Exercice 004 *Racine carrée de langage*

Si L est un langage arbitraire, on note $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid uu \in L\}$.

1. A-t-on dans le cas général $\sqrt{L^2} \subseteq L$? Et $L \subseteq \sqrt{L^2}$?
2. A-t-on dans le cas général $(\sqrt{L})^2 \subseteq L$? Et $L \subseteq (\sqrt{L})^2$?

On appelle *système de transition déterministe* un triplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta)$, obtenu en considérant un automate déterministe sans état initial ni état acceptant.
Pour tout couple d'états $p, q \in Q$, on note $L_{p,q}$ le langage des mots qui sont l'étiquette d'un chemin de p à q.

3. Justifier que, pour un système de transition $\mathcal{A}$ et deux états p, q arbitraires, le langage $L_{p,q}$ est toujours régulier.
4. Supposons que K est reconnaissable par un automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \{q_0\}, F, \delta)$, et notons $L = \bigcup_{q_f \in F} \bigcup_{q \in Q} (L_{q_0,q} \cap L_{q,q_f})$. Montrer que $L = \sqrt{K}$.
5. En déduire que si K est régulier, alors $\sqrt{K}$ est régulier.