

Основные функции модели:

```
In[1]:= Q[bh_, bj_] := Sqrt[E^2*bj Cosh[bh]^2 - 2 Sinh[2 bj]];
           |квadratic... |гиперболически... |гиперболический синус
1p[bh_, bj_] := E^bj Cosh[bh] + Q[bh, bj];
           |гиперболический косинус
1m[bh_, bj_] := E^bj Cosh[bh] - Q[bh, bj];
           |гиперболический косинус
Ap[bh_, bj_] := E^bj Sinh[bh]^2 / Q[bh, bj] + 1 / E^bj Q[bh, bj] + Cosh[bh]
           |гиперболический косинус
Am[bh_, bj_] := E^bj Sinh[bh]^2 / Q[bh, bj] + 1 / E^bj Q[bh, bj] - Cosh[bh]
           |гиперболический косинус
Zobc[bh_, bj_, n_] := 1p[bh, bj]^n - 1m[bh, bj]^n Am[bh, bj]
Zpbc[bh_, bj_, n_] := 1p[bh, bj]^n + 1m[bh, bj]^n
```

Теплоёмкость:

Вторая производная отношения λ_-/λ_+ ($j \rightarrow 0$)

```
In[37]:= D[D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bh] * h + D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bj] * j, bh] * h +
           |... |дифференцировать |дифференцировать
           D[D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bh] * h + D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bj] * j, bj] * j /. {bj -> 0, j -> 0} // Simplify
           |... |дифференцировать |дифференцировать |упростить
           - ((4 h^2 (-Cosh[bh] + Sqrt[Cosh[bh]^2]) Tanh[bh]^2) / (Cosh[bh] + Sqrt[Cosh[bh]^2])) = 0
           |гиперболический косинус |гиперболический косинус
```

Вторая производная отношения λ_-/λ_+ ($h \rightarrow 0$)

```
In[36]:= D[D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bh] * h + D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bj] * j, bh] * h +
           |... |дифференцировать |дифференцировать
           D[D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bh] * h + D[1m[bh, bj] / 1p[bh, bj], bj] * j, bj] * j /. {bh -> 0, h -> 0} // Simplify
           |... |дифференцировать |дифференцировать |упростить
           8 e^-bj (-e^bj + Sqrt[e^-2 bj]) j^2 = -2 j^2 Sinh[bj] / Cosh[bj]^3
           |гиперболический косинус |гиперболический косинус
```

Вторая производная отношения A_-/A_+ ($j \rightarrow 0$):

```
In[35]:= D[D[Am[bh, bj] / Ap[bh, bj], bh] * h + D[Am[bh, bj] / Ap[bh, bj], bj] * j, bh] * h +
           |... |дифференцировать |дифференцировать
           D[D[Am[bh, bj] / Ap[bh, bj], bh] * h + D[Am[bh, bj] / Ap[bh, bj], bj] * j, bj] * j /. {bj -> 0, j -> 0} // Simplify
           |... |дифференцировать |дифференцировать |упростить
```

Out[35]= 0

Вторая производная отношения A-/A+ (h->0):

```
In[34]:= D[D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bh] * h + D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bj] * j, bh] * h +
 $\frac{D[D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bh] * h + D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bj] * j, bj] * j}{Ap[bh, bj]} /. {bh -> 0, h -> 0} // Simplify$ 
```

Out[34]= 0

Первая производная отношения A-/A+ (h->0):

```
In[17]:= D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bh] * h + D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bj] * j /. {bh -> 0, h -> 0} // Simplify
```

Out[17]= 0

Первая производная отношения A-/A+ (j->0):

```
In[18]:= D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bh] * h + D[ $\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}$ , bj] * j /. {bj -> 0, j -> 0} // Simplify
```

Out[18]= 0

Вторая производная A+ (h->0):

```
In[32]:= D[D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j, bh] * h +
 $\frac{D[D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j, bj] * j}{Ap[bh, bj]} /. {h -> 0, bh -> 0} // Simplify$ 
```

Out[32]= 0

Вторая производная A+ (j->0):

```
In[33]:= D[D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j, bh] * h +
 $\frac{D[D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j, bj] * j}{Ap[bh, bj]} /. {j -> 0, bj -> 0} // Simplify$ 
```

Out[33]= $h^2 \left(\cosh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2} \right)$

Первая производная A+ (h->0):

```
In[26]:= D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j /. {bh -> 0, h -> 0} // Simplify
```

Out[26]= 0

Первая производная A+ (j->0):

```
In[27]:= D[Ap[bh, bj], bh] * h + D[Ap[bh, bj], bj] * j /. {bj -> 0, j -> 0} // Simplify
```

$h \left(\sinh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2} \tanh[bh] \right) = 2 h * \sinh[bh]$

In[25]:= Ap[bh, bj] /. {bh → 0, h → 0} // Simplify
[упростить](#)

$$1 + e^{bj} \sqrt{e^{-2bj}} = 2$$

In[29]:= Ap[bh, 0] // Simplify
[упростить](#)

$$\text{Cosh}[bh] + \sqrt{\text{Cosh}[bh]^2} = 2 \text{Cosh}[bh]$$

[гиперболический косинус](#) [гиперболич](#)

Касательно дроби $\frac{\tanh^{n-1}}{\cosh^2}$ из разницы средней энергии:

$$\tanh^{n-1} = \left(\frac{1 - E^{-2x}}{1 + E^{-2x}} \right)^{n-1}$$

$$\cosh^2 = \frac{E^{2x} (1 + E^{-2x})^2}{4}$$

Рассмотрим при $x \rightarrow \text{inf}$:

$$\frac{\tanh^{n-1}}{\cosh^2} \approx \frac{4}{E^{2x}}$$

С другой стороны - для $x \rightarrow 0$:

In[48]:= Series[E^{-2x}, {x, 0, 1}]
[разложить в ряд](#)

Out[48]= 1 - 2 x + O[x]^2

In[49]:= Series[E^{2x}, {x, 0, 1}]
[разложить в ряд](#)

Out[49]= 1 + 2 x + O[x]^2

Следовательно:

$$\text{Tanh}^{n-1} = \left(\frac{-x + O[x^2]}{1 - x + O[x^2]} \right)^{n-1} =$$

$$\text{Cosh}^2 = (1 + 2x + O[x^2]) (1 - x + O[x^2])^2$$

[О большое](#)

$$\frac{\text{tanh}^{n-1}}{\text{Cosh}^2} = \frac{(-x + O[x^2])^{n-1}}{(1 + 2x + O[x^2]) (1 - x + O[x^2])^{n+2}}$$

Квадрат намагниченности:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{Z N} \sum M^2 E^{-b \cdot \text{Ham}} = \frac{1}{Z N b^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta h^2}$$

Для $bh=0$

In[56]:= D[Zobc[bh, bj, n], {bh, 2}] /. bh -> 0 // Simplify
 [дифференцировать] [упростить]

$$\begin{aligned} \text{Out[56]} = & \frac{1}{\sqrt{e^{-2bj}}} \left(e^{bj} + \sqrt{e^{-2bj}} \right)^{-1+n} \left(2 e^{bj} - e^{3bj} + \sqrt{e^{-2bj}} \right) + \\ & \left(e^{2bj} \left(e^{bj} - \sqrt{e^{-2bj}} \right)^n \left(-2 e^{bj} + e^{3bj} + \sqrt{e^{-2bj}} \right) \right) / \left(-1 + e^{3bj} \sqrt{e^{-2bj}} \right) - \\ & e^{2bj} \left(e^{bj} - \sqrt{e^{-2bj}} \right)^{-1+n} \left(-1 + e^{bj} \sqrt{e^{-2bj}} \right) (-1+n) + \\ & e^{2bj} \left(e^{bj} + \sqrt{e^{-2bj}} \right)^{-1+n} \left(1 + e^{bj} \sqrt{e^{-2bj}} \right) (-1+n) \\ & = (2 \cosh[bj])^{n-1} (-E^{4bj} + 2 E^{2bj} + 1) + (2 \sinh[bj])^{n+1} * E^{2bj} + (n-1) 2 (2 \cosh[bj])^{n-1} E^{2bj} \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle m^2 \rangle =$$

Разница квадрата намагниченности СИСТЕМЫ (равное число ребер):

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{Z} \sum M^2 E^{-b * \text{Ham}} = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{b^2 \delta h^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\delta^2 \text{Log}[Z]}{\delta h^2}$$

In[60]:= D[Log[F[v]], {v, 2}]
 [натуральный логарифм]

$$\text{Out[60]} = -\frac{F'[v]^2}{F[v]^2} + \frac{F''[v]}{F[v]}$$

А так как первое слагаемое - это средняя намагниченность, которая в предельных случаях равна нулю, то представимо через вторую производную логарифма.

Тогда основная формула для теплоёмкости, которая пропорциональна второй производной логарифма по β , справедлива и для квадрата намагниченности.

Производные A_+ по h :

$$A_+'$$

In[63]:= D[Ap[bh, bj], bh] * b /. bh -> 0 // Simplify
 [дифференцировать] [упростить]

$$\text{Out[63]} = 0$$

In[64]:= D[Ap[bh, bj], bh] * b /. bj -> 0 // Simplify
 [дифференцировать] [упростить]

$$b \left(\sinh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2} \tanh[bh] \right) = 2 b \sinh[bh]$$

[гиперболический синус] [гиперболический...гиперболич]

$$A_+''$$

In[66]:= D[Ap[bh, bj], {bh, 2}] * b^2 /. bh -> 0 // Simplify
 [дифференцировать] [упростить]

$$\frac{b^2 \left(2 e^{bj} - e^{3bj} + \sqrt{e^{-2bj}} \right)}{\sqrt{e^{-2bj}}} = b^2 \left(2 E^{2bj} - E^{4bj} + 1 \right)$$

Производные отношения λ_-/λ_+ :

$(\lambda_-/\lambda_+)'$:

In[67]:= $D\left[\frac{1m[bh, bj]}{1p[bh, bj]}, bh\right] * b /. bh \rightarrow 0$
|дифференцировать

Out[67]= 0

In[68]:= $D\left[\frac{1m[bh, bj]}{1p[bh, bj]}, bh\right] * b /. bj \rightarrow 0$
|дифференцировать

$$b \left(\frac{\frac{\sinh[bh] - \frac{\cosh[bh] \sinh[bh]}{\sqrt{\cosh[bh]^2}}}{\cosh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2}} - \left(\left(\cosh[bh] - \sqrt{\cosh[bh]^2} \right) \left(\frac{\sinh[bh] + \frac{\cosh[bh] \sinh[bh]}{\sqrt{\cosh[bh]^2}}}{\sqrt{\cosh[bh]^2}} \right) \right)}{\left(\cosh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2} \right)^2} \right) = 0$$

|гиперболический косинус |гиперболический синус

$(\lambda_-/\lambda_+)''$:

In[70]:= $D\left[\frac{1m[bh, bj]}{1p[bh, bj]}, \{bh, 2\}\right] * b^2 /. bh \rightarrow 0 // \text{Simplify}$
|дифференцировать |упростить

$$\frac{2 b^2 e^{3 bj} \left(-e^{bj} + \sqrt{e^{-2 bj}} \right)}{1 + e^{3 bj} \sqrt{e^{-2 bj}}} = -2 b^2 E^{2 bj} \tanh[bj]$$

|гиперболич

In[72]:= $D\left[\frac{1m[bh, bj]}{1p[bh, bj]}, \{bh, 2\}\right] * b^2 /. bj \rightarrow 0 // \text{Simplify}$
|дифференцировать |упростить

$$- \frac{4 b^2 \left(-\cosh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2} \right) \tanh[bh]^2}{\cosh[bh] + \sqrt{\cosh[bh]^2}} = 0$$

Производные отношения A-/A+:

$(A-/A_+)'$:

In[73]:= $D\left[\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}, bh\right] * b /. bh \rightarrow 0$
|дифференцировать

Out[73]= 0

In[75]:= $D\left[\frac{Am[bh, bj]}{Ap[bh, bj]}, bh\right] * b /. bj \rightarrow 0 // \text{Simplify}$
|дифференцировать |упростить

Out[75]= 0

$(A-/A_+)''$:

In[77]:= $D\left[\frac{A_m[bh, bj]}{A_p[bh, bj]}, \{bh, 2\}\right] * b^2 /. bh \rightarrow 0 // \text{Simplify}$
дифференцировать упростить

$$-\frac{b^2 (-1 + e^{2bj})^2}{1 + e^{bj} \sqrt{e^{-2bj}}} = -2 b^2 E^{2bj} \text{Sinh}[bj]^2$$

In[78]:= $D\left[\frac{A_m[bh, bj]}{A_p[bh, bj]}, \{bh, 2\}\right] * b^2 /. bj \rightarrow 0 // \text{Simplify}$
дифференцировать упростить

Out[78]= 0