Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№2**
«Численное решение нелинейных уравнений и систем»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **11**

Преподаватель:
Наумова

Выполнил:
Силаев Захар Алексеевич
Группа: P3210

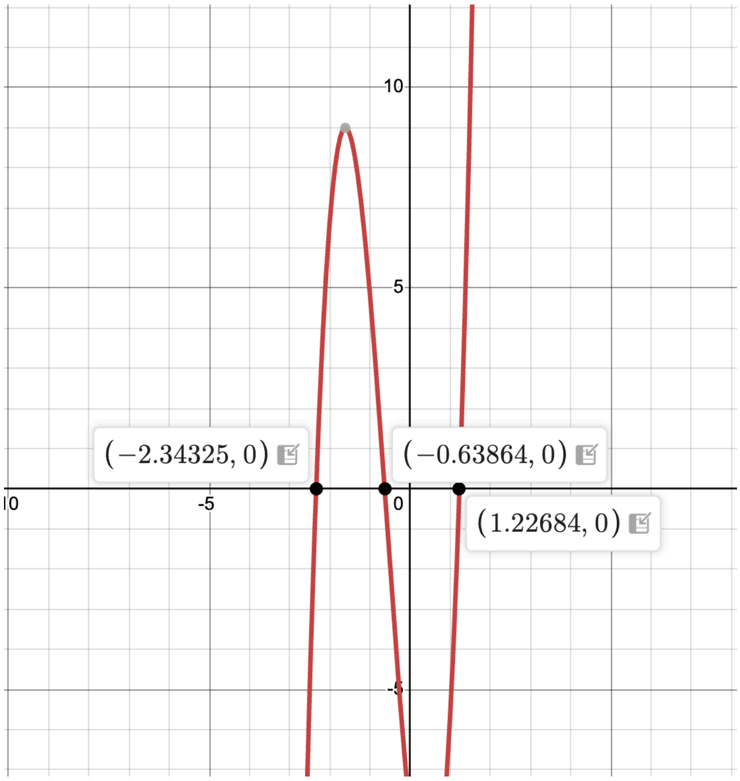
Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

1. $4{,}45x^3 + 7{,}81x^2 - 9{,}62x - 8{,}17$



2.

Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.

Получим приближенные значения корней:
x ≈ -2.3, x ≈ -0.6, x ≈ 1.2

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: (-∞, -2.3), (-2.3, -0.6), (-0.6, 1.2) и (1.2, +∞). На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвол ьной точке каждого интервала. Например, для интервала (-∞, -2.3) можно выбрать x = -3, для интервала (-2.3, -0.6) x = -1, для интервала (-0.6, 1.2) x = 1, и для интервала (1.2, +∞) x = 2.

Таким образом, получим следующие значения функции:

для x = -3: f(-3) = -29.17

для x = -1: f(-1) = 4.81

для x = 1: f(1) = -5.53

для x = 2: f(2) = 39.43

Знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

(-∞, -2.3)	(-2,3, -0,6)	(-0,6, 1.2)	(1.2, +∞)
-	+	-	+

Таким образом, мы получаем два интервала изоляции корней уравнения:

(-3.2, -1.4), (-1.4, -0.3) и (0.9, 2.4).

3.

$x_1 \approx -2{,}34$
$x_2 \approx -0{,}64$
$x_3 \approx 1{,}23$

4.

Крайний правый корень – **Метод половинного деления**

№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a – b|
1	0,900	2,400	1,650	-7,258	75,244	17,210	1,500
2	0,900	1,650	1,275	-7,258	17,210	1,484	0,750
3	0,900	1,275	1,088	-7,258	1,484	-3,672	0,375
4	1,088	1,275	1,181	-3,672	1,484	-1,301	0,188
5	1,181	1,275	1,228	-1,301	1,484	0,038	0,094
6	1,181	1,228	1,205	-1,301	0,038	-0,645	0,047
7	1,205	1,228	1,216	-0,645	0,038	-0,306	0,023
8	1,216	1,228	1,222	-0,306	0,038	-0,135	0,012
9	1,222	1,228	**1,225**	-0,135	0,038	-0,049	0,006

Крайний левый корень – **Метод секущих**

№	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$F(x_{k+1})$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
1	-3,200	-1,400	-1,693	8,909	0,293
2	-1,400	-1,693	3,380	220,445	5,073
3	-1,693	3,380	-1,906	7,722	5,287
4	3,380	-1,906	-2,098	5,291	0,192
5	-1,906	-2,098	-2,516	-5,399	0,418
6	-2,098	-2,516	-2,305	1,002	0,211
7	-2,516	-2,305	-2,338	0,141	0,033
8	-2,305	-2,338	**-2,343**	-0,005	0,005

Центральный корень – **Метод простой итерации**

Проверка **условия сходимости** метода на выбранном интервале:
f(x)= $4{,}45x^3 + 7{,}81x^2 - 9{,}62x - 8{,}17$=0

f'(x)= $13{,}35x^2 + 15{,}62\text{x} - 9{,}62$

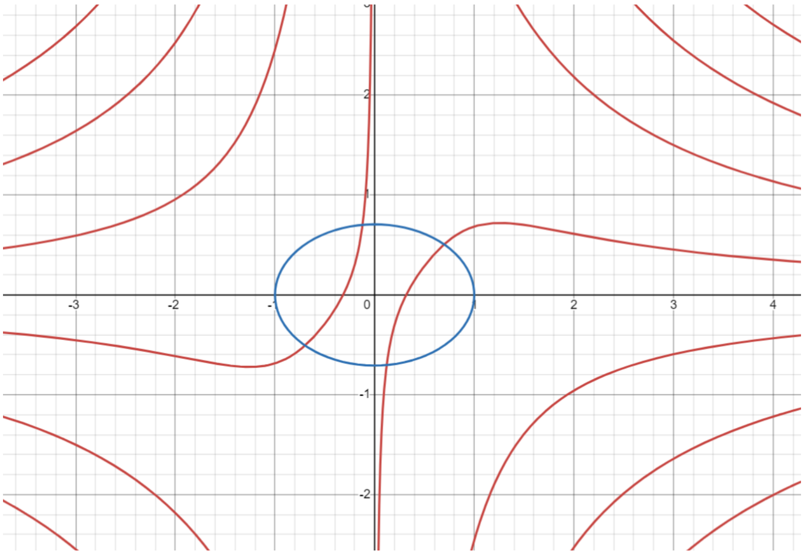
$f'(a) = -5{,}322 < 0, f'(b) = -12{,}865 < 0$
max ($|f'(a)|, |f'(b)|) = 12{,}865 \rightarrow \lambda = \frac{1}{\max(|f'(x)|)} = \frac{1}{12{,}865}$
$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{4{,}45x^3 + 7{,}81x^2 - 9{,}62x - 8{,}17}{12{,}865}$$
$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{13{,}35x^2 + 15{,}62\text{x} - 9{,}62}{12{,}865}$$
На отрезке начального приближения [-1.4, -0.9] функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема.

$|\varphi'(a)| = 0{,}586$
$|\varphi'(b)| = 0$
$|\varphi'(x)| \leq q$, где $q = 0{,}586$
$0 \leq q < 1 \rightarrow$ **итерационная последовательность сходится,** скорость сходимости низкая,
0,5 $\leq q < 1 \rightarrow$ критерий окончания итерационного процесса $|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$,
$$\frac{1-q}{q} = 0{,}70648$$
x_0 = -0,9.

№	x_k	x_{k+1}	f(x_{k+1})	| x_{k+1}- x_k |
1	-0,900	-0,622	3,570	0,278
2	-0,622	-0,640	-0,229	0,018
3	-0,640	**-0,638**	0,023	0,002

2. Решение системы нелинейных уравнений

1. $\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, Метод Ньютона



2.

$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x,y)} = 0 \\ \mathrm{g(x,y)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg(xy+0.1) - x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и $tg(xy+0.1) - x^2 = 0$, следовательно, система имеет не более четырех различных решений.

Построим матрицу Якоби:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, sec(xy+0.1) - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\, sec^2(xy+0.1)$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 4y$

Тогда будем решать систему линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} y\, sec(xy+0.1) - 2x & x\, sec^2(xy+0.1) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy+0.1) \\ 1 - x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$ или

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2\Delta x + x\, sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Корень 1: Шаг 1: Выбираем $x_0 = -0.12;\ y_0 = 0.7$

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2x\Delta x + x\, sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} \Delta x + \ 0.077\,\Delta y \ = \ 0.0154 \\ \ -0.2\Delta x + 2.8\Delta y = 0.01 \end{cases} \rightarrow \Delta x = -0.0014; \ \Delta y = 0.0019$$

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = -0.12 - 0.0014 = -0.1214$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.7 + 0.0019 = 0.7019$

$|x_1 - x_0| \leq$ ε, $|y_1 - y_0| \leq$ ε

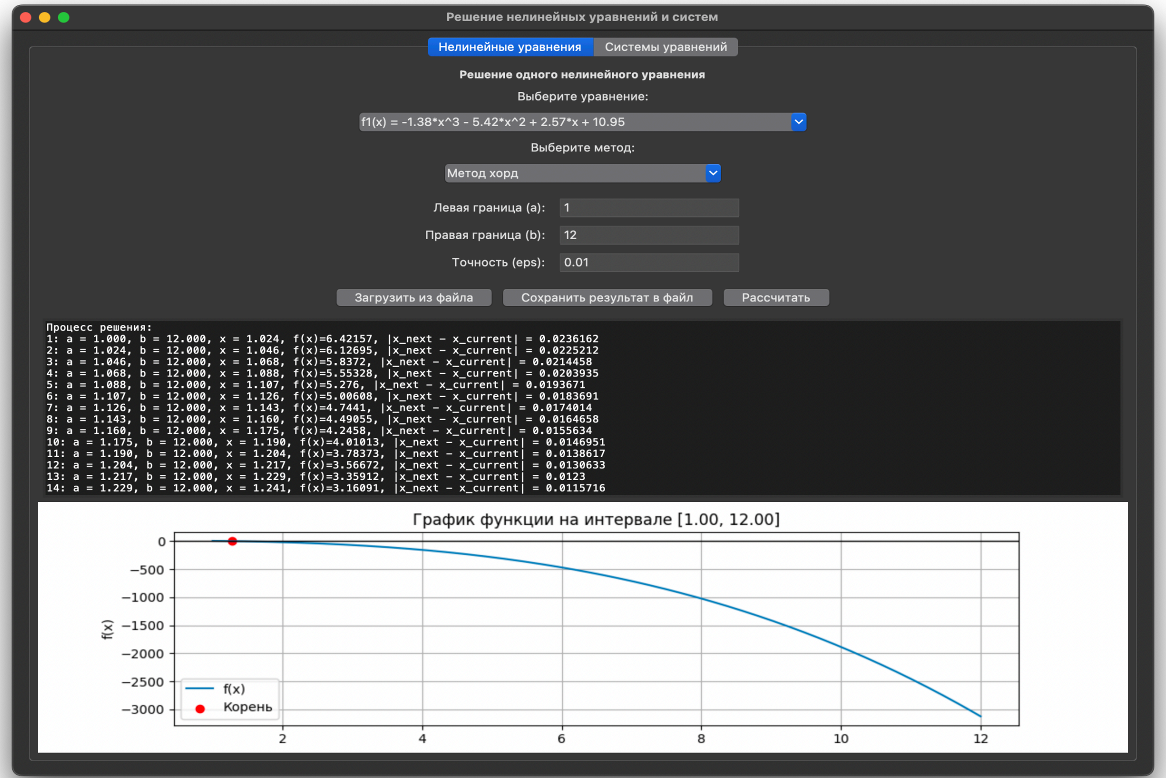
$|-0.1214 + 0.12| \leq$ ε, $|0.7019 - 0.7| \leq$ ε → ответ найден, **корень 1**: $(-0.1214, 0.7019)$

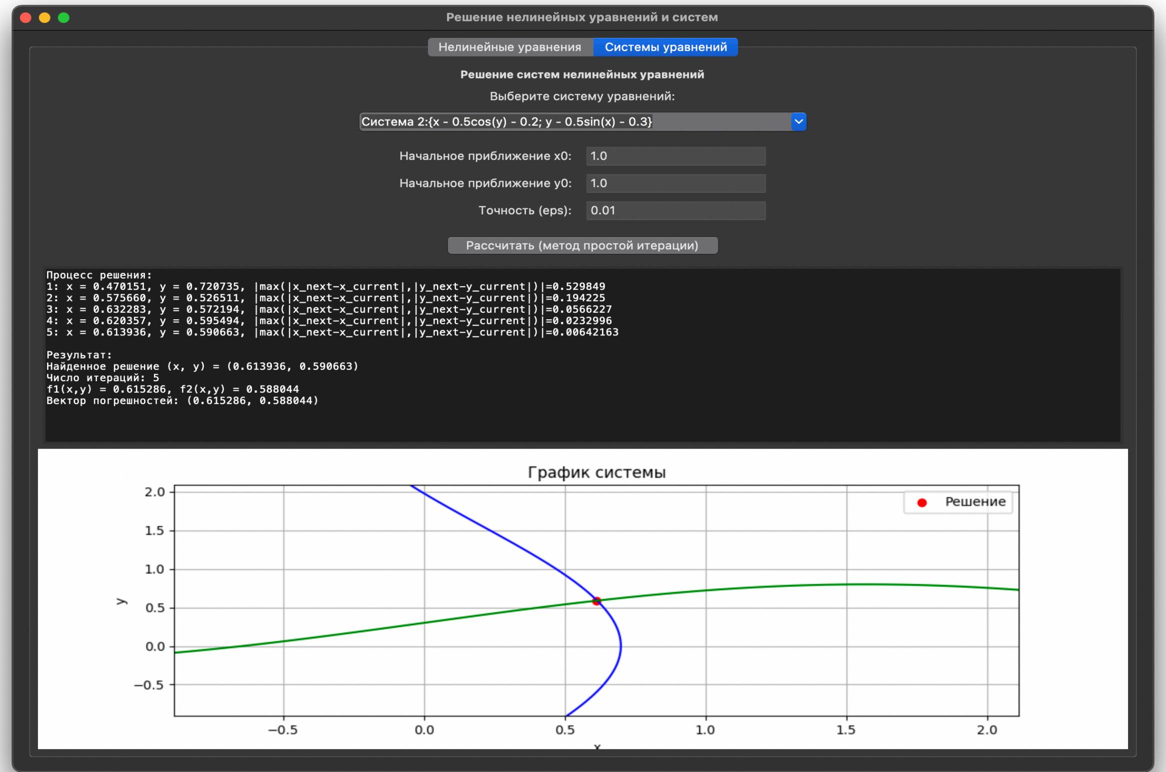
Аналогично находим **другой корень**: $(0.698, 0.506)$

Из графического решения, корни симметричны, следовательно, **другие 2 корня** $(-0.698, -0.506), (0.1214, -0.7019)$

<u>2. Программная реализация задачи</u>

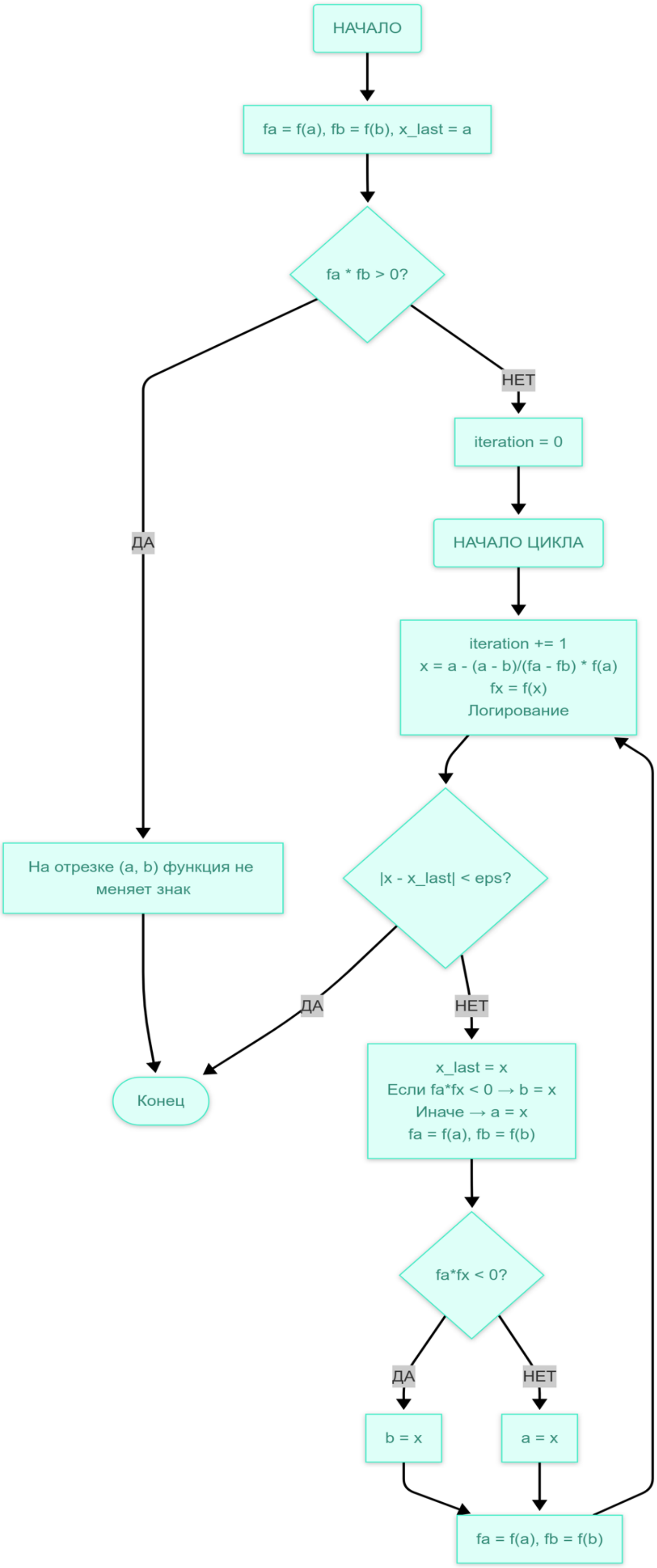
https://github.com/Chousik/lab_CM/blob/main/lab2_new.py





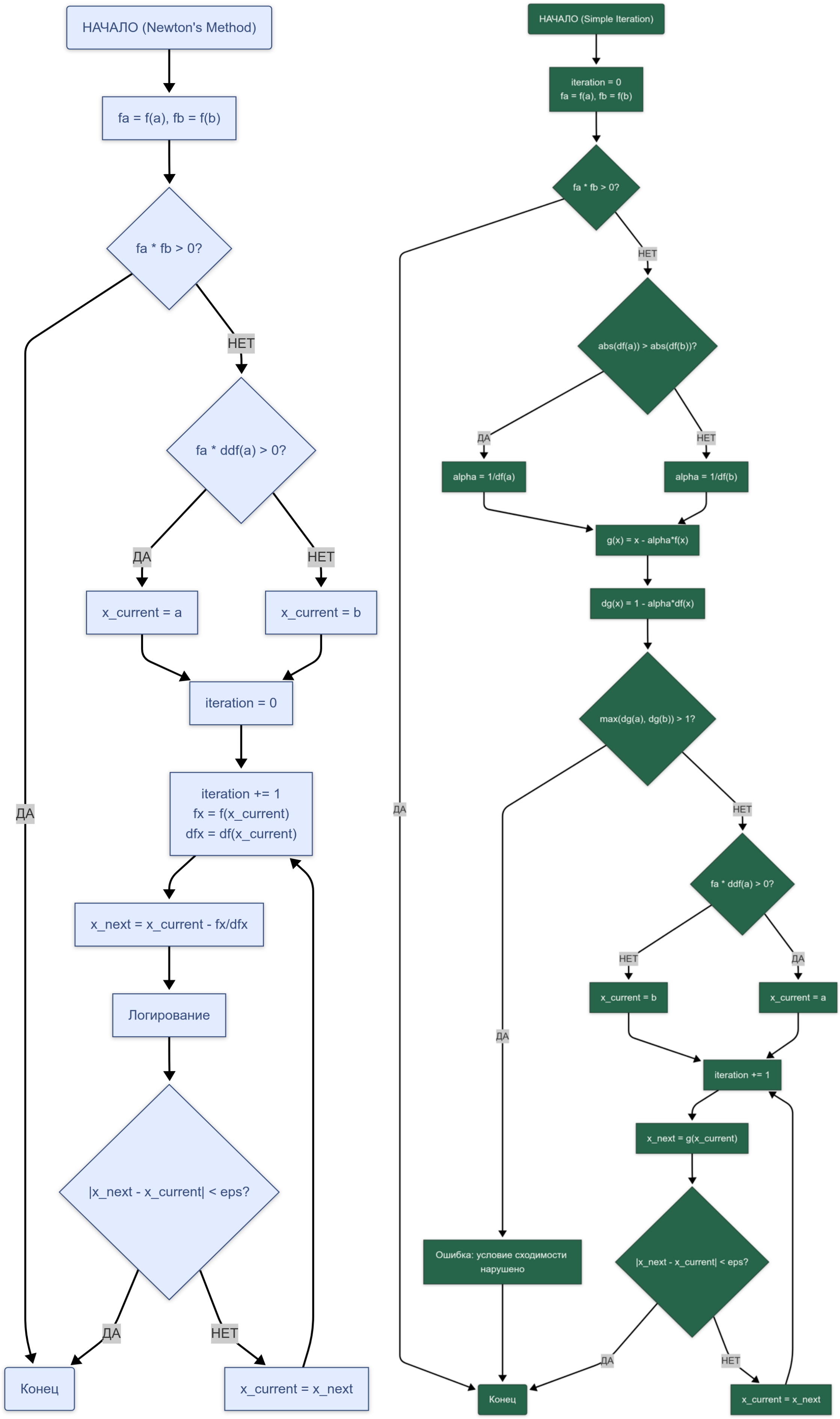
2. Блок Схемы

Метод Хорд

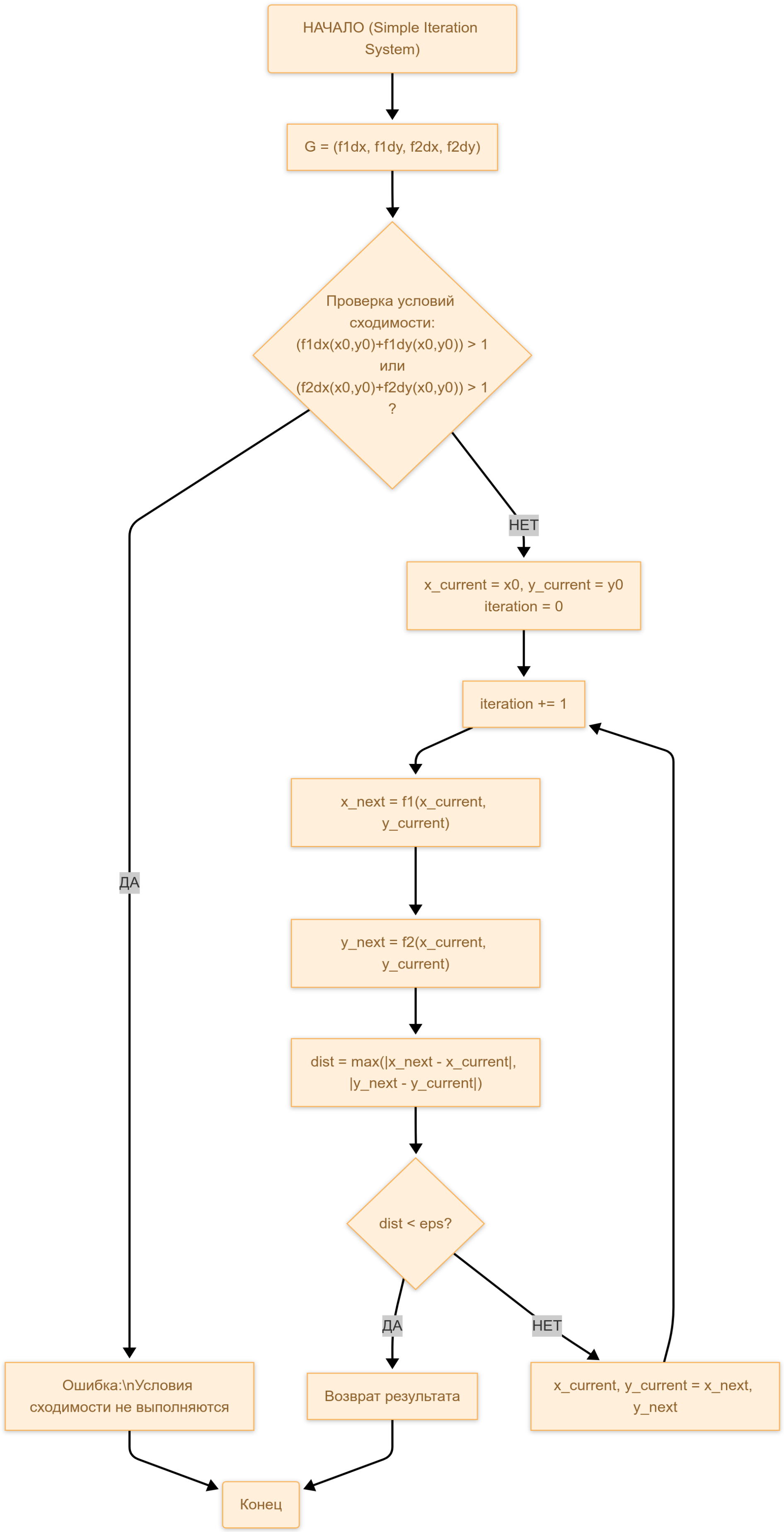


-

Метод Ньютона и Метод Простой Иттерации



Метод Простой Итерации для системы



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.