Exercice 013 *Somme de sous-ensemble*
On présente le problème de couverture d'ensembles, dont l'énoncé est le suivant :
EXACT COVER

- **Entrée** : un ensemble fini d'entiers naturels $X \subseteq \mathbb{N}$, et une famille finie F de parties de X.
- **Sortie** : vrai s'il existe une sous-famille $F' \subseteq F$ formant une partition de X, faux sinon.

1. Donner un exemple d'instance positive et d'instance négative pour ce problème.
2. Justifier que **EXACT COVER** $\in$ **NP**. On précisera les structures de données qu'on peut utiliser dans l'implémentation pour représenter une ensemble X, une partie de X, et une famille de parties de X.

On admet, dans la suite, que le problème **EXACT COVER** est **NP**-dur. On présente maintenant le problème de la somme de sous-ensembles :

SUBSET SUM

- **Entrée** : un entier V ; un ensemble d'entiers $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pour n quelconque.
- **Sortie** : vrai s'il existe un ensemble d'indices $I \subseteq \{1, n\}$ tel que $\sum\limits_{i \in I} v_i = V$; faux sinon.

3. Donner un exemple d'instance positive et d'instance négative pour ce problème.
4. Justifier que **SUBSET SUM** $\in$ **NP**. On précisera les structures de données à utiliser.

Dans la suite, on va chercher à construire la réduction polynomiale de **EXACT COVER** à **SUBSET SUM** afin de montrer que ce dernier est **NP**-dur. Voici comment on va s'y prendre : fixons une instance (X, F) de **EXACT COVER** dans la suite. Pour cette instance :

- Sans pertes de généralité, quitte à renuméroter, on suppose que $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$; on numérote également $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$.
- On pose $b = n + 1$.
- On associe à chaque éléments x_i le poids b^i.
- On associe à chaque partie F_j un poids noté $w(F_j) = \sum\limits_{i \in F_j} b^i$ correspondant à la somme des poids de ses éléments.

5. S'il existe une sous-famille $F' \subseteq F$ telle que F' forme une partition de X, que vaut la somme des poids des éléments de F' (qu'on notera S)? En déduire que $(S, \{w(P) \mid P \in F\})$ est une instance positive de **SUBSET SUM**.
6. Réciproquement, si $(S, \{w(P) \mid P \in F\})$ est une instance positive de **SUBSET SUM**, montrer que F' forme une partition de X.
7. En déduire que **SUBSET SUM** est **NP**-dur.
8. Conclure.