

Проект №19455 "Решетчатые модели макромолекул"

Пчелинцев Илья Игоревич, БПМ-192

Оглавление

Глава 1

3 курс

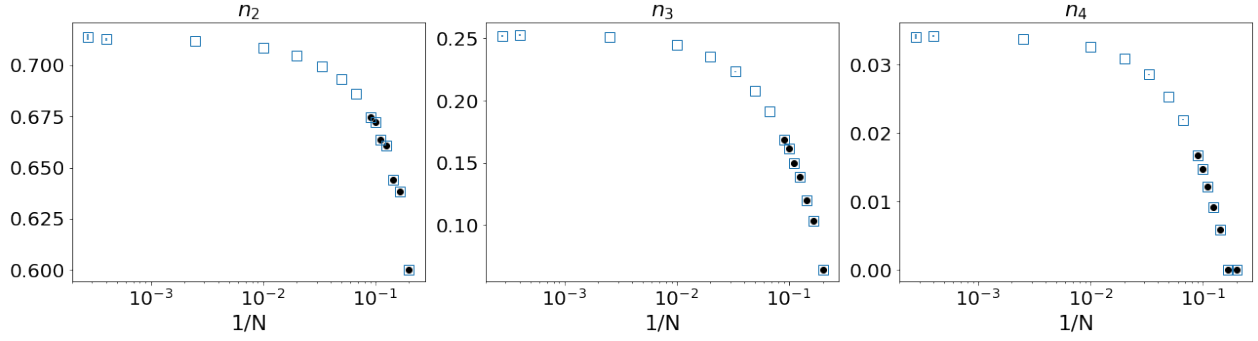


Рис. 1.2: Зависимостей средних долей узлов конформации с фиксированным числом соседей (от 2 до 4) модели ISAW при $J=0$ от обратной длины $1/N$ при длинах конформации $N=5-3600$. Пустые квадраты - результаты симуляций Монте-Карло, черные точки - расчёты полученные путём полного перебора возможных конформаций [?]

1.1 Геометрические свойства модели Ising-ISAW с точки зрения числа соседей в узлах

1.1.1 Введение

В данном разделе мы изучаем такое геометрическое свойство модели, как доли узлов с фиксированным числом соседей. У каждого узла можно определить число соседей или количество близких связей на смежных ячейках исследуемой решётки (см. левый рисунок ??). Рассмотрим пример конформации на квадратной решётке на рисунке ??. Чёрные точки соответствуют узлам с 2-мя соседями, а последовательность таких узлов подряд в конформации можно интерпретировать как "одномерный" участок. Узлы с тремя соседями расположены, как правило, на границах кластеров, и отображены на примере синими треугольниками, в то время как узлы с четырьмя соседями (красные квадраты) типичны для узлов в глубине кластера.

Сначала, чтобы определить правильность алгоритма расчёта долей искомым узлов, были проведены симуляции Монте-Карло модели ISAW при $J=0$ на длинах N от 5 до 3600, а так же произведены расчёты вручную для цепочек малых длин - от 5 до 11. Результаты изображены на рисунке ?? - разные типы расчётов полностью совпали, что говорит о правильности используемого алгоритма.

1.1.2 Особенности ранних результатов на квадратной решётке

Мы провели симуляции Монте-Карло для долей узлов с фиксированным числом соседей для моделей Ising-ISAW и ISAW с зависимостью от значения константы взаимодействия J для длин $N=1000, 2500, 3600, 4900$. Результаты изображены на рисунке ??, а также опубликованы в работе [?].

На графиках ?? примечательны значения в точке $J=0$ у графиков узлов с 2-мя (левый) и 3-мя (средний) соседями: было первоначальное предположение, что в пределе бесконечной длины конформации они будут равны $3/4$ и $1/4$ соответственно. Так же интересен вопрос универсальности данного свойства на других решётках: будут ли эти значения долей n_2 и n_3 при тех же условиях равны или хотя бы похожи в других решётках.

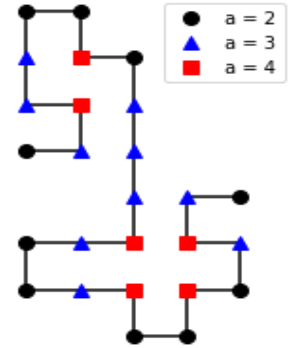


Рис. 1.1: Пример конформации на квадратной решётке с подсчётом соседей

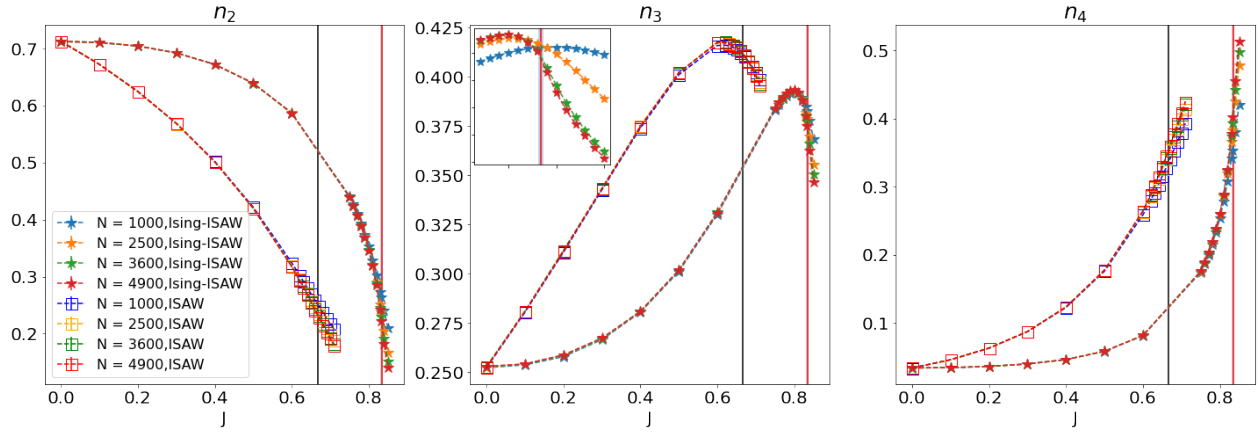


Рис. 1.3: Зависимость доли узлов конформации с двумя (слева), тремя (по центру) и четырьмя соседями (справа) у моделей Ising-ISAW (звезды) и ISAW на квадратной решётке от J . Черной линией обозначена точка фазового перехода модели ISAW, красной - Ising-ISAW, на квадратной решётке (см. таблицу ??). График взят из работы [?]

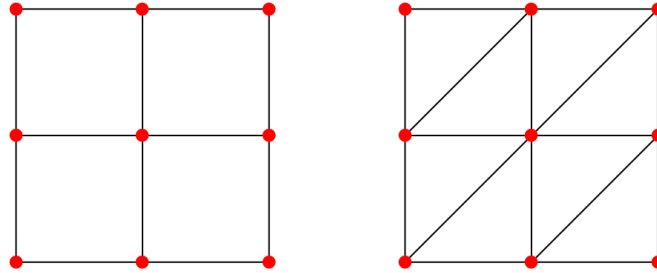


Рис. 1.4: Связи узлов в квадратной (слева) и треугольной решётках (справа)

1.1.3 Сравнение модели Изинга и полимерной цепочки в решетках с 2-6 возможными соседями мономеров

Рассмотрим средние доли узлов с фиксированным числом соседей в решётках, которые имеют от 2-х до 6-ти возможных соседей: в кубической, у которой 5-й и 6-й соседи мономера расположены в соседних плоскостях, и треугольной, где 5-й и 6-й сосед мономера лежат на диагонали, проходящей через данный узел (в данной решётке лишь одна плоскость, см. правый рисунок ??).

График зависимости долей от константы взаимодействия J (используется в гамильтониане конформации по формуле ??, однако в отличие от одномерного случая, где считаются связи между соседними по индексу узлами конформации, здесь считаются связи между узлами, лежащими на соседних ячейках исследуемой решётки) изображен на рисунке ?? - слева показаны результаты симуляций Монте-Карло на кубической решётке, справа - на треугольной решётке. Цвета графиков соответствуют длинам цепочек - $N=100$ зелёные, 300 синие, 600 красные и 1200 фиолетовые. Число шагов симуляций - от 10^{10} вдали от пиков до 10^{12} в районе пиков графиков. Вертикальными линиями отмечены точки критического перехода:

Результаты симуляций модели ISAW отмечены пустыми квадратами, а модели Ising-ISAW - звёздами. Примечательно, что графики зависимости долей от J данной модели значительно плавнее, чем у модели Изинга на случайном блуждании, а так же процессы уплотнения конформаций (когда доли n_2 и n_3 уменьшаются, а доли узлов с большим числом соседей увеличивается) начинаются раньше, пропорционально значению точки перехода J_c . Последнее, скорее всего, связано с тем, что точка перехода модели ISAW меньше, чем у Ising-ISAW (для кубической это известно, для треугольной просто предположение). Возможно, что при масштабировании левой части графиков кубической решетки относительно J_c (то есть, от $0 * J_c$ до $1 * J_c$), мы бы получили примерно одинаковые графики.

lattice	Ising-ISAW	ISAW
square	0.8340(5) [?]	0.6673(5) [?]
triangular	Unknown	0.41(7) [?]
cubic	0.5263 ± 0.055 [?]	0.2779 ± 0.0041 [?]

Таблица 1.1: Значения J критических точек фазового перехода модели Изинга на случайном блуждании (Ising-ISAW) и гомополимера (ISAW) на квадратной, треугольной и кубической решётке соответственно (в порядке строк)

В то же время, предельные значения у данных моделей совпадают - графики одинаковых длин и решёток разных моделей исходят из одной точки при $J=0$ (что логично, ведь при $J=0$ поведение Ising-ISAW соответствует ISAW) и приходят в одну точку при $J=1$.

Данные модели Ising-ISAW в свою очередь отмечены на графике ?? звездочками. Стоит отметить, что при прохождении точки перехода в кубической решётке, графики долей узлов с любым числом соседей словно претерпевают скачок, усиливающийся с ростом длины цепочки, в отличие от треугольной решётки, где процесс непрерывен.

Говоря о свойствах Ising-ISAW кубической решётки, необходимо подчеркнуть, что в на графике $\langle n_3 \rangle$ мы видим похожее поведение в $J=0$ - значение довольно близко к 0.25, стоит проверить предел значения доли узлов с 3-мя соседями в $J=0$ при бесконечной длине и характер приближения к нему, если таковой имеется. Значение $\langle n_2 \rangle$ при $J=0$ визуально отличается от предполагаемого $3/4$. В следующих разделах мы рассмотрим развитие значения долей $\langle n_{2-6} \rangle$ в точке $J=0$ (где модели ISAW и Ising-ISAW ведут себя идентично с обычным не взаимодействующим блужданием SAW) на разных решётках на пределе бесконечной длины.

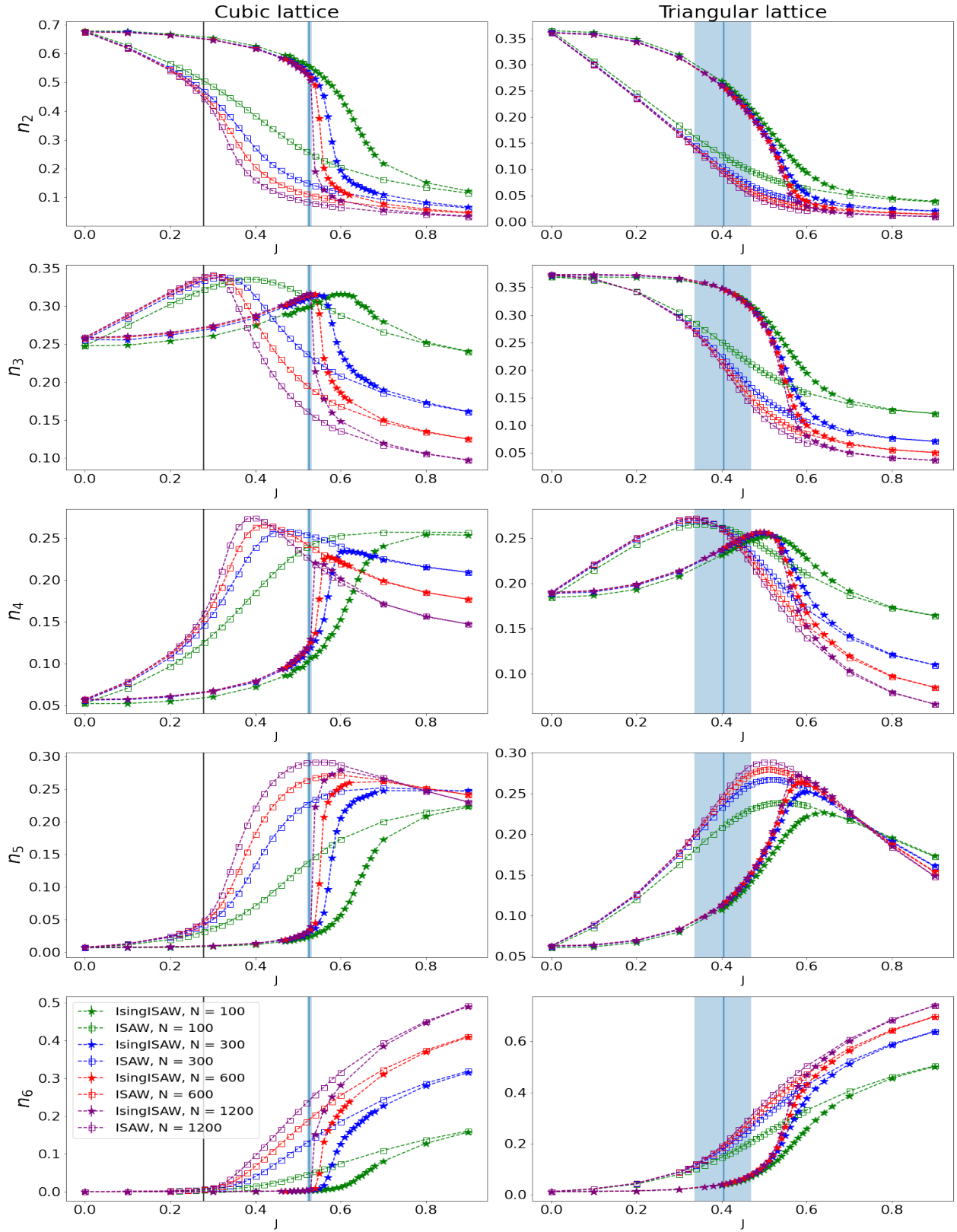


Рис. 1.5: Зависимость доли узлов моделей Ising-ISAW (звезды) и ISAW (квадраты) на кубической (слева) и треугольной решётках (справа) с 2-6 соседями (сверху вниз) от J с длинами $N = 100$ (зеленые), 300 (красные), 600 (синие) и 1200 (фиолетовые). Вертикальные линии отмечают точки фазового перехода моделей ??

1.1.4 Алгоритм исследования характера зависимости значения долей узлов от длины при $J=0$

Здесь рассматривается способ определения характера зависимости у графиков долей узлов с фиксированным числом соседей при $J=0$. Для примера взят случай n_2 у квадратной решётки модели Ising-ISAW. Первоначально рассматривается три возможных способа аппроксимации результатов, варьирующихся зависимостью от обратной длины конформации $x = 1/N$:

1. Линейная аппроксимация

$$y = ax + b \quad (1.1.1)$$

2. Лог-линейная или экспоненциальная аппроксимация

$$y = b \exp(ax) + c \quad (1.1.2)$$

3. Степенная или лог-лог аппроксимация

$$y = bx^a + c \quad (1.1.3)$$

Чтобы гарантировано получить результат использовалась функция `linregress` из пакета `scipy.stats`, поэтому на данном этапе погрешностью результатов симуляций мы временно пренебрегаем. Так же, чтобы показать нагляднее характер аппроксимации, графики соответствующих способов фитирования будут рассмотрены в том же масштабе - линейный в линейном, экспоненциальный в лог-линейном, степенном в лог-лог-масштабе - таким образом графики фитов будут линейными. Результаты аппроксимаций в порядке, изложенном в списке выше, изображены на рисунках ?? и ?? - в левом столбце аппроксимации записаны для данных цепочек с длинами от 100 до 4900, в правом - длины от 250 до 4900, чтобы оценить поведение модели на больших длинах, следовательно, ближе к нулю.

Графики на рисунках ?? и ?? показывают, что в данном случае экспоненциальная аппроксимация ведёт себя как линейная (что логично вблизи нуля), поэтому можно рассматривать вместо первых двух только линейную. С другой стороны, степенная функция совсем не совпадает с графиком результатов. Более того, значение степени функции-фита настолько мало, что итоговая функция больше похожа на константную прямую.

Таким образом, в данном случае определён линейный характер зависимости. Теперь, чтобы оценить качество приближения при рассмотрении точек всё ближе и ближе к нулю, оценим ошибку фитирования - теперь мы можем использовать функцию `curve-fit` из пакета `scipy.optimize`.

N	a	b
100-4900	-0.44(1)	0.71292(4)
250-4900	-0.473(6)	0.71299(2)
400-4900	-0.47(1)	0.71298(2)
1000-4900	-0.48(6)	0.71299(4)

Таблица 1.2: Значения и погрешности коэффициентов линейного фитирования (??) зависимости долей узлов с 2-мя соседями на квадратной решётке модели Ising-ISAW при $J=0$ от исследуемого интервала длин

Результаты использования других диапазонов точек на таблице ?? показывают, что наиболее оптимальный фит (с наименьшей ошибкой) достигается при выборе точек от 250 до 4900. Это можно объяснить тем, что при выборе точек большего диапазона линейный характер будет выражен слабее, а при выборе точек меньшего диапазона количество рассматриваемых данных уменьшается, что приводит к росту ошибки (недостаточно статистики). Подобная операция была выполнена и для других чисел соседей и решёток (более подробные графики см. в Bulk2-6.ipynb в разделе "Расчёты .ipynb" [?]), результаты представлены в следующем разделе в виде графиков для узлов с 2-мя и 3-мя соседями и в виде таблицы коэффициентов линейного фитирования (??) без графиков.

Результаты линейного фитирования при выборе разной наименьшей рассматриваемой длины можно увидеть на таблицах ?? и ??. По погрешностям на первых строках обеих таблиц понятно, что оптимальным диапазоном будет 250-4900. Для 3-4D-гиперкубических решёток так же заметно (по погрешностям соответствующих строк), что отбрасывание длины $N=100$ из рассматриваемых улучшило точность результатов. Единственное

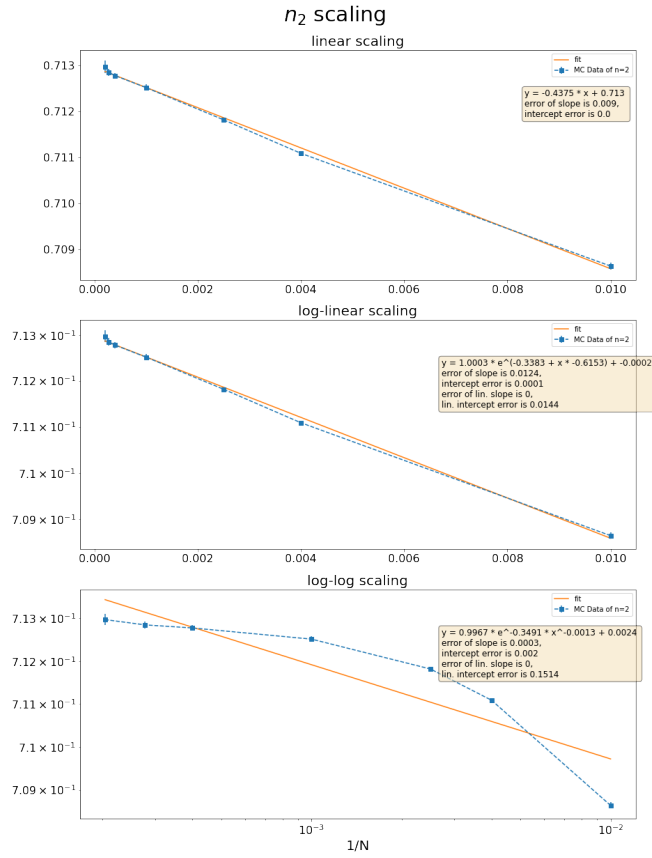


Рис. 1.6: Результаты аппроксимации (оранжевая линия) данных Монте-Карло о долях узлов с двумя соседями n_2 модели Ising-ISAW на квадратной решётке (синие точки) различными способами на диапазоне длин 100-4900

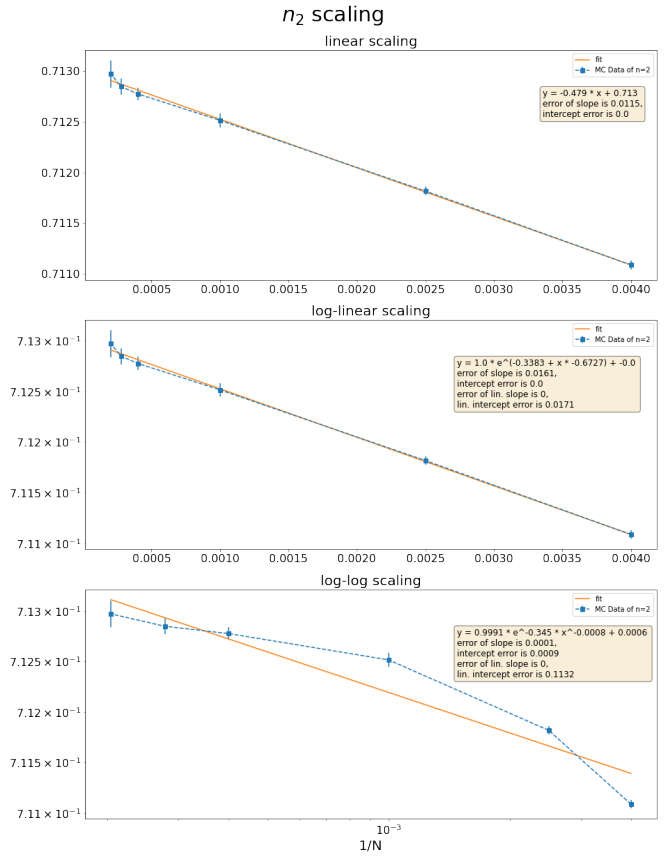


Рис. 1.7: Результаты аппроксимации (оранжевая линия) данных Монте-Карло о долях узлов с двумя соседями n_2 модели Ising-ISAW на квадратной решётке (синие точки) различными способами на диапазоне длин 250-4900

исключение - треугольная решётка: на ней линейный характер результатов настолько заметен, что при отбрасывании наименьшей длины $N=100$ ошибка увеличивается (недостаточность статистики стала сильнее, а "линейность" не изменилась).

1.1.5 Сравнение геометрических свойств модели Изинга на треугольной решётке с квадратной в $J=0$

На графике ?? наглядно показано сравнение приближений долей "одномерных"участков (то есть, долей мономеров с двумя соседями) и узлов с тремя соседями в цепочках на квадратной, треугольной, кубической и гиперкубической решётках. Для расчётов долей на треугольной решётке были использованы длины 100-1200, для квадратной - 250-4900, для кубической и гиперкубической - 200-1200. Фитирование долей треугольной решётки имеет отчётливый линейный характер, даже в приближении на короткие длины. Линейность долей прямоугольных решёток всех размерностей также подтверждается (с учётом погрешности расчётов с наибольшей длиной).

Lattice	$\langle n_2 \rangle$		$\langle n_3 \rangle$		$\langle n_4 \rangle$	
	a	b	a	b	a	b
Square	-0.44(1)	0.71291(4)	-0.843(8)	0.25297(3)	-0.154(3)	0.03412(1)
Triangular	0.492(2)	0.35989(1)	-0.519(3)	0.37410(1)	-0.609(4)	0.19080(1)
Cubic	0.37(2)	0.67440(7)	-1.24(1)	0.26005(5)	-0.525(5)	0.05758(1)
Hypercubic	0.15(2)	0.71978(9)	-1.20(1)	0.22080(6)	-0.468(5)	0.04589(2)

Таблица 1.3: Коэффициенты прямых, полученные линейным фитированием (??) данных симуляций Монте-карло по долям узлов с 2-4 соседями из рисунков ?? для длин N от 100 до 4900 (для квадратной) и 1200 (для остальных решёток)

Lattice	$\langle n_2 \rangle$		$\langle n_3 \rangle$		$\langle n_4 \rangle$	
	a	b	a	b	a	b
Square	-0.473(6)	0.71299(1)	-0.809(3)	0.25291(1)	-0.145(4)	0.03410(1)
Triangular	0.491(3)	0.35989(1)	-0.523(6)	0.37411(1)	-0.603(8)	0.19079(2)
Cubic	0.418(1)	0.67429(3)	-1.27(1)	0.26012(2)	-0.538(4)	0.05761(1)
Hypercubic	0.26(1)	0.71958(3)	-1.27(1)	0.22720(2)	-0.494(6)	0.04596(1)

Таблица 1.4: Коэффициенты прямых, полученные линейным фитированием (??) данных симуляций Монте-карло по долям узлов с 2-4 соседями из рисунков ?? для длин N от 250 до 4900 (для квадратной) и от 200 до 1200 (для остальных решёток)

Lattice	$\langle n_2 \rangle$			$\langle n_3 \rangle$			$\langle n_4 \rangle$		
	a	b	N	a	b	N	a	b	N
Square	-0.473(6)	0.71299(2)	250-4900	-0.809(4)	0.25291(1)	250-4900	-0.145(4)	0.03410(1)	250-4900
Triangular	0.492(2)	0.35989(1)	100-1200	-0.519(3)	0.37410(1)	100-1200	-0.609(4)	0.19080(1)	100-1200
Cubic	0.42(1)	0.67429(3)	200-1200	-1.270(7)	0.26012(2)	200-1200	-0.538(4)	0.05671(1)	200-1200
Hypercubic	0.26(1)	0.71957(3)	200-1200	-1.27(1)	0.22721(2)	200-1200	-0.494(6)	0.04595(1)	200-1200

Таблица 1.5: Коэффициенты прямых, полученные линейным фитированием (??) данных симуляций Монте-карло по долям узлов с 2-4 соседями из рисунков ?? - наилучшие приближения с подбором диапазона длин для каждого графика (в столбце N)

Из таблицы ?? по первым двум строкам, отображающим данные о прямых-фитов квадратной и треугольной решётки соответственно, сходства между одномерием треугольной и квадратной решётки с точки зрения коэффициентов фитирования a и b (??) почти не наблюдается - они имеют как разные значения свободных членов, так и значения и даже (в случае 2-х соседей) знаки коэффициента наклона, разница которых значительно превышает погрешность фита.

Значение свободного члена b для $\langle n_2 \rangle$, то есть предела значения долей при бесконечной длине цепочки, у квадратной и треугольной решётки (первый блок первых двух строк таблицы ??) отличается почти в два раза: 0.71299(2) и 0.35989(1) (что логично, ведь в треугольной решётке диагональные ячейки так же считаются соседними, поэтому половина поворотов конформации добавит соседей).

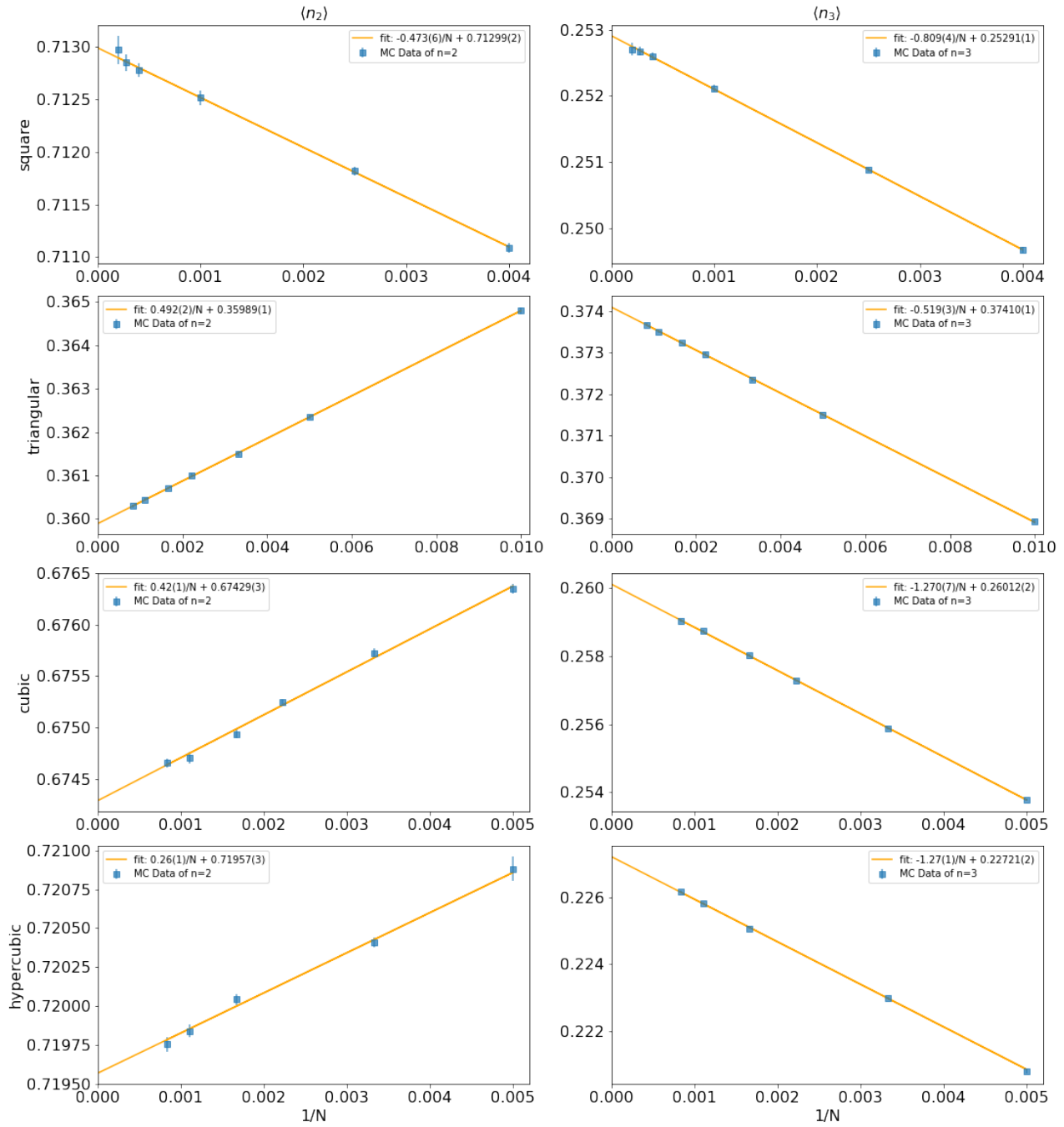


Рис. 1.8: Зависимость средней доли узлов с 2-мя соседями (слева) и 3-мя (справа) от обратной длины $1/N$ в модели Изинга на случайном блуждании на квадратной, треугольной, кубической и гиперкубической (сверху вниз). Синие точки описывают результаты симуляций Монте-Карло, оранжевая линия - график линейной аппроксимации результатов, ошибки рассчитаны с учётом погрешностей полученных данных. Коэффициенты и диапазоны длин рассматриваемых данных записаны в таблице ??

	$\langle n_5 \rangle$			$\langle n_6 \rangle$		
Lattice	a	b	N	a	b	N
Triangular	-0.274(2)	0.063145(6)	100-1200	-0.055(1)	0.012081(2)	100-1200
Cubic	-0.100(2)	0.007536(4)	200-1200	-0.0074(2)	0.000452(1)	200-1200
Hypercubic	-0.102(2)	0.00658(1)	200-1200	-0.0140(3)	0.000659(1)	200-1200

Таблица 1.6: Коэффициенты прямых, полученные линейным фитированием (??) данных симуляций Монте-Карло по долям узлов с 5-6 соседями

	$\langle n_7 \rangle$			$\langle n_8 \rangle$		
Lattice	a	b	N	a	b	N
Hypercubic	-0.0011(1)	0.0000420(3)	200-1200	-0.000024(35)	0.0000010(1)	200-1200

Таблица 1.7: Коэффициенты прямых, полученные линейным фитированием (??) данных симуляций Монте-Карло по долям узлов с 7-8 соседями

1.1.6 Сравнение геометрических свойств модели Изинга на решётках с большим числом соседей в $J=0$

Здесь мы сравниваем линейное фитирование результатов симуляций Монте-Карло треугольной решётки с кубической, имеющей такое же количество возможных соседей, а так же результаты для гиперкубической решётки в $J=0$. Коэффициенты линейного фитирования (??) отображены в таблицах ?? и ??; поскольку в таких условиях плотность конформаций минимальна, доля узлов с 7 и 8 соседей в конформациях на гиперкубической решётке почти нулевая, что видно по таблице ??, поэтому мы рассматриваем число соседей лишь от 2 до 6.

Рассматривая средние строки таблицы ??, где записаны коэффициенты прямых фитирования для n_2 и n_3 треугольной и кубической решётки соответственно, а так же средние графики на рисунке ??, мы видим примерно ту же ситуацию как и в случае сравнения треугольной с квадратной - кубическая решётка на графике ?? показывает почти чёткий линейный характер приближения в пределах погрешности наибольших длин (для $n=3$ линейно видна значительно лучше), но ни коэффициенты наклона a , ни значения свободных членов b не имеют никакого сходства. Единственное отличие от сравнения с квадратной решёткой - графики соответствующих долей треугольной, кубической и гиперкубической решёток имеют одинаковое поведение с точки зрения знака наклона, что действительно и для долей узлов с большим числом соседей. Можно утверждать, что треугольная решётка с точки зрения поведения доли одномерных участков больше похожа на кубическую решётку, нежели квадратную, однако точной численной универсальности (например, почти равных в пределах погрешности коэффициентов) поведения доли "одномерных"участков между ними при бесконечно больших длинах конформации не обнаружена.

Единственная пара коэффициентов, которая оказалась равна в пределах погрешности, являются коэффициенты наклона у линейного фитирования a (??) для долей узлов с 3-мя соседями $\langle n_3 \rangle$ у кубической и гиперкубической решёток (см. таблицу ??).

1.1.7 Обобщение до случайных блужданий с самопересечениями

В качестве завершения исследования поведения долей узлов с фиксированным числом соседей рассмотрим случай базового случайного блуждания, в которой отсутствует ограничение самопересечений. Они легко генерируются в виде последовательности индексов направлений a_N в любой решётке, что ускоряет процесс моделирования. Тогда, начиная с некоторой начальной точки на решётке ω_0 , блуждание определяется как последовательность узлов $\omega_i = \omega_{i-1} + steps[a_i]$, где $steps$ - массив фиксированных смещений из точки, определяемые законами решётки. Точность подсчёта наблюдаемых определяется лишь количеством повторов эксперимента.

С другой стороны, отсутствие требования правильности блуждания вызывает ряд осложнений для сравнения результатов с классом блужданий без самопересечений. Например, возможны случаи, когда два идущих подряд направления противоположны друг другу - то есть, на i -м шаге блуждание смещается из точки ω_{i-1} , а $i+1$ -м - возвращается в него, то есть $\omega_{i-1} = \omega_{i+1}$. В таком случае на графике блуждания возможны "шипы",

концы которых будут узлами с всего одним соседом - основанием "шипа".

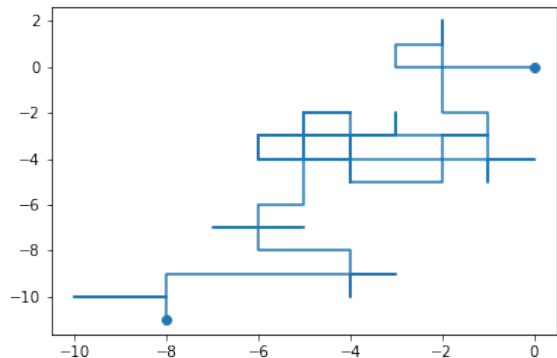


Рис. 1.9: Пример сгенерированного блуждания Random-Walk

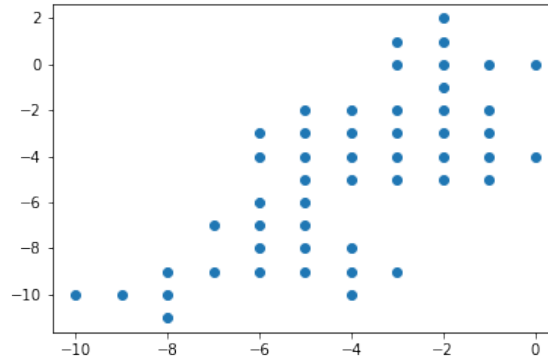


Рис. 1.10: Набор уникальных точек, принадлежащих блужданию Random-Walk

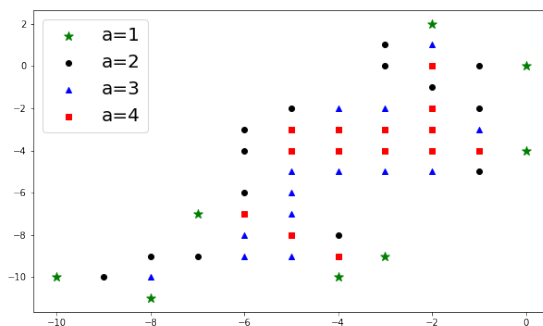


Рис. 1.11: Пример подсчёта соседей у каждого узла блуждания

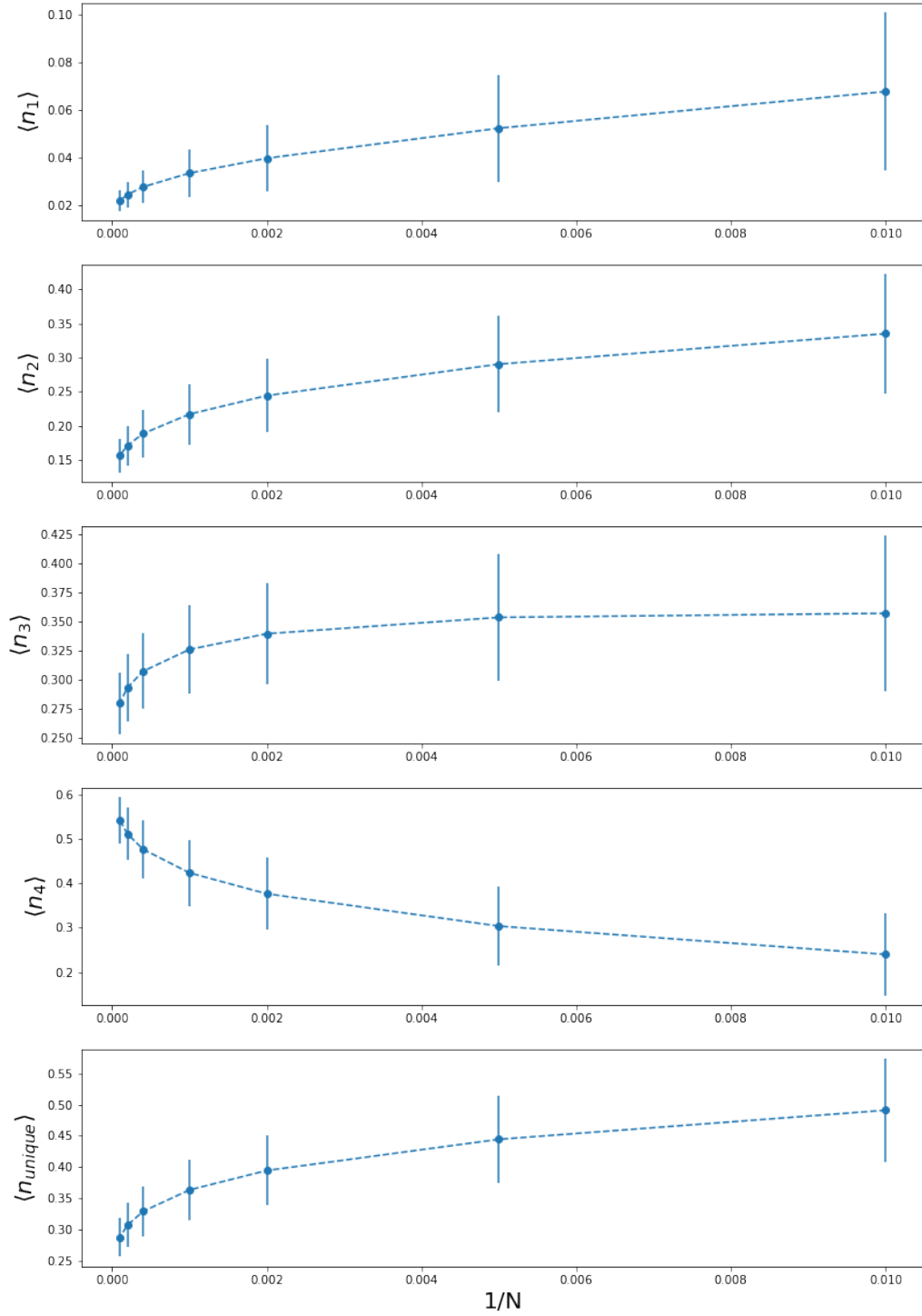
Алгоритм обработки каждого модерируемого блуждания описан на картинках ??, ?? и ??:

- Из случайного блуждания отбираются все уникальные точки узлов
- Для каждого уникального узла рассчитывается кол-во его соседей
- Доля узлов с k соседями считается как количество уникальных узлов с k соседями/общее кол-во уникальных узлов

Была проведена генерация модели случайного блуждания с самопересечениями (далее Random-Walk) для длин $10^2 - 10^4$. Рассматривалась доля узлов с фиксированным числом соседей - от 1 до 4 - среди уникальных узлов в итоговой конформации, для чистоты результатов и возможности сравнения с результатами случайного блуждания без самопересечений. Доли уникальных узлов так же бралась во внимание при симуляциях. Результаты симуляций, а так же количество итераций для каждой длины, описаны в таблице ?? и изображены на графике ??¹.

¹Процесс симуляций был запрограммирован на языке Python и проводился с использованием суперкомпьютера НИУ ВШЭ. Оптимизация требовала дополнительного изменения окружения - см. технический раздел??

Рис. 1.12: Зависимость долей узлов с фиксированным число соседей в случайном блуждании от обратного кол-ва шагов в конфигурации $1/N$



N	steps	unique	n_1	n_2	n_3	n_4
100	7450000	0.49(8)	0.07(3)	0.33(9)	0.36(7)	0.24(9)
200	5684000	0.44(7)	0.05(2)	0.29(7)	0.35(5)	0.30(9)
500	2045000	0.39(6)	0.04(1)	0.24(5)	0.34(4)	0.38(8)
1000	654000	0.36(5)	0.03(1)	0.22(4)	0.33(4)	0.42(7)
2500	132000	0.33(4)	0.027(7)	0.19(3)	0.31(3)	0.48(6)
5000	37000	0.31(4)	0.024(5)	0.17(3)	0.29(3)	0.51(6)
10000	10000	0.29(3)	0.021(4)	0.16(2)	0.28(3)	0.54(5)

Таблица 1.8: Средние доли узлов с 1-4-мя соседями в конформациях модели Random-Walk длин $10^2 - 10^4$

Погрешности результатов

Полученные в данной подсекции результаты имеют необоснованно большие погрешности, что потребовало более тщательного исследования. Необходимо проверить распределение результатов со временем, а так же сходимость средних наблюдаемых величин и их ошибок. В качестве примера рассмотрим первую исследуемую длину $N = 100$, т.к. именно её симуляции протекают быстрее всех.

Распределение наблюдаемых долей узлов с фиксированным числом соседей 1-4, а так же доли уникальных узлов рассмотрены на гистограммах на левом графике рисунка ?? в двух моментах времени: после 10^6 шагов и после $2.5 * 10^6$ шагов. На рисунке видно, что данные всех величин имеют нормальное или близко к нормальному распределению, а несимметричные склоны некоторых величин (n_1 и n_2) объясняются близостью соответствующего края к нулю.

Сходимость наблюдаемых величин можно увидеть на правом графике ??, где замеры средних проводились через каждые 4000 шагов. На графике средних заметна сходимость средней величины и уменьшение колебаний. С другой стороны, график среднего квадратического отклонения не стремится к нулю как ожидалось, а так же сходится с уменьшением колебаний к ненулевому значению. Это показывает противоречивость результатов (по крайней мере замеров ошибки - среднее явно сходится), причину чему следует искать в коде.

Для удостоверения, что причина не лежит в jit-компиляции, был проведён запуск нескомпилированного с помощью numba кода. Результаты оказались идентичны с jit-компиляцией, и следовательно проблема в другом месте. (Продолжение следует....)

1.1.8 Число соседей в атмосферах Преллберга

В статье [?] в пространстве невзаимодействующих случайных блужданий без самопересечений было рассмотрено так свойство конформации, как "атмосфера количество возможных направлений для удлинения цепочки длины N или количество возможных N+1-х узлов.

Мы предполагаем, что данное свойство имеет связь с числом соседей при рассмотрении процесса удлинения цепочки и такие величины, как доля узлов цепочки $\langle n_i \rangle$ с фиксированным числом соседей и вероятность конформации иметь атмосферу $k - p^{(k)}$ - по-разному описывают одно и то же поведение цепочек с точки зрения их плотности.

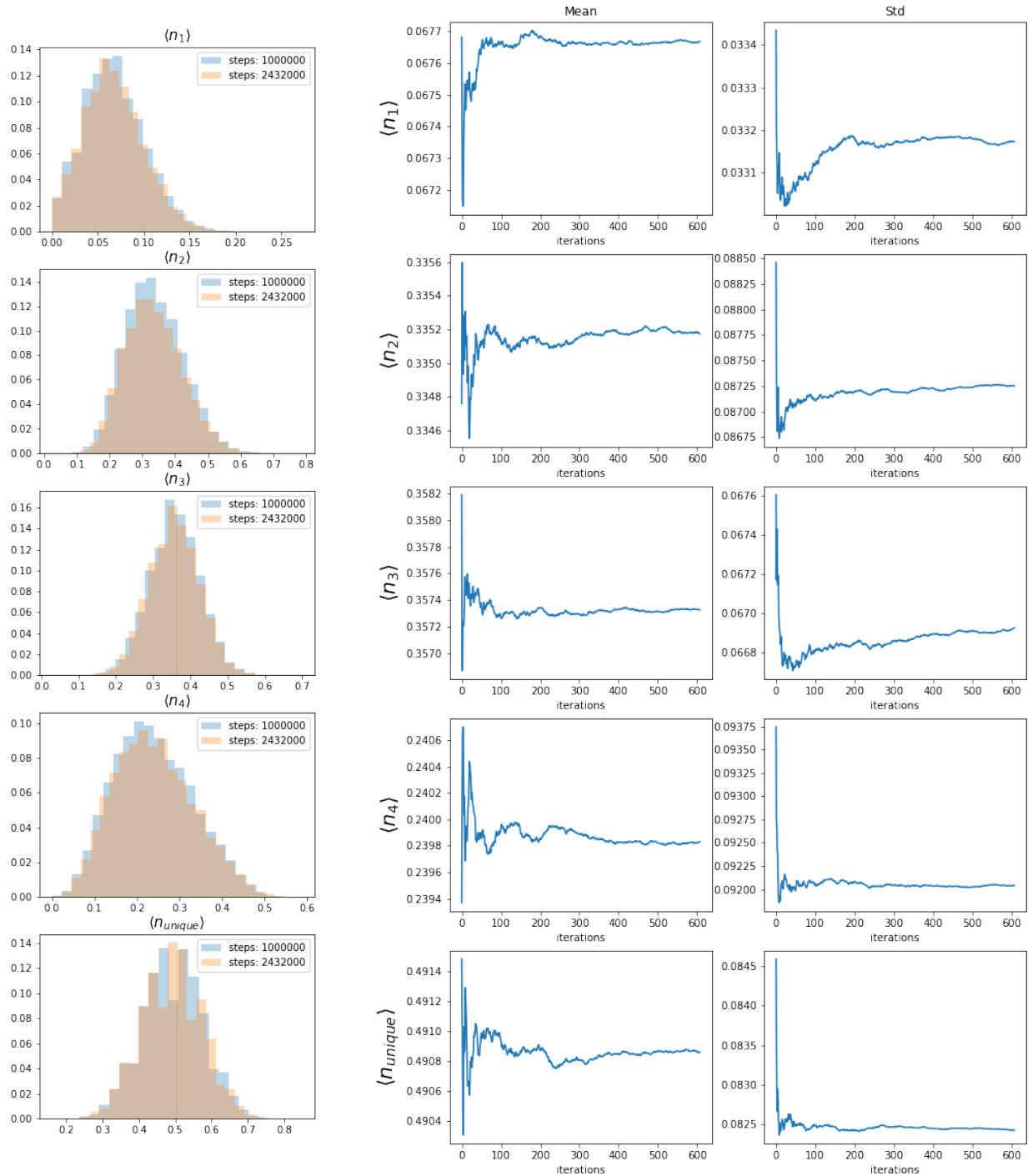
Рассмотрим верхний рисунок ?? : если конец цепочки длины N (назовём его "N-ым узлом") имеет атмосферу три (три оранжевые точки вокруг правого конца), то при добавлении нового N+1-го узла N-й будет иметь два соседа: N-1-й и N+1-й узлы (бывший правый конец стал черной точкой).

Так же при атмосфере 2 - как на среднем рисунке ?? - когда, уже имея два соседа (черная конечная точка) и две возможности для удлинения, N-ый узел при удлинении будет иметь 3 соседа (треугольник в том же месте на правой половине).

И наконец, при атмосфере 1 (последний рисунок ??) удлинение цепочки единственным возможным способом (одна оранжевая точка) приведёт к тому, что старый конец цепочки будет иметь 4 соседа (красный квадрат вместо треугольника). Примеры таких явлений можно увидеть на рисунке ?. Очевидно, что случай удлинения при атмосфере 0 рассмотреть невозможно, и провести аналогию с соседями нельзя.

Подобная интерпретация данных свойств в контексте удлинения цепочки показывает, что событие "цепочка длины N имеет атмосферу 3/2/1" при удлинении однозначно переходит к состоянию "N-й узел цепочки (теперь предпоследний) имеет 2/3/4 соседа" соответственно.

Рис. 1.13: Слева: Распределение долей узлов с 1-4 соседями и уникальных узлов блуждания длины 100 в два момента времени. Справа: История результатов (Столбец mean - средняя величина, столбец std - значение ошибки на i-м замере) долей узлов с 1-4 соседями и уникальных узлов блуждания длины 100 с интервалом замеров в 4000 шагов



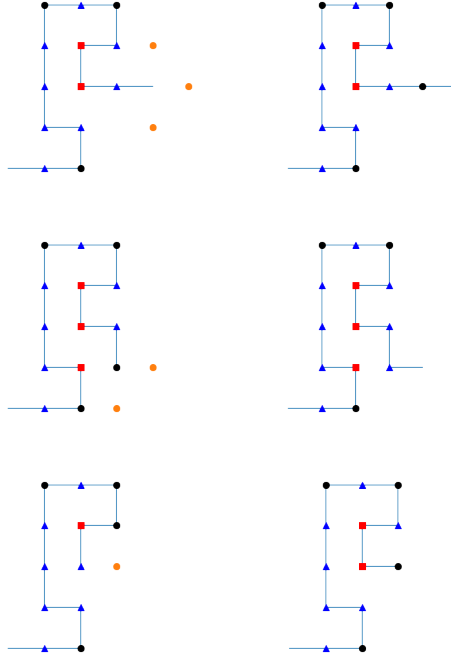


Рис. 1.14: Пример удлинения цепочки на квадратной решётке с атмосферой 3,2,1 (сверху вниз): слева изображена конформация до удлинения, справа - после, возможные способы добавить новый узел отмечены оранжевым, разметка узлов по количеству соседей соответствует рисунку ??

С другой стороны, подобная интерпретация атмосферы Преллберга не учитывает перерасчёт соседей у других узлов после удлинения цепочки - так, на примере атмосферы 1 (на нижнем рисунке ??) видно, что у одного из узлов, кроме конечного (бывшая черная точка справа), так же увеличилось число соседей (с 2-х до 3-х), тем самым она стала поверхностным узлом (синим треугольником в том же месте на правой половине).

Проведём сравнение долей узлов в фикс. числе соседей в модели Ising-ISAW при $J=0$ и вероятность конформации модели не взаимодействующего блуждания иметь атмосферу k в пределе на бесконечно большую длину на квадратной решётке.

k	$p^{(k)}$	i	$b(\langle n_i \rangle)$
3	0.711 14(3)	2	0.71299(2)
2	0.225 00(2)	3	0.25291(1)
1	0.054 76(1)	4	0.03410(1)
0	0.009 096(4)	-	-

Таблица 1.9: Сравнение свободных членов линейных приближений вероятностей у конформации иметь n -ю атмосферу (слева) и долей мономеров с i соседями (справа) в зависимости от обратной длины конформации $1/N$

На таблице ?? слева изображены значения свободных членов графика зависимости вероятности гомополимерной цепочки иметь атмосферу k в статье [?], то есть вероятность, что второй конец цепочки бесконечно большой длины N имеет k возможных направления для удлинения и следовательно, k возможных узлов, которые могут стать новым узлом в цепочке. Справа изображены значения свободных членов приближений графиков долей узлов с i соседями. Хотя все значения отличаются больше чем на погрешность расчётов, однако нельзя не заметить довольно близкое сходство $p^{(3)}$ и свободного члена $\langle n_2 \rangle$, хотя сами приближения имеют противоположные по знаку наклоны.

В частной переписке с автором статьи была предложена следующая коррекция результатов [?]: поскольку

мы рассматриваем состояние при котором удлинения точно произойдёт, то сравнивать необходимо именно условные вероятности вида $P(\text{цепочка имеет атмосферу } k \mid \text{удлинение возможно}) = P(\text{цепочка имеет атмосферу } k) / P(\text{цепочка имеет положительную атмосферу})$:

$$p^{(1/2/3)'} = p^{(1/2/3)} / (p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)})$$

Рассмотрим такую "приведённую" вероятность атмосфер и сравним с результатами для долей соседей.

k	$p^{(k) '}$	i	$b(\langle n_i \rangle)$
3	0.7177	2	0.71299(2)
2	0.2271	3	0.25291(1)
1	0.0553	4	0.03410(1)

Таблица 1.10: Вероятности у конформации иметь k-ю атмосферу (слева) и долей мономеров с i соседями (справа) в пределе бесконечной длины в случае гарантированно возможного удлинения

Разница между $p^{(3) '}$ и $(\langle n_2 \rangle)$ увеличилась. Остальные величины так же не удалось приравнять в пределах погрешности, что говорит о том, что величины обозначают несколько разные поведения модели.

1.1.9 Атмосферы Преллберга в возвратных случайных блужданиях

Подобная атмосферам Преллберга задача рассматривалась в книге [?], на странице 206 под номером 9, но не для случайных блужданий без самопересечений, а некоторой модификации простого случайного блуждания - *возвратного*. Задача формулируется следующим образом:

- Случайное блуждание на квадратной решётке начинается из некоторой точки $x_0 = \chi$, не лежащей в начале координат.
- Процесс случайного блуждания длится не фиксированное количество шагов, а до фиксированной *точки остановки* - до достижения блужданием начала координат $x_{end} = 0$
- До достижения точки остановки блуждание может посетить одну или несколько соседних с началом координат точек - (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0). Пусть число посещенных блужданием соседних точек $N \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Задачей является вычислить вероятности блуждания посетить каждое возможное количество соседних точек для бесконечно удаленной от начала координат начальной точки блуждания χ :

$$p_n = \lim_{|\chi| \rightarrow \infty} P_\chi[N = n] = ?, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Так же в качестве подсказки было указано, что отношение $p_1 : p_2 : p_3 : p_4$ почти равно $4 : 3 : 2 : 1$.

Действительно, сформулированная задача похожа на определение атмосфер Преллберга: в обоих случаях рассматривается конец пусть и разных по свойствам, но блужданий. Более того, в отличие от числа соседей все события имеют явную связь с атмосферами: при n посещённых перед остановкой блуждания соседних точек, не посещёнными будут 4-n точек, и можно сказать, что это соответствует атмосфере 4-n блуждания без самопересечений. То есть, можно выдвинуть предположение, что $p_n = p^{(4-n)}$

Однако проблема в том, что для простого случайного блуждания на квадратной решётке любой длины атмосфера всегда будет равна 4, так как блуждание, описанное в задаче, может идти по посещённым ранее точкам. Из этого следует основная причина, почему результаты Преллберга на таблице ?? не имеют подобного отношения, из чего следует логичный вывод, что число непосещённых точек посещённых точек вокруг конца простого случайного блуждания не соответствует атмосфере Преллберга для блуждания без самопересечений.

Глава 2

Приложение

2.1 Литературный обзор

С целью поиска информации о локальном координационном числе (что в случае блужданий может также быть названо числом соседей узла), был проведён обзор литературы, возможно имеющей отношение к рассматриваемым в рамках проекта моделям.

2.1.1 Livne, Meirovich: Polymers Adsorbed on a surface

Особенности модели блуждания

В работе [?] исследуется поведение адсорбирующего случайного блуждания без самопересечений на кубической решётке со следующими особенностями симуляции

- Случайное блуждание длины $N+1$ строится пошагово ($N+1$ мономеров в цепочке или N шагов), из начала координат ($x=0, y=0, z=0$) с ограничением на верхнее полупространство (то есть, $z \geq 0$ и плоскость $z=0$ имеет открытые граничные условия).
- Энергия конформации считается как число мономеров, лежащих на поверхности (у которых $z_i = 0$), умноженное на константу взаимодействия полимера и поверхности ϵ
- Вероятность i -й конформации считается последовательно: вводится новая статсумма, суммирующая для заданного направления текущей недостроенной цепочки всевозможные хвосты остаточной длины (10) [?].

Подробнее о статсумме и методе Сканирования

В данном подразделе вольным образом объясняется действие статсуммы, созданное методом сканирования. Так как при симуляции строится новое блуждание "с нуля" требуется оценка вероятности как каждого шага (точнее, направления v_k) так и всего блуждания.

Поэтому для k -го шага вероятность рассчитывается следующим образом:

1. Считается статсумма куска будущего блуждания из b ($\leq N - k + 1$) шагов, начинающая с направления v на высоте z_{k-1} :

$$Z_k(v, b, z_{k-1}, v_{k-1}) = \sum_j \exp(-\epsilon m_j(0)/k_b T) \quad (2.1.1)$$

2. Затем проводится расчёт вероятности выбрать направление v из всех возможных на k -м шаге:

$$p_k(v|b, z_{k-1}, v_{k-1}) = Z_k(v, b, z_{k-1}, v_{k-1}) / \sum_v Z_k(v, b, z_{k-1}, v_{k-1}) \quad (2.1.2)$$

3. Итоговой вероятностью всего построения будет произведение всех вероятностей каждого шага по выбранным направлениям:

$$P_i(b) = \prod_{k=1}^N p_k(v_k|b, z_{k-1}, v_{k-1}) \quad (2.1.3)$$

Результаты работы

Основными итогами работы являлось подтверждение эффективности метода "сканирования" для работы с длинными цепочками в модели адсорбирующего блуждания, определено критическое шкалирование перпендикулярного радиуса инерции (радиуса инерции проекции блуждания на ось z), а также профиля мономерной концентрации $p(z)$ (средняя доля узлов конформации длины $N+1$ на фиксированной высоте z от поверхности).

Информации о локальном координационном числе в статье найдено не было.

2.1.2 Madras, Sokal: The Pivot Algorithm

Работа [?] повествует о работе и эффективности алгоритма Пивота в изучении модели случайного блуждания без самопересечений (СБС).

Основные принципы алгоритма

Каждый шаг алгоритма проводит следующие действия над уже сгенерированной цепочкой длины $N+1$:

- Случайно выбирается с равномерным распределением для рассматриваемых узлов $p_k = 1/N$ k -й узел цепочки ($0 \leq k \leq N-1$, хотя начальную точку $k=0$ на практике не используют)
- Последующую половину цепочки ($\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots, \omega_N$ заменяют элементов группы симметрии (проще говоря, отражают, поворачивают или проводят комбинацию этих действий)
- В случае, если полученная операцией цепочка осталась без самопересечений, шаг принимается - в противном случае, шаг производится заново

В статье так же была доказана эргодичность алгоритма, а так же средние вероятности принятия каждого из возможных преобразований.

Для симуляций в качестве стартовой позиции использовалось два варианта: прямые цепочки "rods", при которых проводилось некоторое кол-во шагов до достижения термального равновесия системы (в таком состоянии процесс из следующих состояний цепочки становится близким по распределению к стационарному стохастическому), или же "димеризованные цепочки", состояние которых уже считается равновесным. Вторым методом становится крайне времязатратным при большой длине цепочки, поэтому при $N \geq 2400$ чаще применялась термализация прямых цепочек.

Пристальное внимание в статье было обращено к среднему радиусу инерции S_N^2 и квадрату расстояния между концами ω_N^2 , а так же к оценке метрической экспоненты ν , характеризующей обе величины в крит. области модели:

$$\begin{aligned}\langle \omega_N^2 \rangle &\sim N^{2\nu} \\ \langle S_N^2 \rangle &\sim N^{2\nu}\end{aligned}$$

В оценке будущей работы было так же отмечено, что алгоритм Пивота не подходит для расчёта связующей μ и критической γ экспонент (связующую константу так же называют *эффективным координационным числом*), так как алгоритм работает лишь в случае канонического ансамбля (при фиксированной длине цепочки) и требуется алгоритм, работающий уже в большом каноническом ансамбле (с цепочками изменяемой длины).

В статье не рассматривалось как таковое "число соседей узлов".

2.1.3 Спизер, Основные принципы случайного блуждания, глава 3

Данный подраздел посвящён рассмотрению случая двумерного возвратного случайного блуждания - блуждания, движущемся по состояниям R до достижения одного из элементов $A \subset R$. Под T или T_A мы будем подразумевать момент остановки - минимальное число $1 \leq k \leq \infty$, такое что $x_k \in A$, то есть минимальное время достижения процессом $x_i A$.

Основные вероятностные функции

Здесь будут более тщательно описаны используемые в главе функции вероятностей перехода.

$Q_n(x, y)$ определена на $(R - A) \times (R - A)$, $n \geq 0$ и обозначает вероятность попасть на n -м шаге попасть в y (при $x_0 = x$), не попав за это время в A . Логично, что при остановке $T < n$ вероятность достижения на n -м шаге не существует, т.к. процесс остановлен.

$$Q_n(x, y) = P_x[x_n = y; T > n] \quad (2.1.4)$$

Функция $H_A^{(n)}(x,y)$, наоборот, определяет вероятность n -м шаге остановиться в $y \in A$ (то есть, y является первым состоянием из A , в которое попал процесс. В данном случае H_A определено на $R \times A$

$$H_A^{(n)}(x,y) = \begin{cases} P_x[x_T = y; T = n], & x \in R - A \\ 0, & x \in A, n > 1 \\ \delta(x,y), & x \in A, n = 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$H_A(x,y)$ является обобщением предыдущей функции по времени, определяя лишь вероятность остановки процесса, начавшегося в x , в $y \in A$ и определена там же как и $H_A^{(n)}(x,y)$.

$$H_A(x,y) = \begin{cases} P_x[x_T = y; T < \infty], & x \in R - A \\ \delta(x,y), & x \in A \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Для случая $x \in R - A$ эту функцию можно определить так же как:

$$H_A(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_A^{(n)}(x,y) \quad (2.1.7)$$

Особым случаем является вероятность $\Pi_A(x,y)$, существование которой обусловлено тем фактом, что время остановки должно быть натуральным числом - строго говоря, процесс может начаться в $x \in A$, пройти по $x_1, x_2, \dots, x_T - 1 \in R - A$ и остановиться в $y \in A$.

$$\Pi_A(x,y) = P_x[x_T = y, T < \infty] \quad (2.1.8)$$

Последняя функция - $g_A(x,y)$, обобщает по времени Q_n :

$$g_A(x,y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y), & x, y \in R - A \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Из общих понятий нам также понадобится $G(x,y)$ - ожидаемое число попаданий в y при начальной точке x :

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x[x_n = y] \quad (2.1.10)$$

Соотношения между функциями

Перейдём к некоторым предложениям из книги, которые позволят более полно понять природу некоторых функций в зависимости от начального состояния в них. Здесь будет описана лишь их вольная интерпретация, без доказательства.

Для произвольного случайного блуждания:

$$\sum_{t \in R} P(x,t) H_A(t,y) - H_A(x,y) = \begin{cases} \Pi_A(x,y) - \delta(x,y), & x \in A, y \in A \\ 0, & x \in R - A, y \in A \end{cases} \quad 10.1() \quad (2.1.11)$$

Пункт (а) предложения 10.1 проводит важную связь между $\Pi_A(x,y)$ и $H_A(x,y)$ при разных начальных состояниях: при $x \in R - A$ выражение равно нулю, как так оба слагаемых выражают один и тот же процесс из начального состояния до множества остановки, как со смещением (первое слагаемое), так и без него (правое). Равенство для случая $x \in A$ подтверждает раннюю интерпретацию функции $\Pi_A(x,y)$: шаг из множества остановки ($P(x,t)$) и затем движение из t до остановки снова в A .

$$0 \leq g_A(x,y) \leq g_A(y,y) \forall x, y \in R$$

То есть ожидаемое число попаданий из начального состояния x в y в обход A всегда меньше или равно чем ожидаемое число возвращений в начальное состояние. Если блуждание является аperiodическим, то:

$$g_A(x, x) < \infty \forall x \in R$$

Для $x \in R - A, y \in A$:

$$H_A = \sum_{t \in R} g_A(x, t) P(t, y)$$

$$G(x, y) = \sum_{t \in A} H_A(x, t) G(t, y)$$

Начало потенциала

Так как в движении блуждания важнейшую роль играет множество остановки (которое может быть как конечное, так и бесконечное), то основное внимание главы уделено распределению конечной точки блуждания $H_A(x, y), x \in R, y \in A$, обсуждение которого начинается с расширения предложения 10.1(а):

$$\sum_{t \in R} P_{n+1}(x, t) H_A(t, y) = H_A(x, y) + \sum_{t \in A} G_n(x, t) [\Pi_A(t, y) - \delta(t, y)], n \geq 0 \quad (2.1.12)$$

Необходимо заранее подчеркнуть, что это и последующие предложения считаются верными для апериодичных, возвратных, двумерных СБ. Примером такого служит простое случайное блуждание на плоскости, которое исследовалось под названием *RandWalk*.

Крайне важным, хотя и очевидным утверждением является следующее предложение:

$$\sum_{t \in A} \Pi_A(t, y) = \sum_{t \in A} \Pi_A(y, t) = 1, \forall y \in A \quad (2.1.13)$$

Другими словами, апериодичные возвратные СБ рано или поздно при выходе из множества A попадут в него же. Теперь можно справедливо утверждать, что:

$$\sum_{t \in A} \Pi_A(t, y) - 1 = \sum_{t \in A} [\Pi_A(t, y) - \delta(t, y)] = 0$$

Следовательно, мы можем модифицировать 11.1 добавлением любой независимой от t константы, которая будет сокращаться при раскрытии суммы:

$$\sum_{t \in R} P_{n+1}(x, t) H_A(t, y) = H_A(x, y) + \sum_{t \in A} [G_n(x, t) - G_n(0, 0)] [\Pi_A(t, y) - \delta(t, y)] = H_A(x, y) - \sum_{t \in A} A_n(x, t) [\Pi_A(t, y) - \delta(t, y)] \quad (2.1.14)$$

Именно с этого утверждения возникает задача перехода обеих частей предложения к пределу $n \rightarrow \infty$. Опуская доказательства существования пределов, положим следующие ответы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, y)$ существует и определен как $A(x, y)$
2. $\sum_{t \in R} P_{n+1}(x, t) H_A(t, y)$ существует, не зависит от t и определен как $\mu_A(y)$

Пока что промежуточным после последних рассуждений выражением для распределения конечной точки СБ при бесконечном (или неопределенном) числе шагов является:

$$H_A(x, y) = \mu_A(y) + \sum_{t \in A} A(x, t) [\Pi_A(t, y) - \delta(t, y)] \quad (2.1.15)$$

Так же будет полезным рассмотреть не только движение из бесконечности до множества A , но и движение вокруг него - то есть, перемещение из $x \in A$ в $y \in A$. Очевидно, для этого важно более чётко определить способы использования функции $\Pi_A(x, y)$.

При рассмотрении некоторого конечного множества точек $B \subset R$, функция $A(x, y)$ легко представима в виде матрицы $A(x, y), x, y \in B$, которое называется *сужением оператора $A(x, y)$ на B* . Такая матрица всегда имеет обратную, если $|B| \geq 2$ (предложение 11.8). Тем самым, мы получаем новый оператор $K_B(x, y)$, определенный так же на $B \times B$:

$$\sum_{t \in B} A(x,t)K_B(t,y) = \delta(x,y), x,y \in B$$

Далее исследуемое остановочное множество мы будем обозначать как B , так как A занято новой функцией. Определим так же ещё несколько вспомогательных функций и константу:

$$K_B(\cdot y) = \sum_{x \in B} K_B(x,y)K_B(x\cdot) = \sum_{y \in B} K_B(x,y)K_B(\cdot y) = \sum_{x \in B} \sum_{y \in B} K_B(x,y)$$

Все эти инструменты помогут в определении и доказательстве основной теоремы параграфа, в которой, помимо самого предложения 11.4, есть нужная нам модификация. В случае $x,y \in B$ для (??) получим следующее выражение:

$$\delta(x,y) = \mu_B(y) + \sum_{t \in B} A(x,t)[\Pi_B(t,y) - \delta(t,y)]$$

Будет разумно перейти к матричной форме: левая часть будет единичной матрицей, первое слагаемое правой части будет матрицей M_B размера $|B| \times |B|$, каждая строка которой - вектор значений $\mu_B(y)$, - $A(x,y)\Pi - E$ на $B \times B$. Получим:

$$E = M_B + A \times (\Pi_B - E)$$

Применим оператор K_B слева:

$$K_B = K_B \times M_B + \Pi_B - E$$

Переход к элементам даст нам знакомые функции:

$$K_B(x,y) = K_B(x\cdot)\mu_B(y) + (\Pi_B - \delta(x,y))$$

Операция суммирования по строкам приведёт нас к двум важным пунктам теоремы:

$$K_B(\cdot y) = K_B(\cdot)\mu_B(y) \rightarrow \mu_B(y) = \frac{K_B(\cdot y)}{K_B(\cdot\cdot)}, \quad K_B(\cdot\cdot) > 0$$

Второй пункт выводится из ряда противоречий: если $K_B(\cdot\cdot) = 0$, то $K_B(\cdot y) = 0$ и матрица вырожденная и не имеет обратной (то есть, $A(x,y)$ не существует). Если $K_B(\cdot\cdot) < 0$, $K_B(\cdot y) < 0$, однако из определения K_B :

$$\sum_{t \in B} A(x,t)K_B(t,y) = \sum_{t \in B} K_B(x,t)A(t,y) = \delta(x,y) \rightarrow \sum_{t \in B} \sum_{x \in B} K_B(x,t)A(t,y) = 1 > 0$$

$A(x,y) \geq 0$ из предложения 11.7, поэтому снова противоречие. Подстановка первого доказанного пункта в ранние выкладки даст нам последний пункт теоремы:

$$\Pi_B(x,y) - \delta(x,y) = K_B(x,y) - \frac{K_B(x\cdot)K_B(\cdot y)}{K_B(\cdot\cdot)}$$

В итоге мы увидели, насколько мощным инструментом является функция $A(x,y)$ даже в сужении на B : её вычисление позволяет моментально рассчитать распределение конечного состояния из бесконечно удалённого, или распределение при возвращении во множество B . Теперь важнейшей задачей является расчёт самой функции $A(x,y)$, далее известное как ядро потенциала блуждания.

Основные вероятности в СБ в рамках гармонического анализа

Примеры в физике

Движение из бесконечности

Простое случайное блуждание на плоскости

2.2 Программно-техническое приложение

В данном разделе будут описаны особенности работы с суперкомпьютером НИУ ВШЭ, которые могут быть важными дополнением к основной инструкции пользователя.

2.2.1 Применение jit-компиляции при программировании на языке Python

Симуляции случайного блуждания с самопересечениями (для кода см. папку *Random_Walk* [?]) были запрограммированные на языке Python с компиляцией с помощью пакета numba метод jit. В качестве окружения была использована стандартная библиотека *Python/Anaconda_v11.2021* встроенная в стандартное ПО суперкомпьютера.

Выполнение первых экспериментов по симуляциям шло крайне медленно - результаты за семь дней можно увидеть на таблице ??

N	steps	unique	n_1	n_2	n_3	n_4
100	7450000	0.49(8)	0.07(3)	0.33(9)	0.36(7)	0.24(9)
200	5684000	0.44(7)	0.05(2)	0.29(7)	0.35(5)	0.30(9)
500	2045000	0.39(6)	0.04(1)	0.24(5)	0.34(4)	0.38(8)
1000	654000	0.36(5)	0.03(1)	0.22(4)	0.33(4)	0.42(7)
2500	132000	0.33(4)	0.027(7)	0.19(3)	0.31(3)	0.48(6)
5000	37000	0.31(4)	0.024(5)	0.17(3)	0.29(3)	0.51(6)
10000	10000	0.29(3)	0.021(4)	0.16(2)	0.28(3)	0.54(5)

Таблица 2.1: Средние доли узлов с 1-4-мя соседями в конформациях модели Random-Walk длин $10^2 - 10^4$

Для сравнения с другими платформами, в случае длины цепочки $N = 10000$, процесс из 10000 шагов на Google Colab занимал не более 7 часов.



Решением проблемы оказалось создание собственного окружения с другими версиями используемых пакетов numru и numba (полный список так же есть в репозитории с кодом [?]). Новые результаты за 7 дней описаны в продолжении основного раздела.

При обсуждении столь значительного различия во времени выполнения между окружениями поддержкой было выдвинуто предположение, что окружения отличаются сторонними библиотеками линейной алгебры, используемой пакетом numru: наиболее распространенными считаются OpenBLAS и Intel MKL. Основным фактором преимущества той или иной библиотеки является именно процессор (Intel или non-Intel).

В новом окружении пакетом numru использовалась именно библиотека OpenBLAS, в то время как в Anaconda - Intel MKL. Это следовало из применения в данных окружениях следующего:

```
import numpy
print(numpy.show_config())
```

Подробнее об определении какая библиотека линейной алгебры используется в пакете numru можно найти здесь.