

第十五章 欧拉图与哈密顿图

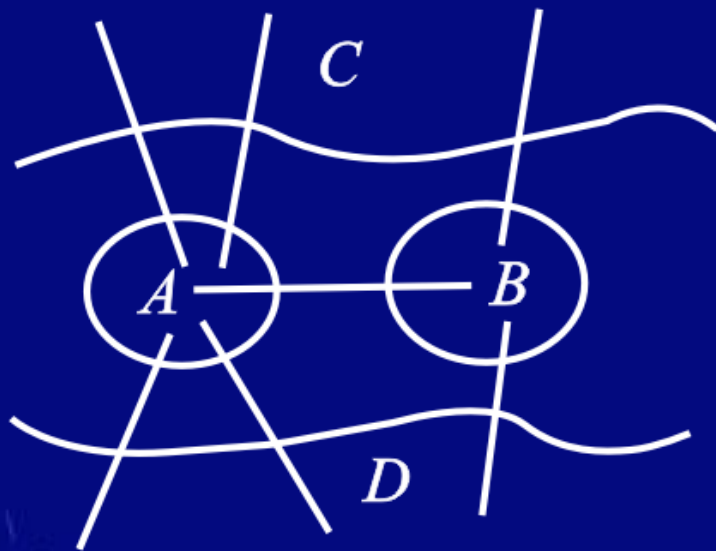
本章的内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 带权图与货郎担问题

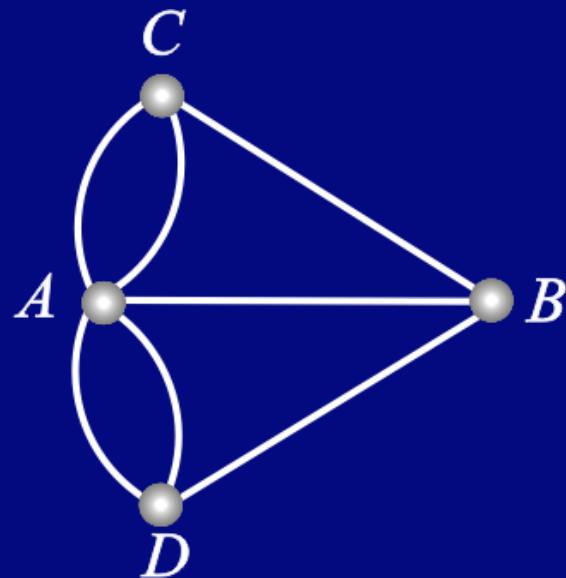
本章的先行知识是第十四章

第一节 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图



(1)



(2)

图 1

其实，欧拉图是一笔画出的边不重复的回路。

一、 欧拉图的定义与判别法

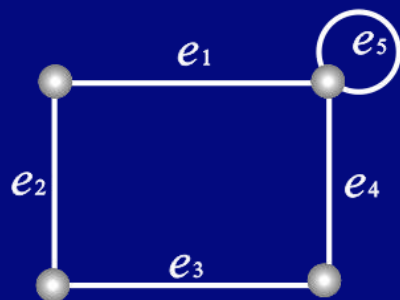
1. 欧拉图的定义

定义 15.1

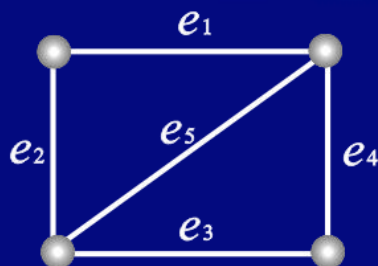
- (1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.
- (2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.
- (3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.
- (4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

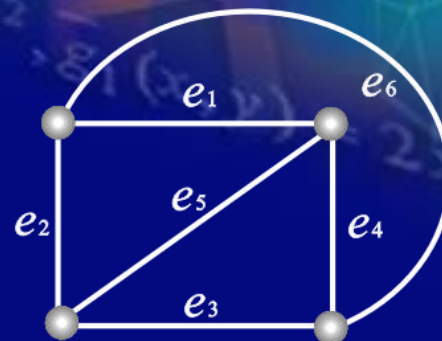
- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路是生成的简单通路, 欧拉回路是生成的简单回路.
- 环不影响图的欧拉性.



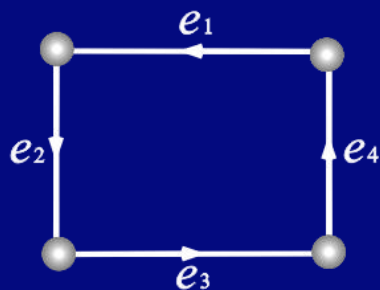
(1)



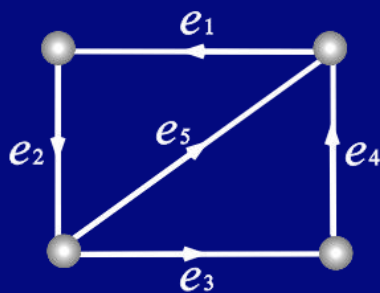
(2)



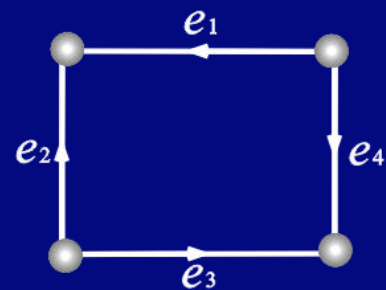
(3)



(4)



(5)



(6)

图 2

易知，图 2 中，(1)、(4) 为欧拉图，(2)，(5) 为半欧拉图，(3)，(6) 既不是欧拉图，也不是半欧拉图. 在 (3)，(6) 中各至少加几条边才能成为欧拉图？

2. 无向欧拉图的判别法

定理 15.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度数顶点.

证 若 G 为平凡图无问题. 下设 G 为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设 C 为 G 中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$, v_i 在 C 上每出现一次获 2 度, 所以 v_i 为偶度顶点. 由 v_i 的任意性, 结论为真.

充分性 对边数 m 做归纳法 (第二数学归纳法) .

(1) $m=1$ 时, G 为一个环, 则 G 为欧拉图.

(2) 设 $m \leq k$ ($k \geq 1$) 时结论为真, $m=k+1$ 时如下证明:

$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $g_1(x,y) = 2xy$

(a) 制造满足归纳假设的若干个小欧拉图. 由连通及无奇度数顶点可知, $\delta(G) \geq 2$, 用扩大路径法可得 G 中长度 ≥ 3 的圈 C_1 . 删除 C_1 上所有的边 (不破坏 G 中顶点度数的奇偶性) 得 G' , 则 G' 无奇度顶点, 设它有 s ($s \geq 1$) 个连通分支 G_1', G_2', \dots, G_s' , 它们的边数均 $\leq k$, 因而它们都是小欧拉图. 设 C_1', C_2', \dots, C_s' 是 G_1', G_2', \dots, G_s' 的欧拉回路.

(b) 将 C_1 上被删除的边还原, 从 C_1 上某一顶点出发走出 G 的一条欧拉回路 C .

从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图 3.

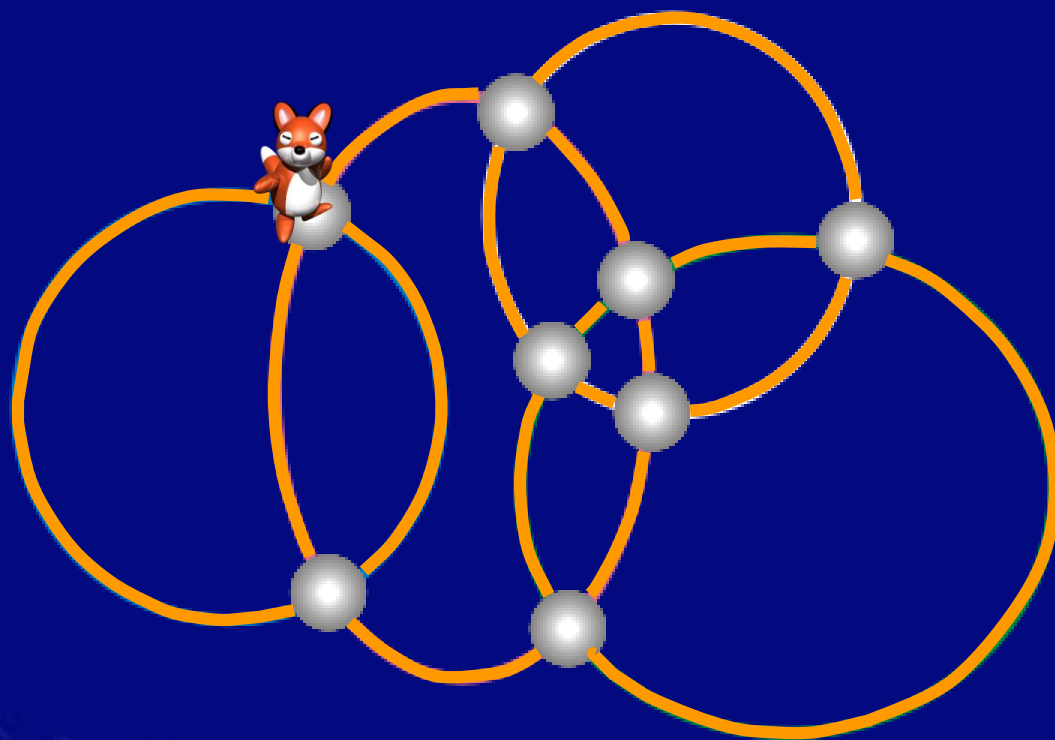


图 3

PLAY



定理 15.2 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性简单.

充分性 (利用定理 15.1)

设 u, v 为 G 中的两个奇度顶点, 令

$$G' = G \cup (u, v)$$

则 G' 连通且无奇度顶点, 由定理 15.1 知 G' 为欧拉图, 因而存在欧拉回路 C , 令

$$\Gamma = C - (u, v)$$

则 Γ 为 G 中欧拉通路.



3. 有向欧拉图的判别法

定理 15.3 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理 15.1.

定理 15.4 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的, 且 D 中恰有两个奇度顶点, 其中一个的入度比出度大 1, 另一个的出度比入度大 1, 而其余顶点的入度都等于出度.

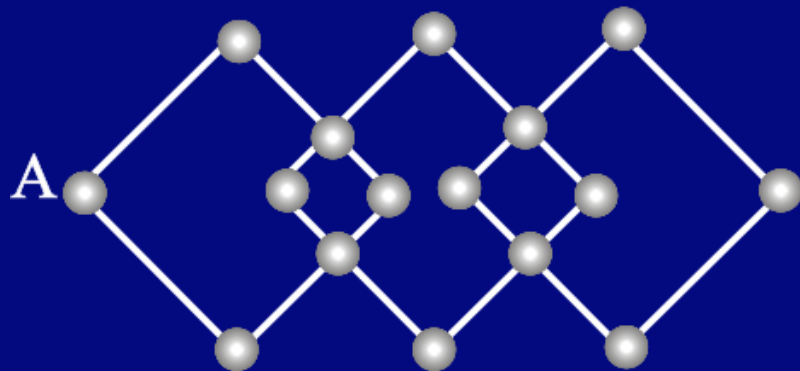
本定理的证明类似于定理 15.1.

定理 15.5 G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且为若干个边不重的圈之并.

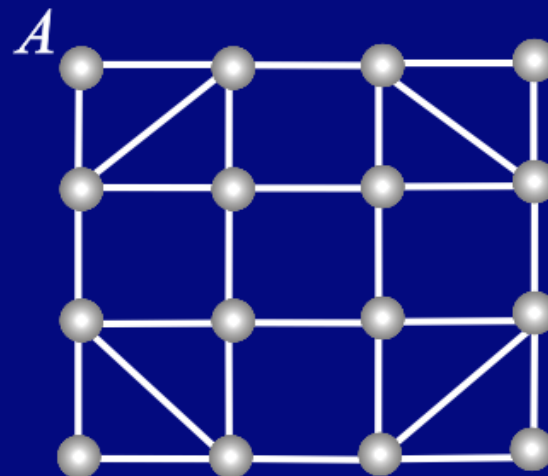
可用归纳法证定理 15.5.

例 设 G 是欧拉图，但 G 不是平凡图，也不是一个环，则 $\lambda(G) \geq 2$.

证 只需证明 G 中不可能有桥（如何证明？）



(1)



(2)

图 4

图 4 中，(1)，(2) 两图都是欧拉图，均从 A 点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

4. Fleury 算法

Fleury 算法:

- (1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0$.
- (2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ 已经行遍, 按下面方法来从 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1} :
 - (a) e_{i+1} 与 v_i 相关联;
 - (b) 除非无别的边可供行遍, 否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的桥.
- (3) 当 (2) 不能再进行时, 算法停止.

可以证明, 当算法停止时所得简单通路

$P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_m v_m$ ($v_m = v_0$) 为 G 中一条欧拉回路.

用 Fleury 算法走出图 4 中(1), (2)从 A 出发 (其实从任何一点出发都可以) 的欧拉回路各一条.

2、算法证明

定理1 若 G 是欧拉图，则 G 中用**Fleury**算法作出的是 G 的欧拉回路。

证明：令 $W_n = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ 为由**Fleury**算法得到的一条 G 中通路。

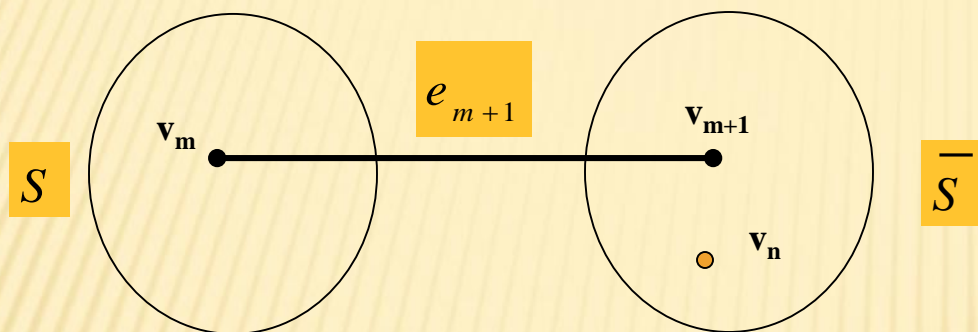
由**Fleury**算法， $d_{G_n}(v_n) = 0$ ，所以， $v_n = v_0$ ，否则， $d_{G_n}(v_n)$ 为奇
设 W_n 不是 G 的欧拉回路，于是可令：

$$S = \{v \mid d_{G_n}(v) > 0\}, \bar{S} = V - S$$

容易知道：

$$S \neq \emptyset, v_n \in \bar{S}$$

令 v_m 是 W_n 在 S 中的最后一个顶点。



首先, $[S, \bar{S}]$ 中边一定都是 W_n 中边。若不然, 设

$e \in [S, \bar{S}]$, 但 $e \notin W_n$

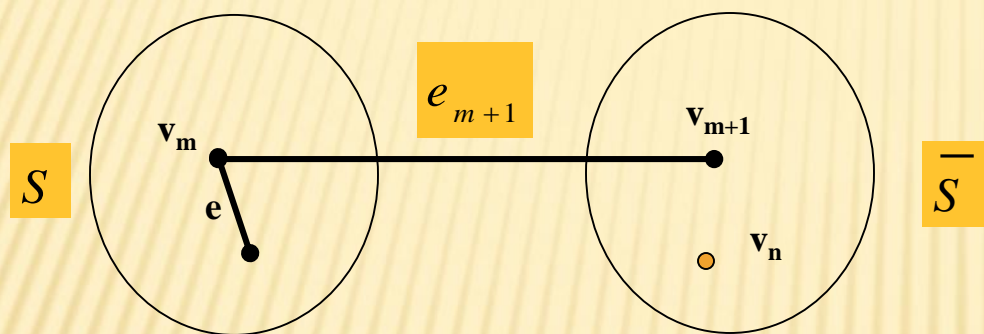
设 $e=uv$, $u \in S$, 那么, $d_{G_n}(v) \neq 0$, 矛盾!

其次, 由 v_m 是 W_n 在 S 中的最后一个顶点, 知:

$$[S, \bar{S}]_{G_m} = \{e_{m+1}\}$$

即 e_{m+1} 是 G_m 的割边。

设 e 是 G_m 中与 v_m 关联的另外一条边。那么，由F算法，它必然为 $G_m[S]$ 的割边。



但是， $G_m[S]=G_n[S]$,所以， $G_m[S]$ 中每个点为偶数度，从而没有割边，矛盾！

3、算法复杂性分析

设 $G=(n, m)$ 是欧拉图

由Fleury算法知：算法需要 m 次循环；

算法中主要运算是判断： $p(G_i - e) > p(G_i)$ ，该判断的时间复杂性是 n^2 数量级的。

所以Fleury算法时间复杂性是： $O(n^2m)$,是好算法。

例4 证明：若 G 有 $2k>0$ 个奇数顶点，则存在 k 条边不重的通路 Q_1, Q_2, \dots, Q_k ，使得：

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \dots \cup E(Q_k)$$

证明：不失一般性，只就 G 是连通图进行证明。

设 $G=(n, m)$ 是连通图。令 $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k}$ 是 G 的所有奇度点。

在 v_i 与 v_{i+k} 间连新边 e_i 得图 G^* ($1 \leq i \leq k$)。则 G^* 是欧拉图，因此，由Fleury算法得欧拉回路 C 。

在 C 中删去 e_i ($1 \leq i \leq k$)。得 k 条边不重的通路 Q_i ($1 \leq i \leq k$)：

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \dots \cup E(Q_k)$$

(三)、中国邮路问题

1962年，中国数学家管梅谷提出并解决了“中国邮路问题”

1、问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最小？

如果邮路图本身是欧拉图，那么由Fleury算法，可得到他的行走路线。

如果邮路图本身是非欧拉图，那么为得到行走环游，必须重复行走一些街道。于是问题转化为如何重复行走街道？

管梅谷(Mei-KO KWAN), 1934年出生, 上海市人, 教授。1957年毕业于华东师范大学数学系。

历任山东师范大学讲师、副教授、教授、校长, [中国运筹学会](#)第一、二届常务理事, 山东省数学学会第四届副理事长, 山东省运筹学会第一届副理事长, 山东省世界语协会理事长。是第六届全国政协委员。从事运筹学及其应用的研究, 对最短投递路线问题的研究取得成果。所提模型在国外称为中国投递问题。编有《线性规划》。

管梅谷教授自1957年至1990年在山东师范大学工作。1984年至1990年担任山东师范大学校长, 1990年至1995年任复旦大学运筹学系主任。1995年至今任澳大利亚[皇家墨尔本理工大学](#)交通研究中心高级研究员, 国际项目办公室高级顾问及[复旦大学管理学院](#)兼职教授。

管梅谷教授一直从事运筹学, 组合优化与图论方面的研究工作, 是国内外知名度很高的学者。早在1960年在国际上最先提出邮递员问题, 现在被国际图论界命名为"中国邮路问题", 载入经典著作中。1981年由国务院授予我国首批"运筹学与控制论"专业博士生导师。1986年在山东师范大学主办了首届"中美国际图论学术会"。这也是山东师范大学第一次承办的国际学术会议, 到会的国外专家300余人, 许多国际著名图论专家都参加了这次会议。自1986年以来, 管教授又致力于城市交通规划的研究, 在我国最早引进加拿大的交通规划EMME II软件, 取得一系列重要研究成果。

2、管梅谷的结论

定理2 若 W 是图 G 中一条包含所有边的回路，则 W 在这样的回路中具有最短的长度当且仅当下列两个条件被满足：

(1) 每一条边最多重复经过一次；

(2) 在 G 的每一个圈上，重复经过的边的条数不超过圈长的一半。

证明：“必要性”

首先，设 G 是连通非欧拉图， u 与 v 是 G 的两个奇度顶点，把连接 u 与 v 的路上的边改为2重边，则路中的点的度数奇偶性没有改变，仍然为偶数，但 u 与 v 的度数由奇数变成了偶数。如果对 G 中每对奇度点都如此处理，则最终得到的图为欧拉图。设该图为 G_1 。

其次，对 G_1 作修改：

如果在 G_1 中，边 e 重复数大于2，则在 G_1 中删掉2条重复的 e 边后，所得之图仍然是包含 G 的欧拉图。

在 G_1 中，对每组平行边都做上面的处理，最后得到一个重复边数最多为1的包含 G 的欧拉图 G_2 。

这说明，若 W 是包含 G 的所有边的欧拉回路，则 G 中每条边至多在 W 里出现两次。这就证明了(1)。

又设 C 是 G_2 中任意一个圈，在该圈中，如果有平行边条数超过该圈长度的一半，那么可以把该圈中平行边改为非平行边，而把非平行边改为平行边，如此修改，得到的图仍然是包含 G 的欧拉图，但对应的欧拉回路长度减小了。

这就是说，只要对 G_2 的每个圈都作上面的修改，最后得到的图仍然为包含 G 的欧拉图，而最后的图正好满足(2).

“充分性”

我们证明：任何两条包含 G 中所有边的回路 W_1 与 W_2 ,如果满足定理2的两个条件，则它们有相同的长度。

设 Y_1 与 Y_2 分别表示 W_1 与 W_2 中重复出现的边集合。

如果能够证明： $|Y_1 - Y_2| = |Y_2 - Y_1|$, 那么 $d(W_1) = d(W_2)$.

令： $Y = (Y_1 - Y_2) \cup (Y_2 - Y_1)$

断言1： $G[Y]$ 的每个顶点度数必然为偶数。

首先：对于 G 中任意点 v , 如果 $d_G(v)$ 是奇数，那么 Y_1 与 Y_2 中与 v 关联的边数均为奇数；

如果 $d_G(v)$ 是偶数，那么 Y_1 与 Y_2 中与 v 关联的边数均为偶数。

所以 Y_1 与 Y_2 中与 G 中任意点关联的边数奇偶性相同。

其次，设 Y_1 与 Y_2 中与 v 关联的边数分别为 y_1 与 y_2 ，其中相同的边数为 y_0 ，那么， Y 中与 v 关联的边数为：

$$(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0) = y_1 + y_2 - 2y_0$$

所以， Y 中与 v 关联的边数为偶数，说明 $G[Y]$ 的每个顶点度数必然为偶数。

断言2： $|Y_1 - Y_2| = |Y_2 - Y_1|$

由于 $G[Y]$ 的每个顶点度数为偶数。所以，它的每个分支是欧拉图。因此， $G[Y]$ 可以作不重圈分解。

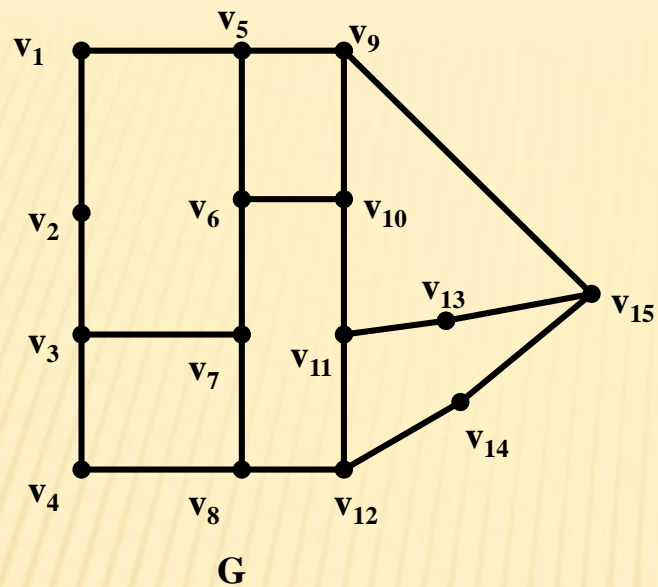
由定理2的条件(2), Y_1 与 Y_2 在圈中的边数不能超过圈长的一半, 但圈中边不是属于 Y_1 就是属于 Y_2 , 所以, 在每个圈中, $Y_1 - Y_2$ 与 $Y_2 - Y_1$ 中边各占一半, 即:

$$|(Y_1 - Y_2)| = |Y_2 - Y_1| = \frac{1}{2}|Y|$$

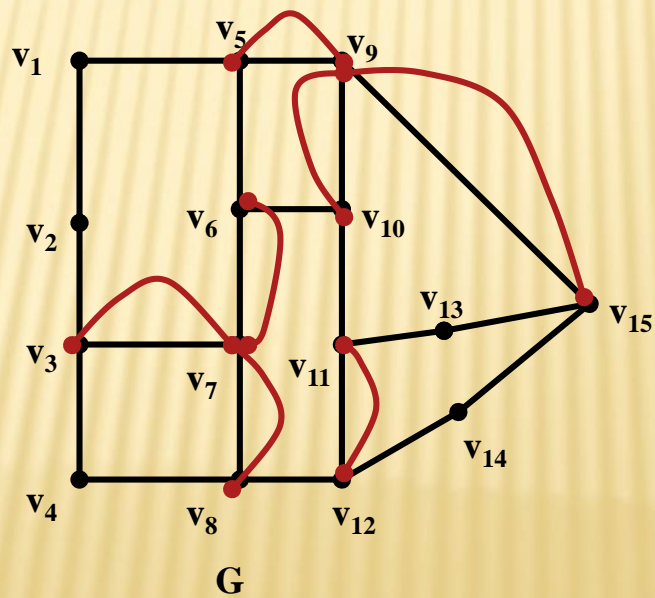
由此, 证明了定理的充分性。

注: (1)定理2的必要性证明过程实际上给出了求中国邮路问题的方法. 下面看一个例题。

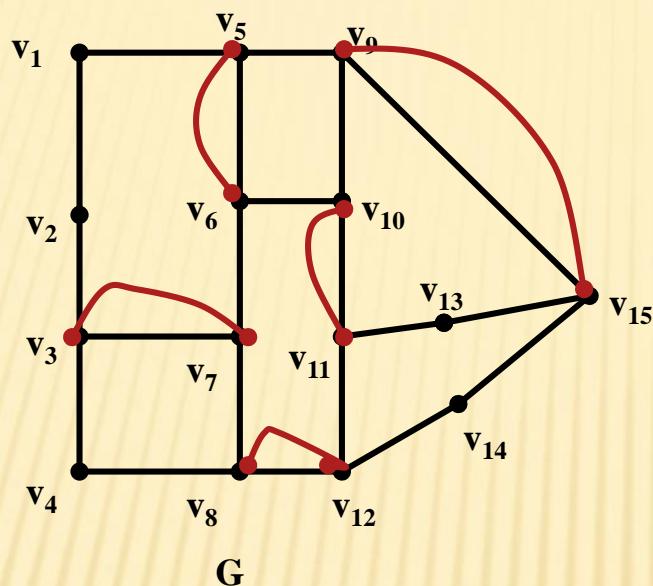
例5 求包含下图G的一个最优欧拉回路。



解：由定理2：



修改后得：



由Fleury算法可得到具体的最优欧拉回路。

3、非负权值的赋权图的最优欧拉环游

对于一般的具有非负权值的赋权图G来说，如何求一条包含G的边的最优欧拉回路？

其实，可以证明：一般问题和中国邮路问题的特殊情况是等价的(定理2).也就是说：可以通过定理2的求最优欧拉回路的方法来求一般情况下的最优欧拉回路。

所以，求一般非负权赋权图的最优欧拉回路步骤为：

(1)、用添加重复边的方法求G的一个赋权母图G*，
使：

$$\sum_{e \in E(G^*) - E(G)} w(e) \text{ 尽可能小}$$

(2)、用Fleury算法在G*中求出欧拉回路。

注：步骤(1)的好算法已经由Edmons在1973年给出。

例6 如果一个非负权的边赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v ,设计一个求其最优欧拉回路的算法。

解： 1、 算法

(1)、 在 u 与 v 间求出一条最短路 P ; (最短路算法)

(2)、 在最短路 P 上, 给每条边添加一条平行边得 G 的欧拉母图 G^* ;

(3)、 在 G 的欧拉母图 G^* 中用Fleury算法求出一条欧拉回路。

2、 算法证明

定理：用上面方法求出的欧拉回路是最优欧拉回路。

证明：设 u 与 v 是 G 的两个奇度顶点, G^* 是 G 的任意一个欧拉母图。

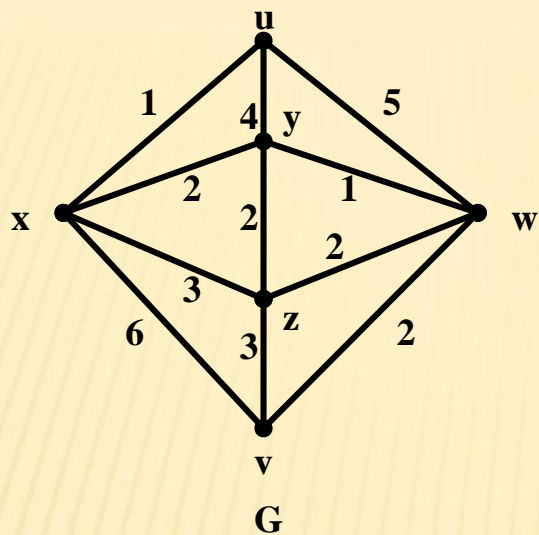
考虑 $G^*[E^*-E]$, 显然它只有两个奇数顶点 u 与 v , 当然它们必须在 $G^*[E^*-E]$ 的同一个分支中, 因此, 存在 (u, v) 路 P^* .

所以,

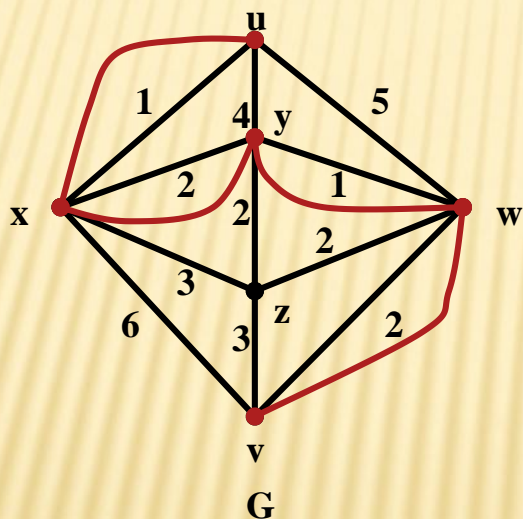
$$\sum_{e \in E^* - E} w(e) \geq w(P^*) \geq w(P)$$

即证明定理。

例如：求出下图的一条最优欧拉回路。



解:



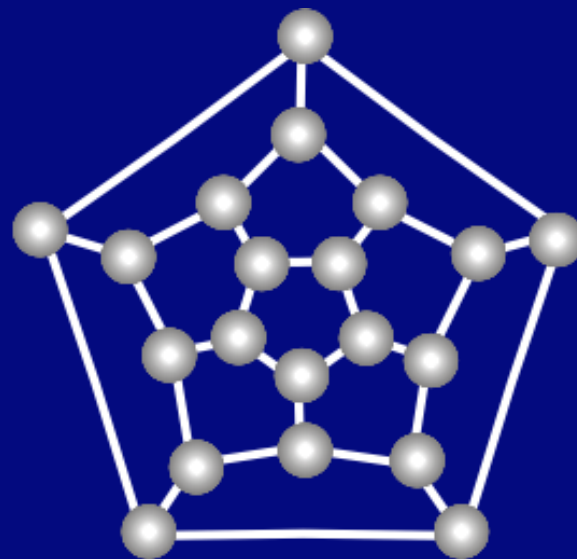
最优欧拉回路: $x u y w v z w y x u w v x z y x$

第二节 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图.



(1)



(2)

图 5

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$
$$g_1(x, y) = 2xy$$

一、哈密顿图与半哈密顿图

1. 定义

定义 15.2

- (1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.
- (2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.
- (3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.
- (4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

- 平凡图是哈密顿图.
- 哈密顿通路是初级通路, 哈密顿回路是初级回路.
- 环与平行边不影响哈密顿性.
- 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上



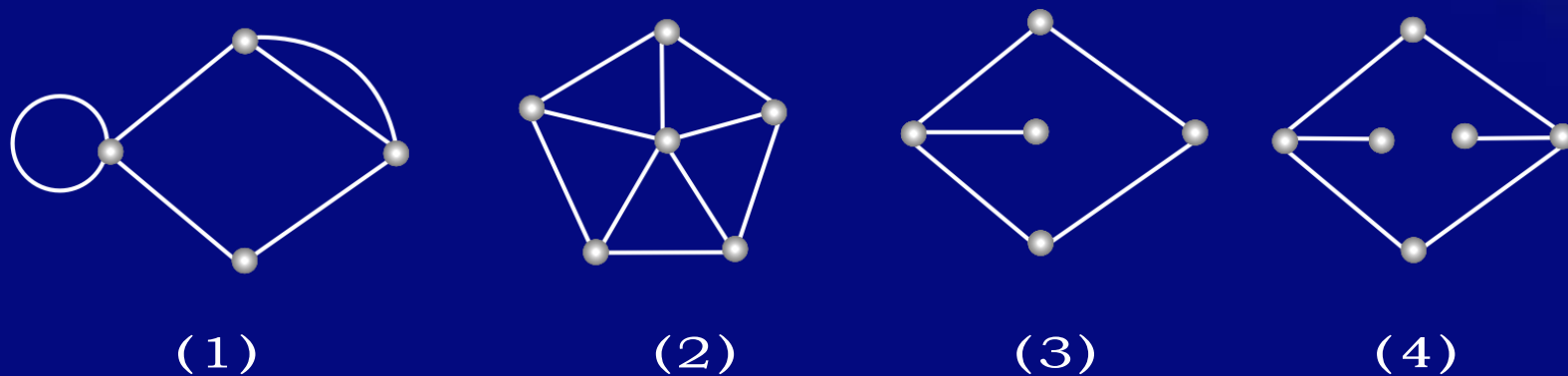


图 6

在图 6 中，

(1)，(2) 是哈密顿图，

(3) 是半哈密顿图，

(4) 既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

- ✖ 欧拉回路和H圈的区别: 欧拉回路是包含G中的所有边, 但H圈不是, 它仅仅包含了G中的n条边.....
- ✖ 也就是Euler图感兴趣的是边, 而H图感兴趣的是点。
- ✖ 一个邮递员如果他的任务是要遍历某些特定的街道, 那么他最好走的是Euler 回路, 如果他要投放特定的点, 最好走H-圈

- ✘ Euler图和Hamilton图相比较，前者是要周游边，后者要周游点，虽然仅有一字之差，但两者的困难程度却大不相同
- ✘ 对于Euler图，我们已经有一个判别定理，简单易行。但寻找一个图是不是Hamilton图的充分必要条件仍然是图论中的一个重要问题。另外，判断一个图是不是Hamilton图是NP-困难问题。

2. 无向哈密顿图的一个必要条件

定理 15.6 设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 是哈密顿图, 对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, 均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

证 设 C 为 G 中一条哈密顿回路

$$(1) \quad p(C-V_1) \leq |V_1|$$

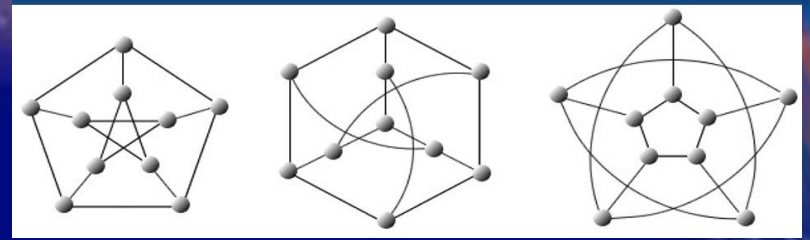
$$(2) \quad p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1| \quad (\text{因为 } C \subseteq G)$$

推论 设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 是半哈密顿图, 对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ 均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1| + 1$$

证 令 Γ_{uv} 为 G 中哈密顿通路, 令 $G' = G \cup (u,v)$, 则 G' 为哈密顿图. 于是

$$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v)) \leq |V_1| + 1$$



几点说明

- 定理 15.6 中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）
- 由定理 15.6 立刻可知， $K_{r,s}$ 当 $s \geq r+1$ 时不是哈密顿图。易知 $K_{r,r}$ ($r \geq 2$) 时都是哈密顿图， $K_{r,r+1}$ 都是半哈密顿图。
- 常利用定理 15.6 判断某些图不是哈密顿图。

例 设 G 为 n 阶无向连通简单图，若 G 中有割点或桥，则 G 不是哈密顿图。

证 设 v 为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$ 。

K_2 有桥，它显然不是哈密顿图。除 K_2 外，其他有桥的图（连通的）均有割点。

其实，本例对非简单连通图也对。

3. 无向哈密顿图的一个充分条件

定理 15.7 设 G 是 n 阶无向简单图, 若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1 \quad (*)$$

则 G 中存在哈密顿通路.

证明线索:

- (1) 由(*)证 G 连通
- (2) $\Gamma = v_1 v_2 \dots v_l$ 为 G 中极大路径. 若 $l = n$, 证毕.
- (3) 否则, 证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈 C , 由 (1) 知 C 外顶点存在与 C 上某顶点相邻顶点, 从而得比 Γ 更长的路径, 重复 (2) -- (3), 最后得 G 中哈密顿通路.


$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, g_1(x,y) = 2xy$$

证（着重关键步骤）

- (1) 由(*)及简单图的性质，用反证法证明 G 连通.
- (2) $\Gamma = v_1v_2\dots v_l$ 为极大路径， $l \leq n$ ，若 $l = n$ （结束）.

下面讨论 $l < n$ 的情况，即要证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈.

① 若 (v_1, v_l) 在 G 中，则 $\Gamma \cup (u, v)$ 为 G 中圈

② 否则, 设 v_1 与 Γ 上 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 相邻, 则 $k \geq 2$ (否则由极大路径端点的性质及(*), 会得到 $d(v_1) + d(v_l) \leq 1 + l - 2 < n - 1$), 又 v_l 至少与 $v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}$ 左边相邻顶点之一相邻 (写出理由), 设 $v_{i_{r-1}}$ 与 v_l 相邻, 见图 7 中 (1), 于是得 G 中回路 C ((1) 中图去掉边 $(v_{i_{r-1}}, v_{i_r})$)

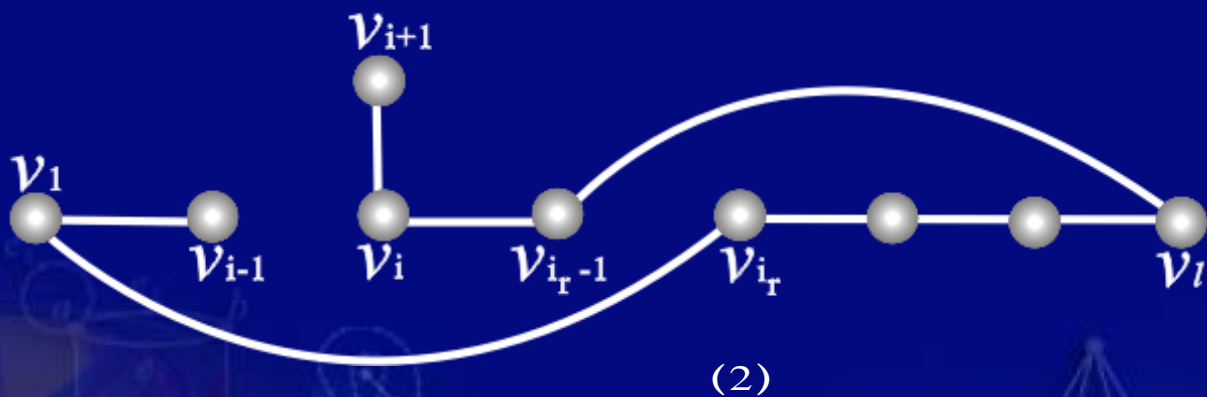
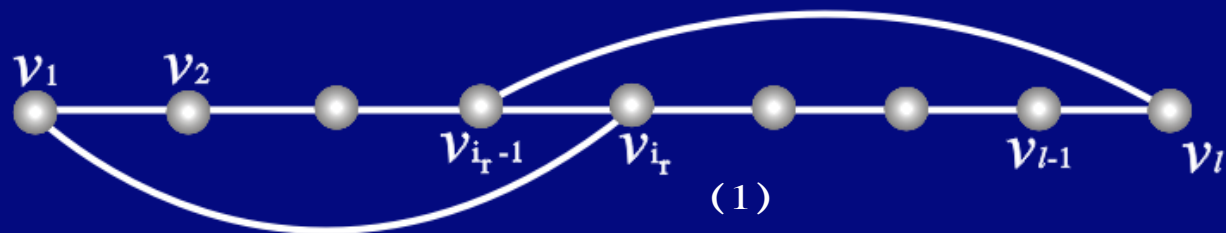


图 7

(3) 由连通性, 可得比 Γ 更长的路径 (见图 7 中 (2) 所示), 对它再扩大路径, 重复 (2), 最后得哈密顿通路.

推论 设 G 为 n ($n \geq 3$) 阶无向简单图, 若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n \quad (**)$$

则 G 中存在哈密顿回路, 从而 G 为哈密顿图.

证明线索: 由定理 15.7 得 $\Gamma = v_1 v_2 \dots v_n$ 为 G 中哈密顿通路. 若 $(v_1, v_n) \in E(G)$, 得证. 否则利用 (**) 证明存在过 v_1, v_2, \dots, v_n 的圈 (哈密顿回路).

定理 15.8 设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点, 且 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图.

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1, g_1(x, y) = 2xy$$

几点说明：

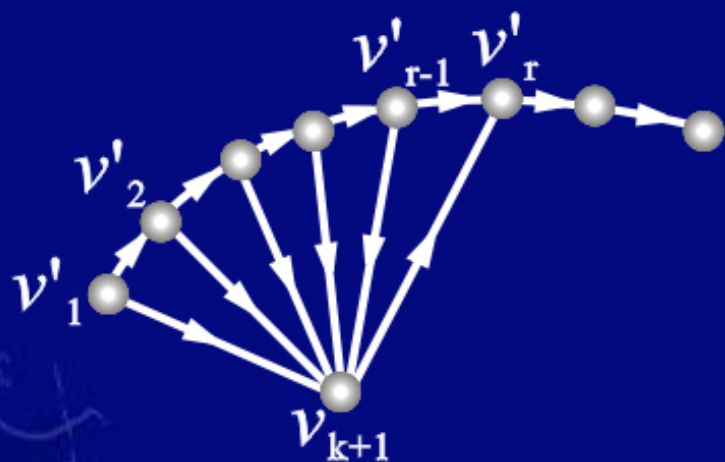
- 定理 15.7 是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件. 长度为 $n-1$ ($n \geq 4$) 的路径构成的图不满足 (*) 条件，但它显然是半哈密顿图.
- 定理 15.7 的推论同样不是哈密顿图的必要条件， G 为长为 n 的圈，不满足 (**) 条件，但它当然是哈密顿图.
- 由定理 15.7 的推论可知， K_n ($n \geq 3$) 均为哈密顿图.



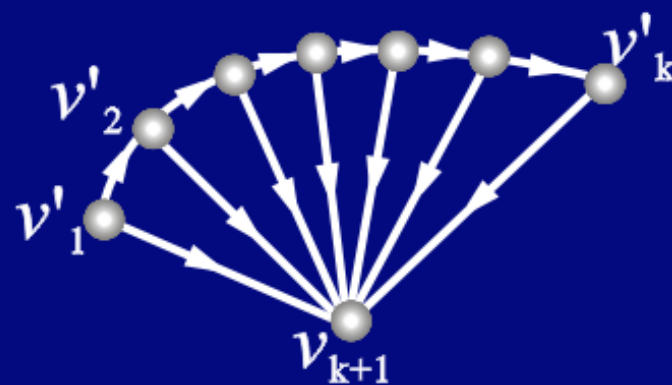
4. n ($n \geq 2$) 阶竞赛图中存在哈密顿通路

定理 15.9 若 D 为 n ($n \geq 2$) 阶竞赛图, 则 D 中具有哈密顿通路

证明思路: 注意, 竞赛图的基图是无向完全图. 对 n ($n \geq 2$) 做归纳. 只需观察图 8 中两个图.



(1)



(2)

图 8

二、判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

下面总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的一些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

例 图 9 中 (周游世界问题) 是哈密顿图, 易知 $a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a$ 为图中的一条哈密顿回路.

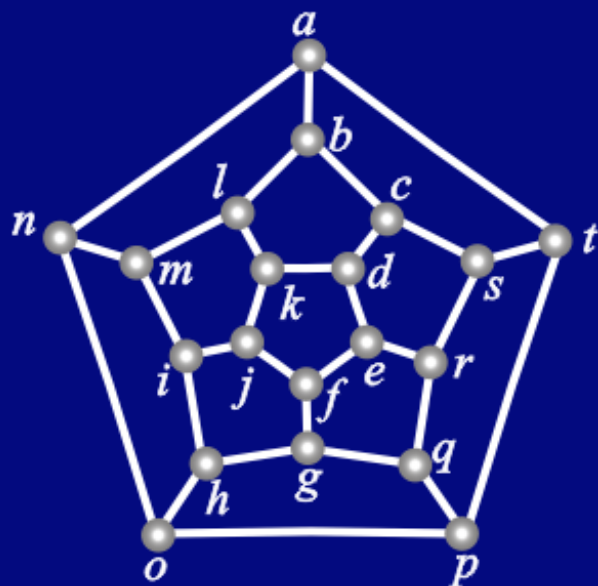
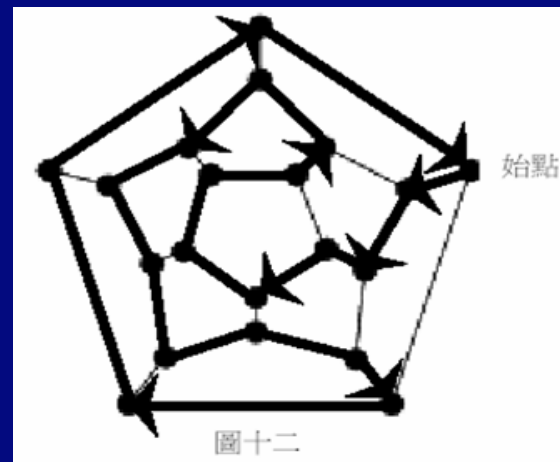


图 9



注意, 此图不满足定理 15.7 推论的条件.


$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, g_1(x,y) = 2xy$$

2. 满足定理 15.7 推论的条件 (**) .

完全图 K_n ($n \geq 3$) 中任何两个顶点 u, v , 均有

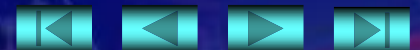
$$d(u) + d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n \geq 3),$$

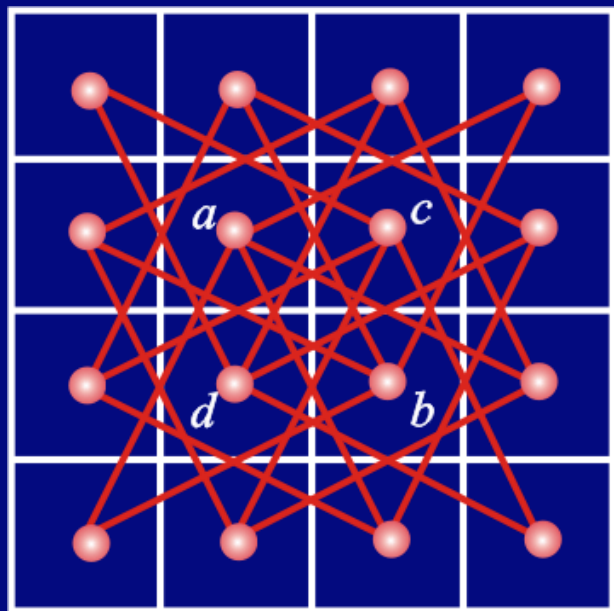
所以 K_n 为哈密顿图.

3. 破坏定理 15.6 的条件的图不是哈密顿图.

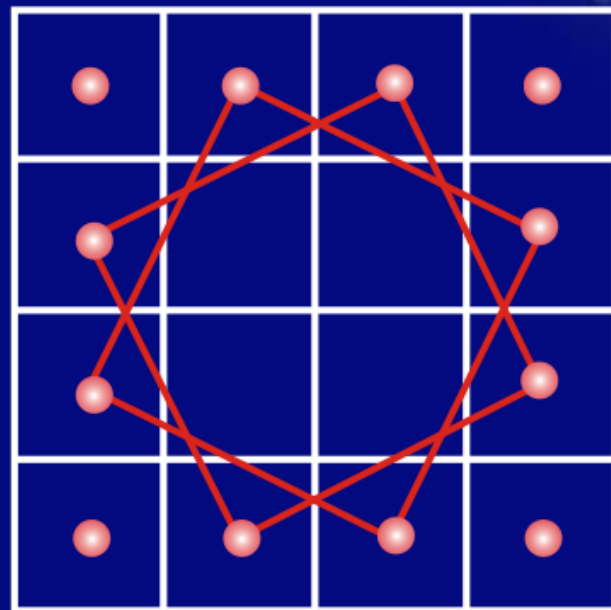
例 在四分之一国际象棋盘 (4×4 方格组成) 上跳马无解.

在国际象棋盘上跳马有解.





(1)



(2)

图 10

令 $V_1 = \{a, b, c, d\}$, 则 $p(G - V_1) = 6 > 4$, 由定理 15.6 可知图中无哈密顿回路.
在国际象棋棋盘上跳马有解, 试试看.

第三节 最短路问题与货郎担问题

一、带权图

定义 15.3 给定图 $G = \langle V, E \rangle$, (G 为无向图或有向图), 设 $W: E \rightarrow R$ (R 为实数集), 对 G 中任意边 $e = (v_i, v_j)$

(G 为有向图时, $e = \langle v_i, v_j \rangle$), 设 $W(e) = w_{ij}$, 称实数 w_{ij} 为边 e 上的权, 并将 w_{ij} 标注在边 e 上, 称 G 为带权图, 此时常将带权图 G 记作 $\langle V, E, W \rangle$.

设 $G' \subseteq G$, 称 $\sum_{e \in E(G')} W(e)$ 为 G' 的权, 并记作 $W(G')$, 即

$$W(G') = \sum_{e \in E(G')} w(e)$$



二、最短路问题

设带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ (无向图或有向图), 其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数, 对于任意的顶点 u, v , 当 u 和 v 连通 (u 可达 v) 时, 称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的最短路径, 称其长度为从 u 到 v 的距离, 记作 $d(u,v)$ 。约定 $d(u,u)=0$; 当 u 和 v 不连通 (u 不可达 v) 时, $d(u,v)=+\infty$

最短路问题: 给定带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 及顶点 u 和 v , 其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数, 求从 u 到 v 的最短路径。

Dijkstra 标号法 + Dial's algorithm 演示



三、货郎担问题

1. 货郎担问题的数学描述

设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 为一个 n 阶完全带权图 K_n ，各边的权非负，且有的边的权可能为 ∞ 。求 G 中的一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型。

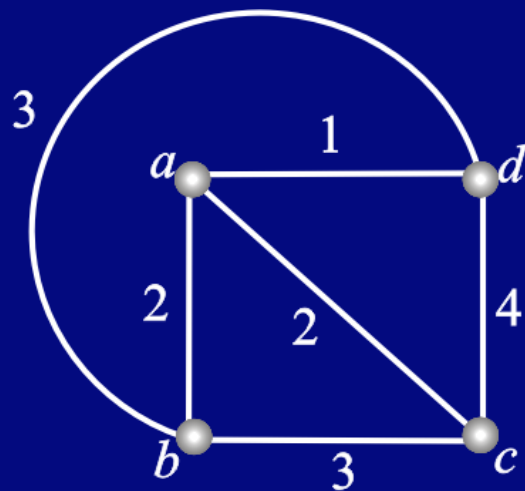
2. 完全带权图 K_n ($n\geq 3$) 中不同的哈密顿回路数

(1) K_n 中有 $(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路（定义意义下）

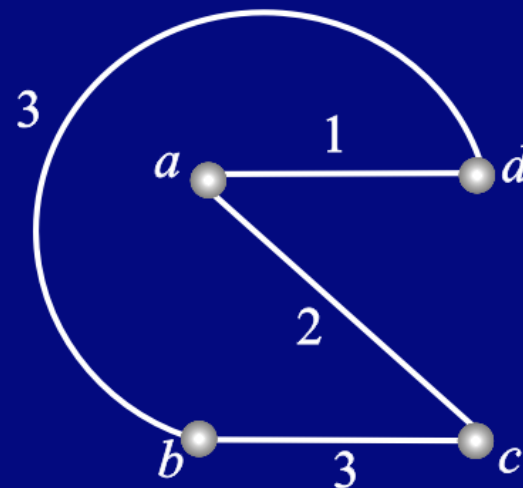
(2) 完全带权图中有 $\frac{1}{2} (n-1)!$ 条不同的哈密顿回路

(3) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为 $(n-1)!$ ，当 n 较大时，计算量惊人地大

例 求图 11 中 (1) 所示带权图 K_4 中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

图 11

解 $C_1 = a b c d a, \quad W(C_1) = 10$

$C_2 = a b d c a, \quad W(C_2) = 11$

$C_3 = a c b d a, \quad W(C_3) = 9$

可见 C_3 (见图 11 中 (2)) 是最短的, 其权为 9.

第十五章 习题课

一、本章的主要内容和要求

1. 主要内容

- 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图，及其判别法
- 哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
- 带权图、货郎担问题

2. 要求

- 深刻理解欧拉图、半欧拉图的定义及判别定理
- 深刻理解哈密顿图、半哈密顿图的定义. 会用哈密顿图的必要条件判断某些图不是哈密顿图. 会用充分条件判断某些图是哈密顿图. 要特别注意的是，不能将必要条件当作充分条件，也不要将充分条件当必要条件.

二、练习题

1. 设 G 为 n ($n \geq 2$) 阶无向欧拉图, 证明 G 中无桥 (已在本章例 1 让大家思考了)



解 方法一: 直接证明法.

利用下面命题: “设 C 为任意简单回路, e 为 C 上任意一条边, 则 $C-e$ 连通”, 记这个命题为 $(*)$. 设 C 为 G 中一条欧拉回路, 任意的 $e \in E(C)$, 由 $(*)$ 可知 $C-e$ 是 $G-e$ 的子图, 由 $C-e$ 连通知 $G-e$ 连通, 所以 e 不为桥.

方法二: 反证法.

利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论. 否则, 设 $e=(u,v)$ 为 G 中桥, 则 $G-e$ 产生两个连通分支 G_1, G_2 , 不妨设 u 在 G_1 中, v 在 G_2 中. 由于从 G 中删除 e 时, 只改变 u, v 的度数 (各减 1), 因而 G_1 与 G_2 中均只含一个奇度顶点, 这与握手定理推论矛盾.

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1, g_1(x,y) = 2xy$$

1. 证明图 12 所示图不是哈密顿图.

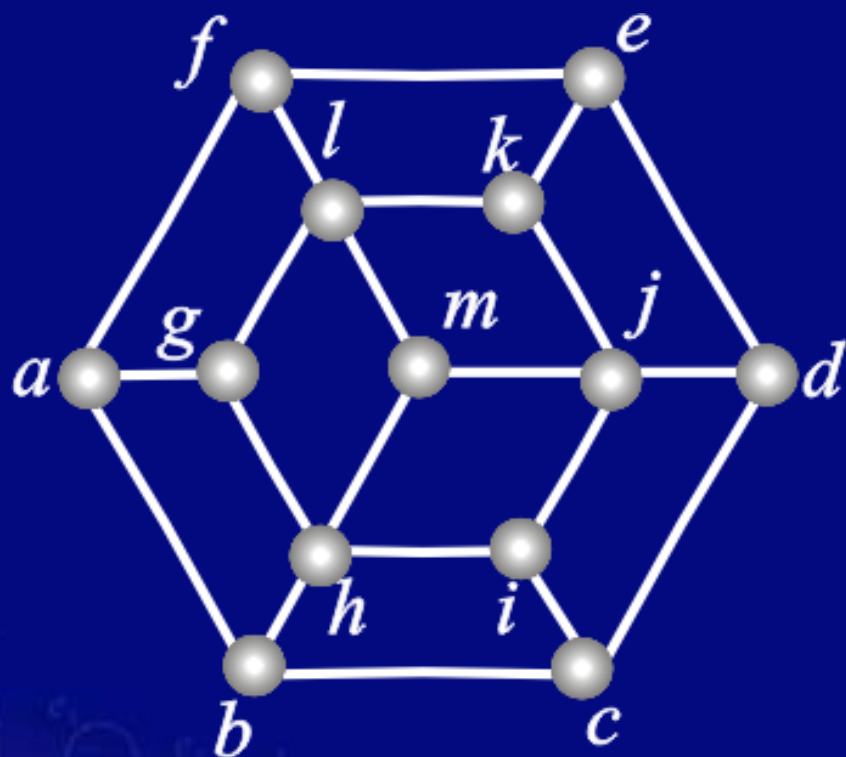


图 12



解 寻找破坏必要条件的方法证明之.

方法一.

利用定理 15.6, 寻找 V_1 . 取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, 则

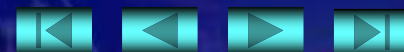
$$p(G-V_1) = 7 > |V_1| = 6$$

方法二.

其实, G 为二部图 (为什么?), 互补顶点子集 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, $V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$, $|V_1| = 6 \neq 7 = |V_2|$.

方法三.

利用可能出现在哈密顿回路上的边至少有 n (n 为阶数) 条——这也是哈密顿图的一个必要条件, 记为 (*). 此图中, $n = 13$, $m = 21$. 注意, 由于 h, l, j 均为 4 度顶点, a, c, e 为 3 度顶点, 且它们关联边互不相同. 而在哈密顿回路上, 每个顶点准确地关联两条边, 于是可能用的边至多有 $21 - (3 \times 2 + 3 \times 1) = 12$. 这达不到 (*) 的要求.



3. 某次国际会议 8 人参加，已知每人至少与其余 7 人中的 4 人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都与两边的人交谈？



解

图是描述事物之间关系的最好的手段之一. 做无向图 $G=\langle V,E\rangle$, 其中 $V=\{v|v \text{ 为与会者}\}$, $E=\{(u,v)|u,v\in V \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 有共同语言, 且 } u\neq v\}$. 易知 G 为简单图且 $\forall v\in V, d(v)\geq 4$, 于是, $\forall u,v\in V$, 有 $d(u)+d(v)\geq 8$, 由定理 15.7 的推论可知 G 为哈密顿图. 服务员在 G 中找一条哈密顿回路 C , 按 C 中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的: 哈密顿回图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

4. 某青年要到 4 个景点骑自行车去旅游. 景点的位置、之间的路线及距离 (公里) 如图 13 所示. 他如何走行程最短?

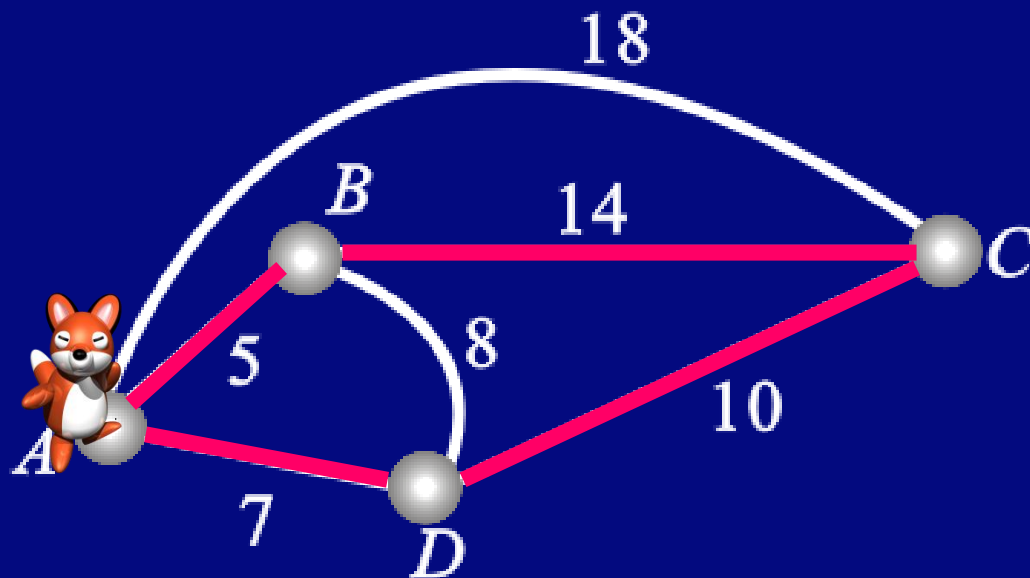


图 13

PLAY

答案: 最短的路为 $ABCD A$, 距离为 36 公里, 其余两条各为多少?



本章作业

- 7, 13, 22, 23
- 10, 14, 18, 19, 21

The background is a dark blue gradient with various mathematical illustrations. At the top right, the functions $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ and $g_1(x,y) = 2xy$ are written in a glowing, slightly blurred font. In the bottom left, there are diagrams of a cylinder with points a, b, c and a', b', c' on its top and bottom bases, and a sphere with intersecting lines. In the bottom right, there is a diagram of a tetrahedron with internal lines connecting vertices to the midpoints of opposite edges.

Thank
You !