一个极度混乱的 Hopf 纤维预习笔记

数学

7月前

Yuanjue Chou 1楼 2021年8月6日

周六晚 7:00，将由 D.C.A.A 同志在@Geek学院 进行一场关于同伦群和 Hopf 纤维的沙龙。沙龙将在群电话进行，欢迎各位入群围观！

以下为本人为此次沙龙做的预习笔记，旨在向一些认为自己不能听沙龙的同学介绍一些基础的前置知识。笔记的内容并非重点，简单了解需要掌握什么内容即可。由于是赶时间的产物，会有很多杂七杂八的错误，欢迎补充和指正。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 2楼 2021年8月6日

1.群作用

以下内容摘自鄙人的抽代笔记，有少数更改，可能存在一定错误。写群作用原因在于同伦群介绍中可能存在群作用相关内容，比如 $\pi_1(A, x_0)$ *作用于* $\pi_n(X, A, x_0)$

群作用 (group action) 是一个初等的课题。群作用的概念是将抽象代数联系到数学的几乎每一个分支的概念，其出现在诸如几何、线代和微分方程等分支中。

在此我们需要把一个群看作一个集合的一组置换。之前接触过的最明显的例子是置换群 S_n ，它包括 $\{1, 2, ..., n\}$ 的所有置换。这个方法的一个重要的一般例子是 Cayley 定理，它说每个有限群 G 同构于 S_G 的一个子群，即群本身元素集合的置换。在 Cayley 定理的证明中（参见教材），我们发现了一个同构，它将 G 的每个元素自然地映射为 G 的元素的一个置换。（即使规模相对较小的 G ， S_G 也可能很大。）若 $|G| = n$ ，易得 $S_X \cong S_n$

下面我们将看到，从 Cayley 定理的证明中得到的这一映射绝不是一个群作为某种集合的一组置换实现的唯一途径。

定义1.1

如果存在同态 $\varphi: G \to S_X$ ，则称 G 作用于 X .

另外一个常见的说法是:

设 X 是集合, G 是群, 则 G 在 X 上的右群作用是一个函数 $\alpha: X \times G \to X, (x, g) \mapsto x \cdot g$, 满足:

(i) 对任意 $x \in X$ ， $x \cdot 1 = x$;

(ii) 对任意 $g, h \in G$ ， $x \in X$, 有 $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$.

此时称 G 作用于 X 。（类似地可定义左群作用）

实际上采用第二种定义方法的一般会把第一种称为*置换表示*，随后说明二者本质上是相同的。

我们将 $g(x)$ 理解为与 g 相关的置换映射 x 到 X 的元素。利用这个与群元素相关联的置换的函数记号，从 G 中的群运算到置换群中的函数合成运算， φ 是同态的事实就等于断言: $(gh)(x) = g(h(x)), \text{ for all } g, h \in G, x \in X$ 。注意我们在这里并不坚持 φ 是一个单射， G 的两个不同的元素可能与 X 上的相同置换相关联.

例子1.2

(i) 如前所述，我们可以取 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$， $G = S_n = S_X$ ， $\varphi: S_n \to S_n$ 为恒等映射。

(ii) 设 X 是在 $\mathbb{R}^3$ 上的单位立方体， G 是 X 的对称群，它作为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换再次作用于 X 。

(iii) 让 G 通过由 $g(x) = gxg^{-1}$ 给出的共轭作用于 G ，在这个例子中，我们可以证明函数 $g(x)$ 是双射(即 G 的置换)。

定义1.3

设 G 是作用在集合 X 上的群，对于 $x \in X$ ， G 中 x 的稳定化子 (stabilizer)（记为 $\mathrm{stab}_G(x)$ ），是所有元素 $g \in G$ 的集合，使得 $g \cdot x = x$ ，即

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

对于 $x \in X$ ， G 中 x 的轨道 (orbit)（记为 $\mathrm{orb}_G(x)$ ），是 X 中形式为 $g \cdot x$ 的所有元素的集合，对于 $g \in G$ ，即

$$\mathrm{orb}_G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

例子1.4

再次考虑例1.4 (iii)。如果我们固定一个 $a \in G$ ，我们可以发现， a 的轨道是

$$\mathrm{orb}_G(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$$

即我们之前定义的 G 中 a 的共轭类。如果我们观察 a 在 G 中的稳定化子，我们有

$$\mathrm{stab}_G(a) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}$$

即我们之前定义的 a 在 G 中的中心化子。

我们已经知道元素的中心化子是 G 的子群，所以易得群作用的稳定化子是 G 的子群。

假设 G 是作用于 X 的有限群，对于任意 $x \in X$ ，我们有

$$|G| = |\mathrm{stab}_G(x)|\,|\mathrm{orb}_G(x)|$$

这是一个很重要的定理，证明见书或自证。

实际上了解一下何为群作用可能就够了

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 3楼 2021年8月6日

2.同伦及纤维

以下内容修改自鄙人的拓扑笔记，添加修改很多，不过仍然可能有错误存在

代数拓扑的目的是利用代数不变量对拓扑集和连续映射进行分类。实际上这些不变量大多定义函子，这些函子无法区分两个对象。所以，我们需要先引入合适的范畴和同伦概念。这种分类语言可以避免许多重复。

定义2.1

设 X, Y 为空间且 $f, g \in \mathsf{Top}(X, Y)$. 让 I 表示区间 $[0,1] \in \mathbb{R}$ 。我们说 f 与 g 是同伦的，或者说 f 和 g 是同伦映射，当且仅当存在一个映射 $F : X \times I \to Y$ ，使得

$$F(x,0) = f(x) \quad \text{and}$$
$$F(x,1) = g(x)\ .$$

$X \times Y$ 被称为 X 上的 cylinder，F 被称为 f 和 g 之间的同伦。

定义2.2

我们说 f 是 g 的同伦映射，或者 f 和 g 是同伦映射，当且仅当有映射 $F : X \to \mathsf{Top}(I, Y)$ ，使得

$$ev_0 \circ F = f \quad \text{and} \quad ev_1 \circ = g$$

其中 ev_i 是 $i \in I$ 的 evaluation map。空间 $\mathsf{Top}(I.Y)$ ，同样写作 Y^I ，是 Y 中道路的空间，被称为 Y 上的道路空间。

同伦是一个等价关系，与映射的合成相容，即对任何定义了合成的映射 h, k 来说，$f \simeq g$ 隐含 $k \circ f \circ h \simeq k \circ g \circ h$ 。因此，我们很容易定义同伦关系 $\mathsf{Top}/\sim$ 。空间 X 和 Y 之间若有同伦等价，则称它们有相同的同伦类型。

下面来到余纤维和纤维。

定义2.3

称映射 $j : A \to X$ 是一个余纤维 (cofibration)，如果任何源于 A 的同伦扩展到源于 X 的同伦. 更确切地说，让我们考虑如下实箭头的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, tail, "A\times 0"'] & X \arrow[d, tail, "X\times 0"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A\times I \arrow[r, "j\times I"] \arrow[rr, bend right, "G"'] & X\times I \arrow[r, dashed, "\overline{G}"] & Z
\end{tikzcd}$$

如果有一个映射 $\overline{G}$ (用点箭头表示) 使得图仍然成立，我们说 j 对映射 g 具有同伦扩展性质 (h.e.p.)。如果 j 对任意映射 g 具有 h.e.p., 则 j 是余纤维。

在图中我们一般用 $\hookrightarrow$ 或 $\rightarrowtail$ 表示余纤维。

通过对 h.e.p. 的概念进行对偶，我们可以得到概念同伦提升性质 (h.i.p)，详见 homotopy lifting property

定义2.4

称映射 $p: X \to A$ 是一个纤维 (fibration)，如果任何实箭头交换图

$$\begin{tikzcd}
A^I \arrow[d, "ev_0"'] & X^I \arrow[l, "p\circ i"'] \arrow[d, "ev_0"'] & Z \arrow[l, dotted, "\overline{F}"'] \arrow[dl] \arrow[ll, bend right, "F"'] \\
A & X \arrow[l, two heads, "p"]
\end{tikzcd}$$

有一个映射 $\overline{F}$ (用点箭头表示) 使得图成立。

在图中我们一般用 $\twoheadrightarrow$ 表示纤维。

发现 Hatcher 上的 h.e.p. 讲的更好懂些，看来我的书还是太差哩

定义2.5

空间 X 向子空间 A 的形变回缩是映射族 $f_t: X \to X$，$t \in I$，使得 $f_0 = \mathrm{id}_A$，$f_1(X) = A$，且对所有 t，$f_t \mid A = \mathrm{id}_A$ 。

空间 X 向子空间 A 的形变回缩是一个从 X 的恒等映射到 X 在 A 上的回缩的同伦，即映射 $r: X \to X$ 使得 $r(X) = A$ 且 $r \mid A = \mathrm{id}_A$ 。

假设给定一个映射 $f_0: X \to Y$，并且在子空间 $A \subset X$ 上给定一个 $f_0 \mid A$ 的同伦 $f_t: A \to Y$，其能扩展到给定 f_0 的同伦 $f_t: X \to Y$ 。如果对于 (X, A)，这个扩展问题总是可以解决的，则说 (X, A) 具有同伦扩展性质。

性质2.6

(X, A) 具有同伦扩展性质当且仅当 $X \times \{0\} \cup A \times I$ 是 $X \times I$ 的回缩。

实际上知道何为同伦和大概知道纤维是什么可能就够了。

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 4楼 2021年8月6日

3.球面及同伦群

本节中所有“赤线”请自行替换成“赤道”，这是个人翻译习惯导致的问题

我们来回顾一下我们熟悉的符号 S^n , 它表示所有满足 $x_1^2+x_2^2+...+x_{n+1}^2=1$ 的点构成的集合，我们称之为 n -球面。同样回顾一下 T^n , 记作 n -环面。正如 $\mathbb{R}_n$ 中的一点可以由 $\mathbb{R}$ 中的 n 元组指定一样，在 n -环面上的一点也可以由圆 S_1 中的 n 元组指定。因此，二维环面 T^2 上的点由二元对 $(\theta,\psi)\in S_1\times S_1$ 指定。

正如立体投影 (stereographic projection) 将圆与直线相关联， S_2 与欧氏平面相关联一样，其通过三维欧氏空间上的扭曲度量 (distorted metric) 给出了 S_3 除一点以外的所有点的映射。了解 S_3 的一个方法是了解这种扭曲。立体投影涉及到从点到投影点的选择，以及一个基点 (antipodal points)，在这个基点上我们可以想象像空间碰到球面。一对基点定义了一个赤线 (equator)——一个低一维的球面位于它们正中间。对于 S^3 来说，赤线是一个 S^2 ，并且在一个到 $\mathbb{R}^3$ 立体投射下，它被投射至单位球面。沿着这个赤线球面，立体投影的像不变形。存在于这个球面上的距离和形状和在球面上一样出现在投影中。然而在赤线之外，事物被扭曲，这便出现了许多奇奇怪怪的有趣的形状。

现在再来简单看看同伦群。

> 定义3.1
>
> 设 X 为拓扑空间而 S^n 为 n 维球面。选定基点 $a\in S^n, x\in X$ 。定义 $\pi_n(X,x)$ 为 $[S^n,X]$ ，也就是由保持基点的连续映射 $f:S^n\to X$ 的同伦类构成的集合，称为同伦群。(给定 $f,g:I^n\to X$ ，定义 $f*g:=(f\sqcup g)\circ s$ ，可以证明运算 $f,g\mapsto f*g$ 满足群公理，其幺元为常值映射 $\forall s\in S^n,\ e(s)=x$ 。)

为了方便起见， $s_1\wedge\cdots\wedge s_n$ 表示 $(s_1,\ldots,s_n)\in[0,1]^n$ 在商映射 $[0,1]^n\to[0,1]^n/\partial([0,1]^n)\simeq S^n$ 下的像。取 S^n 的基点为 $a=0\wedge\cdots\wedge 0$ 。

注意到当 $n=0$ 时， $S^0=\{-1,1\}$ 而 $\pi_0(X,x)$ 的元素一一对应到 X 的连通分支。

对于 $n\geq 1$ ， $\pi_n(X,x)$ 带有自然的群结构：首先，我们构造一个连续映射：

$$s:S^n\to S^n\vee S^n$$

在此 $S^n\vee S^n$ 定义为将两份 S^n 沿基点黏合得到的拓扑空间。映射 s 定义为

$$
s\left(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\right) = \begin{cases} x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge \left(1-2x_n\right), & x_n \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge \left(2x_n-1\right), & x_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}
$$

直观来看，s 的效应相当于将球面 S^n 沿赤线掐扁。

同伦群的内容详见 A.Hatcher, *Algebraic Topology* 的第四章第一节，有诸多图辅助食用。（Hatcher yyds）

关于这部分我感觉 D.C.A.A 会在沙龙里讲，所以简单了解一下即可

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.

Yuanjue Chou 5楼 2021年8月6日

4.Hopf 纤维

本节是我睡前半小时随便写的乱七八糟的东西，可以跳过直接看末尾的几个网站

Hopf 纤维是从 3 -球面 S^3 到 2 -球面 S^2 的映射。它为更深入地理解这两个基本对象提供了一个窗口。纤维，如我们在第二部分所见，是一种特殊的映射类型。直观地说，纤维将两个空间结合成第三个空间。这两个空间称为 base 和 fiber，其组合被称为纤维的全空间，或仅仅是全空间或纤维。

给定两个空间 X 和 Y ，利用一个图谱 (atlas) $\{U_\alpha\}$ 为 X 定义一个具有 base X 、fiber Y 和全空间 Z 的纤维。(一个空间 X 的映射集族基本上是完全覆盖空间的开集的集合)。本质上，全空间是通过给 Z 赋予一个图谱来定义的，每个图表以一致的方式（形如 $U_\alpha \times Y$ ）从一个图表传递到下一个。被称为天平的映射是指从 Z 到 X 的映射，它将图上 $U_\alpha \times Y$ 的一对 (x,y) 代表的点带到 x 。对于所有 $x \in X$ ，在 Z 中都有一个 Y 的"副本"，由 $\{x\} \times Y$ 给出。这就是所谓的 x 上的 fiber。对于任何一对空间，我们都可以定义平凡纤维，其中 $Z = X \times Y$ ，只需要在 $\{U_\alpha\}$ 中有一个开集来描述这个纤维。（在此回顾一下 2 中的纤维定义及那张要命的交换图）

我们再来回顾 S^3 ，将其在 $\mathbb{C}^2$ 中描述：

$$
S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \\ \}.
$$

考虑比值 z_2/z_1 。这是一个复数（显然，除非 $z_1 = 0$ ）。通过设置 $z_2/0 = \infty$ ，我们得到了一个映射

$$f: S^3 \to S^2, (z_1, z_2) \mapsto z_2/z_1.$$

这便是 Hopf 纤维。

另一种创造 Hopf 纤维的方法是利用单位四元数的 S^3 旋转 S^2 。如果我们选择一个点 $p \in S^2$ ，那么对于任何四元数 q ， $R_q(p)$ 也在 S^2 中。因此我们可以定义一个从 S^3 到 S^2 的映射 $g_p(q) = R_q(p)$ 。也就是说，点 $q \in S^3$ 的图像是 S^2 上的点，其中 p 由旋转 R_q 取值。（摘自 arxiv:0908.1205）

一个很好的 Hopf 纤维介绍是：https://doi.org/10.2307/3219300

N. Johnson 的主页，其上有很多相关内容： https://nilesjohnson.net/hopf.html

一个交互式的 Hopf 纤维演示：https://samuelj.li/hopf-fibration/

Il nous montre une correspondance subtile et fine, comme venue du vide.