图的邻接矩阵

- 定义：对于图G=(V,E)，构造一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$
  其中n＝|V|；

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i,v_j)\in E; \\ 0 & \text{否则}; \end{cases}
$$

称A是图G的*邻接矩阵*。

- 置换矩阵：相当于将单位矩阵中相应的行与行，或者列与列互换的矩阵。

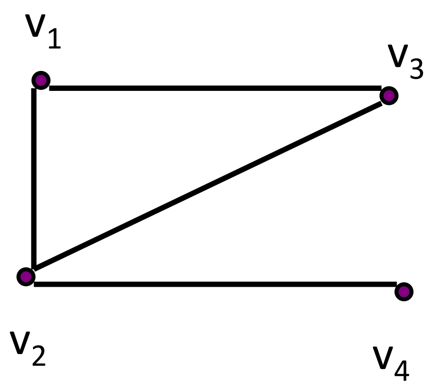
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad (PA)P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}$$

P就是一个置换矩阵

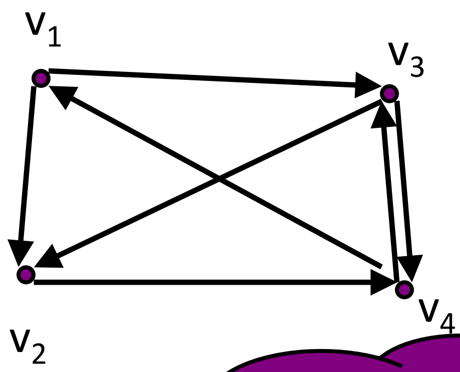
- 邻接矩阵中图的性质：

无向图的邻接
矩阵是对称的！



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$中，第i行或第i列中非0元素的个数等于顶点$v_i$的度。(无向图)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

竖入横出

(2) $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$中，第i**列**中非0元素的个数等于顶点$v_i$的**入**度，第i**行**中非0元素的个数等于顶点v_i的**出**度。(有向图)

(3) $B=A^2$。

$$B=A^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{ij})_{n\times n}$$

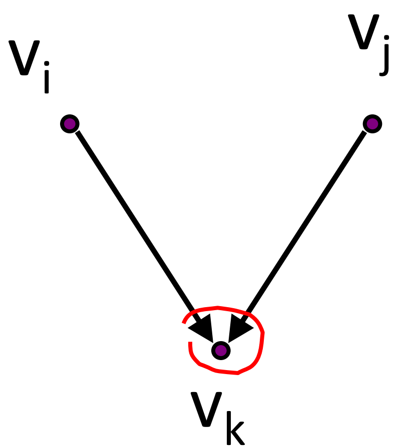
b_{ij}表示v_i两步到达v_j的路径数目

(4) 有向图中：$C=AA^T$。

$$C=(c_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\sum \alpha_{ik}\,\alpha_{jk}$$

c_{ij}表示以v_i,v_j为始点的终点数目。

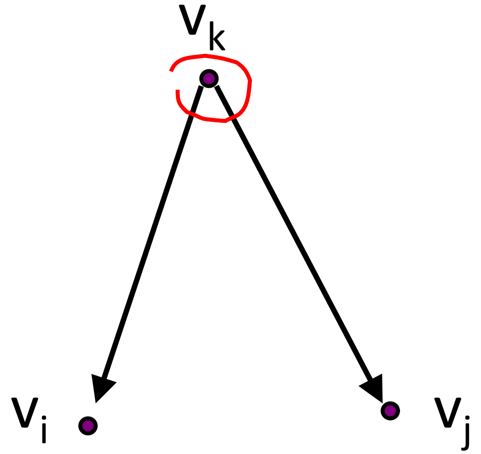


(5) 有向图中：$D=A^TA$。

$$D=(c_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$d_{ij}=\sum \alpha_{ik}\,\alpha_{jk}$$

d_{ij}表示以v_i,v_j为终点的始点数目。



定理14.11

- 设A为有向图D的邻接矩阵，则A的l次幂A^l中元素$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为l的通路数，其中$a_{ii}^{(l)}$为D中v_i到自身长度为l的回路数。
- 证明略。

$$A^2 = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0\times 0 + 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 + 0\times 0 + 0\times 0 = 1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(2)})$$

$$A^3 = A^2 \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(3)})$$

其中：

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik}^{(2)} a_{kj} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik} a_{kj}^{(2)}$$

一般有：

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{7\times 7}$$

其中：

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h=1}^{7} a_{ih}^{(k-1)} a_{hj}$$

现在来看看 $a_{ij}^{(k)}$ 的值有什么实际意义。以 $a_{ij}^{(2)}$ 为例：

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik} a_{kj} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{i7}a_{7j}$$

$a_{il} \cdot a_{lj} \neq 0$ 当且仅当 $a_{il} = a_{lj} = 1$

表示从 v_i 出发两步到达 v_j 的路径数目

同理

$a_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 出发k步到达 v_j 的路径数目

若要追问这一路径是什么？

途经哪几个点？

只要回溯 $a_{ij}^{(k)}$ 是如何形成即可求得

例如 $a_{17}^{(3)}$，我们来看一下它的形成过程：

$$A_1^{(1)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$$

15

$$A_1^{(2)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

15 54 154

$$= A_1^{(1)} \times A$$

$$A_1^{(3)} = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 0\ 1)$$

154 47 1547

$$= A_1^{(2)} \times A$$

上例只是讨论从一点到另一点是否有路相通？有几条路相通？

思考：若存在多条路相通，哪一条是最短的？