Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
«Численное интегрирование»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **11**

Студент:
Силаев Захар Алексеевич

Преподаватель:
Наумова Надежда Александровна

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)\, dx$$

$$\mathrm{F(x)} = \frac{x^4}{2} - 3x^3 - \frac{7x^2}{2} + 11\mathrm{x};\ F(3) = -39;\ F(2) = 5$$

$$I_{\text{точн}} = F(x) = F(3) - F(1) = -39 - 5 = \mathbf{-44}$$

2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{(3)-(1)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes} = \big((3)-(1)\big) \times \left(\frac{41}{840} f(1) + \frac{216}{840} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{27}{840} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{272}{840} f(2) + \frac{27}{840} f\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{216}{840} f\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{41}{840} f(3)\right) =$$

$$\mathbf{-44}$$

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h \cdot \left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f\left(a+\frac{5h}{2}\right) + f\left(a+\frac{7h}{2}\right) + f\left(a+\frac{9h}{2}\right) + f\left(a+\frac{11h}{2}\right) + f\left(a+\frac{13h}{2}\right) + f\left(a+\frac{15h}{2}\right) + f\left(a+\frac{17h}{2}\right) + f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{-44.02}$$

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(3)+f(1)}{2} + f(1+0.2) + f(1+0.4) + f(1+0.6) + f(1+0.8) + f(1+1) + f(1+1.2) + f(1+1.4) + f(1+1.6) + f(1+1.8)\right) =$$

$$= \mathbf{-43,96}$$

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2\sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n\right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3}\Big(f(1) + 4 * \big(f(1+0.2) + f(1+0.6) + f(1+1) + f(1+1.4) + f(1+1.8)\big) + 2 * \big(f(1+0.4) + f(1+0.8) + f(1+1.2) + f(1+1.6)\big) + f(4)\Big) = \mathbf{-44}$$

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале вычислено как -44.

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} = -44$ **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-44 - (-44)| = 0$
2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -44.02$.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}| = |-44 - (-44.02)| = 0.02$
3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -43.96$.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}| = |-44 - (-43.96)| = 0.04$
4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -44$, **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-44 - (-44)| = 0$

5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

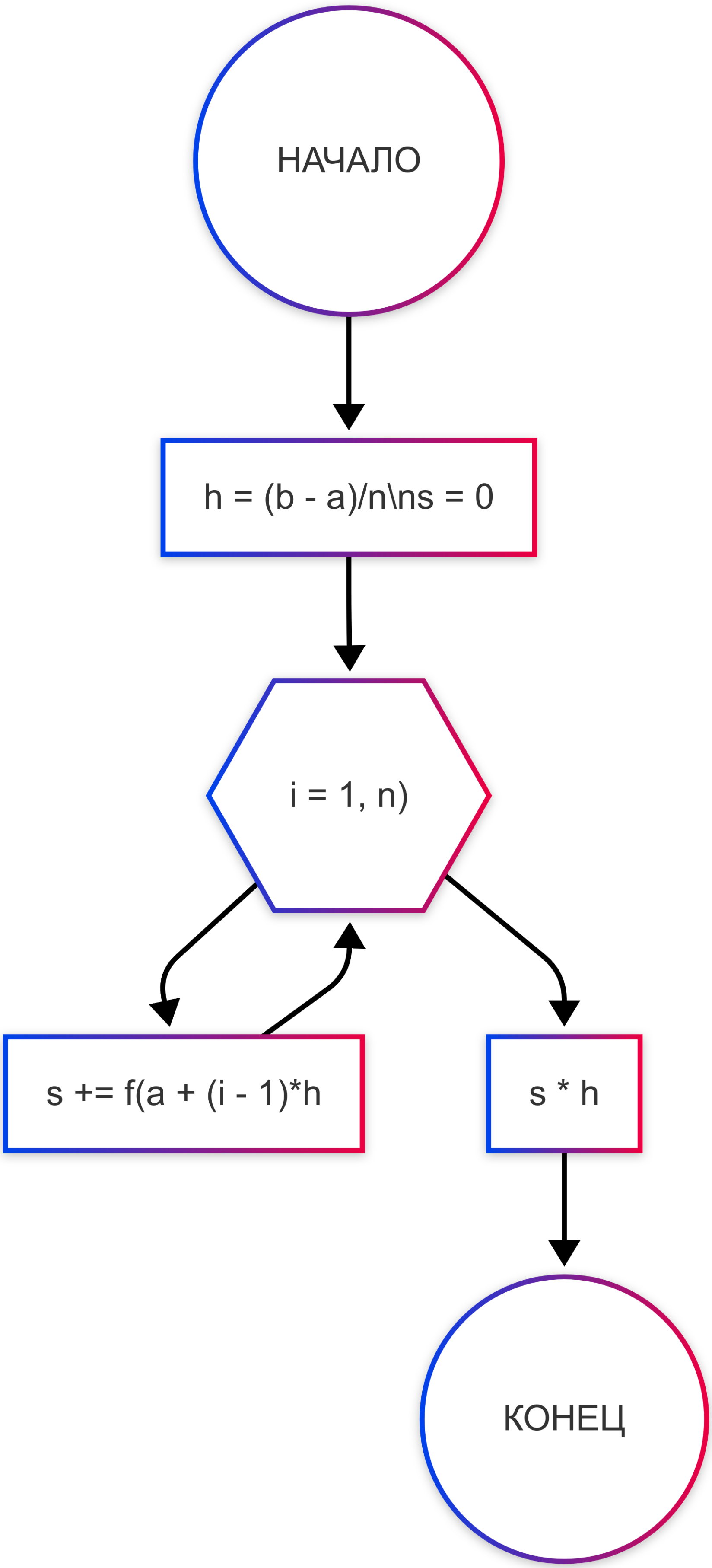
1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**

2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta = \frac{|-44.02-(-44)|}{|-44|} \approx 0.045\%$
3. Для метода **трапеций**: $\Delta = \frac{|-39.96-(-44)|}{|-44|} \approx 0.091\%$
4. Для метода **Симпсона**: $R = 0$ → **погрешности нет.**

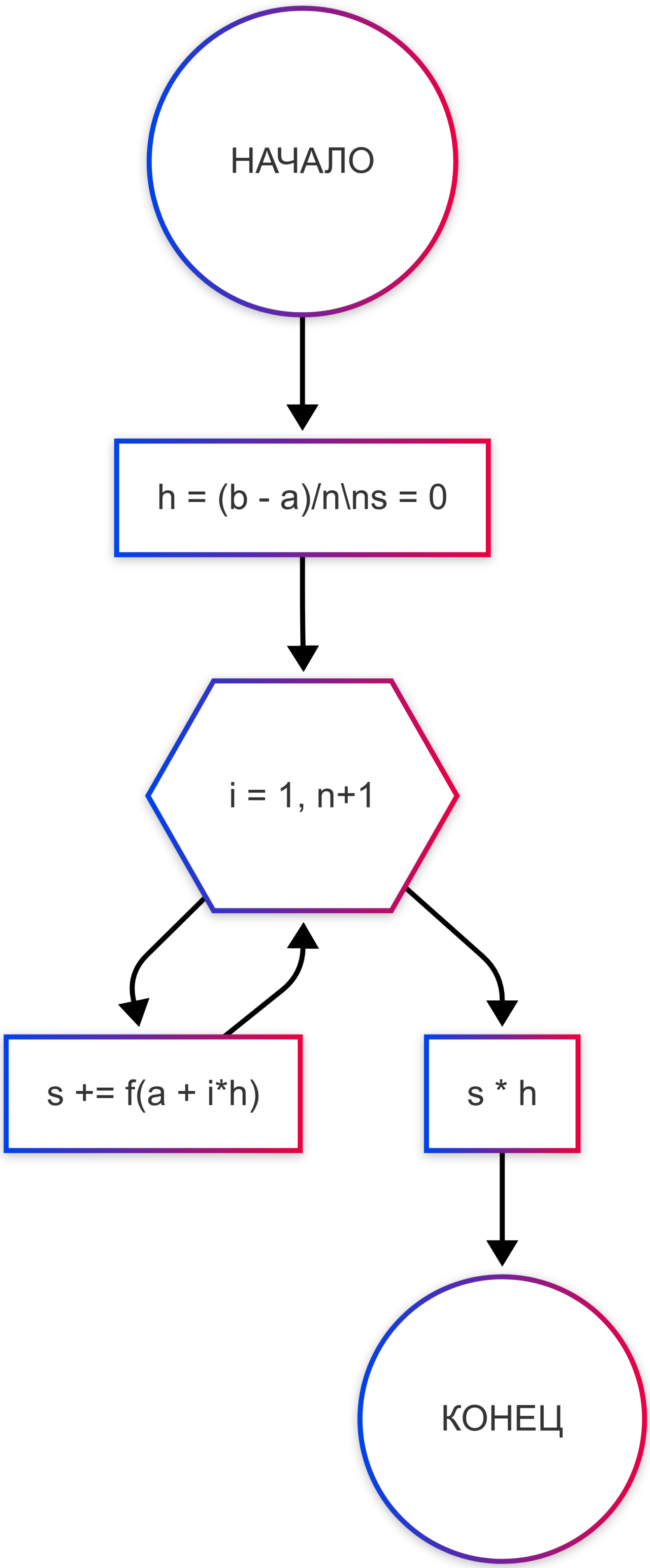
Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

2. Блок-схемы

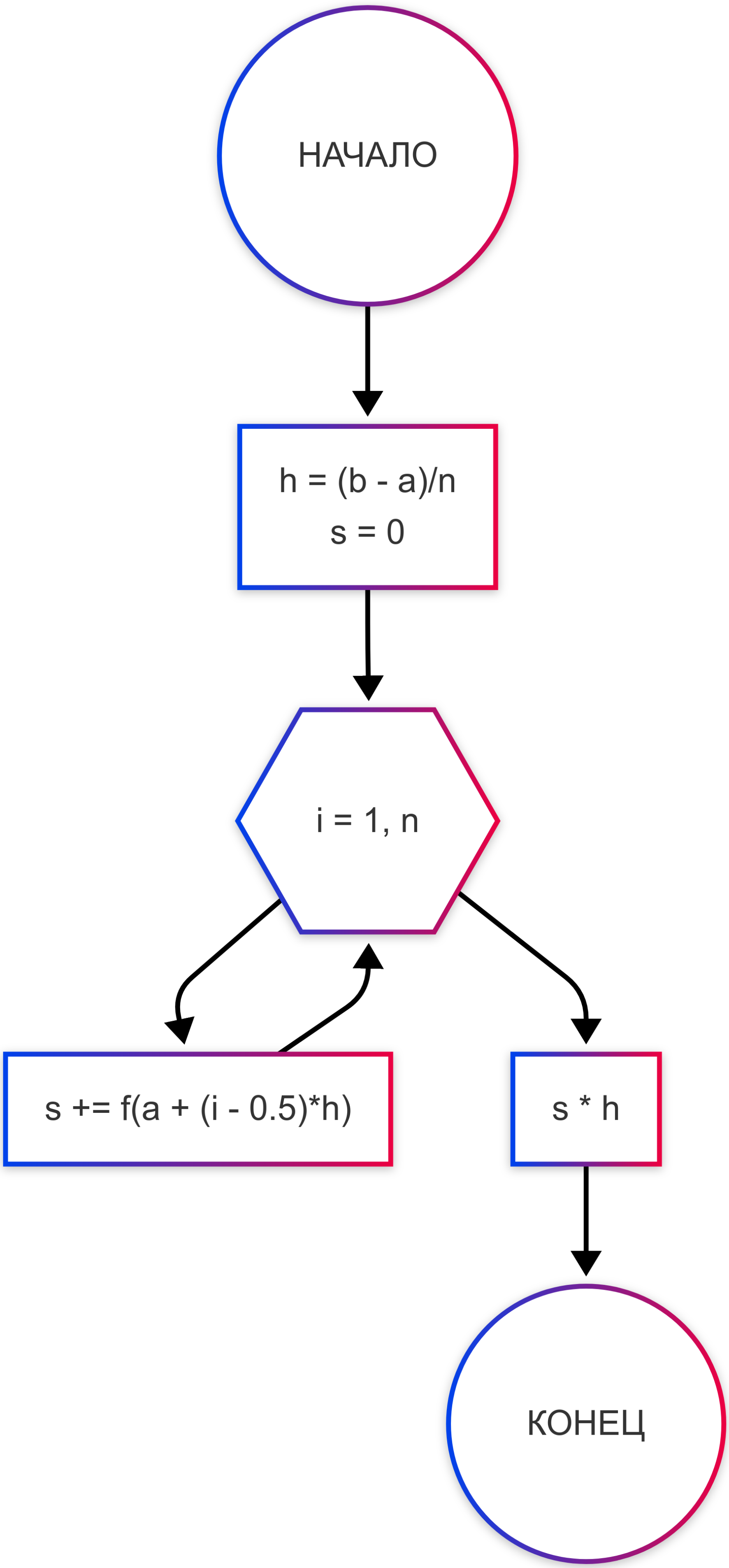
Левые прямоугольники


НАЧАЛО
h = (b - a)/n\ns = 0
i = 1, n)
s += f(a + (i - 1)*h
s * h
КОНЕЦ

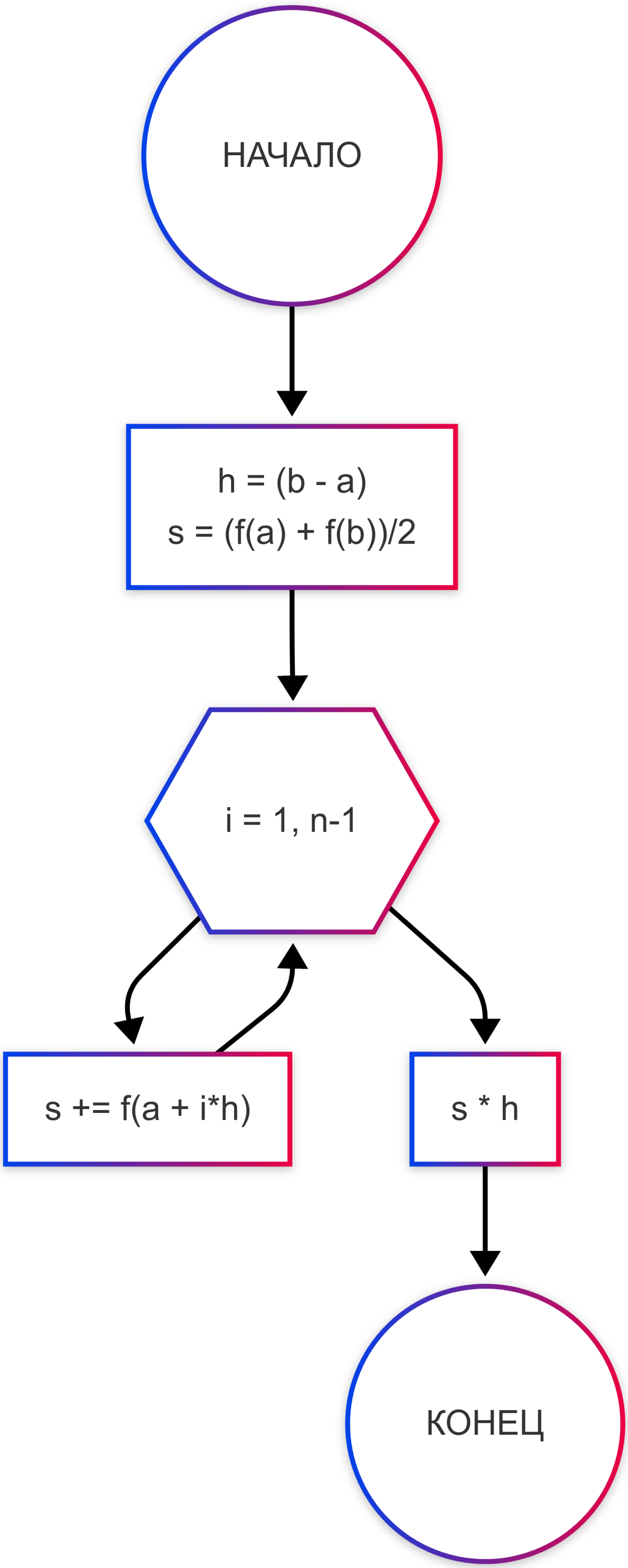
Правые прямоугольники


НАЧАЛО
h = (b - a)/n\ns = 0
i = 1, n+1
s += f(a + i*h)
s * h
КОНЕЦ

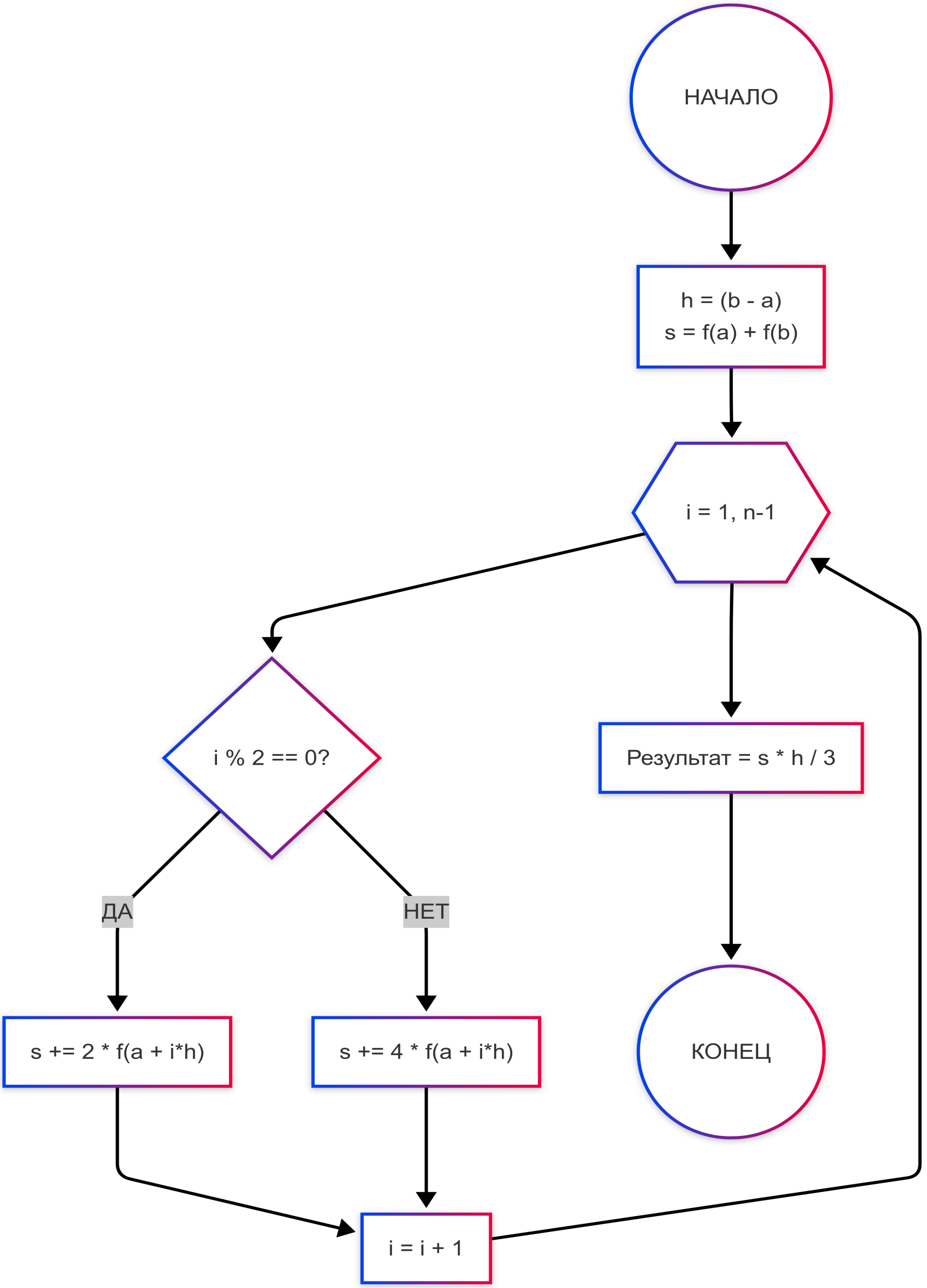
Средние прямоугольники


НАЧАЛО
h = (b - a)/n
s = 0
i = 1, n
s += f(a + (i - 0.5)*h)
s * h
КОНЕЦ

Трапеции


НАЧАЛО
h = (b - a)
s = (f(a) + f(b))/2
i = 1, n-1
s += f(a + i*h)
s * h
КОНЕЦ

Параболы



НАЧАЛО
h = (b - a)
s = f(a) + f(b)
i = 1, n-1
i % 2 == 0?
ДА
НЕТ
s += 2 * f(a + i*h)
s += 4 * f(a + i*h)
i = i + 1
Результат = s * h / 3
КОНЕЦ

3. Программная реализация задачи

Тута))
https://github.com/Chousik/lab_CM