Exercice 019 *Langage des mots non-carrés*

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On considère le langage suivant : $L = \{u \in \Sigma^* \mid \forall w \in \Sigma^*, u \neq ww\}$. Autrement dit, $u \in L$ ssi u n'est pas le carré d'un autre mot. Par exemple, $ab, abb \in L$, mais $aa, abab \notin L$.

1. Que peut-on dire des mots de l'appartenance à L de mots de longueur impaire ?
2. Soit $u = u_1 \dots u_{2n}$ un mot non-vide de longueur paire. Justifier que $u \in L$ si et seulement s'il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $u_i \neq u_{n+i}$.

On considère la grammaire G suivante, de symbole initial S :

$$\begin{array}{ll} S & \to A \mid B \mid AB \mid BA \\ A & \to a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \\ B & \to b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \end{array}$$

3. Donner le langage $L(G, A)$ des mots u tels qu'il existe une dérivation $A \Rightarrow^* u$. Donner de même $L(G, B)$.
4. Montrer que tout mot de longueur impaire est dans $L(G)$.
5. Montrer que tout mot de L de longueur paire est dans $L(G)$.
6. Réciproquement, montrer que tout mot de longueur paire de $L(G)$ est dans L.
7. En déduire que L est non-contextuel.