

ΡΟΜΠΟΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ II  
ΕΡΓΑΣΙΑ II

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΧΟΥΛΙΑΡΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



## Περίληψη

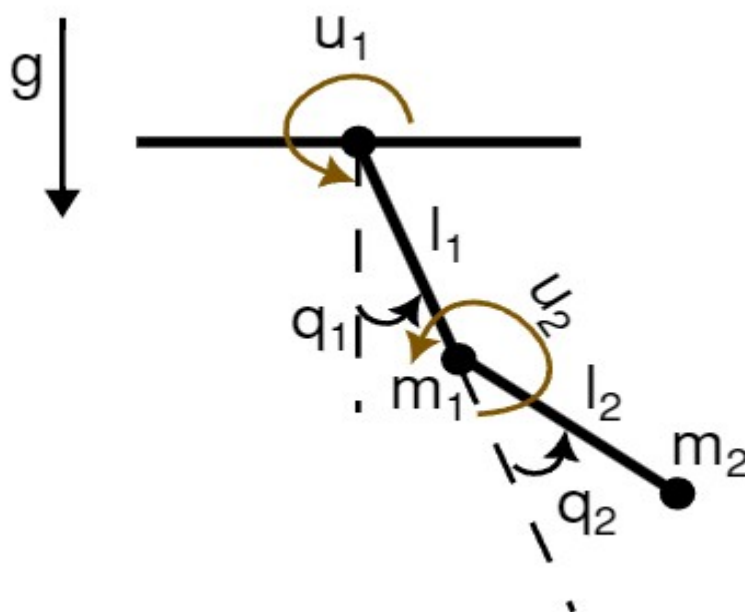
Στην δεύτερη άσκηση παρουσιάζεται η μοντελοποίηση του διπλού εκκρεμές και η προσπάθεια ισορρόπησης του συστήματος γύρω από ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα η εργασία χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά την μοντελοποίηση του συστήματος τόσο όσον αφορά τις δυναμικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα όσο και την γραφική διεπαφή για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται ένα από τους τρόπους ελέγχου γύρω από το ασταθές σημείο ισορροπίας, το οποίο είναι η όρθια θέση του εκκρεμούς. Ο πρώτος τρόπος ελέγχου γίνεται μέσω της μεθόδου Infinite Linear Quadratic Regulator (Infinite LQR). Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται ο δεύτερος τρόπος ελέγχου ο οποίος γίνεται μέσω της μεθόδου Convex Model Predicted Control (Convex MPC). Ο δεύτερος τρόπος διαφέρει ελάχιστα από τον πρώτο τρόπο ωστόσο είναι αρκετά πιο αποτελεσματικός καθώς όπως αναφέρεται στο όνομα του προβλέπει για τις επόμενες κινήσεις του ελεγκτή.

## Πίνακας περιεχομένων

Modeling .....	5
Εξισώσεις συστήματος: .....	5
Στόχος Υλοποίησης: .....	6
Linearization and LQR .....	9
Σταθερό Σημείο - Fixed Point: .....	9
Γραμμικοποίηση σε σημείο: .....	9
Γραμμικοποίηση συστήματος στο σημείο $[q_1, q_2].T = [\pi, 0]$ : .....	10
Linear Quadratic Regulator (LQR): .....	10
Αποτελέσματα: .....	11
Convex Model Predicted Control (MPC) .....	14
MPC: .....	14
Αποτελέσματα: .....	15

## Modeling

Το σύστημα που υλοποιείται φαίνεται στην Εικόνα 1 και είναι το ρομποτικό σύστημα του διπλού εκκρεμές. Πιο συγκεκριμένα το σύστημα έχει ως εισόδους ελέγχου της ροπές σε κάθε άρθρωση οι οποίες όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι οι  $u_1$  και  $u_2$  για τις αρθρώσεις  $q_1$  και  $q_2$  αντίστοιχα. Επιπρόσθετα πάνω σε κάθε άρθρωση βρίσκεται προσαρτημένη και μία μάζα  $m_1 = 0.5$  και  $m_2 = 0.5$ . Ακόμη για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι το ρομποτικό σύστημα βρίσκεται στο κενό χώρο, δρώντας ως εξωτερική δύναμη μόνο το βάρος, οπότε η αντίστασή από τον αέρα την θεωρείται αμελητέα. Τέλος η αντίστροφη ορολογική φορά του ρολογιού θεωρείται ως θετική φορά για της γωνίες  $q$  και τις εισόδους των ροπών  $u$ .



Εικόνα 1: Ρομποτικό Σύστημα Διπλό Εκκρεμές.

### Εξισώσεις συστήματος:

Από την ευθεία δυναμική εξίσωση ενός ρομποτικού σώματος έχουμε ότι:

$$\ddot{q} = M^{-1}(u - C(q, \dot{q}) + G(q))$$

Όπου:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2 m_1 + l_2^2 m_2 + l_1^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 \cos(q_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(q_2) \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 \cdot \dot{q}_2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(q_2) & -\dot{q}_2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(q_2) \\ \dot{q}_1 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -g \cdot m_1 \cdot l_1 \cdot \sin(q_1) - g \cdot m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2)) \\ -g \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Ακόμη θεωρούμε ως διάνυσμα κατάστασης το:

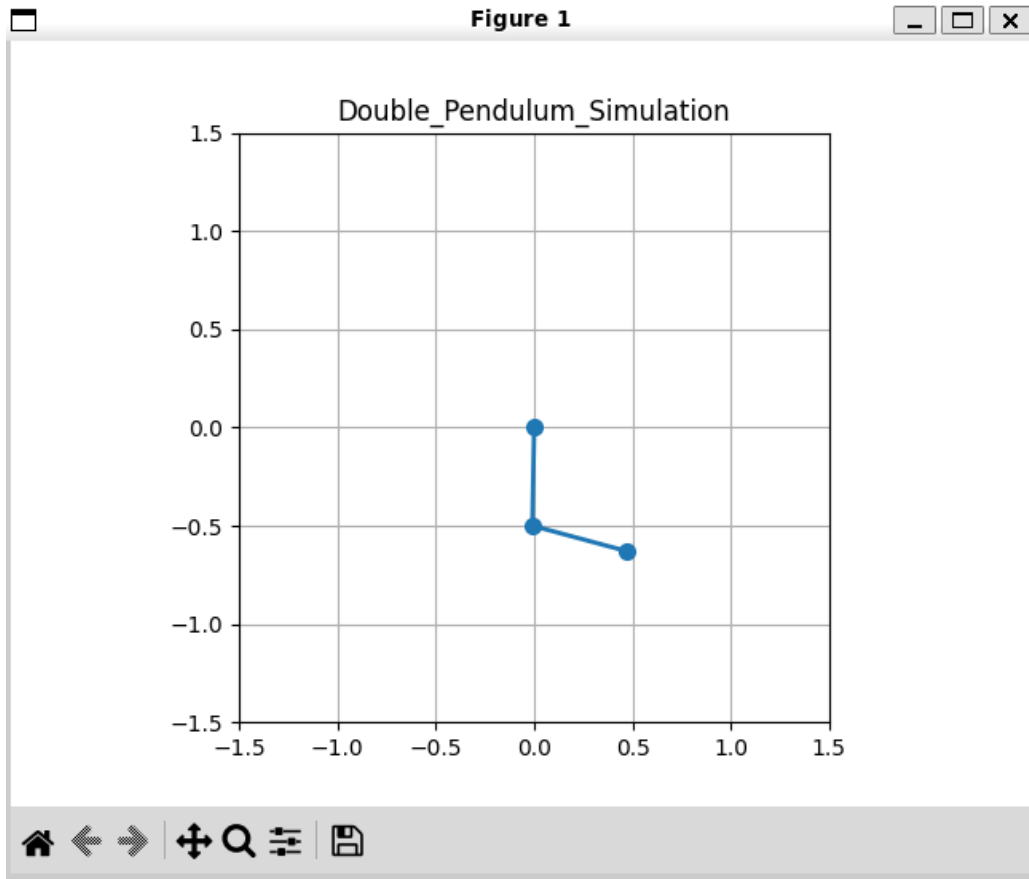
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

---

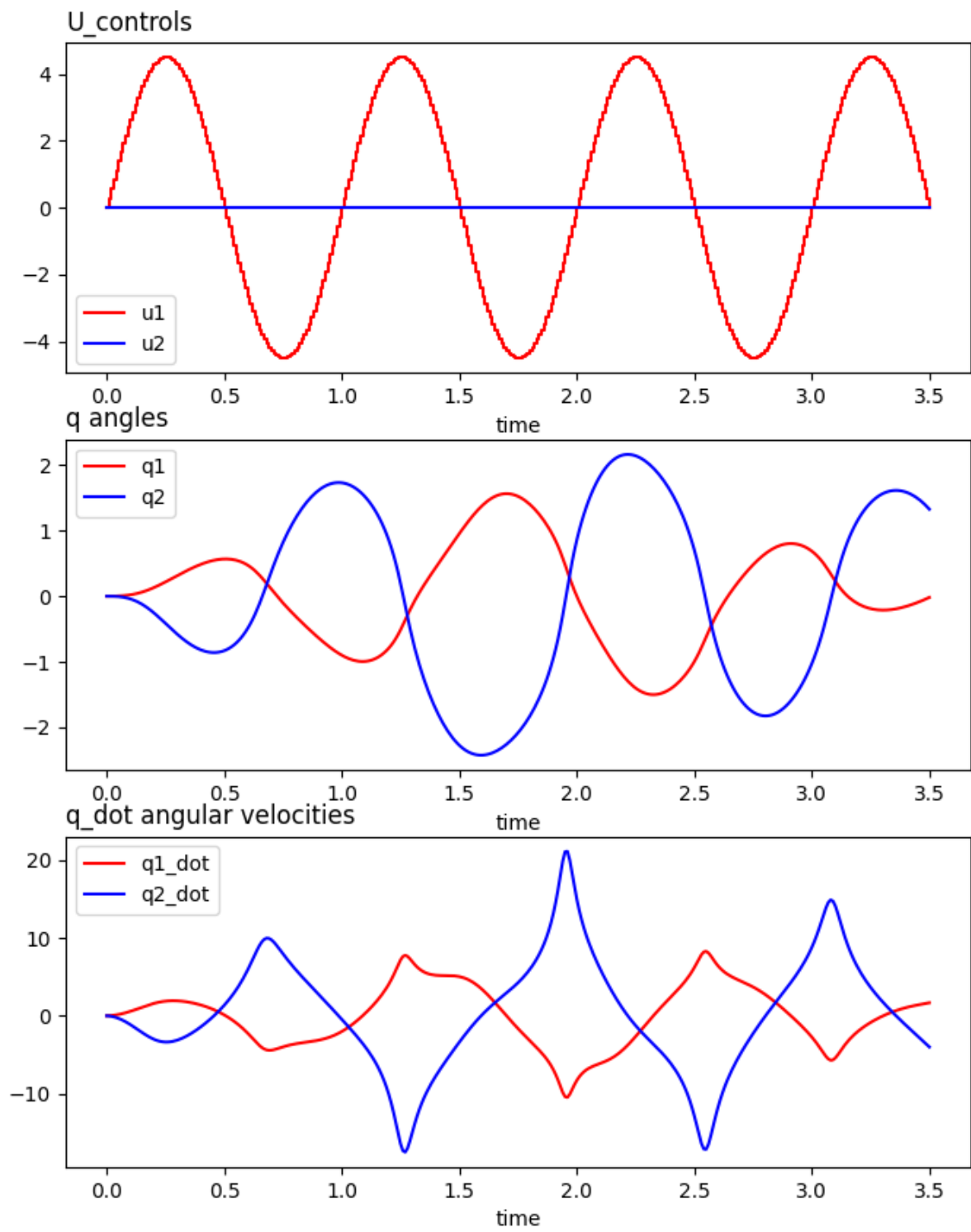
**Στόχος Υλοποίησης:** Στο πρώτο μέρος υλοποιείται η δυναμική του συστήματος και στην συνέχεια γίνεται η διακριτοποίηση του χρησιμοποιώντας την μέθοδο Runge and Kutta 4<sup>th</sup> order. Έπειτα σχεδιάζονται τα γραφικά μέσω της βιβλιοθήκης της matplotlib.pyplot και τέλος ελέγχεται η εύρυθμή λειτουργία της μοντελοποίησης του συστήματος.

Για τον έλεγχο του συστήματος χρησιμοποιείται ένα ημιτονοειδές σήμα με πλάτος  $A = 4.5$  m, συχνότητας  $f = 1$  Hz και αρχική φάση  $\phi_i = 0$  rad. Η διακριτοποίηση του σήματος έχει γίνει με βήμα 0.01 δευτερόλεπτα με Zero Order Hold. Το ημιτονοειδές σήμα εφαρμόζεται στην U1 είσοδο όπως φαίνεται και στην Εικόνα 1, ενώ στην U2 εφαρμόζεται σταθερό σήμα μηδενικού πλάτους.

Στις παρακάτω εικόνες απεικονίζονται οι είσοδοι  $U = [u_1, u_2].T$ , οι γωνίες  $q = [q_1, q_2].T$  της κατάστασης καθώς και οι ταχύτητες  $q\_dot = [q_1\_dot, q_2\_dot].T$  συνάρτηση του χρόνου.



Εικόνα 2: Προσομοίωση του διπλού εκκρεμές .Τελική θέση προσομοίωση του ημιτονοειδούς σήματος (time = 3.5 sec)



Εικόνα 3 Γραφικές παραστάσεις είσοδών  $U$ , Γωνιών  $q$  και Ταχυτήτων  $q\_dot$ .



Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενος αλλά και όπως επιβεβαιώνει η πρώτη γραφική η είσοδος  $u_1$  είναι ημιτονοειδές με τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά και η  $u_2$  είναι σταθερή με πλάτος μηδέν. Η προσομοίωση φαίνεται να δουλεύει σωστά καθώς με ημιτονοειδή είσοδο έχουμε και ημιτονοειδή έξοδο κάτι που προφανώς περιμέναμε. Ακόμη από την Εικόνα 3 παρατηρούμε ότι στις ακραίες θέσεις η ταχύτητα των εκάστοτε γωνιών είναι πολύ κοντά στο μηδέν γεγονός που συνάδει με την ταλάντωσή που παρατηρούμε στην προσομοίωση του συστήματος. Τέλος σύμφωνα με την Εικόνα 2, που απεικονίζεται η τελική θέση της προσομοίωσης του συστήματος και σε συνδυασμό με την Εικόνα 3 παρατηρούμε ότι η γωνία  $q_1$  είναι σχεδόν μηδέν και η γωνία  $q_2 = (\pi/2) \approx 1.5$  καταστάσεις που επιβεβαιώνονται από την Εικόνα 3. Επομένως ανάγεται το συμπέρασμα ότι η προσομοίωση δουλεύει αρκετά καλά.

## Linearization and LQR

### Σταθερό Σημείο - Fixed Point:

Ένα σταθερό σημείο σε ένα δυναμικό σύστημα είναι μία κατάσταση όπου, αν το σύστημα ξεκινήσει από αυτήν την κατάσταση, θα παραμείνει σε αυτήν επ' αόριστον, εφόσον δεν υπάρξει καμία εξωτερική παρέμβαση. Δηλαδή είναι μια κατάσταση ισορροπίας.

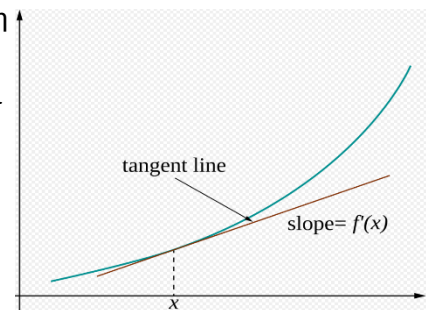
Μαθηματικά περιγράφεται με την σχέση:

$$\bar{x} = f_{discrete}(\bar{x}, \bar{u})$$

Δηλαδή για μία συγκεκριμένη κατάσταση και για μία συγκεκριμένη τιμή εισόδου η δυναμική του συστήματος ισούται με την ίδια την κατάσταση. Όπου η  $f_{discrete}$  είναι η διακριτοποιημένη δυναμική συνάρτηση που περιγράφει το σύστημα.

### Γραμμικοποίηση σε σημείο:

Η γραμμικοποίηση γύρω από ένα σημείο είναι η προσέγγιση μίας συνάρτησης, μη γραμμικής, με μία συνάρτηση που είναι γραμμική κοντά στην περιοχή του σημείου που γίνεται η γραμμικοποίηση. Ένα από τους τρόπους γραμμικοποίησης μίας συνάρτησης είναι το ανάπτυγμα Taylor, επιλέγοντας μέχρι και τους όρους πρώτης τάξης.



Εικόνα 4: Γραμμικοποίηση συνάρτησης μίας μεταβλητής. Πηγή: wikipedia

Το ανάπτυγμα Taylor για πολυμεταβλητές συναρτήσεις μαθηματικά δίνεται από την σχέση:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

Γραμμικοποίηση συστήματος στο σημείο  $[q1,q2].T = [\pi,0]$ :

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για πολύμεταβλητά συστήματα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_{\text{discrete}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \underbrace{\frac{\partial f_{\text{discrete}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}}_A (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}) + \underbrace{\frac{\partial f_{\text{discrete}}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}}_B (\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}})$$

Ακόμη θέτοντας,  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}$  και  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}$  προκύπτει ότι:

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} = A \Delta \mathbf{x}_k + B \Delta \mathbf{u}_k$$

η οποία περιγράφει την δυναμική σχέση του συστήματος ως γραμμικός συνδυασμός της κατάστασης και της εισόδου κοντά στο  $\Delta \mathbf{x} = 0$  ή αλλιώς κοντά στο  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} = [\pi, 0, 0, 0]^T$ .  $T, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = [0, 0]^T$ .

Linear Quadratic Regulator (LQR):

Το παρακάτω πρόβλημα ονομάζεται LQR και η λύση του μπορεί να προσεγγιστεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους: α) LQR via Shooting, μαντεύοντας τυχαία τις βέλτιστες ελέγχους για κάθε κατάσταση του προβλήματος, β) LQR as QP, εκφράζοντας το σύστημα ως ένα κυρτό τετραγωνικό πρόβλημα και λύνοντας το βρίσκουμε τις βέλτιστες εισόδους, γ) LQR via Riccati recursion, ο οποίος είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος που προκύπτει από το τετραγωνικό πρόβλημα του LQR

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}_{1:K}, \mathbf{u}_{1:K-1}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\mathbf{x}_{1:K}, \mathbf{u}_{1:K-1}) &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_K^T \mathbf{Q}_K \mathbf{x}_K \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{Q}_k &\geq 0 \\ \mathbf{R}_k &> 0 \end{aligned}$$

Τα μητρώα  $\mathbf{Q}_k$  και  $\mathbf{R}_k$  είναι θετικά ορισμένα μητρώα και καθορίζουν την βαρύτητα κάθε ενέργειας, δηλαδή της κατάστασης και της εισόδου αντίστοιχα. Η συνάρτηση κόστους  $J$  είναι η συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ώστε να βρούμε την βέλτιστη λύση.

Παρακάτω παρατίθεται ο επαναληπτικός αλγόριθμός Riccati, ο οποίος υλοποιείτε στην στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

$$\begin{aligned} P_K &= Q_K \\ K_k &= (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k \\ P_k &= Q_k + A_k^T P_{k+1} (A_k - B_k K_k) \end{aligned}$$

Τα  $K_k$  και  $P_k$  μητρώα είναι το κέρδος των εισόδων  $u$  και των ισοτικών πολλαπλασιαστών σε συνάρτηση της εκάστοτε κατάστασης αντίστοιχα.

Εάν το  $K \rightarrow \infty$  τότε το πρόβλημα μετονομάζεται σε Infinite LQR, και τα μητρώα  $K_k$  και  $P_k$  λαμβάνουν σταθερή τιμή. Στην υλοποίηση της άσκησης χρησιμοποιούνται τα infinite gains για  $K = 50.000$

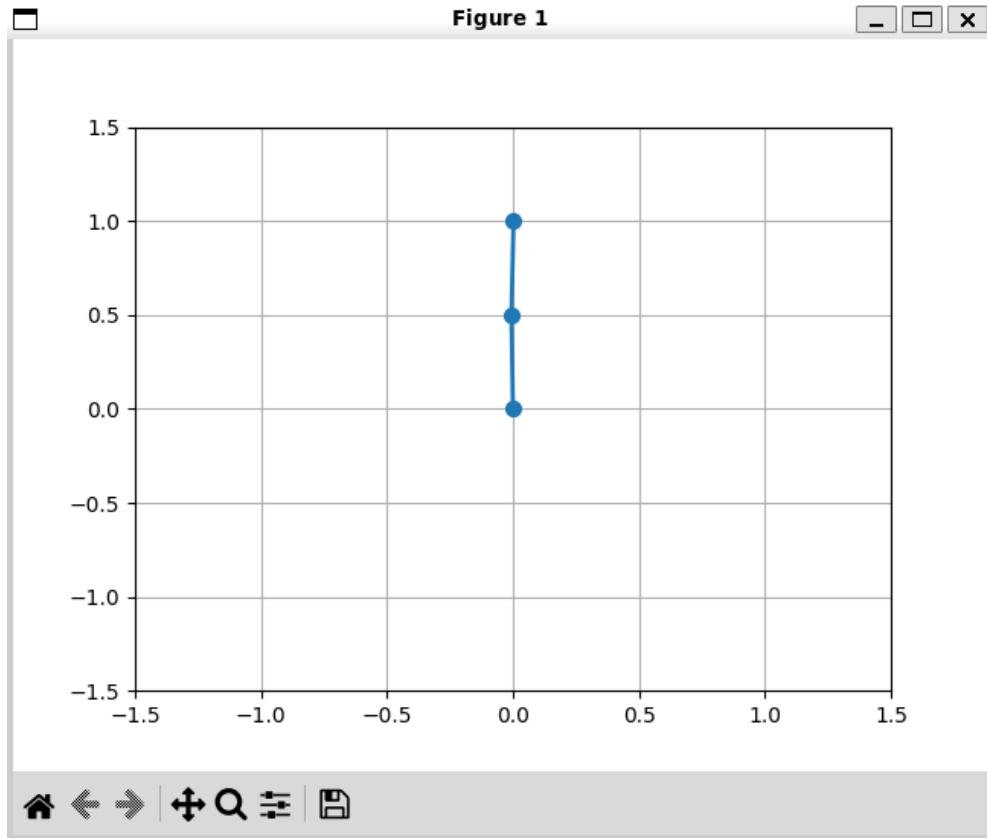
Ο ελεγκτής του infinite LQR έχει την μορφή:

$$\Delta u = -K_{inf} * \Delta X$$

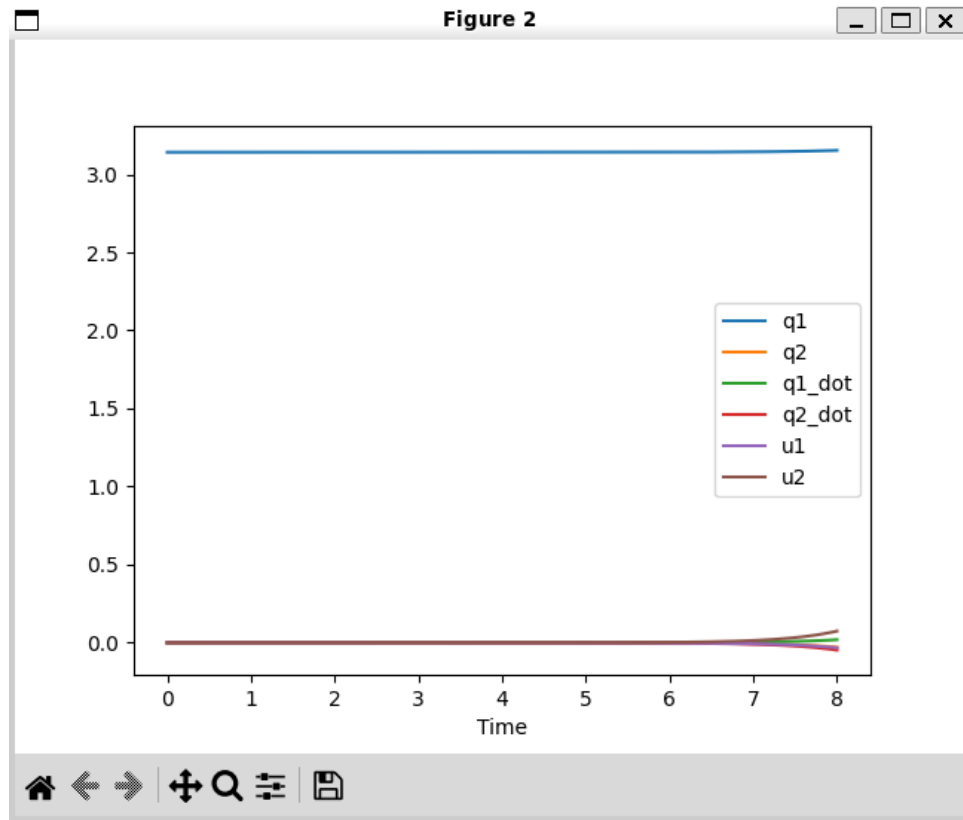
Καθώς η για την γραμμικοποίηση του συστήματος έχουν επιλεγθεί οι μεταβλητές  $\Delta u$  και  $\Delta x$ .

#### Αποτελέσματα:

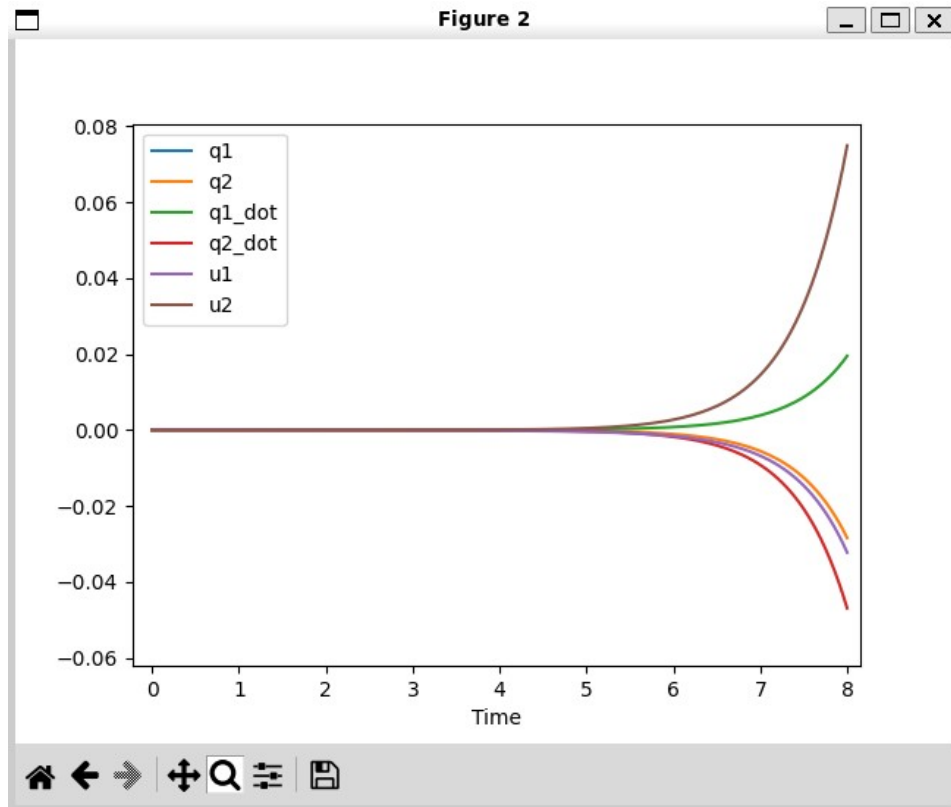
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την υλοποίηση του infinite LQR για την κατάσταση  $x = [\pi, 0, 0, 0]^T$ . Η προσομοίωση με τον open loop ελεγκτή είναι αποτελεσματική έως και τα πρώτα 8 δευτερόλεπτα. Μετά από τα 8 δευτερόλεπτα ο ελεγκτής προσπαθεί να σταθεροποιήσει το σύστημα γύρω από το γραμμικοποιημένο σημείο αλλά λόγω της φύσης του συστήματος που είναι μη γραμμικό δεν τα καταφέρνει επιτυχώς.



Εικόνα 5 : Infinite LQR εφαρμογή γύρω από  $[\pi, 0.0]$ , συνολικός χρόνος προσομοίωσης 8 δευτερόλεπτα



Εικόνα 6α : Γραφική αναπαράσταση της κατάστασης και της εισόδου του συστήματος. Infinite LQR



Εικόνα 6β: Μεγέθυνση των μη ευδιάκριτων ποσοτήτων

Στην εικόνα 6β παρατηρείται η προσπάθεια του Infinite LQR να σταθεροποιήσει το σύστημα. Αναλυτικότερα, φαίνεται ότι, λόγω σφαλμάτων είτε αριθμητικών, είτε λόγω της επιλογής της προσομοίωσης του συστήματος, είτε λόγω του open loop control, αυξάνονται τα μέτρα των εισόδων ελέγχου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μεταβληθούν οι θέσεις  $q_1$  [Εικόνα 6α] και  $q_2$  [Εικόνα 6β] και κατά συνέπεια οι ταχύτητες τους. Ωστόσο, είναι ευδιάκριτο ότι, οι εισοδοί  $u$  που προκύπτουν από τον ελεγκτή προσπαθούν να σταθεροποιήσουν το σύστημα, δηλαδή παρατηρείται ότι η γωνία  $q_2$  ελαττώνεται ενώ η γωνία  $q_1$  αυξάνεται και η είσοδος  $u_1$  ελαττώνεται με σκοπό να μειώσει την αύξηση τους  $q_1$  και η είσοδος  $u_2$  αυξάνεται για να αυξήσει την γωνία  $q_2$  που ελαττώνεται.

## Convex Model Predicted Control (MPC)

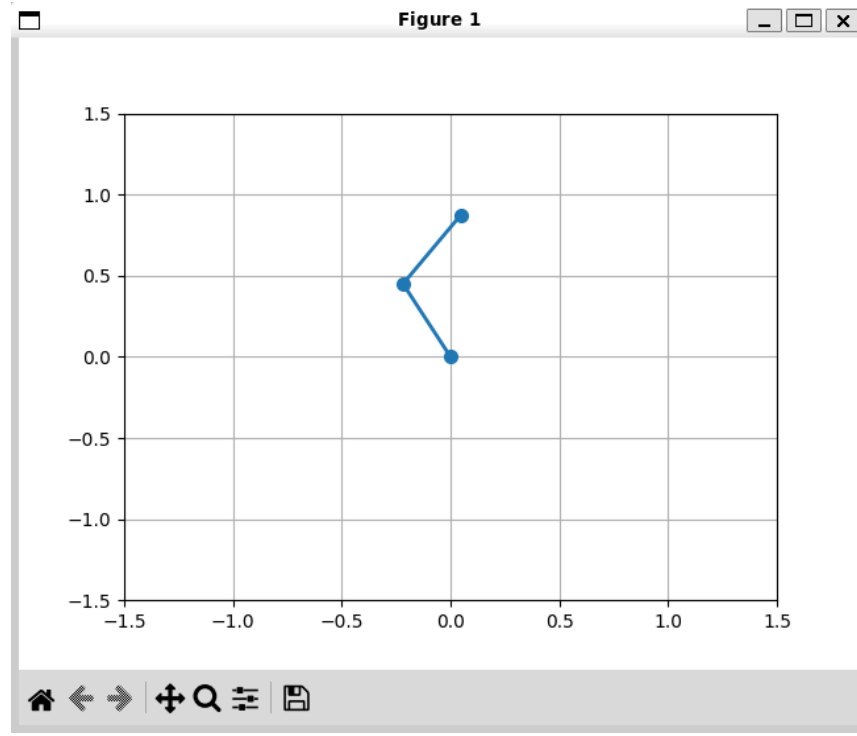
### MPC:

Σε αντίθεση με τον Infinite LQR ο MPC λύνει το πρόβλημα του LQR κάθε χρονική στιγμή για ένα συγκεκριμένο αριθμό βημάτων στον μέλλον, ο αριθμός αυτών των βημάτων λέγεται ορίζοντας. Το πρόβλημα του MPC παρουσιάζεται παρακάτω:

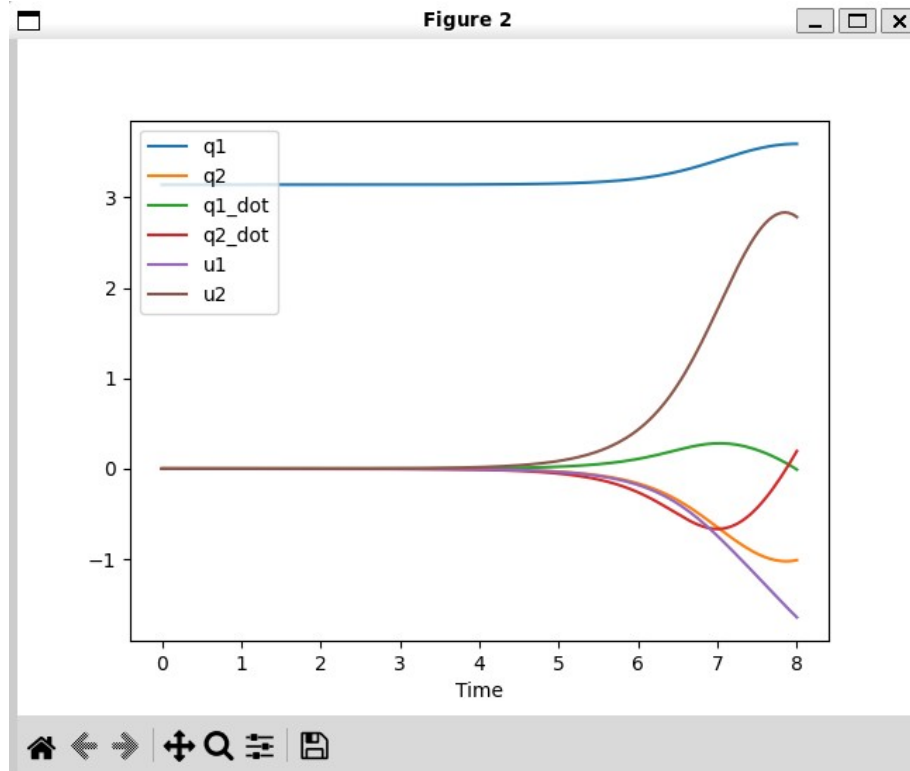
$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_{1:H}, \mathbf{u}_{1:H-1}} \quad & \sum_{k=1}^{H-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_H^T \mathbf{P}_H \mathbf{x}_H \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ & \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος ονομάζεται συνάρτηση αξίας και αντιπροσωπεύει το ελάχιστο κόστος που χρειάζεται ο MPC να ξεκινήσει από μία αρχική θέση σε μία τελική θέση για ορίζοντα  $H$ .

Αποτελέσματα:



Εικόνα 7: MPC Horizon = 20 εφαρμογή γύρω από  $[\pi, 0.0]$ , συνολικός χρόνος προσομοίωσης 8 δευτερόλεπτα



Εικόνα 8: Γραφική αναπαράσταση της κατάστασης και της εισόδου του συστήματος. MPC, Horizon = 20

Παρατηρούμε ότι, όπως και στον infinite LQR έτσι και στον MPC ο ελεγκτής προσπαθεί να επαναφέρει το σύστημα στην γραμμικοποιημένη θέση. Ωστόσο παρατηρείται ότι, ο MPC παρόλο που είναι closed loop controller δεν καταφέρνει να κρατήσει το σύστημα πιο πολύ από τον Infinite LQR, γεγονός που οφείλεται λογικά στο ότι ο LQR έχει μικρότερες μεταβολές καθώς δεν έχει feedback έτσι ώστε να τον επηρεάσει πιο πολύ τις εισόδους, καθώς στην θέση που το σύστημα προσπαθεί να ισορροπήσει σε μία μικρή μεταβολή στην είσοδο παρατηρείται μεγάλη μεταβολή στην κατάσταση και ξεφεύγει αρκετά μακριά από την γραμμικοποιημένη περιοχή.