

1. Use the CFL pumping lemma to show following language not to be context-free:

$$\{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}.$$

反证法。假设  $L = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$  是 CFL，由 CFL 泵引理，存在正整数  $N$ ，使长度超过  $N$  的串符合 CFL 泵引理。

取  $s = a^N b^{N+1} c^{N+2}$  则  $s = uvwxy$  中，因为  $|vwx| \leq N$   $vwx$  可能几种分布：

- i) 都在  $a$  或  $b$  中，取  $i = 2$  则  $s' = uv^iwx^i y$  中  $a$  或  $b$  可能不小于  $c$
- ii) 在  $c$  中，取  $i = 0$
- iii) 在  $ab$  之间，取  $i = 2$
- iv) 在  $bc$  之间，取  $i = 0$

无论何种情况，都与假设矛盾。得证

2. Consider the CFG  $G$  defined by productions:

$$S \rightarrow aS|Sb|a|b$$

Prove by induction on the string length that no string in  $L(G)$  has  $ba$  as a substring.

对  $|w|$  归纳，首先  $|w| = 1$  显然成立

假设，对所有  $|w| \leq k - 1$  命题成立

考查  $|w| = k$  有  $w = aw_1$  或  $w = w_2b$  而由归纳假设知  $w_1, w_2$  都成立，显然无论如何无法增加  $ba$  子串，所以  $w$  成立

3. Convert the PDA  $P = (\{p, q\}, (0, 1), \{X, Z_0\}, \delta, q, Z_0)$  to a CFG, if  $\delta$  is given by:

- (1)  $\delta(q, 1, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
- (2)  $\delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
- (3)  $\delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
- (4)  $\delta(q, \epsilon, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$
- (5)  $\delta(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$
- (6)  $\delta(p, 0, Z_0) = \{(q, Z_0)\}$

1)  $S \rightarrow [qZx]$  for each  $x$  in  $Q$ ;

2)  $[qAr_n] \rightarrow a[pA_1r_1][pA_2r_2] \cdots [pA_nr_n]$  if  $(p, A_1A_2 \cdots A_n) \in \delta(q, A, a)$   $n \geq 0$

0	$S \rightarrow [qZq]$ $S \rightarrow [qZp]$	$2[qZp]$	✓	step 2, 消掉 $[qZp]$ , 因与自己循环
1	$[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$	$4[qXq]$ $4[qXq]$ $3[pZp]$	✓	step 4, ... step 3, 因生成 step 2 中的 $[qZp]$ ,
2	$[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$ $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$	$4[qXq]$ $1[pXq]$ $4[qXq]$	✓	step 1, 消掉 $[pXq]$ , 因无此产生式
3	$[qXq] \rightarrow 0[pXq]$ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$	$1[pXq]$	✓	$S \rightarrow [qZq]$ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$ $[qZq] \rightarrow \epsilon$ $[pXp] \rightarrow 1$ $[pZp] \rightarrow 0[qZp]$ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$
4	$[qZq] \rightarrow \epsilon$		✓	$S \rightarrow A$ $A \rightarrow 1BC$ $B \rightarrow 1BD$ $B \rightarrow 0D$ $A \rightarrow \epsilon$ $D \rightarrow 1$ $C \rightarrow 0A$
5	$[pXp] \rightarrow 1$		✓	
6	$[pZp] \rightarrow 0[qZp]$ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$	$3[pZp]$	✓	

4. Design Turing machine for the language:  $\{ww^R \mid w \text{ is any string of 0's and 1's}\}$ .

