и аналогично

$$\int\limits_M^p (Hd_\eta - Kd\xi) = -(u\upsilon)_m + (u\upsilon)_p + \int\limits_M^p (2\tfrac{\delta\upsilon}{\delta s} - \tfrac{b-a}{\sqrt{2}}\upsilon)uds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$(\mathrm{u}\upsilon)_m = \tfrac{(u\upsilon)_p+(u\upsilon)_Q}{2} + \int\limits_M^p (\tfrac{\delta\upsilon}{\delta s} - \tfrac{b-a}{2\sqrt{2}})u \quad ds + \int\limits_Q^M (\tfrac{\delta\upsilon}{\delta s} - \tfrac{a+b}{2\sqrt{2}})u \quad ds +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int\limits_P^Q (Hd_\eta - Kd\xi) - \tfrac{1}{2}\int\limits_{MP}\int\limits_Q (\upsilon Q[u] - uM[\upsilon])d\xi \quad d\eta. \quad (8)$$

Эта формула является тождеством, верным для любых досточно гладких функций u и υ
Пусть υ - решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция υ зависит от точки М как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathrm{M}[\upsilon] = \upsilon_{\xi\xi} - \upsilon_{\eta\eta} - (a\upsilon)_\xi - (b\upsilon)_\eta + c\upsilon = 0 \text{ внутри } \Delta MPQ \quad (9)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\delta\upsilon}{\delta s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\upsilon \text{ на характеристике MP,} \\ \frac{\delta\upsilon}{\delta s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\upsilon \text{ на характеристике MQ,} \end{array}\right\} \quad (9a)$$

$$\upsilon(M) = 1$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$\upsilon = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}}ds} \text{ на MP,}$$
$$\upsilon = e^{\int\limits_{s_\eta}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}}ds} \text{ на MQ,}$$

где s_0 - значение s в точке М. Как мы видели в §4, уравнение (9) и значение функции υ на характеристиках MP и MQ полностью определяют её в области MPQ. Функцию υ часто называют функцией Римана.

Таким образом формула (8) для функции υ удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$\upsilon(M) = \frac{(u\upsilon)_p + (u\upsilon)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_P^Q [\upsilon(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(\upsilon_\xi d\eta + \upsilon_\eta d\xi) +$$

$$+ \mathrm{u}\upsilon(a \quad d\eta - b \quad d\xi)] + \frac{1}{2}\int\limits_{MP}\int\limits_{Q} \upsilon(M, M')f(M')d\sigma_{M'}(d\sigma_{M'} = d\xi d\eta). \quad (10)$$

Эта формула решает проблему, поскольку выражения под знаком интеграла вдоль PQ содержат функции, известные на кривой C. Действительно, функция i была определена ранее, а функции

$\mathrm{u}|_c = \phi(x)$,

$\mathrm{u}_x|_c = u_s cos(x, s) + u_n(x, n) = \frac{\phi'(x) - \psi(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$

$\mathrm{u}_y|_c = u_s cos(y, s) + u_n(y, n) = \frac{\phi'(x)f'(x) - \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$

вычисляются при помощи начальных данных

Формула (10) показывает, что если известны начальные данные на дуге PQ, то они полностью определяют функцию в характеристическом ΔPMQ при условии, что в этой области известна функция f(x, y) известна в этой области[1]).

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает его единственность (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, с. 51)

Можно показать, что функция u, определенная формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7)-(7′). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

3.Физическая интерпретация функции Римана. Установим физический смысл функции υ(M, M′). Для этого найдем решение неоднородного уравнения:

$$\mathrm{Q[u]} = -2\mathrm{f}_1 \quad (f = 2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой C. Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид:

$$\mathrm{u(M)} = \int\limits_{MP}\int\limits_{Q} \upsilon(M, M')f_1(M')d\sigma_{M'}.$$

24 мая 2024 г.