Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№4**
«Аппроксимация функции методом наименьших квадратов»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **11**

Преподаватель:
Надежда Наумова

Выполнил:
Силаев Захар
Группа: P3210

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

Линейная аппроксимация:

y = $\frac{5x}{x^4+11}$

n = 11
x ∈ [-2; 0]
h = 0.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Xi	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
Yi	-0,370	-0,419	-0,456	-0,472	-0,459	-0,417	-0,351	-0,270	-0,181	-0,091	0,000

φ(x) = a + bx

Вычисляем суммы: sx = -11, sxx = 15.4, sy = -3.48, sxy = 4.384

$\begin{cases} n*a+sx*b=sy \\ sx*a+sxx*b=sxy \end{cases}$ $\begin{cases} 11*a-11*b=-3.48 \\ -11*a+15.4*b=4.384 \end{cases}$ $\begin{cases} -11*a+11*b=-3.48 \\ 4.4*b=0.904 \end{cases}$

$= \begin{cases} b\ = 0.2055 \\ a = \ 0.111 \end{cases}$

φ(x) = -$0.111 + 0.2055 * x$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
y_i	-0,370	-0,419	-0,456	-0,472	-0,459	-0,417	-0,351	-0,270	-0,181	-0,091	0,000
φ(xi)	-0,52	-0,48	-0,44	-0,4	-0,36	-0,32	-0,28	-0,23	-0,19	-0,15	-0,11
(φ (xi)-yi)^2	0,023	0,004	0,000	0,005	0,010	0,010	0,006	0,001	0,000	0,004	0,012

σ = $\sqrt{\frac{\sum(\varphi\ (xi) - yi)^2}{n}}$ = **0.083**

Квадратичная аппроксимация:

$y = \frac{5x}{x^4+11}$
n = 11
x ∈ [-2; 0]
h = 0.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
y_i	-0,370	-0,419	-0,456	-0,472	-0,459	-0,417	-0,351	-0,270	-0,181	-0,091	0,000

φ(x) = a + bx + cx^2

Вычисляем суммы:
sx = -11, sxx = 15.4, sxxx = -24.2, sxxxx =40.532, sy = -3.48, sxy = 4.384, sxxy = -6.36

$$\begin{cases} n*a+sx*b+sxx*c=sy \\ sx*a+sxx*b+sxxx*c=sxy \\ sxx*a+sxxx*b+sxxxx*c=sxxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11*a-11*b+15.4*c=-3.48 \\ -11*a+15.4*b-24.2*c=4.384 \\ 15.4*a-24.2*b+40.532*c=-6.36 \end{cases}$$

По методу Крамера:
$\Delta = 66.405$
$\Delta_1 = 1.928, \Delta_2 = 44.62, \Delta_3 = 15.49$

$$\begin{cases} a=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{9043.80576}{4251.456}\approx 0.029 \\ b=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4785.47696}{4251.456}\approx 0.672 \\ c=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-1976.8496}{4251.456}\approx 0.233 \end{cases}$$

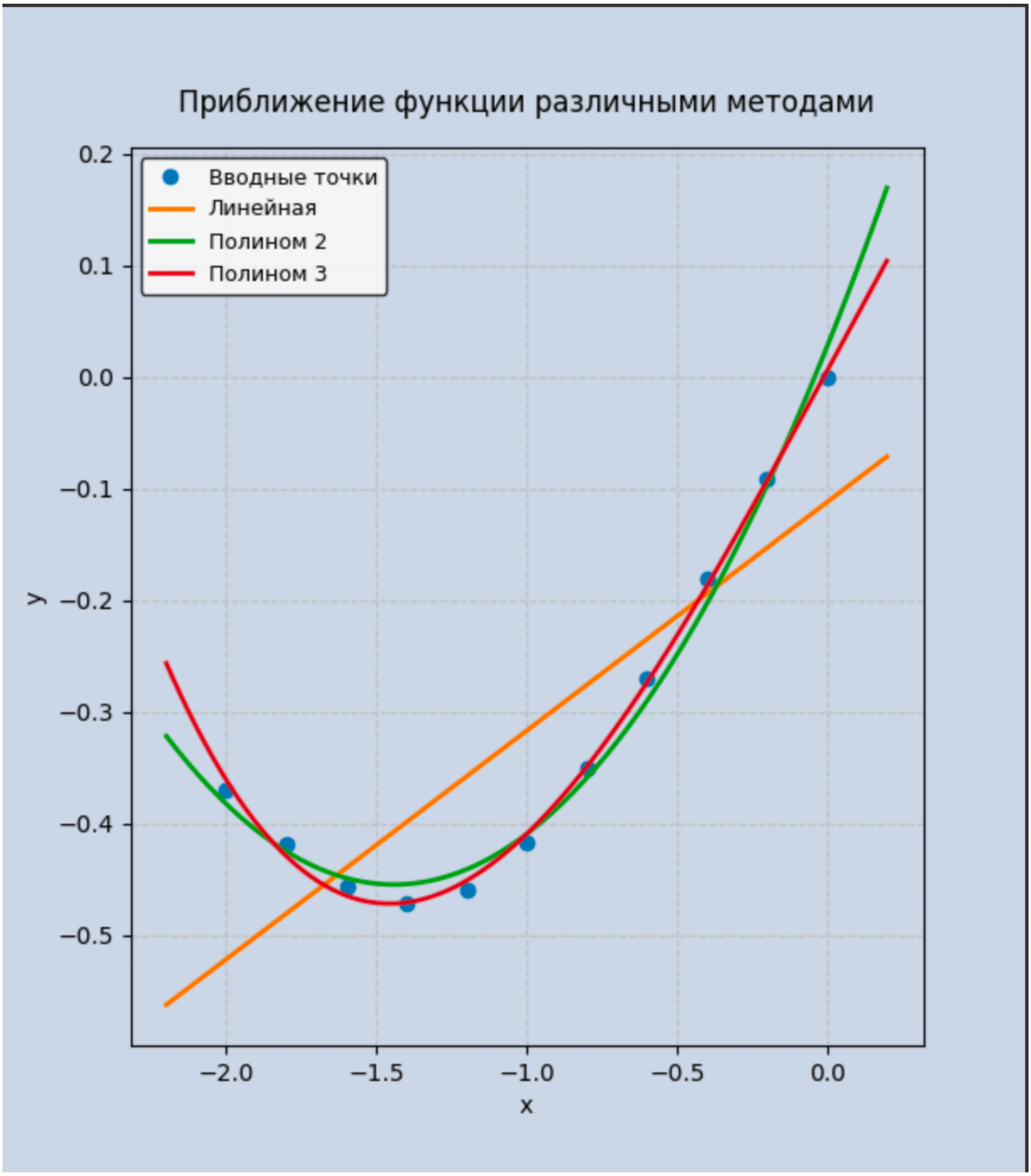
φ(x) $= 0.029 + 0.672x + 0.233x^2$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y_i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233
φ(xi)	-0,383	-0,43	-0,45	-0,46	-0,44	-0,41	-0,359	-0,29	-0,2	-0,1	0,029

(φ (xi)-yi)^2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi\,(xi) - yi)^2}{n}} = \mathbf{0.016}$$

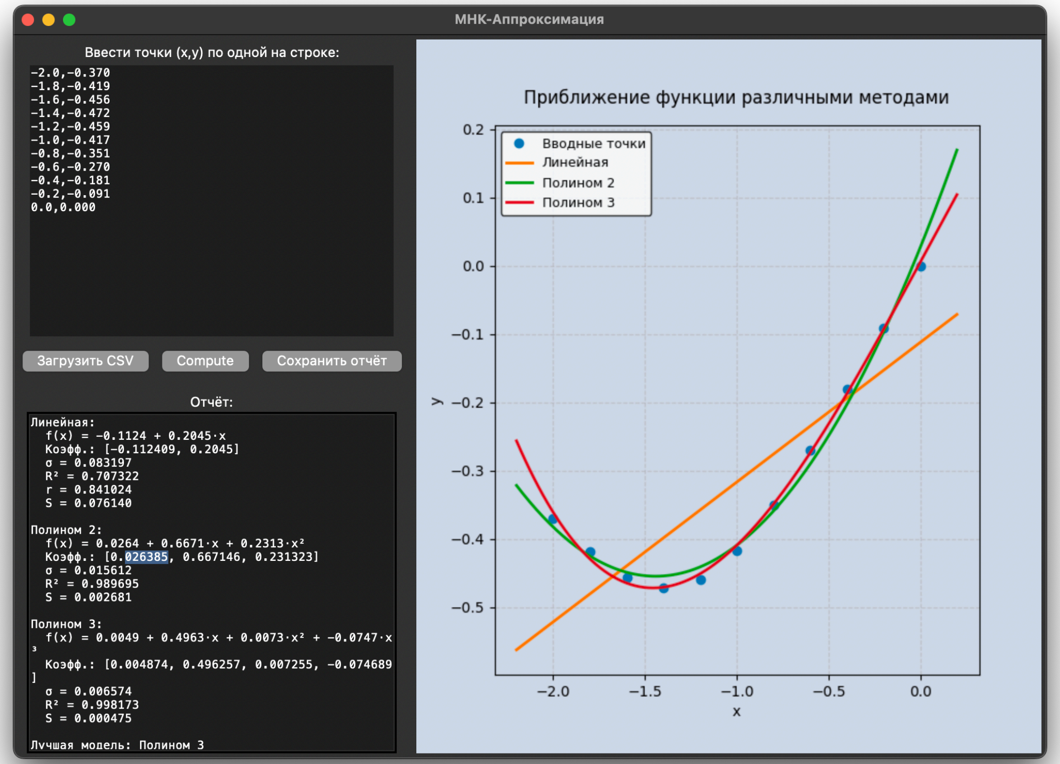
0.016 < 0.083, у квадратичной аппроксимации среднеквадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.



<u>2. Программная реализация задачи</u>

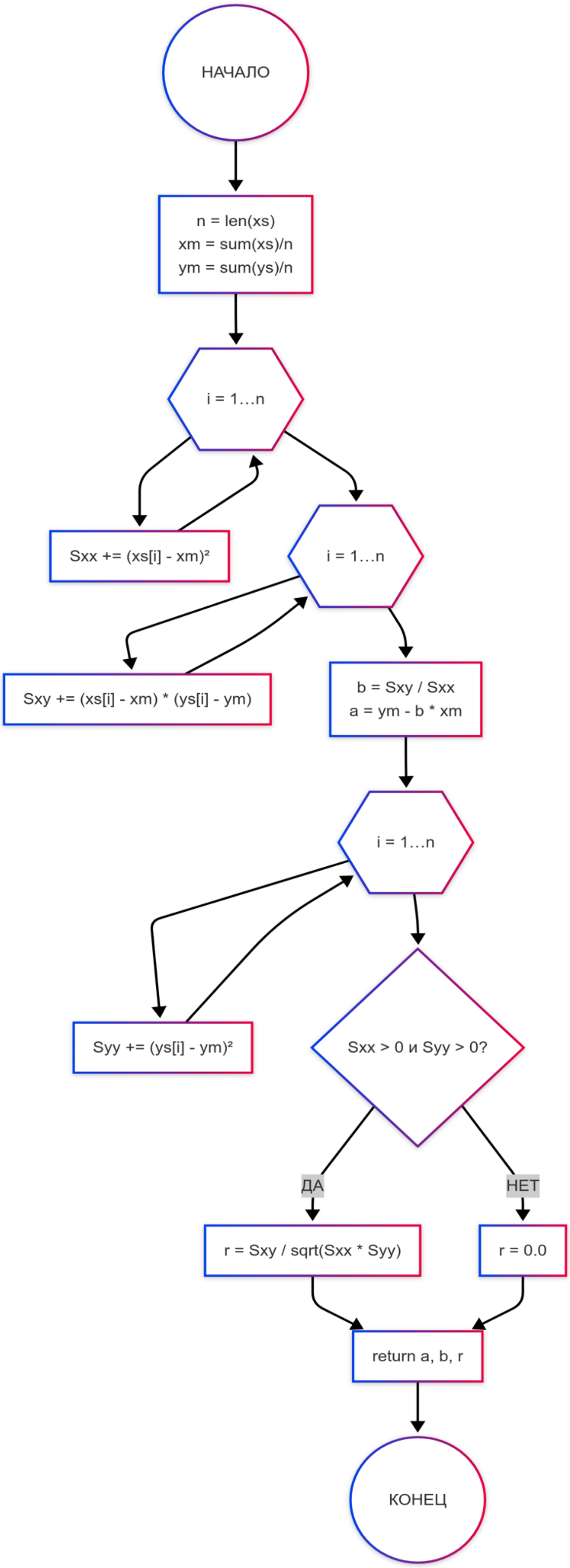
https://github.com/Chousik/lab_CM

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

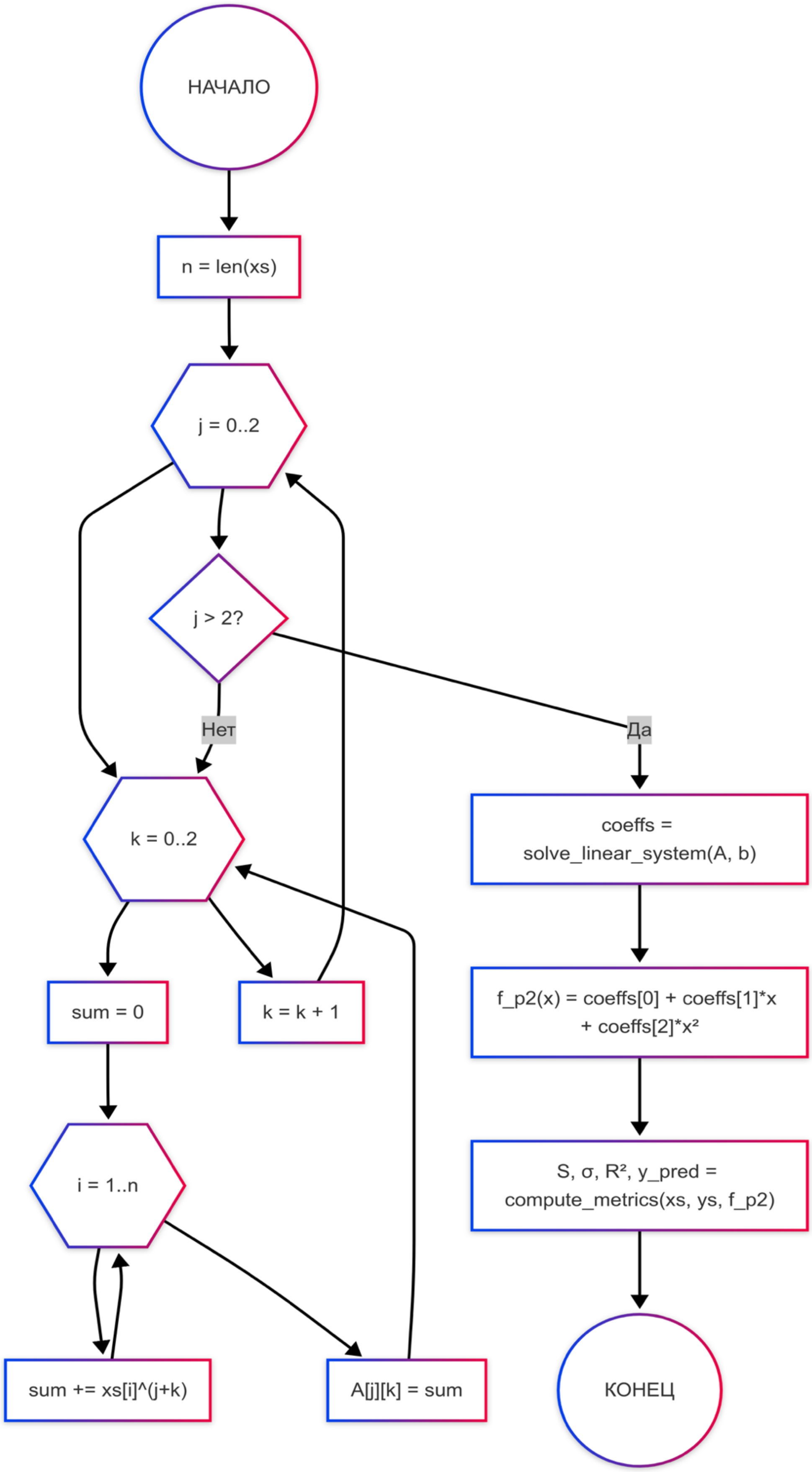


3. Блок схемы

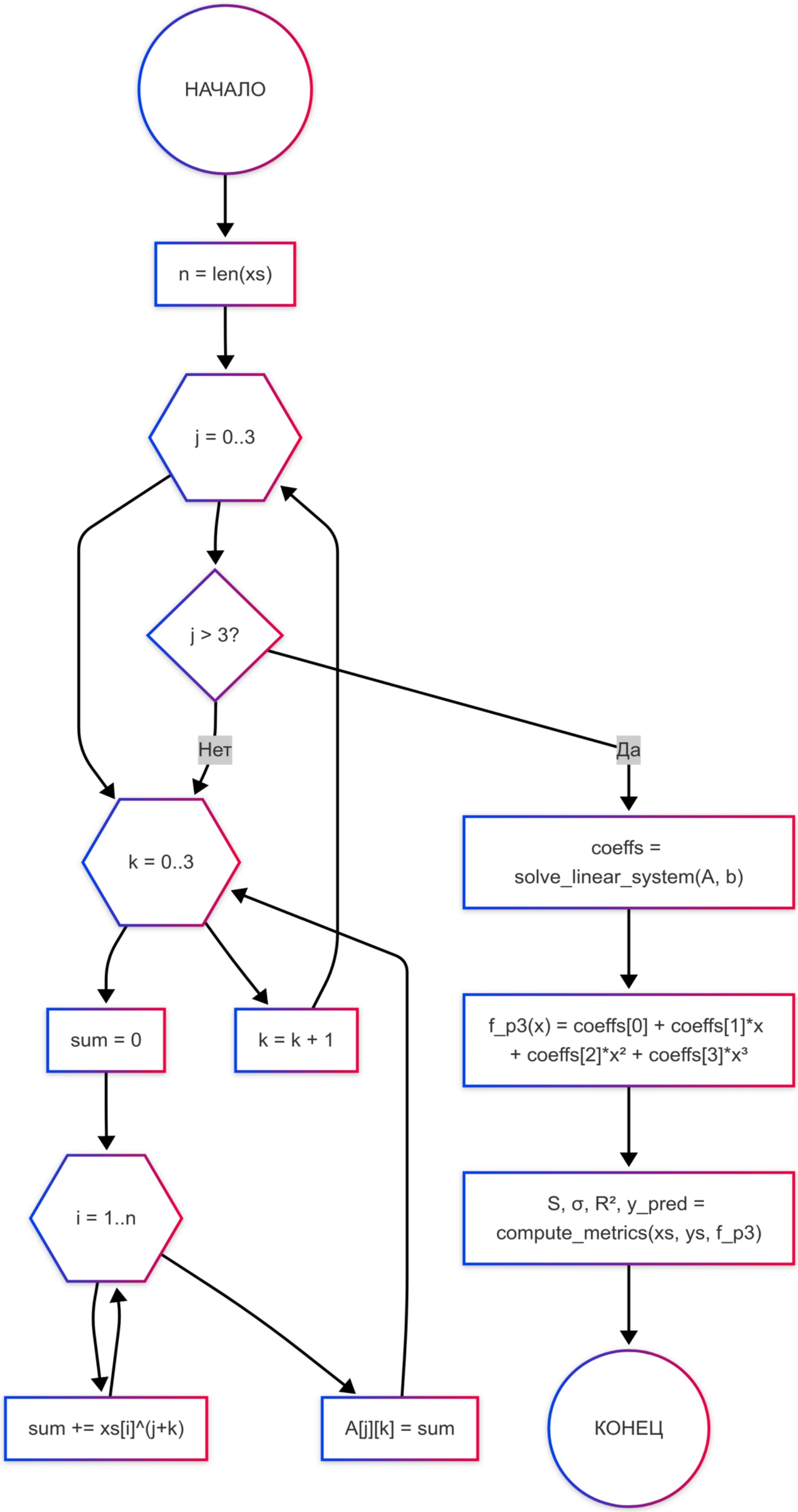
Линейная



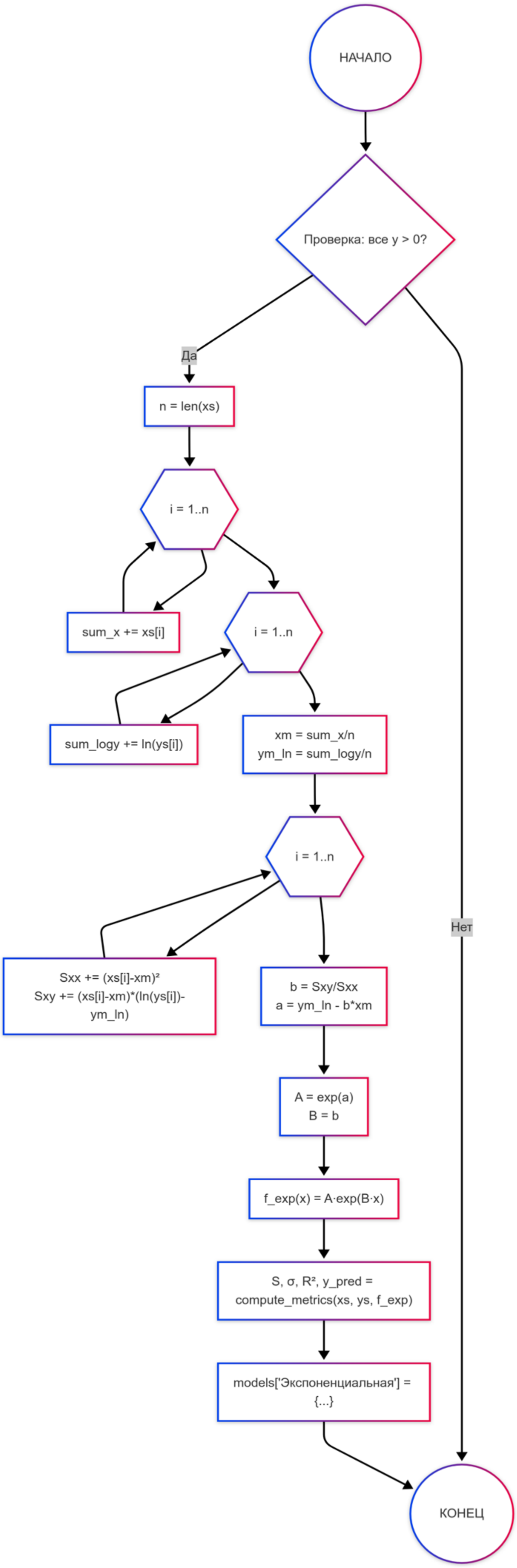
Полином 2-степени



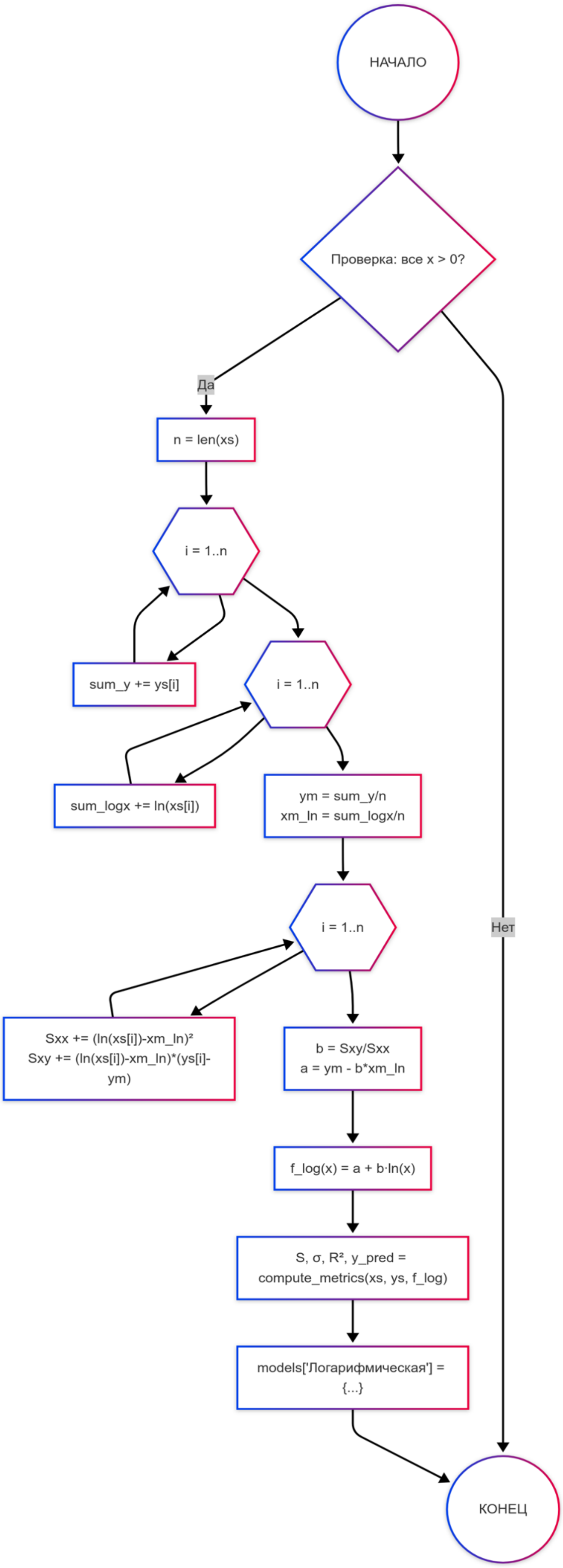
Полином 3-степени



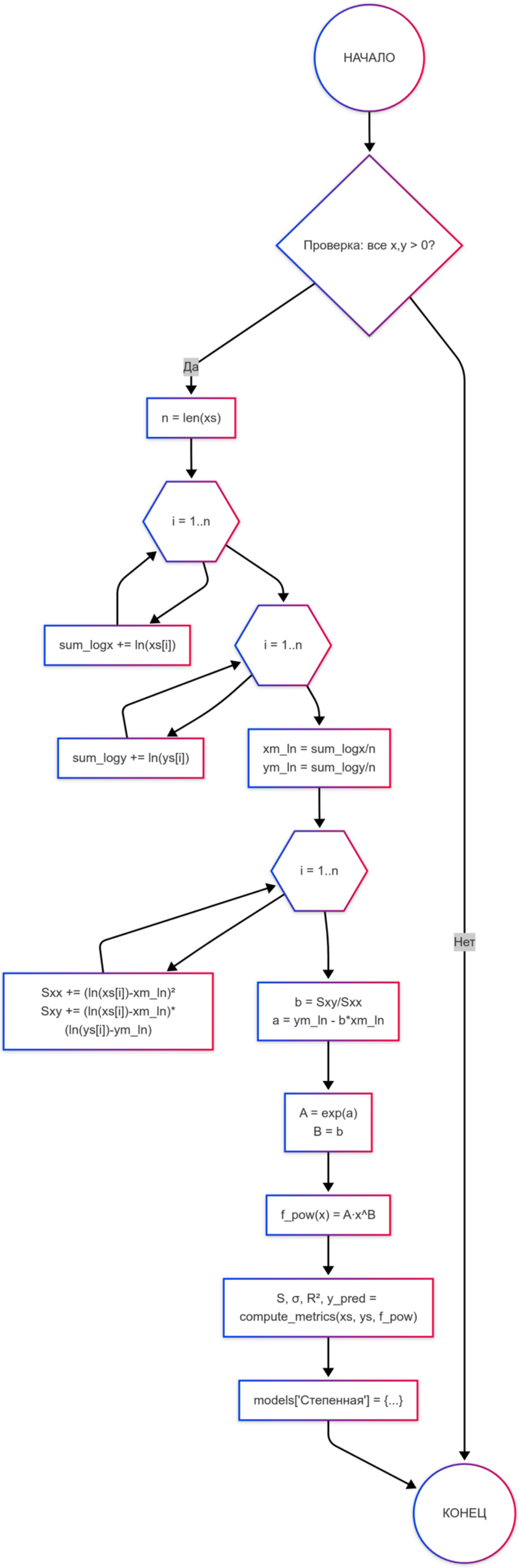
Экспоненциальная функция



Логарифмическая функция


НАЧАЛО
Проверка: все x > 0?
Да
Нет
n = len(xs)
i = 1..n
sum_y += ys[i]
i = 1..n
sum_logx += ln(xs[i])
ym = sum_y/n
xm_ln = sum_logx/n
i = 1..n
Sxx += (ln(xs[i])-xm_ln)²
Sxy += (ln(xs[i])-xm_ln)*(ys[i]-ym)
b = Sxy/Sxx
a = ym - b*xm_ln
f_log(x) = a + b·ln(x)
S, σ, R², y_pred = compute_metrics(xs, ys, f_log)
models['Логарифмическая'] = {...}
КОНЕЦ

Степенная функция



Вывод

В ходе данной работы была выполнена аппроксимация функций с использованием линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического приближений. Также на основе этих методов был реализован Python скрипт, который реализует метод наименьших квадратов и строит графики исходной функции и аппроксимаций.
Исследование позволило определить наилучшее приближение, вычислить среднеквадратические отклонения и коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.