 为集合， $f, g: X \longrightarrow Y$ 为函数。假设对所有 $x \in X$ ， $f(x) = g(x)$ 。那么 $f = g$ 。

公理1, 2, 4意味着一个集合是终端，当且仅当它恰好有一个元素。这就证明了 "单点集 "作为 "终端集 "的同义词的用法。

笛卡尔积「Cartesian products」

我们希望能够形成集合的笛卡尔积。X 的一个元素和 Y 的一个元素应该唯一确定 $X \times Y$ 的一个元素。更一般地，对于任意的集合 I ，一个函数 $f_1: I \longrightarrow X$ 和一个函数 $f_2: I \longrightarrow Y$ 应该唯一确定一个函数 $f: I \longrightarrow X \times Y$ ，其由 $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ 给出。(为了看到这确实是 “更一般的” ,取 $I = \mathbf{1}$ 。)我们可以通过与投影 $p_1: X \times Y \longrightarrow X$ 的合成从 f 中恢复 f_1 。 f_2 类此。如下定义所示。

设 X 和 Y 是集合。X 和 Y 的乘积是集合 P 以及函数 $X \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} Y$ ，其具有以下性质: 对于所有的集合 I 和函数 $X \xleftarrow{f_1} I \xrightarrow{f_2} Y$ ，存在唯一的函数 $(f_1, f_2): I \longrightarrow P$ ，使得 $p_1 \circ (f_1, f_2) = f_1$ 和 $p_2 \circ (f_1, f_2) = f_2$ 。

$$
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "(f_1,f_2)"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
 & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

公理 5

每对集合都有一个积

严格地说，一个积不仅由集合 P 构成，而且由投影 p_1 和 p_2 构成。X 和 Y 的任意两个积都是唯一同构的：即给定积 (P, p_1, p_2) 和 (P', p'_1, p'_2) ，存在唯一同构 $i\colon P \longrightarrow P'$ ，使得 $p'_1 \circ i = p_1$ 和 $p'_2 \circ i = p_2$ 。如在终端集的情况下，这使得选择一次且对每一对集合 X ，Y 有一个优先的积 $(X \times Y, \mathrm{pr}_1^{X,Y}, \mathrm{pr}_2^{X,Y})$ 是无害的。再次说明，这个惯例在本节末尾是无可厚非的。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 5楼 1月31日

函数集「Sets of functions」

在日常数学中，可以构造从一个集合 X 到另一个集合 Y 的函数的集合 Y^X ，对于任意的集合 I ，函数 $q\colon I \times X \longrightarrow Y$ 与函数 $\bar{q}\colon I \longrightarrow Y^X$ 一一对应，可以简单地通过改变符号来实现：

$$q(t,x) = (\bar{q}(t))(x) \tag{1}$$

($t \in I$ ，$x \in X$)。例如，当 $I = \mathbf{1}$ 时，这就简化为函数 $X \longrightarrow Y$ 对应 Y^X 的元素。在 (1) 中，我们暗藏运用了求值映射：

$$
\begin{array}{rccc}
\varepsilon\colon & Y^X \times X & \longrightarrow & Y \\
 & (f,x) & \longmapsto & f(x).
\end{array}
$$

那么 (1) 变形成方程 $q(t,x) = \varepsilon(\bar{q}(t), x)$ ，如下定义中：

设 X 和 Y 是集合。一个从 X 到 Y 的函数集合是一个集合 F 和一个函数 $\varepsilon\colon F \times X \longrightarrow Y$ ，具有如下性质：

对于所有的集合 I 和函数 $q\colon I \times X \longrightarrow Y$ ，有唯一的函数 $\bar{q}\colon I \longrightarrow F$ ，使得对于所有的 $t \in I$ ， $x \in X$ ， $q(t,x) = \varepsilon(\bar{q}(t), x)$ 。

$$
\begin{tikzcd}
I \times X \arrow[d, dotted, "\bar{q} \times 1_X"'] \arrow[dr, "q"] & \\
F \times X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

公理 6

对于所有的集合 X 和 Y ，存在一个从 X 到 Y 的函数集。

逆像「Inverse images」

通常情况下，给定一个函数 $f\colon X \longrightarrow Y$ 和一个 Y 的元素 y ，我们可以构造逆像 $f^{-1}(y)$ 。包含函数 $j\colon f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ 具有使 $f \circ j$ 拥有自变量 y 的性质。此外，当 $q\colon I \longrightarrow X$ 是一个函数，使得 $f \circ q$ 具有自变量 y 时， q 的图像必须位于 $f^{-1}(y)$ 内；也就是说， $q = j \circ \bar{q}$ 对应某个 $\bar{q}\colon I \longrightarrow f^{-1}(y)$ (必然是唯一的)。

<u>设 $f\colon X \longrightarrow Y$ ， $y \in Y$ 为函数。f 下 y 的逆像是一个集合 A 和一个函数 $j\colon A \longrightarrow X$ ，使得 $f(j(a)) = y$ 对所有 $a \in A$ ，以下性质都成立：</u>

<u>对于所有的集合 I 和函数 $q\colon I \longrightarrow X$ 使得对于所有的 $t \in I$ ， $f(q(t)) = y$ ，存在唯一的函数 $\bar{q}\colon I \longrightarrow A$ 使得 $q = j \circ \bar{q}$.</u>

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, dotted, "\bar{q}"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, "j"] & {} \arrow[d, "y"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

公理 7

对于每个函数 $f\colon X \longrightarrow Y$ 和元素 $y \in Y$ ， f 下都存在 y 的逆像。

逆像本质上是唯一的：如果 $j\colon A \longrightarrow X$ 和 $j'\colon A' \longrightarrow X$ 都是 f 下 y 的逆像，则存在唯一的同构 $i\colon A \longrightarrow A'$ 使得 $j' \circ i = j$ 。

特征函数「Characteristic functions」

有时我们想逐个定义一个函数。例如，如果 $x \neq 0$ 和 $h(0) = 0$ ，我们可能想用 $h(x) = x\sin(1/x)$ 定义 $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 。一个简单的实例就是特征函数的定义。固定两元素集 $\mathbf{2} = \{t, f\}$ (为了“真”和“假”)。子集 $A \subseteq X$ 的特征函数是 $\chi_A\colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ ，定义为如果 $x \in A$ ，那么 $\chi_A(x) = t$ ，否则 $\chi_A(x) = f$ 。它是唯一的函数 $\chi\colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ 使得 $\chi^{-1}(t) = A$ 。特征函数通常是上面那样干活的。为了保证它们在我们的集合论中以同样的方式工作，我们现在要求一个集合 $\mathbf{2}$ 和一个元素 $t \in \mathbf{2}$ ，具有刚才描述的性质：每当X是一个集合且 $A \subseteq X$ 时，就有唯一的函数 $\chi\colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ 使得 $\chi^{-1}(t) = A$ 。由于我们还没有子集的定义，所以我们用内射术语来代替公理。（这是因为每个子集的包含 $A \hookrightarrow X$ 都是内射，并且直到同构，每个内射都以这种方式产生。）

一个*内射*是一个函数 $j\colon A \longrightarrow X$ 使得对于 $a, a' \in A$， $j(a) = j(a') \implies a = a'$ 。

一个*子集分类器（subset classifier）*是一个集合 $\mathbf{2}$ 和一个元素 $t \in \mathbf{2}$，具有如下性质：

对于所有的集合 A, X 和内射 $j\colon A \longrightarrow X$，存在唯一的函数 $\chi\colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ 使得 $j\colon A \longrightarrow X$ 是 χ 下 t 的逆像。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, dotted, "\chi"'] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

公理 8

存在一个子集分类器

记号 $\mathbf{2}$ 只是暗示性的写法。定义中并没有说 $\mathbf{2}$ 必须有两个元素，但是，nontravial的是，我们的十条公理实际上暗示了这一点。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 6楼 2月1日

自然数「Natural numbers」

在日常数学中，序列可以递归定义：给定一个集合 X，一个元素 $a \in X$，以及一个函数 $r\colon X \longrightarrow X$， X 中存在唯一序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 使得

$$x_0 = a \text{ 且 } x_{n+1} = r(x_n) \text{，对于所有 } n \in \mathbb{N}.$$

X 中的序列只不过是一个函数 $\mathbb{N} \longrightarrow X$，所以前一句话实际上是关于集合 $\mathbb{N}$ 的语句。它还提到 $\mathbb{N}$ 上的两个结构：元素 0 和由 $s(n) = n + 1$ 给出的函数 $s\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 。

一个*自然数系*是集合 N 加上一个元素 $0 \in N$ 和一个函数 $s\colon N \longrightarrow N$，具有如下性质：

每当 X 是一个集合， $a \in X$ 且 $r\colon X \longrightarrow X$ 时，就会有唯一的函数 $x\colon N \longrightarrow X$，使得 $x(0) = a$ 和 $x(s(n)) = r(x(n))$，适用于所有的 $n \in N$ 。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_{\mathbf{1}}"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "x"] & N \arrow[d, dotted, "x"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "a"'] & X \arrow[r, "r"'] & X \end{tikzcd}$$

公理 9

存在一个自然数系

自然数系本质上是唯一的，通常意义上说，其中任意两个系统之间存在唯一的保结构同构。这就证明了说自然数 $\mathbb{N}$ 是合理的，就像我们一直以来所做的。

选择「Choice」

一个具有右逆的函数当然是满射的。选择公理陈述了其逆命题。

一个*满射*是一个函数 $s\colon X \longrightarrow Y$ ，使得对于所有的 $y \in Y$ ，存在 $x \in X$ 与 $s(x) = y$ 。

一个函数 $s\colon X \longrightarrow Y$ 的*右逆*是一个函数 $i\colon Y \longrightarrow X$ ，使得 $s \circ i = 1_Y$ 。

公理 10

每个满射都有一个右逆

一个从 X 到 Y 的满射 $s\colon X \longrightarrow Y$ 的右逆是一个对于 Y 中的每个 y 的非空集合 $s^{-1}(y)$ 中的一个元素的选择【原文：A right inverse of a surjection $s\colon X \longrightarrow Y$ is a choice, for each $y \in Y$, of an element of the nonempty set $s^{-1}(y)$ 】 。

好，这里我们总结完了公理化。

“The”的含义

鉴于公理 2和公理 5中所采取的自由行事，这里我们想让任何读者都能对此放心。在那里我们一次便直接选定了终端集和每对集合的笛卡尔积。

这种自由在数学实践中非常普遍。我们说“the”平凡群，“the”2 -球面，两个向量空间的“the”直和等，即使我们可以构想出许多平凡群、2 -球面或直和，且它们都是同构却不相等的。然而任何人试着问“但是是哪个平凡群？”之类的问题都很可能会被冷眼相待，理由很充分：关于群的任何有意义的陈述都不取决于平凡群的元素碰巧被称为什么。

然而，我们应该严格地陈述公理，并且我们可以做到。这样做的一种方式不是将某个特定的终端集或特定的积挑出来，而是采取某种绕行方式：例如，将“对所有元素 $x \in X$ ”的短语替换为“对所有终端集 T 和函数 $x\colon T \longrightarrow X$ ”。

不过，更令人满意的做法是扩展原始概念列表。对现有列表(集合、函数、合成和恒等)，我们添加：

- 一个特别的集合，$\mathbf{1}$
- 一个运算，其给每一对集合 X,Y 分配一个 $X\times Y$ 集合和函数

$$X \xleftarrow{p_1^{X,Y}} X\times Y \xrightarrow{p_2^{X,Y}} Y.$$

公理 2由 $\mathbf{1}$ 为终端的语句代替，公理 5由对于所有 X 和 Y，集合 $X\times Y$ 和上式中函数是 X 和 Y 的乘积的语句代替。

这种方法具有反映普通数学用法的优点。我们通常把两集合的积 (或空间、群等) 看成是一个输出一定的过程：*那*个积，而不是一个积【*the* product, not *a* product】。但由于积在任何情况下都是唯一确定至唯一同构，无论我们是否指定一个为特殊，都没有显著区别。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 7楼 2月1日

3.讨论

这十条公理的直观内容是人们所熟悉的，但作为一个公理系统就不那么熟悉了。在此，我们讨论将它们作为公理系统使用的意义。

在公理的基础上建造

任何事物的公理化之后都会有一段公理证明的过程。本公理也不例外。 下面是一个非常简要的发展概述。

从形式上看，可将一个集合 X 的*子集*定义为一个函数 $X\longrightarrow\mathbf{2}$，但我们经常使用公理 8提供的函数 $X\longrightarrow\mathbf{2}$ 与到 X 的内射之间的对应关系。到 X 的内射 j，j' 对应于 X 的同一个子集，当且仅当它们有相同的像（即存在一个同构的 i 使得 $j'=j\circ i$）。

我们的主要任务是建立用于操作集合的常用结构。例如，给定一个函数 $f\colon X\longrightarrow Y$，我们构造 f 下 X 的一个子集的像和 Y 的一个子集的逆像。集合 X 上的等价关系 $\sim$ 被定义为具有常规属性的 X 的子集，公理允许我们构造商集 $X/\sim$。有些构造是棘手的：例如，公理意味着任何两个集合 X 和 Y 有一个不相交的并集 $X\sqcup Y$，但这绝非显而易见。

然后我们定义通常的数字系统。自然数的加法、乘法和幂直接用公理 9来定义。从 nat 开始，我们以标准的方式依次构造 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$。例如，$\mathbb{Z}=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\ /\sim$，其中 $\sim$ 是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 的等价关系，其定义为当且仅当 $m+n'=m'+n$ 时，$(m,n)\sim(m',n')$。正如这一点所说明的，过了某一点，其发展与其他集合的公理化的发展完全相同。

这些公理有多强？

大多数数学家永远不会使用比十条公理所保证的集合更多的性质。例如，McLarty[13]认为，在代数几何Grothendieck学派的经典多卷作品*Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA)和*Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA)中，任何地方都不再需要更多。

为了获得公理的伸展感，让我们考虑无限的笛卡尔积。让 I 是一个(可能是无限的)集合，$(X_i)_{i\in I}$ 是一个集族。能否形成积 $\prod_{i\in I} X_i$ ？这取决于“族”的意思。我们可以将一个 I -索引族定义为集合 X 和一个函数 $p\colon X \longrightarrow I$ ，将逆像 $p^{-1}(i)$ 看作第i个成员 X_i 。在这种情况下，$\prod X_i$ 可以构造为 X^I 的子集。具体地，引申出一个函数 $p^I\colon X^I \longrightarrow I^I$ ，$\prod X_i$ 是 I^I 元素在 p^I 下对应 1_I 的逆像。

然而，我们可以对“ I -索引族”进行不同的解释：作为一种算法或公式，将一组 X_i 分配给每个 $i \in I$ 。不明显的是，我们可以形成不相交的并 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ ，这也是为了获得一个以前意义上的族所必需的。事实上，对于一个集合 S 的幂集写 $\mathcal{P}(S) = \mathbf{2}^S$ ，十条公理确实*没有*保证无交并的存在

$$\mathbb{N} \sqcup \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sqcup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \sqcup \cdots \tag{2}$$

除非它们不一致[8, Section 9]

如果我们想改变这一点，我们可以添加第十一条公理(或其他适当的公理方案)，称为“替换”，（正式论述见[12]的第8节）我们将其非正式地说明如下。假设我们有一个集合 I 和一个一阶公式，对每个 $i \in I$ 指定一个集合 X_i 至同构。然后我们要求存在一个集合 X 和一个函数 $p\colon X \longrightarrow I$ 使得对每个 $i \in I$ ，$p^{-1}(i)$ 同构于 X_i 。这就保证了 **(2)** 等集合的存在.

我们的公理与ZFC的关系被很好地理解了。这十条公理比ZFC弱；但当加入第十一个时，这两个理论的强度相等，是“双重可解释的” (同样的定理成立)。这种额外的强度有时是需要的；例如，替换在无穷组合论的部分很重要。这十条公理对应的ZFC的哪一个片段也是已知的：“策梅洛伴着有界理解和选择”。这种关系的细节多在20世纪70年代初 [2,14,15]中拟定。好的现代描述可见[7, Section VI.10]和[9, Chapter 22]。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 8楼 2月1日

4.参考文献

[1] S.Axler.Down with determinants! American Mathematical Monthly,102:139-154,1995.

[2] J.C.Cole.Categories of sets and models of set theory. In J.Bell and A.Slomson,editors,Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Logic Conference,Uldum 1971,pages 351-399.1973.

[3] F.W.Lawvere.An elementary theory of the category of sets.Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.,52:1506-1511,1964.

[4] F.W.Lawvere.An elementary theory of the category of sets (long version)with commentary. Reprints in Theory and Applications of Categories,12:1-35,2005.

[5] F.W.Lawvere and R.Rosebrugh.Sets for Mathematics.Cambridge University Press,Cambridge,2003.

[6] S.Mac Lane.Mathematics:Form and Function. Springer,New York,1986.

[7] S.Mac Lane and I.Moerdijk.Sheaves in Geometry and Logic.Springer,New York,1994.

[8] A.Mathias.The strength of Mac Lane set theory.Annals of Pure and Applied Logic,110:107-234,2001.

[9] C.McLarty.Elementary Categories,Elementary Toposes.Oxford University Press,1992.

[10] C.McLarty.Numbers can be just what they have to. Nous,27:487-98,1993.

[11] C.McLarty.Challenge axioms,final draft.Email to Foundations of Mathematics mailing list,6 February 1998,archived at http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom ,1998.

[12] C.McLarty.Exploring categorical structuralism.Philosophia Mathematica,12:37-53,2004.13 C.McLarty.A finite order arithmetic foundation for cohomology. arXiv:1102.1773,2011.

[14] W.Mitchell.Boolean topoi and the theory of sets.Journal of Pure and Applied Algebra,2:261-274,1972.

[15] G.Osius.Categorical set theory:a characterization of the category of sets.Journal of Pureand Applied Algebra,4:79-119,1974.

[16] M.Tierney.Sheaf theory and the continuum hypothesis. In F.W.Lawvere,editor,Toposes, Algebraic Geometry and Logic,volume 274 of Lecture Notes in Mathematics,pages 13-42. Springer, 1972.

[17] M.Tierney.Axiomatic sheaf theory:some constructions and applications. In P.Salmon,editor, Proceedings of CIME Conference on Categoriesand Commutative Algebra,Varenna,1971,pages 249-326.Edizione Cremonese,1973.

[18] T.Trimble.ETCS:building joins and coproducts. http://ncatlab.org/nlab/show/Trimble+on+ETCS+III , 2008.

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

YoHe 9楼 2月4日

新年快乐！

Cutting edge of the newer world.