哈尔滨工业大学（深圳）2018级《代数与几何》期中试题

（此卷满分30分）

注：本试卷中 $R(\boldsymbol{A})$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{A}^*$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题1分，共5分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ ____________.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n =$ ____________.

3．已知两直线 $L_1: x-1 = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$，$L_2: \dfrac{x+2}{2} = y-1 = z$，则过 L_1 且平行于 L_2 的

平面方程为____________.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) =$ ____________.

5．设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = a \neq 0$，则 $\left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1} \right| =$ ____________.

二、选择题（每小题1分，共5分）

1．过点 $(2,-1,3)$，且和平面 $\pi_1: 2x-y+3z-1=0$ 与 $\pi_2: 5x+4y-z-7=0$

都平行的直线方程为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　【　　】

（A）$\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y+1}{-17} = \dfrac{z-3}{-13}$；　　（B）$\dfrac{x-2}{-11} = \dfrac{y+1}{-17} = \dfrac{z-3}{13}$；

（C）$11x-17y-13z=0$；　　（D）$11x+17y-13z=0$.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n（n>1）阶方阵，则下列结论正确的是　　　　　　　　　　【　　】

（A）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|$；　　（B）$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^*)$；

（C）$A^* = \frac{1}{|A|}A^{-1}$；　　　　（D）若$|A| \neq 0$，则$|A^*| \neq 0$.

3. 设$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$，$B$是4阶方阵，且$R(B) = 3$，则$R(AB - B)$为

【　　】

（A）4；　　（B）3；　　（C）2；　　（D）1.

4. 设A为3阶矩阵，B为3阶可逆阵，且$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若将$B$的第2列加到第1列得$P$，则$P^{-1}AP$为　　【　　】

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 设A为3阶方阵，满足$A^* = A^{\mathrm{T}}$，若$a_{31} = a_{32} = a_{33} > 0$，则$a_{31}$的值为　【　　】

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；　　（B）3；　　（C）$\frac{1}{3}$；　　（D）$\sqrt{3}$.

三、（本题5分）

求过点$M_0(2,1,3)$且与直线$L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

四、（本题5分） 设矩阵$A = E - \alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，$B = E + 2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，其中$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求$AB$.

五、（本题 5 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶可逆方阵，满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

六、（本题 3 分）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\quad 0,\quad -1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, n\in\mathrm{N}, k$ 为常数，（1）求 R（A）（2）求行列式 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{n}|$ 的值.

七、（本题 2 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆，满足 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$，.

证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆.