第7章 二元关系

7.1 序偶与笛卡儿积

定义7.1(有序对(或序偶)， ordered pairs) 由两个元素x和y（允许$x=y$）按一定次序排列组成的二元组$<x，y>$称为一个有序对或序偶，记作$<x，y>$，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。注意，第一、二元素未必不同。

如平面直角坐标系中的任意一点坐标（x, y）均是序偶，而全体这种实数对的集合$\{(x, y) \mid x \in \mathrm{R} \wedge y \in \mathrm{R}\}$就表示整个平面。

有序对$\langle x, y\rangle$ 具有以下性质：

(1) 当$x \neq y$ 时，$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$ 。

(2) $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 的充要条件是$x=u$ 且$y=v$。

(3) $\langle x, x\rangle$ 也是序偶。

这些性质是二元集$\{x, y\}$所不具备的。例如当$x \neq y$ 时有$\{x, y\}=\{y, x\}$，原因是有序对中的元素是有序的，而集合中的元素是无序的。再例如，$\{x, x\}=\{x\}$，原因是集合中的元素是互异的。

由性质(2)可推出$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$的充要条件是$x=y$。有序对的概念可以进一步推广到多元有序组。

定义7.2(n元有序组) 若$n \in \mathrm{N}$且$n > 1$，x_1, x_2, …, x_n 是n 个元素，则n元组 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ 定义为：

当n=2时， 二元组是有序对 $\langle x_1, x_2 \rangle$ ；

当$n \neq 2$时， $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

$$= \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

本质上, n元有序组依然是序偶。

n元有序组有如下性质：

$\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n\rangle$ 的充要条件是

$x_1=y_1, x_2=y_2, \ldots, x_i=y_i, \ldots, x_n=y_n$。

前面提到，一个序偶$\langle x, y\rangle$的两个元素可来自不同的集合，若第一元素取自集合A, 第二元素取自集合B，则由A、B中的元素，可得若干个序偶，这些序偶构成的集合，描绘出集合A与B的一种特征，称为笛卡儿乘积。其具体定义如下：

定义7.3 设A, B 为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为集合A和B的笛卡儿积(cartesian product)，又称作直积，记作$A\times B$。

A和B 的笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

定义7.4 (n阶笛卡儿积(cartesia*n* prod*u*ct)) 若$n \in \mathrm{N}$，且$n > 1$， $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n 个集合，它们的n 阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$=\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

当$A_1=A_2=\ldots=A_n=A$时，$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$简记为$A^n$。

【例7.1】 设$A=\{1, 2\}$，$B=\{a, b, c\}$，

$C=\{\varnothing\}$，R为实数集，则

（1） $A\times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle,$

$\langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle,$

$\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$

$\Phi\times A=\Phi$

(2) $A\times B\times C=$

$\{\langle 1, a, \Phi\rangle, \langle 1, b, \Phi\rangle, \langle 1, c, \Phi\rangle,$

$\langle 2, a, \Phi\rangle, \langle 2, b, \Phi\rangle, \langle 2, c, \Phi\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{\langle 1, \langle a, \Phi\rangle\rangle, \langle 1, \langle b, \Phi\rangle\rangle,$

$\langle 1, \langle c, \Phi\rangle\rangle, \langle 2, \langle a, \Phi\rangle\rangle,$

$\langle 2, \langle b, \Phi\rangle\rangle, \langle 2, \langle c, \Phi\rangle\rangle\}$

(3) $A^2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

(4) $B^2=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle,$

$\langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

(5) R^2=｛〈x, y〉|x , y是实数｝， R^2为笛卡儿平面。

显然R^3为三维笛卡儿空间。

显然 $A\times B$与 $B\times A$所含元素的个数相同（A, B是有限集合）， 但$A\times B\neq B\times A$。

- $A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

  $P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

  $P(A)\times B = \varnothing$

- 设 $A = \{1，2\}$, 求$P(A)\times A$？

定理7.1 若A, B是有穷集合，则有

$$|A\times B|=|A|\cdot|B| \quad (\cdot\text{为数乘运算})$$

该定理由排列组合的知识不难证明。

定理7.2 对任意有限集合A_1，$A_2, \ldots$，A_n，有

$$|A_1\times A_2\times \ldots \times A_n|=|A_1|\cdot \ldots \cdot|A_n| \quad (\cdot\text{为数乘运算})$$

这是十分直观的，可用归纳法证明之。

定理7.4(笛卡儿积与$\subseteq$ 运算的性质1)

对任意的集合A, B 和C， 若$C\neq\Phi$， 则

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow (A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow (C\times A\subseteq C\times B)$$

该定理中的条件$C\neq\Phi$是必须的， 否则不能由$A\times C\subseteq B\times C$或$C\times A\subseteq C\times A$推出$A\subseteq B$。

定理7.5 (笛卡儿积与$\subseteq$ 运算的性质2)

对任意的集合A, B, C和D， 有

$$(A\subseteq C\wedge B\subseteq D)\Rightarrow (A\times B\subseteq C\times D)$$

思考：定理7.5的逆命题是否成立？如果成立给出证明，如果不成立请给出反例，在什么条件下成立？

笛卡儿积的性质

（1） 不适合交换律

$A\times B \neq B\times A \qquad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

（2） 不适合结合律

$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \qquad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$

（3） 对于并或交运算满足分配律

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

（4） 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$

（5） 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质的证明方法

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in A\times(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in A\times B \vee <x,y> \in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in (A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例

（1）证明 $A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

（2）$A\times C = B\times D$ 是否推出 $A=B, C=D$？为什么？

解　（1）任取 $<x,y>$

$<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$

（2）不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则 $A\times C = B\times D$ 但是 $A \neq B$.

7.2 关 系 及 表 示

关系是客观世界存在的普遍现象，它描述了事物之间存在的某种联系。例如，人类集合中的父子、兄弟、同学、同乡等，两个实数间的大于、小于、等于关系，集合中二直线的平行、垂直等等，集合间的包含，元素与集合的属于……都是关系在各个领域中的具体表现。表述两个个体之间的关系，称为二元关系；表示三个以上个体之间的关系，称为多元关系。我们主要讨论二元关系。

一、二元关系的定义

1．定义 7.3　如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系，简称为关系，记作 R.

如果$<x,y> \in R$，可记作 xRy；如果$<x,y> \notin R$，则记作 $x \not R y$

2．实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R 是二元关系，当 a,b 不是有序对时，S 不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

我们常用符号R表示关系，如个体a与b之间存在关系R，则记作aRb, 或$\langle a, b\rangle \in R$, 否则$a \not R\, b$ 或$\langle a, b\rangle \notin R$。$R$只是关系的一种表示符号，至于是什么关系，需要时需附注。同时关系并不限于同一类事物之间，也存在于不同物体之间。如旅客住店，张、王、李、赵四人，1，2，3号房间，张住1号，李住1号，王住2号，赵住3号。若分别以a, b，c, d表示四人，R表示住宿关系，则有$R=\{\langle a, 1\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle d, 3\rangle\}$。因此我们看到住宿关系$R$是序偶的集合。

任何序偶的集合，确定了一个二元关系，并称该集合为一个**二元关系**，记作R。二元关系也简称关系。对于二元关系R，如果$\langle x, y\rangle \in R$，也可记作$xRy$。

定义并不要求R中的元素$\langle x, y\rangle$中的x, y取自哪个个体域。因此，R=\{$\langle 2, a\rangle$，$\langle u$, 狗$\rangle$，〈钱币，思想〉\}也是一个二元关系。因为它符合关系的定义，但是无意义，显然对毫无意义的关系的研究也无甚意义。若规定关系R中序偶$\langle x, y\rangle$的$x \in A, y \in B$，如上面的住店关系，这样的序偶构成的关系R，称为从A到B的一个二元关系。由$A\times B$的定义知，从A到B的任何二元关系，均是$A\times B$的子集，因此有下面的定义。

二、从 A 到 B 的关系与 A 上的关系

1．定义 7.4

设 A,B 为集合,

$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从 A 到 B 的二元关系,

当 $A=B$ 时则叫做 A 上的二元关系.

例　　$A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$，那么

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4 是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系.

2．计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$ 的子集有 2^{n^2} 个．所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如$|A|=3$，则 A 上有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系.

R称为集合A_1， A_2， …， A_{n-1}到A_n上的n元关系（n-array relations）, 如果R是$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n$的一个子集。 当$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = A_n$时， 也称$R$为$A$上的$n$元关系。

当$n=2$时， 称R为A_1到A_2的**二元关系**。

n元关系也可视为$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}$到$A_n$的二元关系。

由于关系是集合（只是以序偶为元素）， 因此， 所有规定集合的方式均适用于关系的确定。

当A, B均是有限集合时，因为$|A\times B|=|A|\cdot|B|$，而其子集的个数是幂集$P(A\times B)$的元素个数，

$|P(A\times B)|=2^{|A|\cdot|B|}$，所以由$A$到$B$共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的二元关系。

下面介绍一些特殊的二元关系:

$\Phi\subseteq A\times B$，称Φ为A到B的<u>空</u>关系。

$A\times B\subseteq A\times B$，称$A\times B$ 为A到B的<u>全域</u>关系。

$I_A=\{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}$，称为$A$上的<u>恒等</u>关系。

特定集合上的小于等于关系 L_A、整除关系 D_A、包含关系 $R_{\subseteq}$定义如下：

$L_A = \{<x,y>| \ x,y \in A \land x \le y\}$，这里 $A \subseteq R$，R 为实数集合

$D_A = \{<x,y>| \ x,y \in A \land x$ 整除 $y\}$，这里 $A \subseteq Z^*$, Z^*为非 0 整数集合

$R_{\subseteq} = \{<x,y>| \ x,y \in A \land x \subseteq y\}$，这里 A 是集合族.

例如 $A = \{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$，则

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，则 C 上的包含关系是

$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等.

在此引入关系的表示法。

因为关系是一种特殊的集合，所以关系仍然能使用集合的表示方法。如集合的列举法和描述法。除此之外，有限集合的二元关系亦可用图形来表示，这就是关系图。

定义 设集合$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$到$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$上的一个二元关系为$R$，以集合$A$、$B$中的元素为顶点，在图中用“。”表示顶点。若$x_i R y_j$，则可自顶点$x_i$向顶点$y_j$引有向边$\langle x_i, y_j\rangle$，其箭头指向$y_j$。用这种方法画出的图称为关系图（*graph of relation*）。

如关系R是定义在一个集合A上，即$R \subseteq A \times A$，只需要画出集合A中的每个元素即可。起点和终点重合的有向边称为环（*loop*）。

【例7.2.2】 求集合A=｛1，2，3，4 ｝上的恒等关系、空关系、全关系和小于关系的关系图。

解 恒等关系

$I_A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

空关系$\Phi=\{\ \}$

全关系

$A\times A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

小于关系L_A={〈1, 2〉，〈1, 3〉，〈2, 3〉，〈1, 4〉，〈2, 4〉，〈3, 4〉}

其关系图分别见图7.2.2、图7.2.3、图7.2.4、图7.2.5。

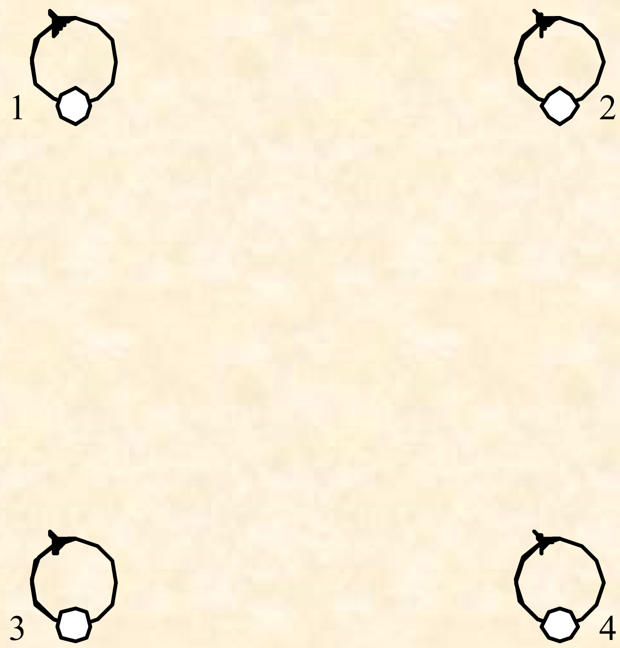


图 7.2.2

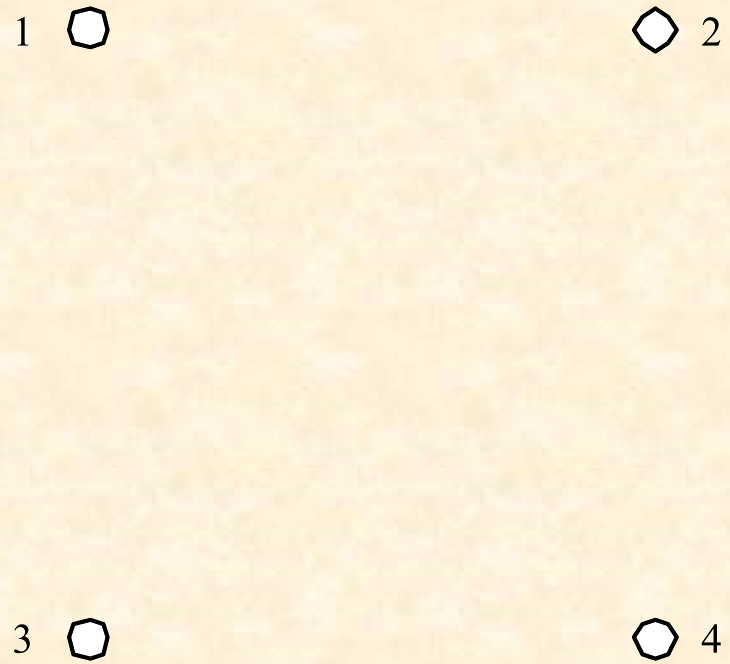


图 7.2.3

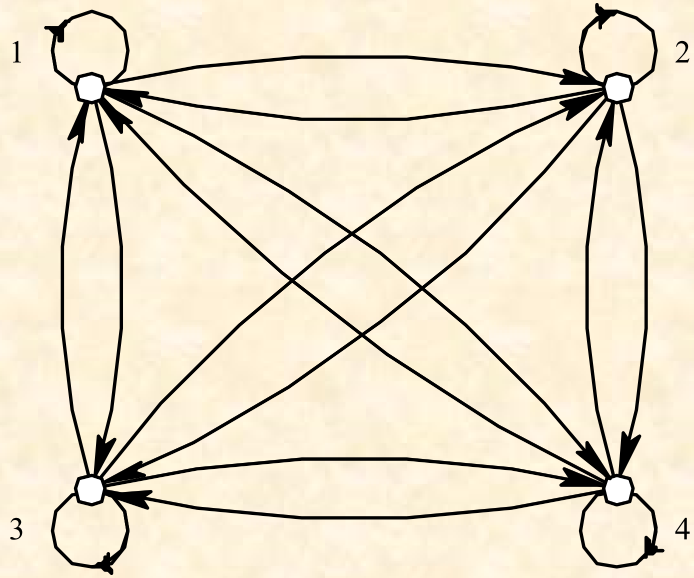


图 7.2.4

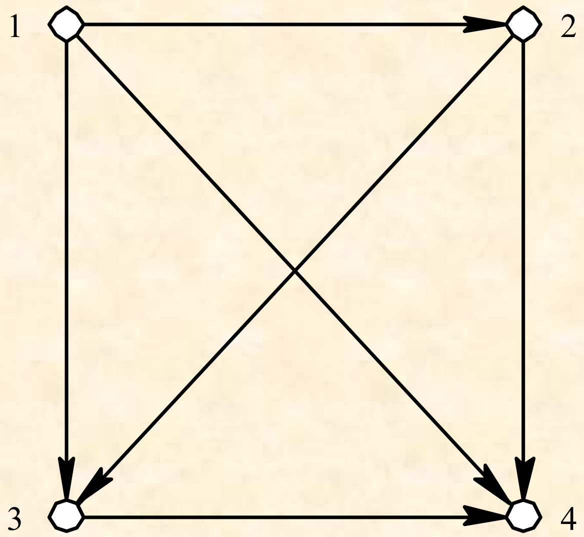


图 7.2.5

当A中元素的次序标定后，对于任何关系R，R的关系图与R的集合表达式是可以唯一相互确定的。我们也可看出关系图直观清晰，是分析关系性质的方便形式，但是对它不便于进行运算。关系还有一种便于运算的表示形式，称为关系矩阵（*matrix of relation*）。

定义7.2.5 设$R \subseteq A \times B$，$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，那么$R$的关系矩阵$M_R$为一$m \times n$矩阵，它的第$i$，$j$分量$r_{ij}$只取值0或1，而

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当且仅当 } a_i R b_j \\ 0 & \text{当且仅当 } a_i \overline{R} b_j \end{cases}$$

例7.2.2中的图7.2.2、 图7.2.3、 图7.2.4、 图7.2.5所示关系的关系矩阵分别是

$$M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{\varnothing} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{A\times A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{L_A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系R的集合表达式与R的关系矩阵也可以唯一相互确定，因此R的集合表达式、关系图、关系矩阵三者均可以唯一相互确定，并且它们各有各的特点，可以根据不同的需要选用不同的表达方式。

7.3 关 系 的 运 算

A到B的二元关系R是$A\times B$的子集，亦即关系是序偶的集合。故在同一集合上的关系，可以进行集合的所有运算。作为集合对关系作并、交、差、补运算是理所当然的，但为了运算结果作为关系的意义更明确，我们也要求运算对象应有相同的域，从而运算结果是同一域间的关系。同前所述，这一要求也不是本质的。因此，在讨论关系运算时，我们有时忽略它们的域。

定义 设R是A到B的二元关系。

（1） 用xRy表示 $\langle x, y\rangle \in R$，意为$x$，$y$有$R$关系（为使可读性好，我们将分场合使用这两种表达方式中的某一种）。

（2） 由$\langle x, y\rangle \in R$的所有$x$组成的集合称为关系$R$的定义域（*domain*）记作$Dom\ R$， 即

$$Dom\ R=\{x|x\in A\wedge \exists y(y\in B\wedge \langle x, y\rangle \in R)\}$$

（3）由$\langle x, y\rangle \in R$的所有$y$组成的集合称为关系$R$的值域（*range*），记作$Ran\ R$，即

$$Ran\ R=\{y|y\in B\wedge \exists x(x\in A\wedge \langle x, y\rangle \in R)\}$$

（4）R的定义域和值域的并集称为R的域，记作$Fld\ R$。形式化表示为：

$$Fld\ R=Dom\ R\cup Ran\ R$$

**一般地，若R是A到B的二元关系，则有

$$Dom\ R\subseteq A, Ran\ R\subseteq B。$$

【例】设$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

$B=\{a, b, c, d\}$，则

$R=\{\langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle,$

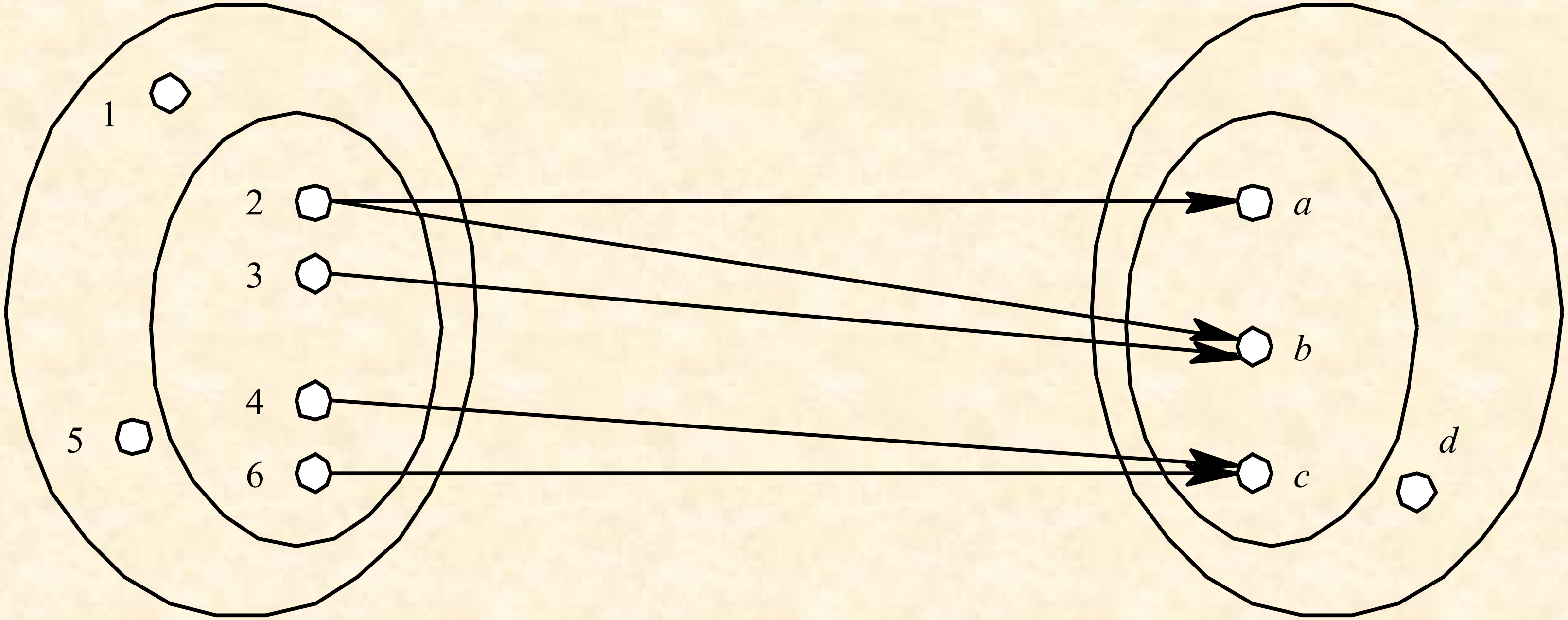
$\langle 4, c\rangle, \langle 6, c\rangle\}$

那么如图所示：

$Dom\ R=\{2, 3, 4, 6\}$，$Ran\ R=\{a, b, c\}$

$Fld\ R=\{2, 3, 4, 6, a, b, c\}$

各箭头分别表示$2Ra$，$2Rb$，$3Rb$，$4Rc$，$6Rc$。



图

定义7.3.1 设R和S为A到B的二元关系，其并、交、差、补运算定义如下：

$$R\cup S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y \vee x\,S\,y\}$$

$$R\cap S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y \wedge x\,S\,y\}$$

$$R-S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y \wedge \neg\, x\,S\,y\}$$

$$\sim R=A\times B-R=\{\langle x, y\rangle \mid \neg\, x\,R\,y\}$$

【例7.3.1】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，若$R=\{\langle x, y\rangle \mid (x-y)/2$是整数, $x, y\in A\}$，$S=\{\langle x, y\rangle \mid (x-y)/3$是正整数, $x, y\in A\}$，求$R\cup S$，$R\cap S$，$S-R$，$\sim R$，$R\oplus S$。

解

$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

$S=\{\langle 4,1\rangle\}$

$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$

$R \cap S = \Phi$

$S - R = S = \{ \langle 4,1 \rangle \}$

$\sim R = A \times A - R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,3 \rangle \}$

$R \oplus S = (R \cup S) - (R \cap S)$

$= \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle \}$

定义7.3.2 设R是A到B的关系，R的**逆关系**或逆（*converse*）是B到A的关系，记为R^{-1}，规定

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid x\in A, y\in B , x\, R\, y\}$$

由定义很显然，对任意$x\in A$, $y\in B$，有

$$x\, R\, y \Leftrightarrow y\, R^{-1}x$$

$$M_{R^{-1}} = M'_R$$ M′表示转置矩阵

例如：$I_A^{-1}=I_A$，“≤”的逆是“≥”，$\Phi^{-1}= \Phi$,

$(A\times B)^{-1}=B\times A$

定义7.3.3 设R是A到B的二元关系，S是B到C的二元关系， $R\circ S$称为R与S的**复合，**是A到C的关系，定义为：

$$R\circ S=\{<x, z>|\ x\in A\wedge z\in C\wedge\exists y\ (y\in B\wedge xRy\wedge ySz)\}$$

【例7.3.3】 设R表示父子关系，即$\langle x, y\rangle\in R$说明x是y的父亲，$R\circ R$就表示祖孙关系。

【例7.3.5】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，$C=\{1, 3, 5\}$，$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，且

$R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$，

$S=\{\langle 2, l\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 6, 3\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle l, l\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}\subseteq A\times C$

用图表示$R\circ S$，如图7.3.1所示。

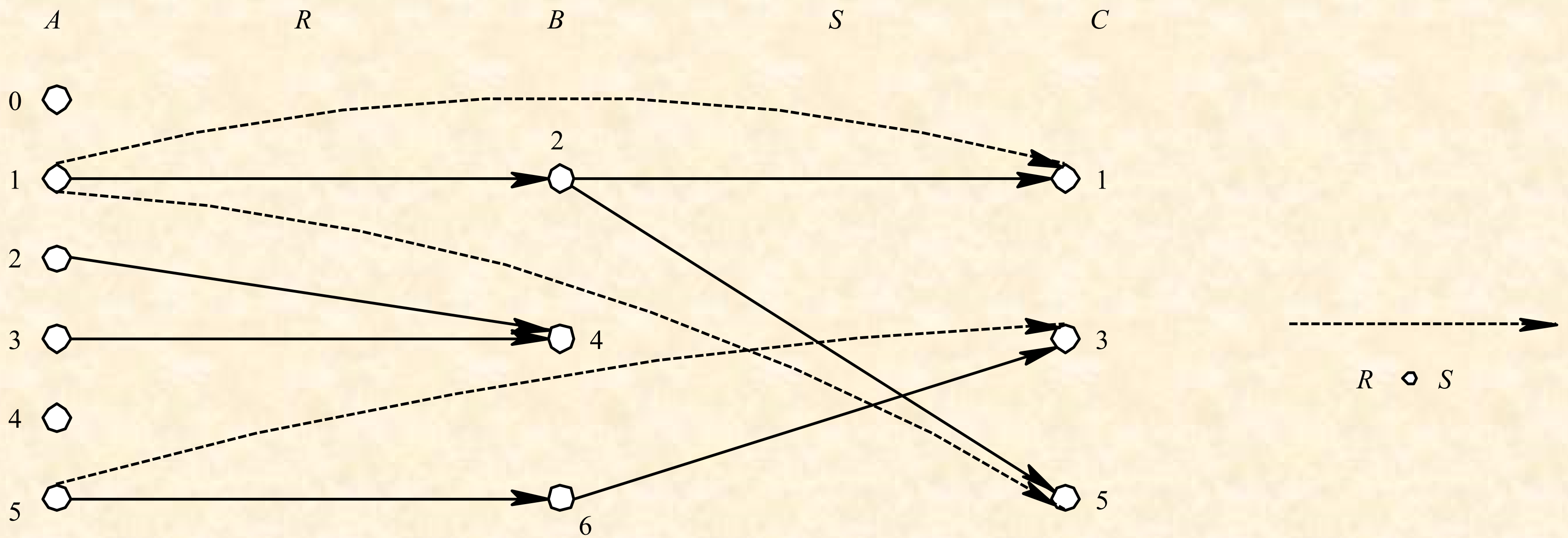


图 7.3.1

【例7.3.6】 设集合A＝{1, 2, 3, 4, 5}，R，S均为A上的二元关系，且

R＝{⟨x, y⟩ | $x+y$＝4}＝{⟨0, 4⟩，⟨4, 0⟩，⟨1, 3⟩，⟨3, 1⟩，⟨2, 2⟩}

S＝{⟨x, y⟩ | $y-x$＝1}＝{⟨0, 1⟩，⟨1, 2⟩，⟨2, 3⟩，⟨3, 4⟩}

求 $R \circ S$，$S \circ R$，$R \circ R$，$S \circ S$，$(R \circ S) \circ R$，

$R \circ (S \circ R)$。

解

$R \circ S = \{\langle 4, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$= \{\langle x, z\rangle \mid x+z=5\}$

$S \circ R = \{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3,0\rangle\}$

$= \{\langle x, z\rangle \mid x+z=3\}$

$R \circ R = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$= \{\langle x, z\rangle \mid x-z=0\}$

$S \circ S = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2, 4\rangle\} = \{\langle x, z\rangle \mid z-x=2\}$

$(R \circ S) \circ R = \{\langle 4, 3\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$R \circ (S \circ R) = \{\langle 4, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

从上例已可看出， 一般地 $R \circ S \neq S \circ R$。

练习：(1)设定义在A={1,2,3}中的二元关系：

$R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,1>\}$，$R_2=\{<2,2>,<2,3>,<1,3>\}$，

试求$R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R_1-R_2，$\sim R_1$，$R_1\oplus R_2$，$R_1 o R_2$

(2)设关系R、S的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

试求$R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$，RoS的关系矩阵

3．限制与像

定义 7.9 设 R 为二元关系，A 是集合

（1）R 在 A 上的限制记作 $R \upharpoonright A$，其中

$$R \upharpoonright A=\{<x,y> \mid xRy \wedge x \in A\}$$

（2）A 在 R 下的像记作 $R[A]$，其中

$$R[A]=\operatorname{ran}(R \upharpoonright A)$$

说明：

- R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 是 R 的子关系，即 $R \upharpoonright A \subseteq R$
- 而 A 在 R 下的像 $R[A]$是 $\operatorname{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \operatorname{ran}R$

实例

例　设 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$，则

$R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$

$R\restriction\varnothing=\varnothing$

$R\restriction\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}]=\{2,3\}$

$R[\varnothing]=\varnothing$

$R[\{3\}]=\{2\}$

二、关系运算的性质

定理 7.1 设 F 是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 （1）任取$<x,y>$，由逆的定义有

$$<x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x> \in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y> \in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

（2）任取 x,

$$x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(<y,x> \in F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理 7.2 设 F, G, H 是任意的关系，则

$$(1)\ (F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$$

$$(2)\ (F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$$

证（1）任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F\circ G \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x,s> \in F \land <s,t> \in G) \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,s> \in F \land <s,t> \in G \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s> \in F \land \exists t\,(<s,t> \in G \land <t,y> \in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s> \in F \land <s,y> \in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

（2）任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

定理 7.3 设 R 为 A 上的关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证　任取 $<x,y>$

$$<x,y> \in R \circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \land <t,y> \in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \land t=y \land y \in A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in R$$

定理7.3.2 设I_A， I_B为集合A，B上的恒等关系，

$R \subseteq A \times B$，那么

（1） $I_A \circ R = R \circ I_B = R$

（2） $\Phi \circ R = R \circ \Phi = \Phi$

证明（1）为证 $I_A o R \subseteq R$，设

$\forall \langle x, y \rangle \in I_A o R$。

$\langle x, y \rangle \in I_A o R \Leftrightarrow \exists u(u \in A \wedge \langle x, u \rangle \in I_A \wedge \langle u, y \rangle \in R)$

$\Rightarrow \exists u(u \in A \wedge x = u \wedge \langle u, y \rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$

所以 $I_A o R \subseteq R$得证。

设 $\langle x, y \rangle \in R$，$\langle x, x \rangle \in I_A \wedge \langle x, y \rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A o R$

所以 $R \subseteq I_A o R$得证。

（2) 显然$\Phi \subseteq \Phi o\, R$， 下证$\Phi o\, R \subseteq \Phi$。

设 $\forall \langle x, y\rangle \in \Phi o\, R$。

$\langle x, y\rangle \in \Phi o\, R \Rightarrow \exists\, u(u \in A \wedge \langle x, u\rangle \in \Phi \wedge \langle u, y\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x, u\rangle \in \Phi$

说明命题的前件为假，整个蕴含式为真，所以

$\Phi o\, R \subseteq \Phi$。因此$\Phi o\, R = \Phi$。 同理可证$R o\, \Phi = \Phi$。

定理 7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$

(2) $(G \cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证（3）

证 (3) 任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in F\circ(G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t> \in F \land <t,y> \in G) \land (<x,t> \in F \land <t,y> \in H))$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G) \land \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G \land <x,y> \in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G\cap F\circ H$$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

定理 7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = R\circ R_1 \cup R\circ R_2 \cup \ldots \cup R\circ R_n$$

$$(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n)\circ R = R_1\circ R \cup R_2\circ R \cup \ldots \cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1 \cap R\circ R_2 \cap \ldots \cap R\circ R_n$$

$$(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R \cap R_2\circ R \cap \ldots \cap R_n\circ R$$

定理 7.5 设 F 为关系, A, B 为集合，则

(1) $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$

(2) $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$

(3) $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$

(4) $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

证　只证(1)和(4).

(1) 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in F \restriction (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x,y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x,y> \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \restriction A \vee <x,y> \in F \restriction B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \restriction A \cup F \restriction B$$

所以有 $F \restriction (A \cup B) = F \restriction A \cup F \restriction B$.

(4) 任取 y,

$$y \in F[A \cap B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \land x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \land x \in A \land x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,((<x,y> \in F \land x \in A) \land (<x,y> \in F \land x \in B))$$

$$\Rightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \land x \in A) \land \exists x\,(<x,y> \in F \land x \in B)$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \land y \in F[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有 $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

例子： A={2,3}， B = {2,4}， F = {<2,3>,<3,1>,<4,1>,<5,6>}

$F[A \cap B]$ = {3}， $F[A] \cap F[B]$ = {3,1}。

三、A 上关系的幂运算

定义 7.10

设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$

注意:

- 对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0=R_2^0=I_A$
- 对于 A 上的任何关系 R 都有 $R^1=R$

关于复合运算的关系矩阵有下列结果。

设A是有限集合，$|A|=n$。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R$=［r_{ij}］和$\boldsymbol{M}_S$ =［s_{ij}］都是$n\times n$ 的方阵。于是R与S的复合$R\circ S$的关系矩阵可以用下述的矩阵逻辑乘计算(类似于矩阵乘法)得到，记作$\boldsymbol{M}_{R\circ S}$ $=\boldsymbol{M}_R\cdot\boldsymbol{M}_S$＝［$t_{ij}$］$n\times n$，其各分量$t_{ij}$可采用下式求取：

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}\, s_{kj} \qquad (i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,n)$$

这里，$\bigvee_{k=1}^{n} f(k)=f(1)\vee f(2)\vee\ldots\vee f(n)$。$\vee$为真值析取运算。·乘与普通矩阵乘的不同在于，各分量计算中用 $\bigvee_{k=1}^{n}$ 代替 $\sum_{k=1}^{n}$ 。

例如，例7.3.6中RoS的关系矩阵为

$$M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

【例7.3.7】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$， $R=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

解$R^2=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^3=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}=R^2$

R、 R^2、 R^3、 R^4的关系图如图7.3.2所示。

R、 R^2、 R^3、 R^4所对应的关系矩阵

R、R^2、R^3、R^4的关系图如图7.3.2所示。R、R^2、R^3、R^4所对应的关系矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^2 = M \circ M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M \circ M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^4 = M \circ M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M^2$$

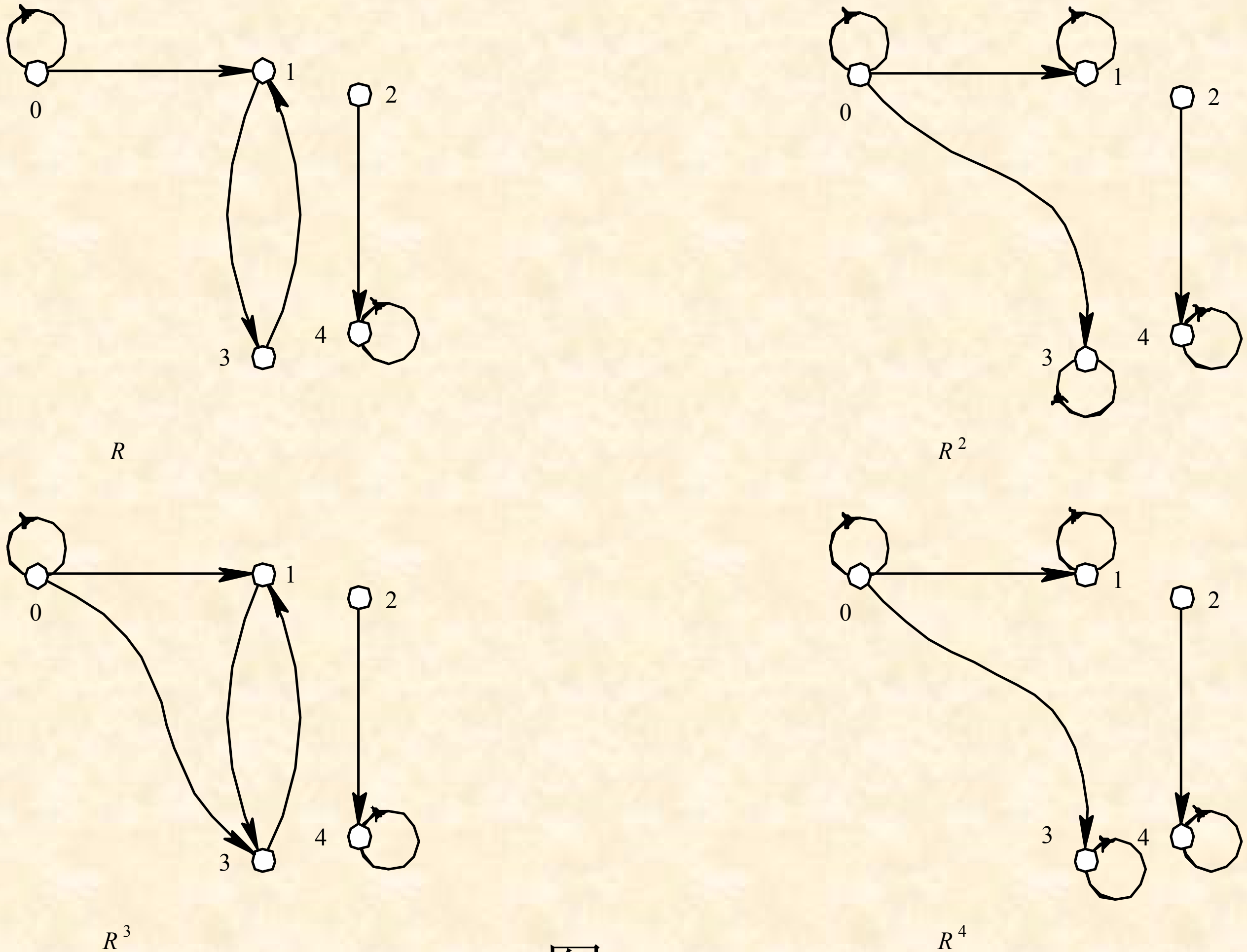


图 7.3.2

练习　设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,

求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解　R 的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 R^2 的关系矩阵分别是

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

同理 R^3 和 R^4 的矩阵是：

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$，即 $R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

而 R^0，即 I_A 的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

用关系图的方法得到 $R^0, R^1, R^2, R^3, ...$ 的关系图如下图所示.

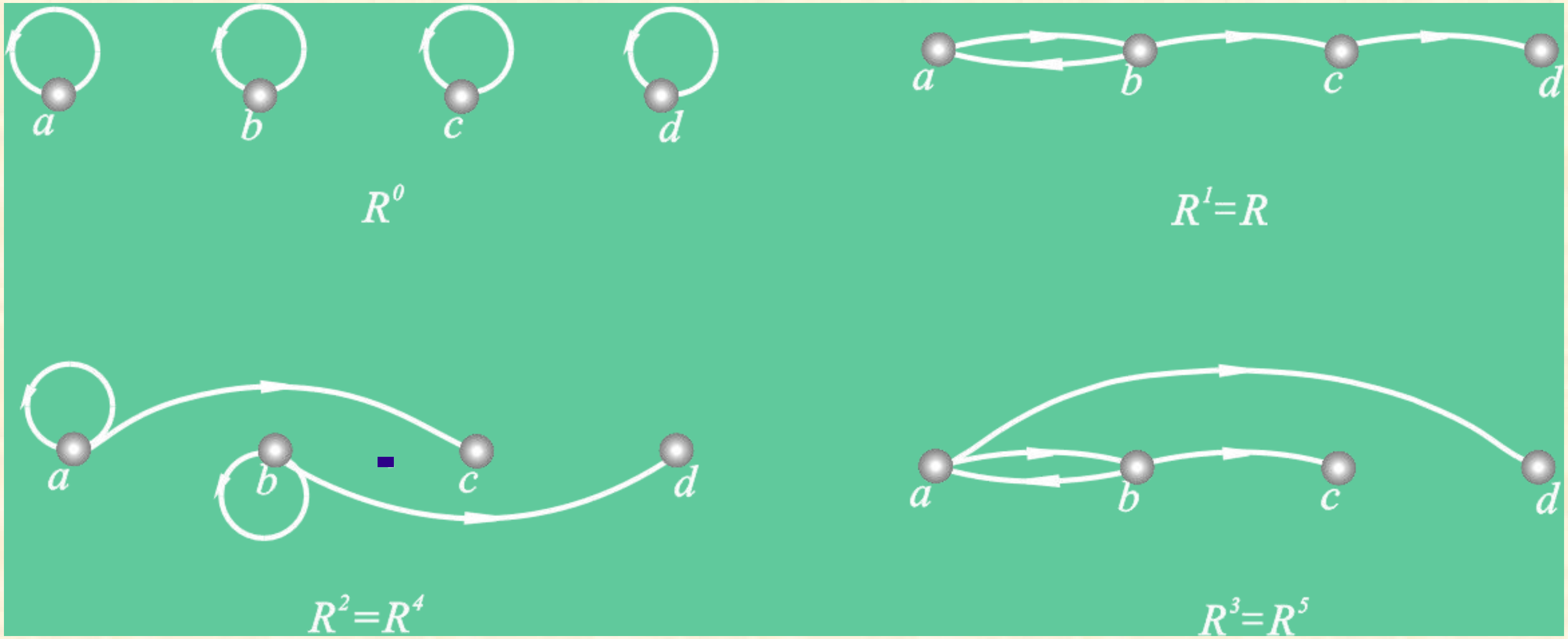


图3

四、幂运算的性质.

定理 7.6 设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系,

则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为 A 上的关系,

由于$|A|=n$, A 上的不同关系只有 2^{n^2} 个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

R^n满足下列性质。

定理7.3.4 设R为A上二元关系，m，n为自然数，那么

(1) $R^{n+1}=R^n o R=R o R^n=R^m o R^{n-m+1}$

(2) $R^m o R^n = R^{m+n}$

(3) $(R^m)^n = R^{mn}$

(4) $(R^{-1})^n=(R^n)^{-1}$

定理 7.7 设 R 是 A 上的关系，

$m, n \in N$，则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m\in N$,施归纳于 n.

若 n=0，则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$，则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1}\ ,$$

所以对一切 $m,n\in N$ 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

(2) 对于任意给定的 $m\in N$,施归纳于 n.

若 n=0，则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设$(R^m)^n = R^{mn}$，则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n\circ R^m = (R^{mn})\circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n\in N$ 有$(R^m)^n = R^{mn}$.

定理 7.8 设 R 是 A 上的关系,

若存在自然数 s,t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$ 有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k,i\in N$ 有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中 $p=t-s$

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有 $R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对 k 归纳.

若 $k=0$，则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p$$

$$= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

(3) 任取 $q \in N$，若 $q<t$，显然有 $R^q \in S$，若 $q \geq t$，

则存在自然数 k 和 i 使得 $q = s+kp+i$，其中 $0 \leq i \leq p-1$.

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而 $s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$

这就证明了 $R^q \in S$.

课后作业

- 3
- 11
- 14
- 17
- 19

7.4 关 系 的 性 质

本节总假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假定不失一般性。因为任一A到B的关系R，即$R \subseteq A \times B$, $A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$，所以关系$R$总可看成是$A \cup B$上的关系，它与原关系$R$具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对$R$的讨论无损于问题的本质。

一、五种性质的定义

1．自反性与反自反性

定义 7.11 设 R 为 A 上的关系，

（1）若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$，则称 R 在 A 上是自反的．（$I_A\subseteq R$？）

（2）若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的．（$R\cap I_A=\varnothing$？）

实例：

自反关系：全域关系 E_A，恒等关系 I_A，小于等于关系 L_A，整除关系 D_A

反自反关系：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系．

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 是自反的，R_3 是反自反的，R_1 既不是自反的也不是反自反的．

2．对称性与反对称性

定义 7.12 设 R 为 A 上的关系，

（1）若 $\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$，则称 R 为 A 上对称的关系.　　（$R=R^{-1}$ ？）

（2）若 $\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \rightarrow x=y)$，则称 R 为 A 上的反对称关系.　　（$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ ？）

实例：

对称关系：A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$

反对称关系：恒等关系 I_A 和空关系也是 A 上的反对称关系.

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，　$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，　$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

R_1 既是对称也是反对称的. R_2 是对称的但不是反对称的.

R_3 是反对称的但不是对称的. R_4 既不是对称的也不是反对称的.

3．传递性

定义 7.13 设 R 为 A 上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land \langle x,y \rangle \in R \land \langle y,z \rangle \in R \rightarrow \langle x,z \rangle \in R),$$

则称 R 是 A 上的传递关系.

实例:

A 上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A 和空关系$\varnothing$

小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1 \rangle,\langle 2,2 \rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,2 \rangle,\langle 2,3 \rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3 \rangle\}$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系, R_2 不是 A 上的传递关系.

【例】 设$A=\{a, b, c\}$，以下各关系

R_i（$i=1, 2, \ldots, 8$）均为A上二元关系。

（1）$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$是自反的，而$R_2=\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$不是自反的，是反自反的。存在既不自反也不反自反的二元关系，例如$R_3=\{\langle a,a\rangle\}$。显然$A$上的$\Phi$关系是反自反的，不是自反的。

值得注意的是，当 $A=\Phi$时（这时A上只有一个关系Φ），A上空关系既是自反的，又是反自反的，因为$A=\Phi$使两者定义的前提总为假。

（2） $R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ 是对称的； $R_5=\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle\}$ 不是对称的；$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$ 是反对称的。其实R_5既不是对称的，也不是反对称的。特别有意思的是，存在既对称又反对称的二元关系，例如A上的恒等关系I_A。

（3）$R_7=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$ 是传递的，但$R_7-\{\langle a,c\rangle\}$ 便不是传递的了。

应当注意，A上的空关系Φ，$R_8=\{\langle a,b\rangle\}$ 等是传递的，因为传递性定义的前提对它们而言均为假。

（4）任何非空集合上的空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；其上的相等关系是自反、对称、反对称、传递的；其上的全关系是自反、对称、传递的。

（5）三角形的相似关系、全等关系是自反、对称、传递的。

（6）正整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；但整数集合上的整除关系只有传递性。

判断一个关系是否具有上述某种的性质 ，除直接用定义，还有下面的充要条件。

二．关系性质的等价描述

下面给出这五种性质成立的充分必要条件.

定理 7.9 设 R 为 A 上的关系，则

（1） R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

（2） R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

（3） R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

（4） R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5） R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

若$\forall x(x \in A \rightarrow <x,x> \in R)$，
则称R在A上是自反的.

R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

证明

（1） 必要性.

任取$<x,y>$，由于 R 在 A 上自反必有

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x,y \in A \land x=y \Rightarrow <x,y> \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x，有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

（2） 先证必要性： 用反证法。

假设$R \cap I_A \neq \Phi$，必存在〈x, y〉$\in R \cap I_A \Rightarrow$〈$x$, y〉$\in I_A$，由于I_A是A上的恒等关系，从而有$x=y$，所以〈x, x〉$\in R$，这与R 在A上是反自反的相矛盾。

再证充分性：任取$x \in A$，则有$x \in A \Rightarrow$〈x, x〉$\in I_A \Rightarrow$〈x, x〉$\notin R$(由于$I_A \cap R = \Phi$)，从而证明了R在A上是反自反的。

若$\forall x(x \in A \to <x,x> \notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$,
则称R为A上对称的关系

R在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(3) 必要性.

任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1}$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$\langle x,y\rangle$,由 $R = R^{-1}$ 得

$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

所以 R 在 A 上是对称的.

R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

若$\forall x \forall y(x,y \in A \land \langle x,y \rangle \in R \land \langle y,x \rangle \in R \to x=y)$,
则称R为A上的反对称关系.

(4) 必要性.

任取$\langle x,y \rangle$，有

$$\langle x,y \rangle \in R \cap R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \land \langle x,y \rangle \in R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \land \langle y,x \rangle \in R$$
$$\Rightarrow x=y \land x,y \in A \quad \text{(因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称的)}$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in I_A$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性.

任取$\langle x,y \rangle$,

$$\langle x,y \rangle \in R \land \langle y,x \rangle \in R$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \land \langle x,y \rangle \in R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \cap R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in I_A \qquad (R \cap R^{-1} \subseteq I_A)$$
$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

R在A上传递当且仅当 $R\circ R\subseteq R$

设R为A上的关系, 若 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\rightarrow<x,z>\in R)$, 则称$R$是$A$上的传递关系.

(5) **必要性.**

任取$<x,y>$有

$$<x,y>\in R\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge<t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R \qquad \text{(因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是传递的)}$$

所以 $R\circ R\subseteq R$.

充分性.

任取$<x,y>,<y,z>\in R$, 则

$$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\circ R$$

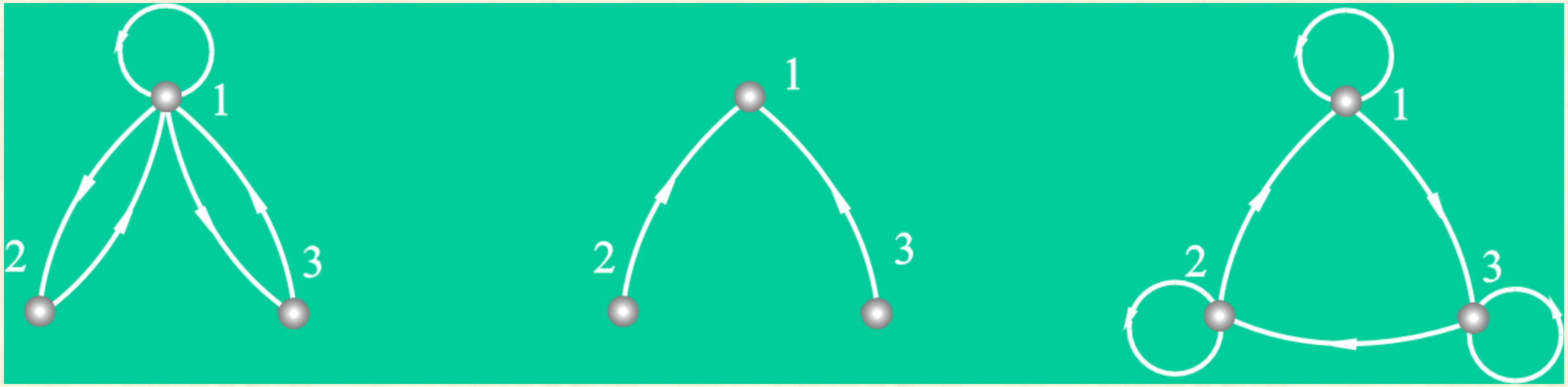
$$\Rightarrow <x,z>\in R$$

所以 R 在 A 上是传递的.

三、关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在位置，M 中相应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

例 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(1)　　(2)　　(3)

图 4

(1) 不是自反也不是反自反的；对称的，不是反对称的；不是传递的.

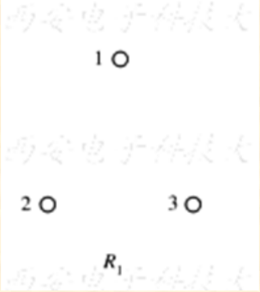
(2) 是反自反但不是自反的；是反对称的但不是对称的；是传递的.

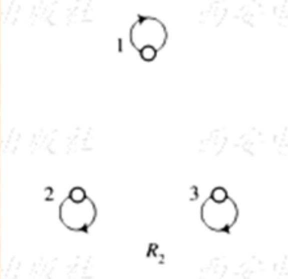
(3) 是自反但不是反自反的；是反对称的但不是对称的；不是传递的.

【例】 设R_i是$A=\{1, 2, 3\}$上的二元关系（如图7.4.1所示），判断它们各具有什么性质？ 并说明理由。

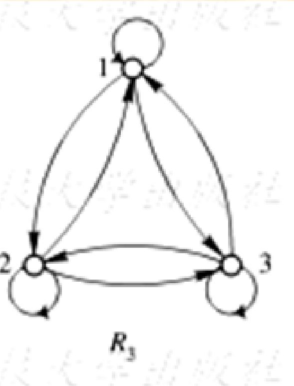
解 根据关系图的特征，我们可判断下列各关系具有的性质。

R_1具有反自反性、对称性、 反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，既无双边又无单边，既无双边又无三角形。

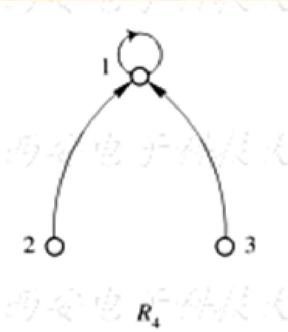




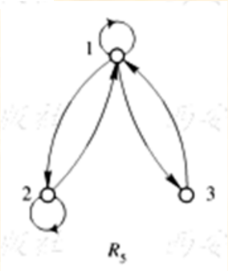
R_2具有自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处有一环，既无双边又无单边，既无双边又无三角形。



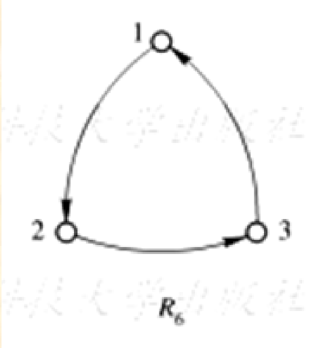
R_3具有自反性、对称性、传递性。因为每一结点处有一环，有边就有双边，有双边又有双环，有三角形就是向量三角形。



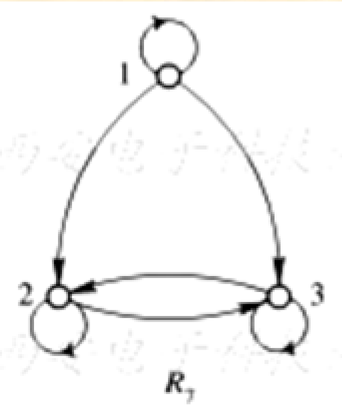
R_4具有反对称性、传递性。因为无双边，无三角形。



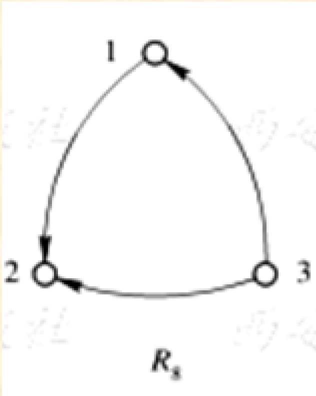
R_5具有对称性。因为无单边。



R_6具有反自反性、反对称性。因为每一结点处均无环。

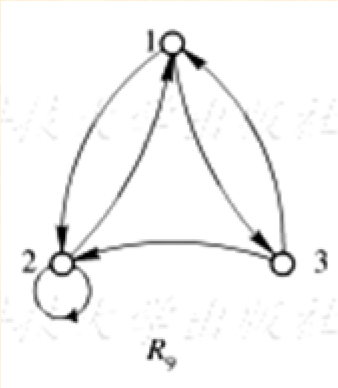


R_7具有自反性、传递性。因为每一结点处有一环，有三角形，且是向量三角形。



R_8具有反自反性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，有三角形，且是向量三角形。

R_9均不具备。



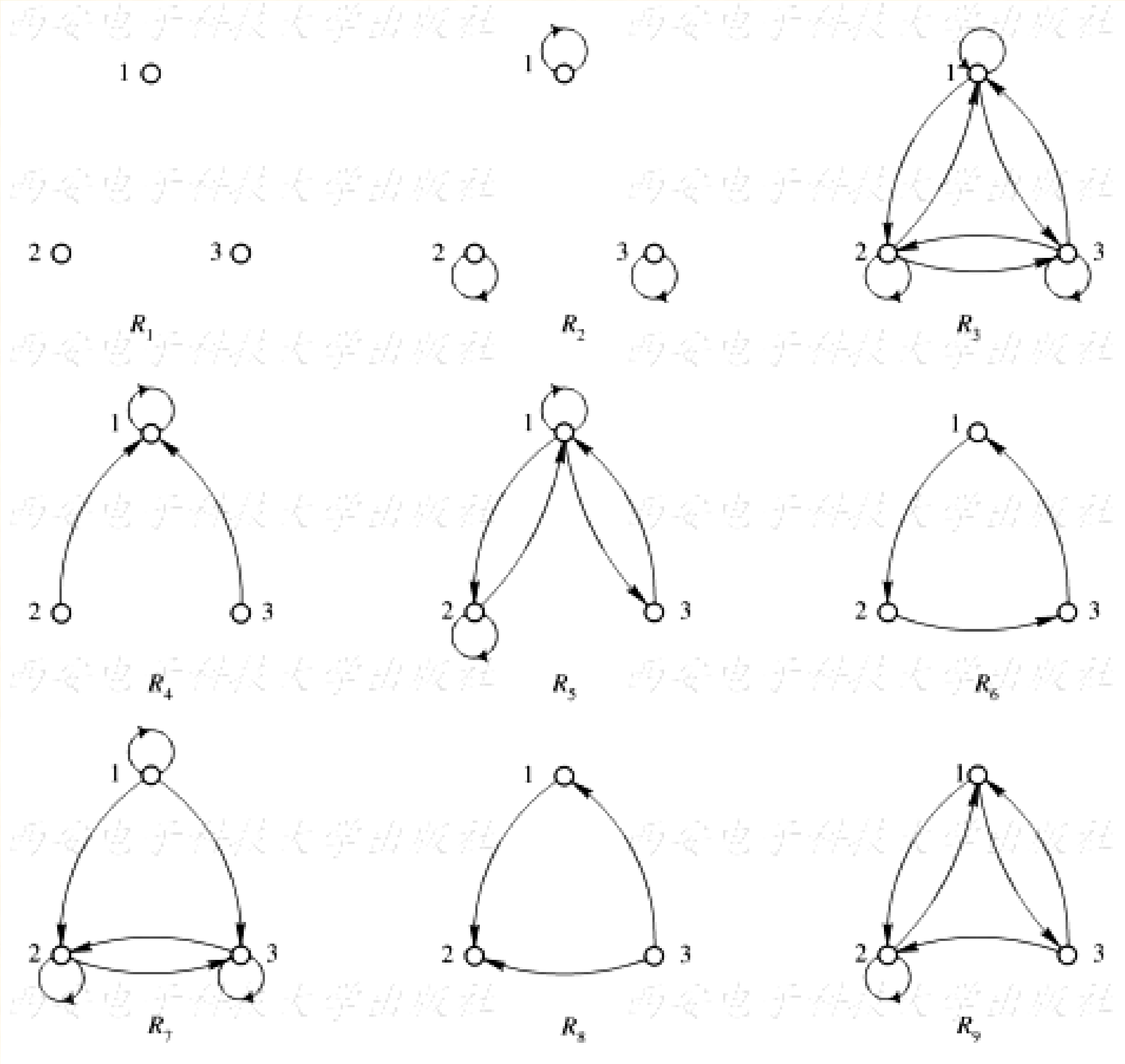


图7.4.1

关系是序偶的集合，可作交、并、差、逆、复合运算。如果已知某些关系具有某一性质，经过关系运算后的结果是否仍具有这一性质，是一个令人关注的问题。如果是，我们称该性质对这一运算封闭。现在我们来讨论五大特性对基本运算的封闭性。

定理7.4.2 设R_1、R_2是A上的自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 o R_2$也是A上的自反关系。证明留给读者。

定理7.4.3 设R_1、R_2是A上的对称关系，则R_1^{-1} 、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、R_1-R_2也是A上的对称关系。

证明 仅证对称性对并运算封闭。

设R_1，R_2对称要证$R_1 \cup R_2$对称。任取$\langle x, y \rangle \in R_1 \cup R_2$，那么$\langle x, y \rangle \in R_1$或$\langle x, y \rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$对称知$\langle y, x \rangle \in R_1$或$\langle y, x \rangle \in R_2$，因而$\langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2$。$R_1 \cup R_2$对称性得证。

定理7.4.4 设R_1、R_2是A上的传递关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$是A上的传递关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是传递的。

证明 (1) 证传递性对求逆运算封闭。

设R_1传递，要证R_1^{-1}传递，设有$\langle x, y\rangle \in R_1^{-1}$，$\langle y, z\rangle \in R_1^{-1}$，那么$\langle y, x\rangle \in R_1$，$\langle z, y\rangle \in R_1$。由$R_1$具有传递性可得$\langle z, x\rangle \in R_1$，即$\langle x, z\rangle \in R_1^{-1}$。

R_1^{-1}在A上是传递的，得证。

(2) 证传递性对交运算封闭。

设R_1，R_2传递，要证$R_1 \cap R_2$传递。设有$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2$，那么$\langle x, y\rangle \in R_1$，$\langle x, y\rangle \in R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1$，$\langle y, z\rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$具有传递性，可得$\langle x, z\rangle \in R_1$，$\langle x, z\rangle \in R_2$，从而$\langle x, z\rangle \in R_1 \cap R_2$。故$R_1 \cap R_2$在$A$上是传递的，得证。

定理7.4.5 设R_1、R_2是A上的反对称关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、R_1-R_2是A上的反对称关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是反对称的。

证明 仅证反对称性对差运算封闭。

设 R_1，R_2反对称，要证R_1-R_2反对称。

设〈x，y〉$\in(R_1$-$R_2)$且〈y，x〉$\in(R_1$-$R_2)$，因而〈x， y〉$\in R_1$， 〈y，x〉$\in R_1$，从而由R_1的反对称性得x=y。这就完成了R_1-R_2反对称的证明。

定理7.4.6 设R_1、R_2是A上的反自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$是A上的反自反关系。

证明留给读者。

我们举例说明反自反性、对称性、反对称性、传递性对合成运算均不封闭。

【例7.4.3】 $A=\{a, b, c\}$，讨论在下列各种情况下 $R\circ S$具有的性质。

(1) $R=\{\langle a, b\rangle\}$, $S=\{\langle b, a\rangle\}$， R、S是反自反的。

(2) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$,

$S=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$， R、S是对称的。

(3) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$,

$S=\{\langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$， R、S是反对称的。

(4) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$,

$S=\{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$，$R$、$S$是传递的。

解

（1） $R\circ S=\{\langle a, a\rangle\}$，所以$R\circ S$不是反自反的。

（2） $R\circ S=\{\langle a, c\rangle\}$，所以$R\circ S$不是对称的。

（3） $R\circ S=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$，所以$R\circ S$是对称的。

（4） $R\circ S=\{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$，因为 $\langle b, a\rangle\in R\circ S$，$\langle a, c\rangle\in R\circ S$，但 $\langle b, c\rangle\notin R\circ S$，所以$R\circ S$不是传递的。

补充(1)设A={1,2,3,4,6,12}，A中“整除”关系记为R，问：R是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？

(2)设A={2,3,4,6,12,24,36}，A中“整除”关系记为R，求R^{-1}及R的关系矩阵，说明R^{-1}的属性。

(3)设A={a,b,c,d}，判定下列关系的性质

R1={<a,a>,<b,a>}

R2={<a,a>,<b,c>,<d,a>}

R3={<c,d>}

R4={<a,a>,<b,b>,<c,c>}

R5={<a,c>,<b,d>}

四、关系的性质和运算之间的联系.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关系的闭包

闭包运算是关系运算中一种比较重要的特殊运算，是对原关系的一种扩充。在实际应用中，有时会遇到这样的问题，给定了的某一关系并不具有某种性质，要使其具有这一性质，就需要对原关系进行扩充，而所进行的扩充又是“最小”的。这种关系的扩充就是对原关系的这一性质的闭包运算。

一、闭包定义

定义 7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，使得 R'满足以下条件：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。它们分别是具有自反性或对称性或传递性的R的“最小”超集合。称r、s、t为闭包运算，它们作用于关系R后，分别产生包含R的、最小的具有自反性、对称性、传递性的二元关系。这三个闭包运算也可由下述定理来构造。

二、闭包的构造方法

1．集合表示

定理　设 R 为 A 上的关系，则有

（1）$r(R)=R\cup R^0$

（2）$s(R)=R\cup R^{-1}$

（3）$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对于有穷集合 $A(|A|=n)$ 上的关系,(3)中的并最多不超过 R^n.

证明思路：

（1）和（2）：证明右边的集合满足闭包定义的三个条件.

（3）采用集合相等的证明方法.

证明左边包含右边，即 $t(R)$包含每个 R^n.

证明右边包含左边，即 $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$具有传递的性质.

证

（1）由 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 可知 $R\cup R^0$ 是自反的，且满足 $R\subseteq R\cup R^0$

设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R\subseteq R''$ 和 IA(R((.

从而 R∪R0(R((

综上所述 R∪R0 满足闭包定义的三个条件，所以

r(R)=R∪R0.

（3） 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

方法：用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n\subseteq t(R)$

$n=1$ 时有 $R^1=R\subseteq t(R)$.

假设 $R^n\subseteq t(R)$成立，那么对任意的$<x,y>$有

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,t>\in R^n\wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,t>\in t(R)\wedge <t,y>\in t(R))$$

$$\Rightarrow <x,y>\in t(R)$$ （因为 $t(R)$是传递的）

这就证明了 $R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$ 成立，为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \ldots$ 是传递的.

任取$<x,y>,<y,z>$，则

$$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,y> \in R^t) \wedge \exists s(<y,z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(<x,z> \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(<x,z> \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了 $R \cup R^2 \cup \ldots$ 是传递的.

【例7.5.1】 设$A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，$R_3=\{\langle 1, 2\rangle\}$，求它们的闭包。

解 $r(R_1)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

$s(R_1)=R \cup R^{-1}$

$=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$t(R_1)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$r(R_2)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$s(R_2)=R \cup R^{-1} =\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}=R_2$

$t(R_2)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$r(R_3)=I_A \cup R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$s(R_3)=R \cup R^{-1}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$t(R_3)=\{\langle 1, 2\rangle\}=R_3$

2. 矩阵表示和图表示

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t，则

$$M_r=M+E \qquad M_s=M+M' \qquad M_t=M+M^2+M^3+\ldots$$

其中 E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t，则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等．除了 G 的边以外，以下述方法添加新的边.

考察 G 的每个顶点，如果没有环就加上一个环．最终得到的是 G_r.

考察 G 的每一条边，如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边．最终得到 G_s.

考察 G 的每个顶点 x_i，找从 x_i 出发的所有 2 步, 3 步, …, n 步长的路径（n 为 G 中的顶点数）.设路径的终点为 $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$，如果没有从 x_i 到 x_{jl} (l=1,2,…,k)的边，就加上这条边．当检查完所有的顶点后就得到图 G_t.

【例7.5.2】 设R是集合$A=\{a,b,c,d\}$上的二元关系

$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$。求$R$的闭包：

r（R）、s（R）、t（R），并画出对应的关系图。

解 $r(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle\}$

$t(R)=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$

其对应的关系图分别如图7.5.1(a)、(b)、(c)所示。

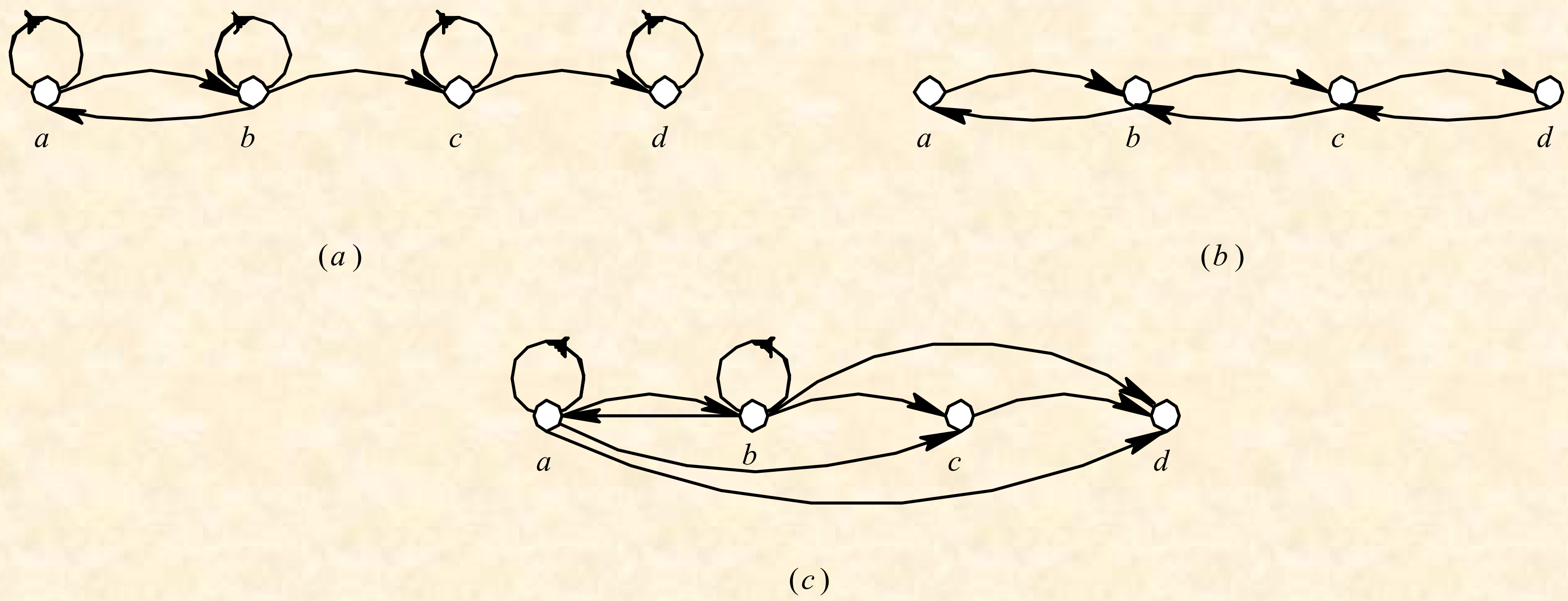
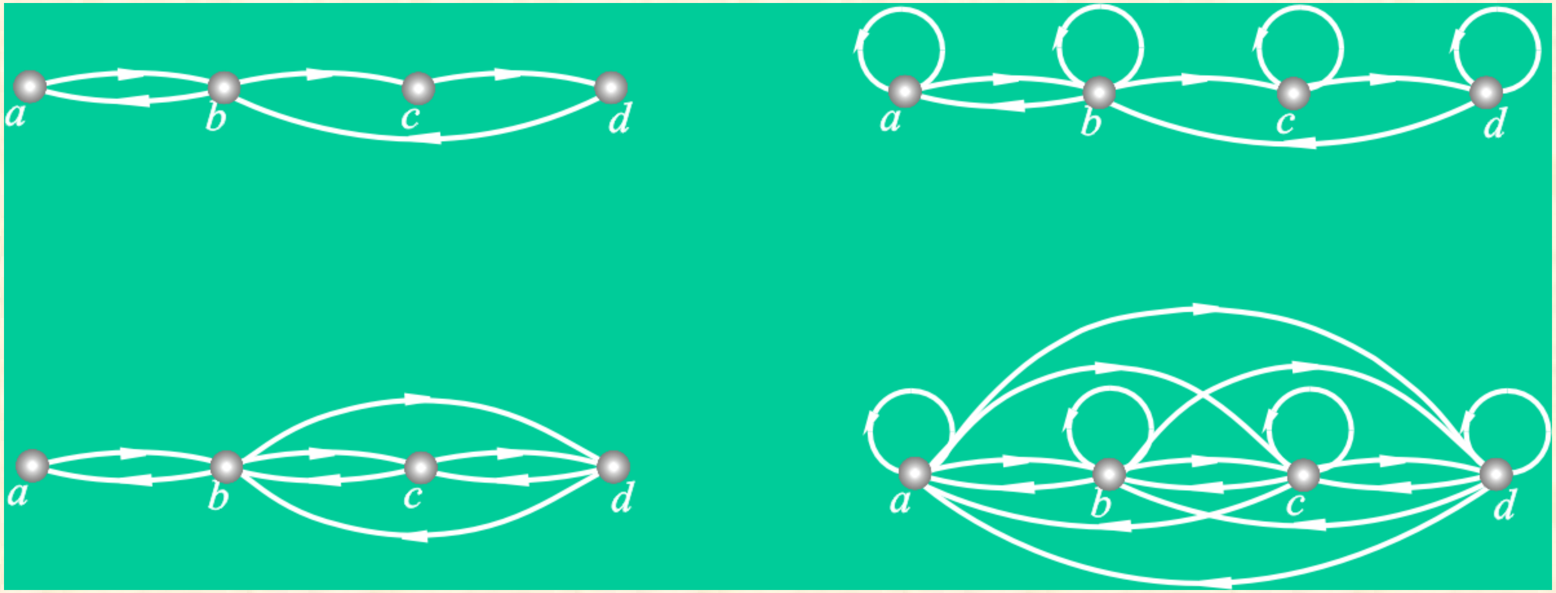


图 7.5.1

练习　　设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$,

R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



$s(R)$　　　　$t(R)$

图 5

从以上讨论可以看出，传递闭包的求取是很复杂的。但是，当集合A为有限集时，A上二元关系的传递闭包的求取便可大大简化。

推论 A为非空有限集合，$|A|=n$。R是A上的关系，则存在正整数$k\leq n$，使得

$$t(R)=R^{+}=R\cup R^{2}\cup\ldots\cup R^{k}$$

补充：设A={1,2,3,4,5}，A中关系R={<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>}，求t(R)

解：$R^2=\{<1, 3>, <4, 2>, <5, 3>\}$

$R^3=\{<4, 3>\}$

$R^4=\Phi$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$

$=\{<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>, <1, 3>,$

$<4,2>, <5, 3>, <4, 3>\}$

下列算法是求取R^+的有效算法。

Warshall(沃夏尔) 算法：设R为有限集A上的二元关系，$|A|=n$，M为R的关系矩阵，可如下求取R^+的关系矩阵 W。

（1） 置 W为M。

（2） 置$i=1$。

（3） 对所有j， $1\leq j\leq n$， 做

① 如果$W[j, i]=1$，则对每一$k=1, 2, \ldots, n$，置$W[j, k]$为$W[j, k] \vee W[i, k]$，即当第j行、第i列为1时，对第j行每个分量重新置值，取其当前值与第i行的同列分量之析取。

② 否则对下一j值进行①。

（4）置i为$i+1$（遍历所有“纽带”元素）。

（5）若$i \leq n$，回到步骤（3），否则停止。

【例4.5.3】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$, 则

$R^2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$

$R^3=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

因此$R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

现用*Warshall*算法求取R^+。

显然，

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以下使用*Warshall*算法求取 W。

（1） W以M为初值。

（2） 当i＝1时，由于 W中只有W［1，1］＝l，故需将第一行各元素与其本身作逻辑和，并把结果送第一行。即重新置值为 $W[1, k] \vee W[1, k] = W[1, k]$，但 W 事实上无改变。

（3） 当i=2时，由于 W［1，2］＝ W［4，2］＝1，故需将第一行和第四行各分量重新置值为 $W[1 , k] \vee W[2 , k]$ 和 $W[4 , k] \vee W[2, k]$。于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（4） 当i=3时，由于 W［1，3］＝W［2，3］＝W［4，3］=1，故需将第一、二、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［3, k］＝W［1，k］，W［2，k］∨ W［3，k］=W［2，k］，W［4，k］∨ W［3，k］= W［3，k］。于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（5） 当i＝4时，由于 W［1，4］＝ W［2, 4］= W［3, 4］= W［4， 4］=1，故需将第一、二、三、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［4, k］＝ W［1，k］，W［2，k］∨ W［4，k］= W［2，k］，W［3，k］∨ W［4，k］= W ［3，k］， W［4，k］∨ W［4，k］= W［4，k］。最终 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故$R^{+}=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle,$

$\langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,$

$\langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle,$

$\langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$。

下面几个定理给出了闭包的主要性质。

定理 7.11 设R是集合A上任一关系，那么

（1） R自反当且仅当$R=r(R)$。

（2） R对称当且仅当$R=s(R)$。

（3） R传递当且仅当$R=t(R)$。

证明 （1）、 （3）的证明留给读者， 现证（2）。（2）的充分性由$s(R)$定义立得。

为证必要性， 设R对称, 那么$R=R^{-1}$。 另一方面，$s(R)=R\cup R^{-1}=R\cup R=R$， 故$s(R)=R$。

定理7.12 对非空集合A上的关系R_1、R_2，若 $R_1 \subseteq R_2$，则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 （1）和（2）的证明留作练习，下面仅证明（3）。

因为$t(R_2)$传递，且$R_2 \subseteq t(R_2)$，但$R_1 \subseteq R_2$，故$R_1 \subseteq t(R_2)$

因$t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系，所以$t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

定理 对非空集合A上的关系R_1、R_2，则

（1） $r(R_1)\cup r(R_2)=r(R_1\cup R_2)$

（2） $s(R_1)\cup s(R_2)=s(R_1\cup R_2)$

（3） $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

证明 (1）和（2）的证明留作练习， 下面仅证明（3）。

因为 $R_1\subseteq R_1\cup R_2$, 由定理7.12知

$$t(R_1)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

同理 $$t(R_2)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

所以 $$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

定理7.13 设R是集合A上任意二元关系，则

（1） 如果R是自反的，那么$s(R)$和$t(R)$都是自反的。

（2） 如果R是对称的，那么$r(R)$和$t(R)$都是对称的。

（3） 如果R是传递的，那么$r(R)$是传递的。

证明

（1）是显然的。

（2） 由于

$r(R)^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$, 故$r(R)$是对称的。

另外， 由于对任意自然数n，

$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$，又由于R对称， 故 $(R^n)^{-1} = R^n$。 因此，对任意$\langle x, y\rangle \in t(R)$, 总有$i$使$\langle x, y\rangle \in R^i$， 从而$\langle y, x\rangle \in (R^i)^{-1} = R^i$， 即$\langle y, x\rangle \in t(R)$。 故$t(R)$对称。

（3） 本式证明留给读者。 请注意， R传递并不保证$s(R)$传递。 例如， $R=\{\langle a, b\rangle\}$是传递的， 但是$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$却不是传递的。

定理 7.14 设R为集合A上的任一二元关系，

那么

（1） $rs(R) = sr(R)$

（2） $rt(R) = tr(R)$

（3） $st(R) \subseteq ts(R)$

证明

（1） $sr(R) = s(I_A \cup R) = I_A \cup R \cup (I_A \cup R)^{-1}$

$= I_A \cup R \cup R^{-1} = I_A \cup s(R) = rs(R)$

（2） 易证$(I_A \cup R)^n = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

对一切正整数n均成立， 于是

$$tr(R) = t(I_A \cup R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup R)^i$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} R^j) \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} R^j)$$

$$= I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$= I_A \bigcup t(R) = rt(R)$$

（3） 由定理7.12可知， 任一闭包运算Δ和任意二元关系R_1、 R_2， 如果$R_1 \subseteq R_2$，那么$\Delta(R_1) \subseteq \Delta(R_2)$； 又据闭包定义， 对任意二元关系$R$有$R \subseteq s(R)$，故$t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R)$。 由定理7.13，$ts(R)$是对称的，$sts(R)=ts(R)$。 于是可得到

$$st(R) \subseteq ts(R)$$

【例7.5.4】 设R是集合X上的二元关系，X={a, b, c}，R={〈a, b〉，〈b, c〉}。求$st(R)$和$ts(R)$，并画出关系图。

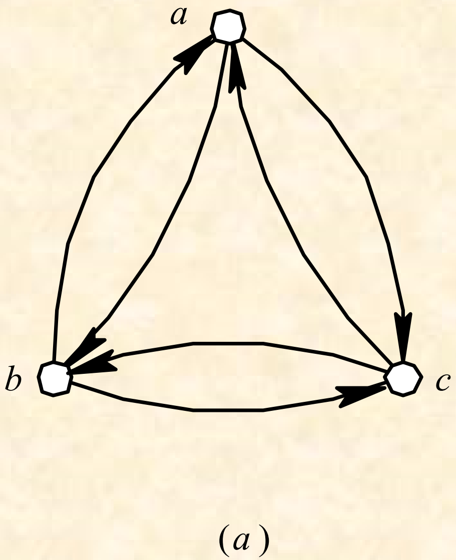
解 $t(R)$={〈a, b〉，〈b, c〉，〈a, c〉}

$st(R)$={〈a, b〉，〈b, c〉，〈a, c〉，〈b, a〉，〈c, b〉，〈c, a〉}

$s(R)$={〈a, b〉，〈b, c〉，〈b, a〉，〈c, b〉}

$ts(R)$={〈a, b〉，〈b, c〉，〈b, a〉，〈c, b〉，〈a, c〉，〈a, a〉，〈b, b〉，〈c, a〉，〈c, c〉}

$st(R)$和$ts(R)$的关系图分别如图7.5.2(a)、(b)所示。



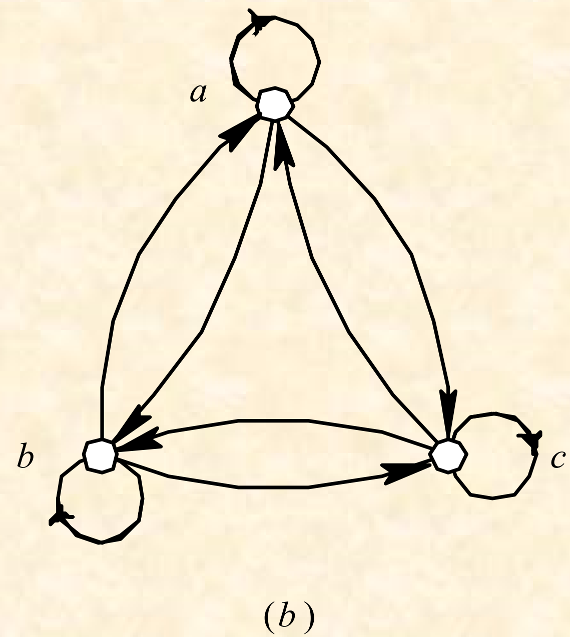


图 7.5.2

补充

(1)设A={a,b,c,d,e}，定义A中的关系：

R1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>}

R2={<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>}

判断R1、R2是否具有自反性、对称性和传递性，然后求出它们的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

(2)设A={a,b,c,d,e}，定义A中的关系：

R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,e>}，求t(R)。

课后作业

- 21
- 22
- 24 $R_1 - R_2$ 对自反性的封闭性、 $R_1 \cup R_2$ 对反对称性和传递性的封闭性分别给出反例。
- 25
- 29
- 30

7.6 等价关系和划分

本节的目的就是要研究可用以对集合中元素进行分类的一种重要二元关系--等价关系。

一、 等价关系的定义与实例

定义 7.15 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x,y\rangle\in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x 与 y 模 3 相等, 即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等. 不难验证 R 为 A 上的等价关系, 因为

$\forall x\in A$, 有 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x,y\in A$, 若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x,y,z\in A$, 若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

模 3 等价关系的关系图

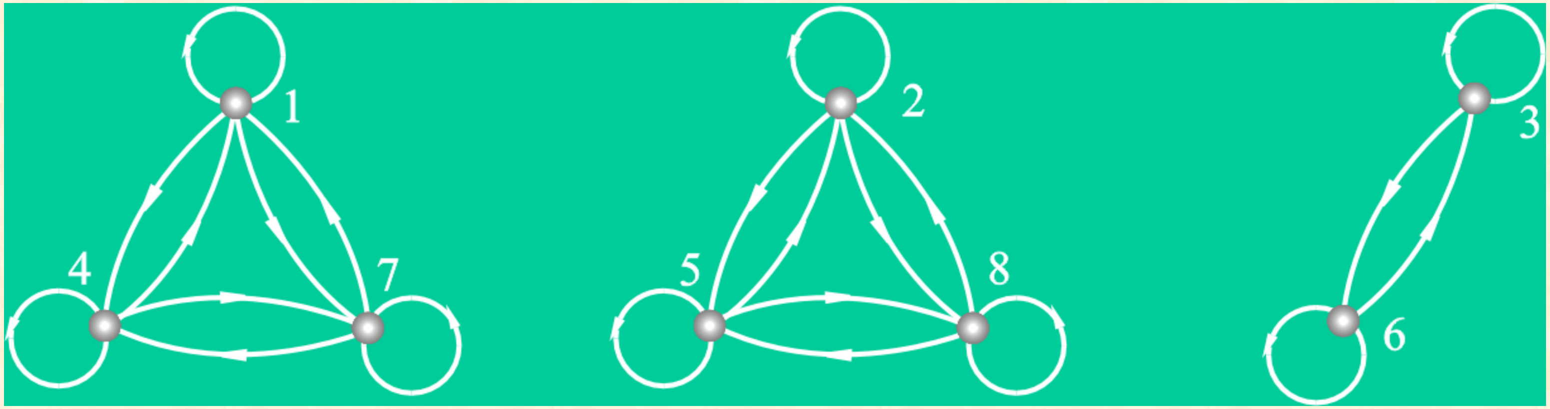


图6

【例7.6.1】

（1) 人类集合中的"同龄"、"同乡"关系都是等价关系。

（2）三角形集合的相似关系、全等关系都是等价关系。

（3）住校学生的"同寝室关系"是等价关系。

（4）命题公式间的逻辑等价关系是等价关系。

（5）对任意集合A，A上的恒等关系I_A和全域关系$A \times A$是等价关系。

【例7.6.2】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$ 且$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。我们易证$R$是一个等价关系。

【例7.6.3】 整数集合I中的二元关系

$R=\{\langle x, y\rangle \mid m|(x-y), m\in I_+\}$，其中"|"表示整除关系，证明$R$是等价关系。

证明

（1） $\forall x \in I$，因为x-x=0 ，所以$m|(x-x)$，因此 $\langle x, x\rangle \in R$， R是自反的。

（2）$\forall\ x, y \in I$，设 $\langle x, y\rangle \in R$，则$m|(x-y)$，即

$$\frac{x-y}{m}=k \in I$$

$$\frac{y-x}{m}=-\frac{x-y}{m}=-k \in I$$

故 $\langle y, x\rangle \in R$，所以$R$是对称的。

（3） $\forall x, y, z \in I$，设 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, z\rangle \in R$，则

$$\frac{x-y}{m}=k\in I \qquad \frac{y-z}{m}=l\in I$$

因而

$$\frac{x-z}{m}=\frac{x-y+y-z}{m}=k+l\in I$$

故 $\langle x, z\rangle \in R$，所以 R 是传递的。

因此，R 是一个等价关系。

二、等价类及其性质

1． 等价类

定义 7.16 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为$[x]$或 $\bar{x}$.

A={1, 2, … , 8}上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

【例7.6.4】 设R是X={0, 1, 2, 3, 4}上的二元等价关系，$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in X$且$(x-y)/2$是整数$\}$。

(1) 给出关系矩阵；

(2) 画出关系图；

(3) 求出等价类。

解（1）R的关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）R的关系图

（3） $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \{0, 2, 4\}$

$[1]_R = [3]_R = \{1, 3\}$

等价类是关系图中互不相连的各个部分的顶点组成。

【例7.6.5】 若在例7.6.3中取m=4，即设R为整数集上的≡4关系，它有四个不同的等价类：

［0］=｛..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...｝=｛x|4整除x｝

［1］=｛..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...｝=｛x|4除x余1｝

［2］=｛..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...｝=｛x|4除x余2｝

［3］=｛..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...｝=｛x|4除x余3｝

2．等价类的性质

定理 7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

（1）$\forall x \in A$, $[x]$是 A 的非空子集.

（2）$\forall x,y \in A$，如果 xRy，则 $[x] = [y]$.

（3）$\forall x,y \in A$，如果 $x \not R y$，则 $[x]$与$[y]$不交.

（4）$\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 （1）由等价类的定义可知, $\forall x \in A$ 有$[x] \subseteq A$. 又由自反性有 $x \in [x]$, 即$[x]$非空.

（2）任取 z，则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle z,x\rangle \in R$$

$$\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle z,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,z\rangle \in R$$

从而证明了 $z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

(3） 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在 $z\in[x]\cap[y]$，从而有 $z\in[x]\wedge z\in[y]$，

即$<x,z>\in R\wedge <y,z>\in R$ 成立.

根据 R 的对称性和传递性必有$<x,y>\in R$，与 $x\not R\ y$ 矛盾

(4） 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

任取 y， $y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$

$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$

任取 y， $y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$ 成立.

综上所述得$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

关于等价类有下面十分显然的事实：

(1) 对任何集合A，I_A有$|A|$个不同的等价类，每个等价类都是单元素集。

(2) 对任何集合A，$A \times A$只有一个等价类为A（即每个元素的等价类全为A）。

(3) 同一等价类可以有不同的表示元素，或者说，不同的元素可能有相同的等价类。

三、商集与集合的划分

1. 商集

定义 7.17 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记做 A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A 关于模 3 等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}$$

$$A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

2．集合的划分

定义 7.18 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足下面条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y(x,y\in\pi \wedge x\neq y \rightarrow x\cap y=\varnothing)$

（3）$\cup\pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块.

例 设 $A=\{a,b,c,d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下：

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$$

$$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

$$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$$

$$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$$

$$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$$

$$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分.

【例7.6.6】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，则

$$\pi_1=\{\{1,3\}, \{0, 2, 4\}\}$$

$$\pi_2=\{\{0, 1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\pi_3=\{\{3\}, \{0, l, 2, 4\}\}$$

$$\pi_4=\{\{0, l, 2, 3, 4\}\}$$

均为A的划分，且π_1中的元素恰是例7.6.3的等价类。

定理7.6.4 设R为集合A上的等价关系，那么R对应的A划分是$\{[x]_R|x\in A\}$。

该定理的证明留作练习。

定理7.6.5 设π是集合A的一个划分，则如下定义的关系R为A上的等价关系：

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid \exists B\,(B\in\pi\wedge x\in B\wedge y\in B)\}$$

称R为π对应的等价关系。

证明是极为容易的，请读者自己完成。

定理7.6.6 设π是集合A的划分，R是A上的等价关系，那么，对应π的等价关系为R，当且仅当R对应的划分为π。

证明 $A=\Phi$时，只有Φ划分和等价关系Φ，结论显然成立。下文设$A\neq\Phi$。

先证必要性。设对应π的等价关系为R，R对应的划分为π'，欲证$\pi=\pi'$。为此对任一元素$a\in A$，设B，B'分别是π，π'中含a的单元。那么，对A中任一元素b，有 $b\in B \Leftrightarrow aRb$（$R$是对应的等价关系）

$\Leftrightarrow b\in [a]_R$

$\Leftrightarrow b\in B'$ （π'是R对应的划分）

这就是说$B=B'$。由于a是A中任意元素，故可断定$\pi=\pi'$

再证充分性。设R对应的划分为π，π对应的等价关系为R'，欲证$R=R'$。为此考虑对A中任意元素a， b，有

$$aRb \quad b\in[a]_R$$

$$\Leftrightarrow \exists B(B\in\pi\wedge[a]_R=B\wedge b\in B)$$

(π为R对应的划分)

$$\Leftrightarrow \exists B(B\in\pi\wedge a\in B\wedge b\in B)$$

$$\Leftrightarrow aR'b$$

$\Leftrightarrow$ R'为π对应的等价关系）

故$R=R'$。

四、商集与划分的对应关系

商集 A/R 就是 A 的一个划分，不同的商集对应于不同的划分.

任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R：

$R=\{<x,y> \mid x,y\in A\wedge x$ 与 y 在 π 的同一划分块中$\}$

则 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π.

A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

例 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 如下图，先做出 A 的所有划分，从左到右分别记作 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5$.

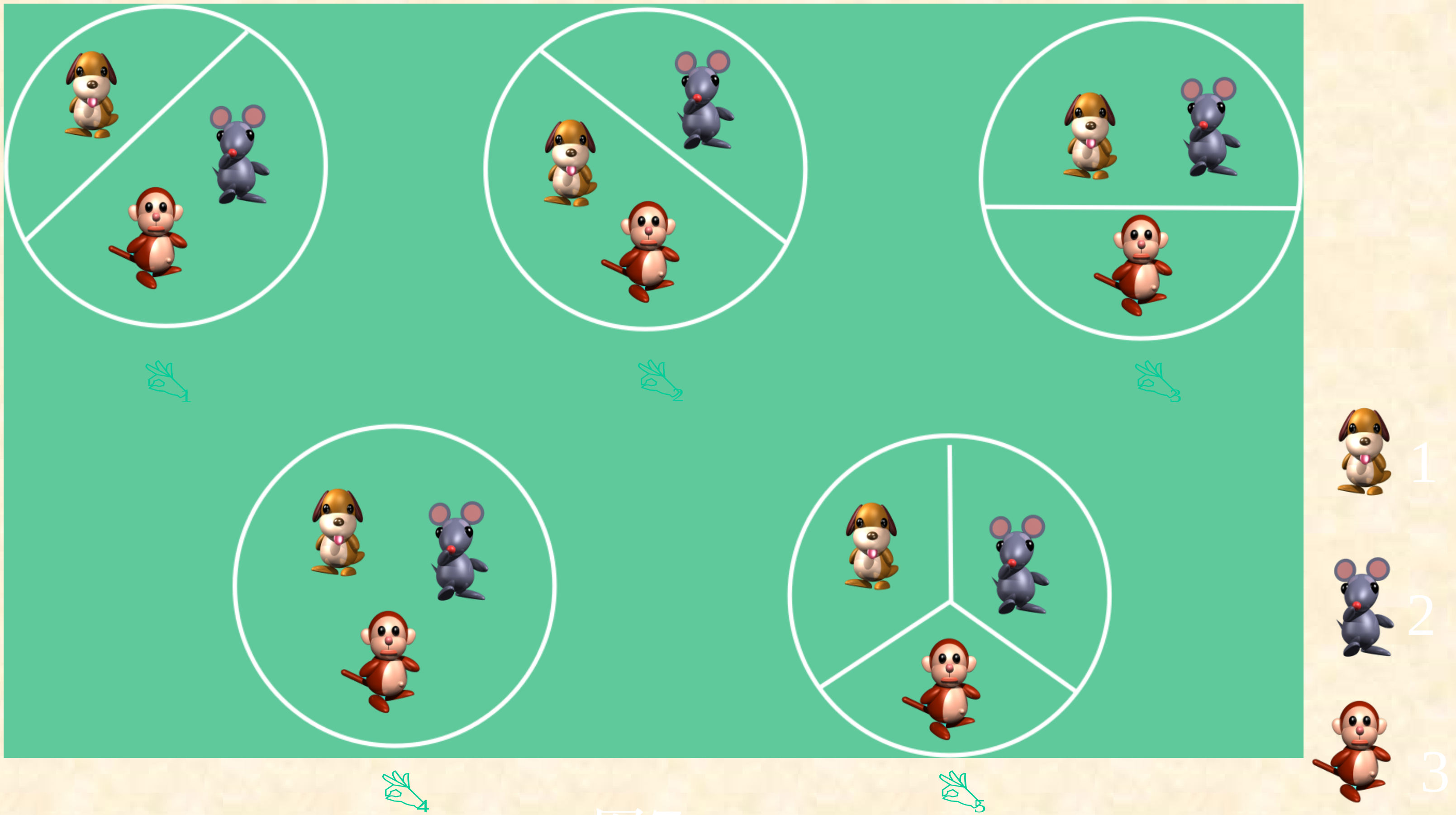


图7

这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是：

π_4 对应于全域关系 E_A, π_5 对应于恒等关系 I_A,

π_1,π_2 和 π_3 分别对应于等价关系 R_1, R_2 和 R_3. 其中

$$R_1=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

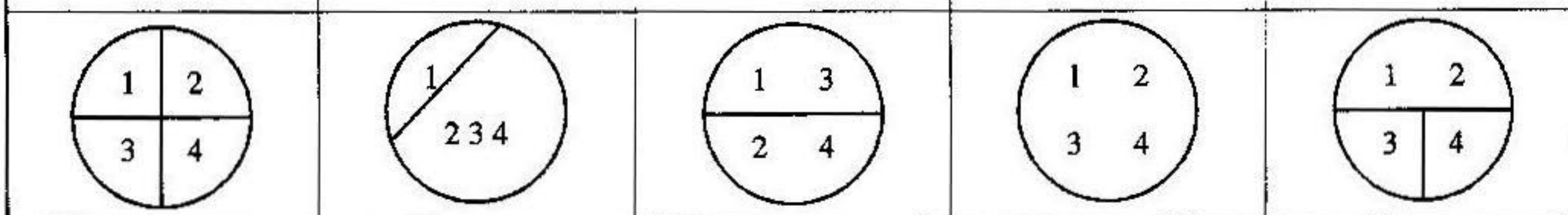
$$R_2=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

【例7.6.7】 设A 是一个集合且$|A|=4$，则A上共有多少种不同的等价关系？

解 本题利用划分与等价关系的一一对应，用划分求等价关系，具体求解见下表

4=1+1−1+1	4=1+3	4=2+2	4=4	4=1+1+2
1 种	C_4^1 种	$\frac{1}{2}C_4^2$ 种	1 种	C_4^2 种



【例7.6.8】设$A=\{1, 2, 3, 4\}$ 且$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。 计算$A/R$。

解 从该例子中，我们有

$[1]_R=\{1, 2\}=[2]_R$，同时$[3]_R=\{3, 4\}=[4]_R$。

所以 $A/R=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$。

【例7.6.9】整数集合A中的二元关系

$R=\{\langle x, y\rangle \mid 2 \mid (x-y)\}$，其中“|”表示整除关系。求$A/R$。

解

$[0]=\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$，即由偶整数组成，因为它们整除2的余数是0。

$[1]=\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$，即由奇整数组成，因为它们整除2的余数是1。

因此A/R是由偶整数集合和奇整数集合组成的集合。

由上两个例子我们有对有穷集合A如何求A/R的步骤：

(1) 从集合A中任意选一个元素a，并计算a所在的等价类［a］。

(2) 如果［a］$\neq A$，选另一个元素b，$b \in A$且$b \notin$［a］，计算［b］。

(3) 如果A不与上面计算的所有等价类的并相等，则在A中选不在这些等价类中的元素x且计算［x］。

(4) 重复(3)直到集合A与所有等价类的并相等，则结束。

定义7.6.5 设π_1，π_2为集合的两个划分。称π_1细分π_2，如果π_1的每一划分块都包含于π_2的某个划分块。

π_1细分π_2表示为$\pi_1 \leq \pi_2$。当$\pi_1 \leq \pi_2$且$\pi_1 \neq \pi_2$，则表示为$\pi_1 < \pi_2$，读作π_1真细分于π_2。

【例7.6.10】 当A=｛a, b, c, d｝时，

π_1=｛｛a, b｝，｛c｝，｛d｝｝细分

π_2=｛｛a, b, c｝，｛d｝｝，

π_3=｛｛a｝，｛b｝，｛c｝，｛d｝｝细分所有划分。而所有划分均细分π_4=｛｛a, b, c, d｝｝。并且，π_1真细分π_2，π_3真细分π_1。

定理7.6.7 设R_1，R_2为集合A上的等价关系，π_1，π_2分别是R_1，R_2所对应的划分，那么

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ 当且仅当} \pi_1 \le \pi_2$$

证明 当$A=\Phi$时命题显然真。 以下设$A \ne \Phi$。

先证必要性。 设$R_1 \subseteq R_2$， B_1为π_1中任一划分块， 令$B_1=[a]_{R1}$， $a \in A$。 考虑$[a]_{R2}=B_2 \in \pi_2$。 对任一$b \in B_1$， 即$b \in [a]_{R1}$, 有bR_1a, 从而有bR_2a（因$R_1 \subseteq R_2$）， 故$b \in [a]_{R2}=B_2$。 这就是说B_1 B_2， 因而$\pi_1 \le \pi_2$。

再证充分性。设$\pi_1 \le \pi_2$，对任意x, y, 若xR_1y，那么有π_1中划分块$B_1 = [x]_R$，使x，$y \in B_1$。由于$\pi_1 \le \pi_2$，故有π_2中划分块B_2，使$B_1 \subseteq B_2$，从而x，$y \in B_2$，即x，y属同一个R_2等价类，因此xR_2y。至此我们证得$R_1 \subseteq R_2$。

本定理表明，越“小”（含有较少序偶）的等价关系对应越细的划分，反之亦然。很明白，最小的等价关系是恒等关系I_A，它对应于最细的划分（每一划分块恰含一个元素），最大的等价关系是全关系E_A，它对应于最粗的划分（只有一个划分块）。

补充：

（1）设Z是整数集，m是大于1的正整数，Z中关系R定义如下：

$$\forall a, b \in Z, aRb \Leftrightarrow \frac{a-b}{m} \in Z$$

证明:R是等价关系，并求Z关于R的商集Z/R。

（2）设A={1,2,3,4,5,6}，定义A中的二元关系如下：

R={<1,1>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,<3,2>,<3,3>,<3,6>,<4,1>,<4,4>,<5,5>,<6,2>,<6,3>,<6,6>}

判断R是否是等价关系？

若是等价关系，写出A的关于R的等价类。

7.7 偏序 关 系

序关系是关系的一大类型，它们的共同点是都具有传递的，因此可根据这一特性比较集合中各元素的先后顺序。事物之间的次序常常是事物群体的重要特征，决定事物之间次序的还是事物间的关系。本节的目的则是要研究可用以对集合中元素进行排序的关系--序关系。其中很重要的一类关系称作偏序关系。偏序的作用是用来排序（称偏序是因为A上的所有元素不一定都能按此关系排序，所以又称为半序、部分序）。

一、偏序关系

1．定义 7.19

偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$.

设$\preccurlyeq$为偏序关系，如果$\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，则记作 $x\preccurlyeq y$，读作 x“小于或等于”y.

2. 实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

如果集合A上有偏序关系R，则称A为偏序集（*ordered sets*），用序偶$\langle A, R\rangle$表示之。

若$\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，常记作$x \preccurlyeq y$，读作"$x$小于或等于$y$"，说明$x$在偏序上排在$y$的前面或者相同。

为简明起见，我们用记号$\preccurlyeq$表示一般的偏序关系，从而$\langle A, \preccurlyeq\rangle$表示一般的偏序集。

注意　这里的“小于或等于”不是指数的大小，而是指在偏序关系中的顺序性。x小于或等于y的含义是：按照这个序，x排在y的前边或者x就是y。根据不同偏序的定义，对偏序有着不同的解释。例如，正整数集合上的整除关系“|”为一偏序关系，$<I_+, |>$为一偏序集，2|4(通常写为$2\preccurlyeq 4$)的含义是2整除4，2在整除关系上排在4的前面，也就是说2比4小。

【例7.7.1】

（1） 设A是集合S的子集为元素所构成的集合，包含关系"$\subseteq$"是A上的一个偏序关系，因此$\langle A, \subseteq \rangle$是一个偏序集。

（2） 实数集R上的"$\leq$"即小于等于关系为一偏序关系，$\langle R,\leq \rangle$表示偏序集。实数集R上的"$\geq$"即大于关系也是偏序关系，$\langle R, \geq \rangle$也表示一个偏序集。 $7\geq 6$，可以写作$7 \preccurlyeq 6$，理解为在大于等于偏序关系中， 7排在6的前面。

3．相关概念

定义 7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$x,y\in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y\vee y\preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x\prec y$(或 $y\prec x$), $x=y$, x 与 y 不是可比的.

定义 7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$\forall x,y\in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义 7.22 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

例如，实数集合上的小于等于关系是偏序关系且任意两个数均是可比的。而正整数上的整除关系也是偏序关系，但不是任意两个数都可比，如2与3不可比，因为2不能整除3。

【例7.7.3】 设A是正整数m=12的因子的集合，并设 $\preccurlyeq$ 为整除的关系，求cov A。

解

$\operatorname{cov} A=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 12\rangle, \langle 6, 12\rangle\}$

我们可对偏序关系的关系图作简化。由于偏序关系自反，各结点处均有环，约定全部略去环。

由于偏序关系反对称且传递，关系图中任何两个不同结点之间不可能有相互到达的边或通路，因此可约定边的向上方向为箭头方向， 省略全部箭头。最后由于偏序关系具有传递性，我们还可将由传递关系可推定的边也省去。 经过这种简化的具有偏序关系的关系图称为**哈斯（Hasse）图**。哈斯图既表示一个偏序关系，又表示一个偏序集。

二、偏序集与哈斯图

1．偏序集

定义 7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集，记作 $<A,\preccurlyeq>$.

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系 $\le$ 构成偏序集 $<Z,\le>$

集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $<P(A),R_{\subseteq}>$.

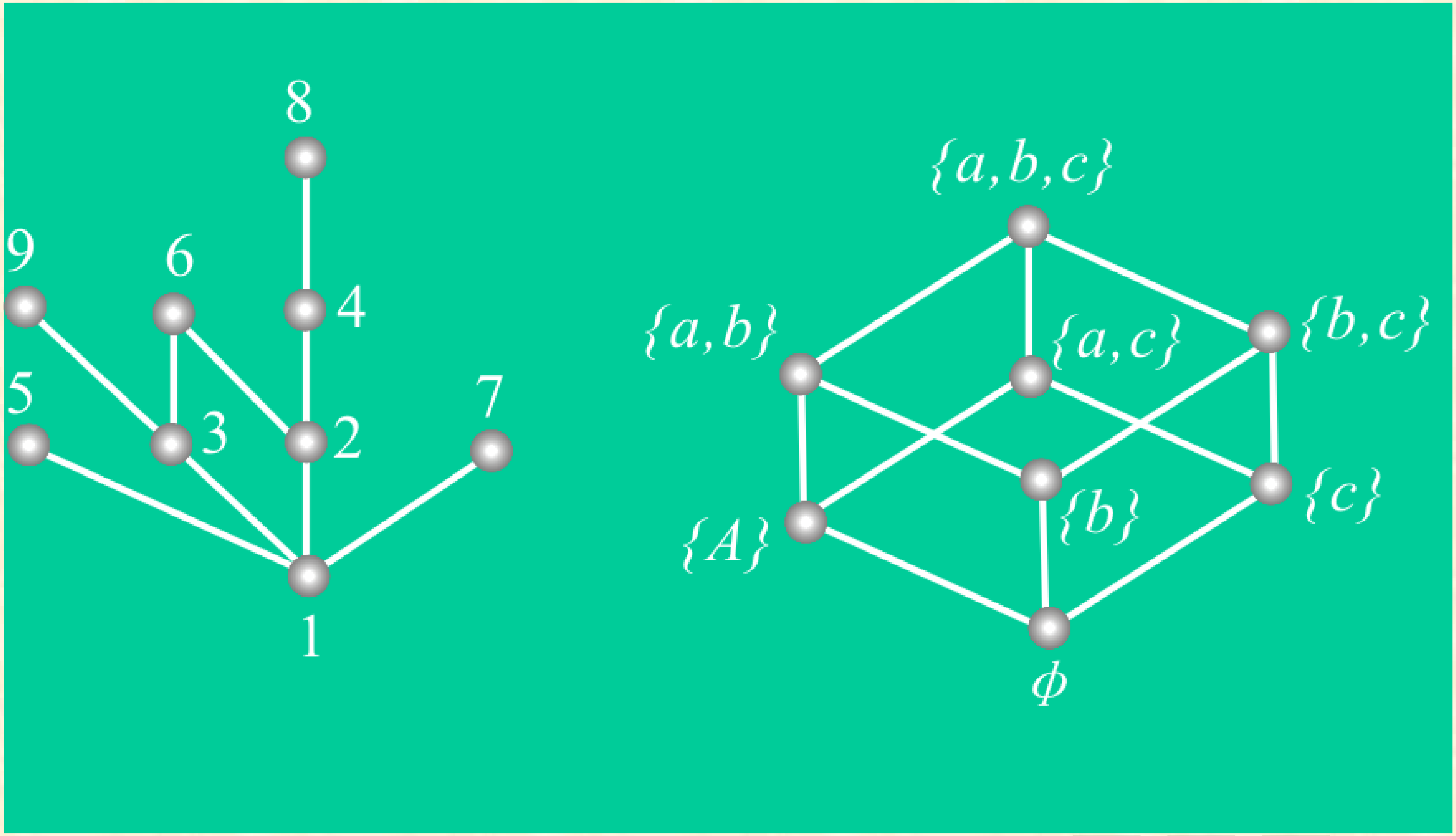
2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

例 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, R 整除>和<$P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$>的哈斯图.



例 已知偏序集$\langle A,R\rangle$的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

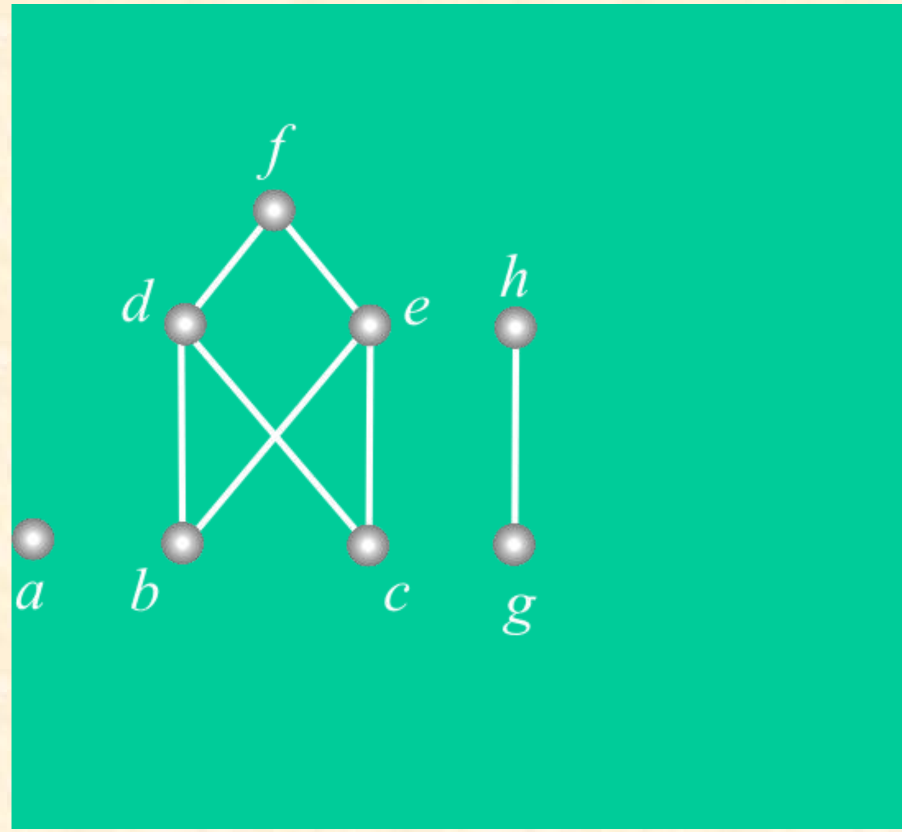


图 9

解 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$R=\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}\cup I_A$

【例7.7.5】 画出下面几个偏序集的哈斯图：

（1）〈S_8, |〉，其中S_8表示8的所有因子作元素构成的集合。

（2）〈{2, 3, 6, 12, 24, 36}, |〉，其中"|"是集合上的数之间的整除关系。

（3）〈S_{30}, |〉，其中S_{30}表示30 的所有因子作元素构成的集合。

解 先分别求出其覆盖。

（1） $S_8=\{1, 2, 4, 8\}$

$\mathrm{cov}\{S_8\}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 8\rangle\}$

（2） $\mathrm{cov}\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$

$=\{\langle 2, 6\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 6, 12\rangle, \langle 12, 24\rangle, \langle 12, 36\rangle\}$

（3） $S_{30}=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$\mathrm{cov}\, S_{30}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle,$

$\langle 2, 10\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 3, 15\rangle, \langle 5, 10\rangle,$

$\langle 5, 15\rangle, \langle 6, 30\rangle, \langle 10, 30\rangle, \langle 15, 30\rangle\}$

画出其哈斯图，如图7.7.2所示，（a）、（b）、（c）分别表示上述各偏序集。

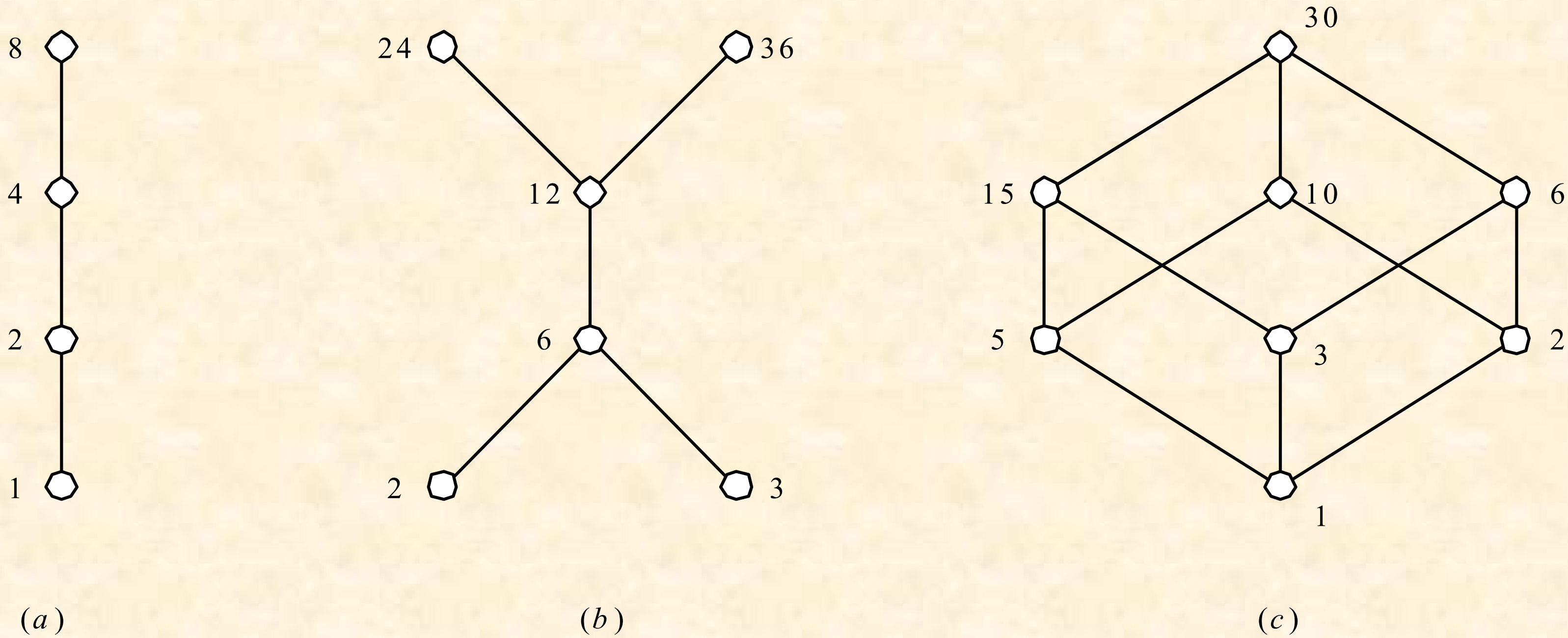


图 7.7.2

【例7.7.6】 由图7.7.3所示的哈斯图，写出对应的偏序关系、关系矩阵。

解 $A=\{a, b, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$

偏序关系 $\preccurlyeq=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$

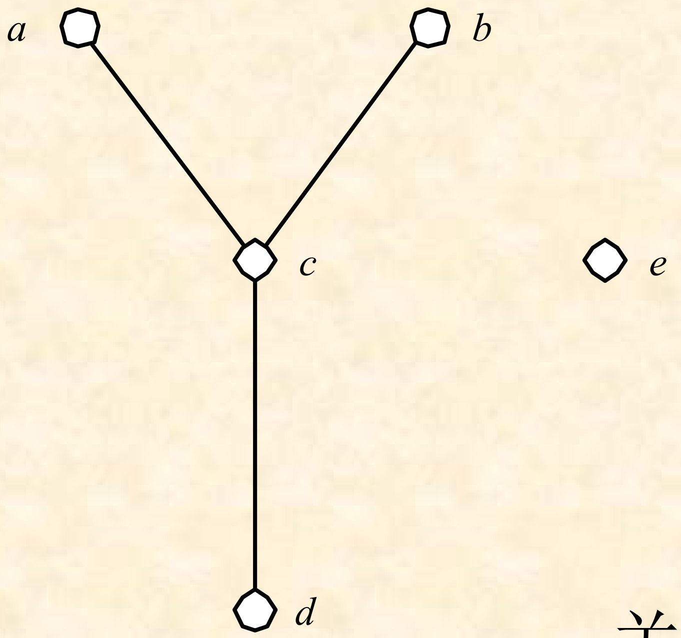


图 7.7.3

$$\text{关系矩阵}\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

偏序集中链和反链的概念是十分重要的。

定义7.7.4 设偏序集〈$A, \preccurlyeq$〉， $B \subseteq A$。

(1) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都是可比的，则称B为A上的**链**（*chain*），B中元素个数称为链的长度。

(2) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都不是可比的，则称B为A上的**反链**（*antichain*），B中元素个数称为反链的长度。

我们约定，若A的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

【例7.7.7】 图7.7.4中的哈斯图表示一偏序集，举例说明链及反链。

长度为5的链有$\{a, c, e, h, m\}$，$\{a, b, e, i, n\}$等。

长度为4的链有$\{b, d, g, m\}$，$\{c, e, h, k\}$，$\{c, d, f, j\}$等。

长度为3的链有$\{b, e, i\}$，$\{f, d, c\}$，$\{n, i, e\}$等。

长度为2的链有$\{d, f\}$，$\{m, h\}$等。

长度为1的链有$\{m\}$，$\{n\}$等。

长度为4的反链只有$\{f, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \mathrm{i}\}$和$\{n, m, k, j\}$。

长度为3的反链有$\{j, k, i\}$，$\{f, \mathrm{g}, e\}$, $\{d, h, i\}$等。

长度为2的反链有$\{d, e\}$，$\{b, c\}$，$\{\mathrm{g}, h\}$，$\{f, e\}$等。

长度为1的反链有$\{a\}$，$\{e\}$等。

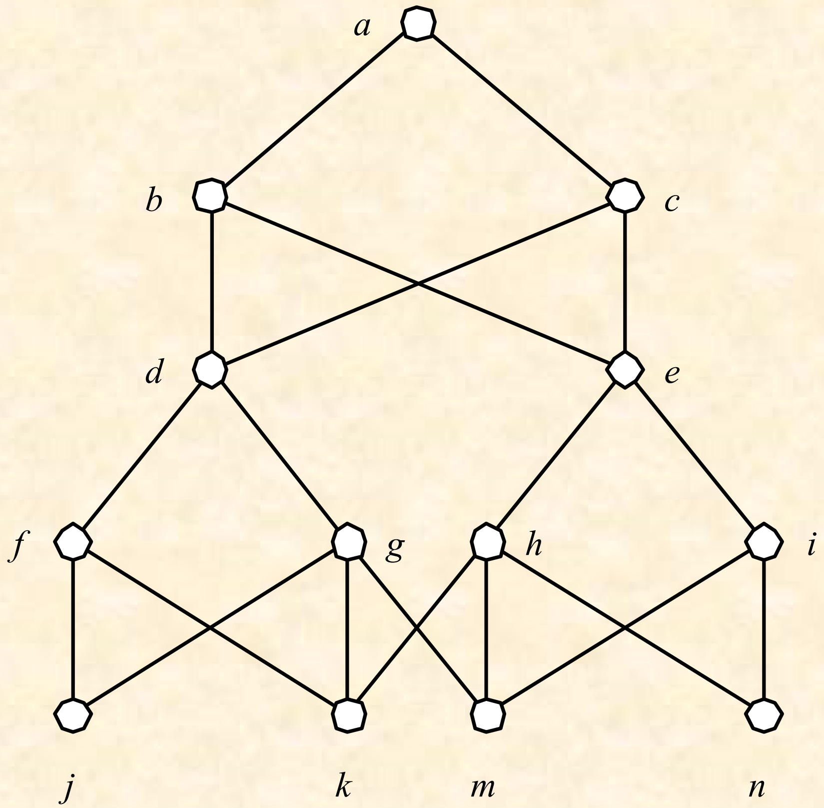


图 7.7.4

从例题7.7.7的哈斯图上可看出，在每个链中总可从最高结点出发沿着覆盖方向遍历该链中所有结点。每个反链中任意两个结点间均无连线。

三、偏序集中的特殊元素.

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义 7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极小元.

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极大元.

性质:

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

从以上定义可以看出，最小元与极小元是不一样的。最小元是B中最小的元素，它与B中其它元素都可比；而极小元不一定与B中元素都可比，只要没有比它更小的元素，它就是极小元，同理最大元是B中最大的元素，它与B中其它元素都可比；而极大元不一定与B中元素都可比，只要没有比它更大的元素，它就是极大元。

【例7.7.8】 偏序集〈{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, ≼〉， 由图7.7.5所示哈斯图给出。

（1）B={1, 2, 3, 5}

B的最大元为5。

B的极大元为5。

B的最小元为1。

B的极小元也为1。

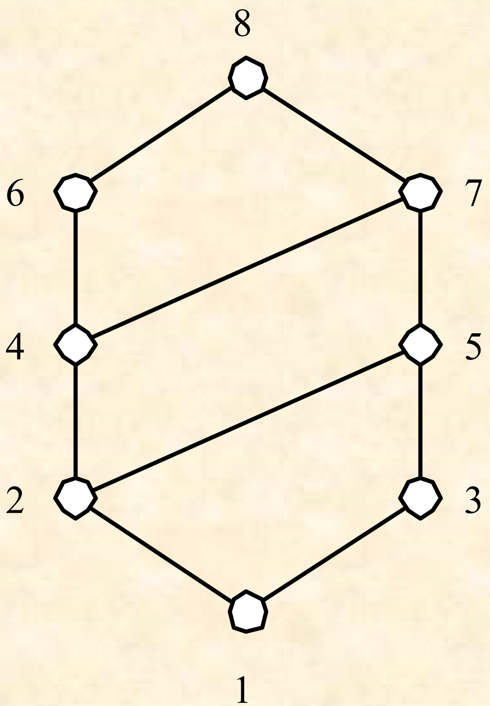


图 7.7.5

（2）B={2, 3, 4, 5, 6, 7}

B无最大元和最小元。

B的极大元是6, 7，极小元是2, 3。

（3）B={4, 5, 8}

B的最大元是8，无最小元。

B的极大元为8，极小元为4, 5。

（4）B={4, 5}

B无最大元，也无最小元。

B的极大元是4, 5，极小元也是4, 5。

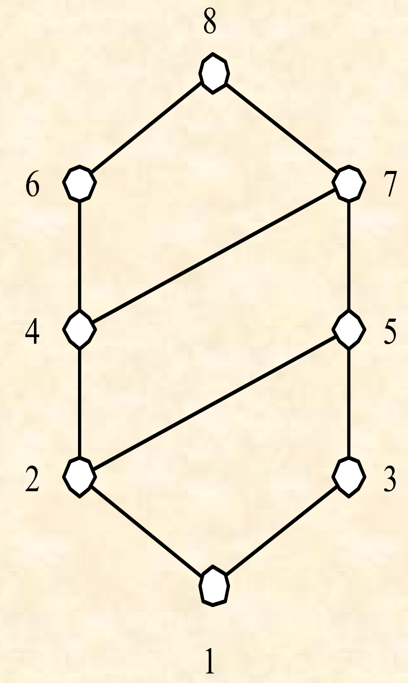


图 7.7.5

从例7.7.8中可知，最大元、最小元未必存在，若存在则必唯一。极大元、极小元虽存在，但却不唯一，它们之间不可比，并处在子集哈斯图的同一层次上，极大元在最高层，极小元在最低层。关于这些，有下面的定理。

定理7.7.1 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$。

（1）若b为B的最大（最小）元，则b为B的极大（极小）元。

（2）若B有最大（最小）元，则B的最大（最小）元唯一。

（3）若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。

当n=1时，B中仅有一个元素，它既是极大元，也是极小元。

当n=2时，设$B=\{b_1, b_2\}$。那么，$b_1 \preccurlyeq b_2$时b_1为极小元，b_2为极大元；$\preccurlyeq$ b_2 b_1时b_2为极小元，b_1为极大元；$\preccurlyeq$ $\neg b_1$ b_2且$\preccurlyeq \neg b_2$ b_1时，b_1，b_2同为极大元，也同为极小元。

设$n=k$时命题为真。若$n=k+1$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_k,b_{k+1}\}$。据归纳假设，$\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$有极大元$b_i$，极小元$b_{\mathrm{j}}$。考虑$\{b_i, b_{k+1}\}$，若$b_i \preccurlyeq b_{k+1}$，$b_{k+1}$显然是$B$的极大元；若$b_{k+1} \preccurlyeq b_i$，或两者不可比较，则$b_i$是$B$的极大元。同理可证，$b_{\mathrm{j}}$或$b_{k+1}$ 是B的极小元。

归纳完成，（3）得证。

定理7.7.2(偏序集的分解定理) 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为一有限的偏序集，且A中最长链的长度为n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n。即A有一划分，使划分有n个划分块，且每个划分块为一反链。

证明 对n进行归纳。

当n=1时，A中没有任何两个不同元素有≼关系，因此A本身既为一链，又为一反链，因此划分$\{A\}$即满足要求。

设n=k时命题成立。现令n=k+1。

设M为A中所有极大元素的集合。由于A为有限集，因此M必为一非空的反链（极大元之间是不可比较的）。考虑有序集〈A-M，≼〉，它不可能有长度为n的链（否则A中链的长度将超过n，关于这一点请读者思考），因而〈A-M，≼〉中最长链的长度应当为n-1=k。据归纳假设，A-M有k个划分块的划分，且每个划分块为一反链。这k个反链连同反链M，恰构成A的k+1个划分块组成的划分。所以归纳完成。

定理7.7.3 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为一偏序集，$|A|=mn+1$，那么，A中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链。

证明 若A中链的长度不超过n，那么据定理7.7.2，A中必有长度为$m+1$的n个划分块的反链，否则$|A|\le mn$。

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义 7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$.

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的上界.

（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的下界.

（3）令 $C=\{y\mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

（4）令 $D=\{y\mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

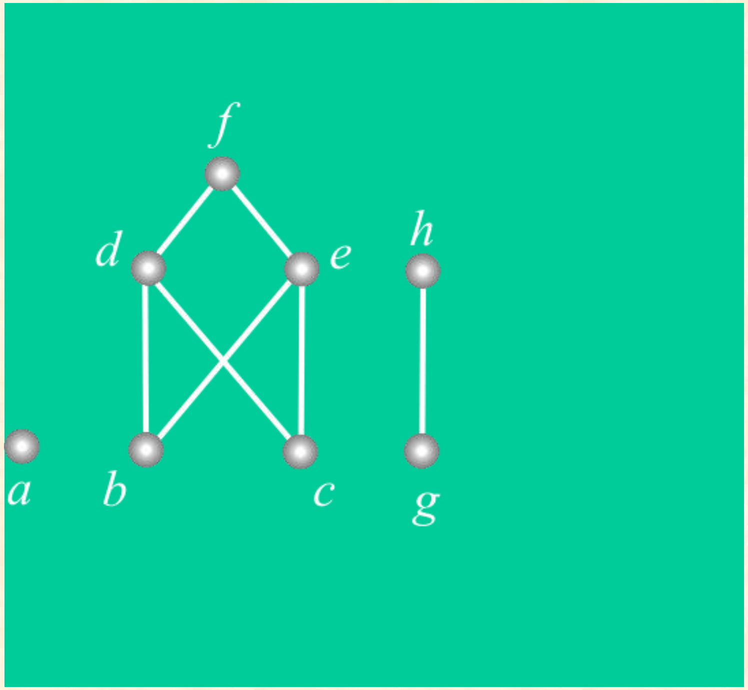
性质:

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

例 设偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元：a, b, c, g；　极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

例 设 X 为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且 $A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

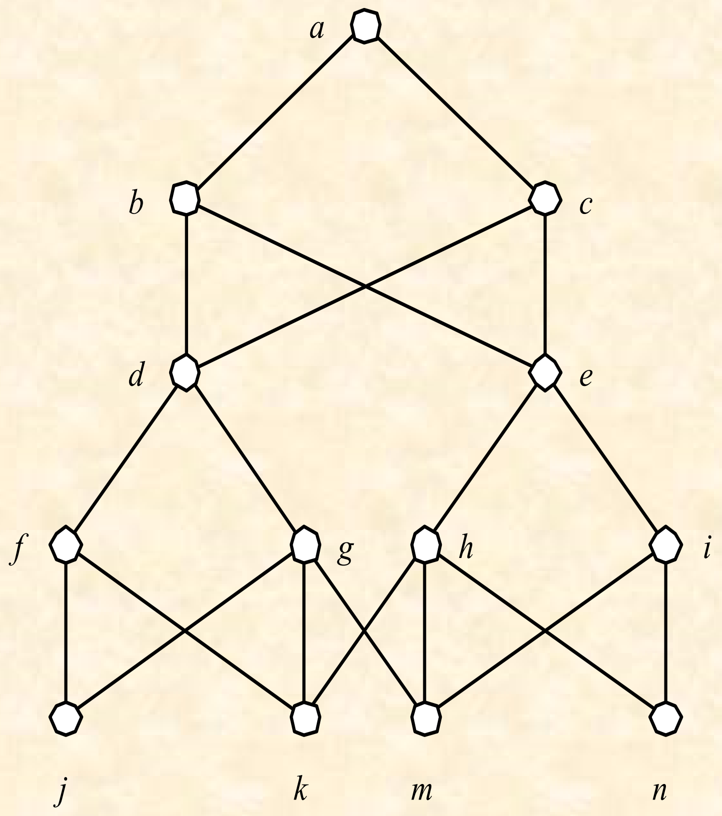
(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n\geq 2$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即$\{x\}$, $x\in X$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X-\{x\}$, $x\in X$.

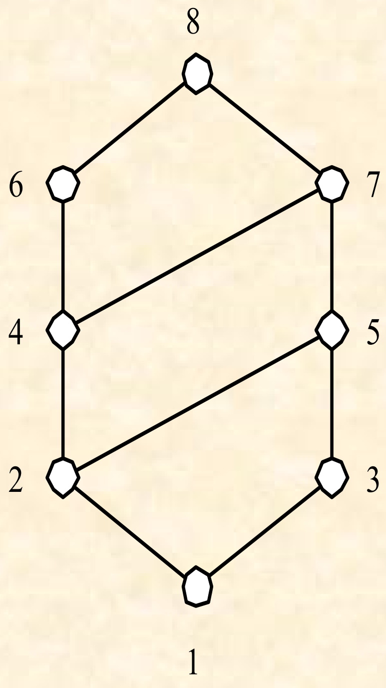
【例7.7.10】 设偏序集〈A, ≼〉如图7.7.4所示，考虑集合B={d, e}，它有上界a, b, c，但无最小上界；它有下界k, m等，但没有最大下界。当B={f, g, h, i}时，它有上界a, b, c等，无最小上界；它没有下界和最大下界。



再设偏序集〈A, ≼〉如图7.7.5所示。

（1）当B={2, 3, 4, 5, 7}时，B有上界7, 8，下界1；最小上界7，最大下界1。

（2）当B={2, 5, 4, 6}时，B有上界8，下界2, 1；最小上界8，最大下界2。



作业

1. 图7.2为一偏序集〈A,R〉的哈斯图。

（1）下列命题哪些为真？

aRb，*dRa*，*cRd*，*cRb*，*bRe*，*aRa*，*eRa*；

（2）画出R的关系图；

（3）指出A的最大、最小元（如果有的话），极大、极小元；

（4）求出子集B1={c, d, e}，B2={b, c, d}，B3={b, c, d, e}的上界、下界，上确界、下确界（如果有的话）。

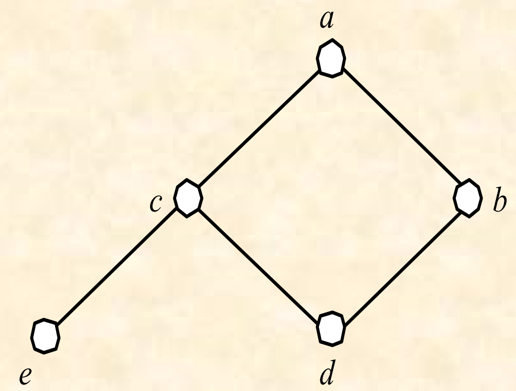


图7.2

2. 设A={a, b, c, d, e}，A上的偏序关系R={〈c, a〉,〈c,d〉}$\cup I_A$。

(1)画出R的哈斯图；

(2)求A关于R的极大元和极小元。

定理7.7.4 设〈A, ≼〉为偏序集，$B \subseteq A$。

（1）若b为B之最大元（最小元），则b必为B最小上界（最大下界）。

（2）若b为B之上（下）界，且$b \in B$，则b必为B的最大（最小）元。

（3）如果B有最大下界（最小上界），则最大下界（最小上界）唯一。

证明略。

定义7.7.8 设〈A, ≼〉为偏序集，如果A的任何非空子集都有最小元，则称≼为良序关系（*well founded relation*），称〈A, ≼〉为良序集(*well ordered set*)。

【例7.7.11】 设 I_n及N={1, 2, 3,...},对于小于等于关系来说是良序集合，即〈I_n,≼〉是良序集合。

定理4.7.5 一个良序集一定是全序集。

证明 设〈A, ≼〉为良序集合，则对任意两个元素x, y∈A可构成子集{x,y}，必存在最小元素，这个最小元素不是x就是y，因此一定有x≼y或y≼x。所以〈A, ≼〉为全序集合。

定理7.7.6 一个有限的全序集一定是良序集。

证明 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，令〈A, ≼〉是全序集合。

用反证法，假定〈A, ≼〉不是良序集合，则必存在一个非空子集$B\subseteq A$，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找出两个元素x与y是无关的，由于〈A, ≼〉是全序集，$x, y\in A$，所以x, y必有关系，得出矛盾，故〈A, ≼〉必是良序集合。

上述结论对于无限的全序集合不一定成立。

例如，大于0小于1的全部实数，按大小次序关系是一个全序集合，但不是良序集合，因为集合本身就不存在最小元素。

定理7.7.8（良序定理）任意的集合都是可以良序化的。

课后作业

- 32（4）（5）
- 33
- 36
- 39
- 46
- 50

第8节 习题课

一、 本章的主要内容及要求

1．主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从 A 到 B 的关系、A 上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质
- A 上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A 上关系的自反、对称、传递闭包
- A 上的等价关系、等价类、商集与 A 的划分
- A 上的偏序关系与偏序集

2．要求：

- 基本概念要清楚

  熟练掌握关系的三种表示法

  能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）

  掌握含有关系运算的集合等式

  掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念

- 以下基本运算要熟练

  $A\times B$, $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}R$, $\mathrm{fld}R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

  求等价类和商集 A/R

  给定 A 的划分π，求出π所对应的等价关系

  求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界

- 掌握基本的证明方法

  证明涉及关系运算的集合等式

  证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

二、练习

1．设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{<x,y> \mid x, y \in A$ 且 $x+2y \le 6\}$,

$S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>\}$，求

（1）R 的集合表达式

（2）R^{-1}

（3）$\mathrm{dom}\, R$, $\mathrm{ran}\, R$, $\mathrm{fld}\, R$

（4）$R \circ S$, R^3

（5）$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解

（1） $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

（2） $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3 >\}$

（3） $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

（4） $R \circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

（5） $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$;

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

2．设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R:

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解

$A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$

根据有序对 $<x,y>$ 中的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将 A 划分成等价类:

$A/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$

3．设 R 是 Z 上的模 n 等价关系，即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\, n),$$

试给出由 R 确定的 Z 的划分π.

解 设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类$[r]$，则

$$[r] = \{kn+r \mid k \in Z\}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\pi = \{[r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

4．设偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如图所示.

（1）写出 A 和 R 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

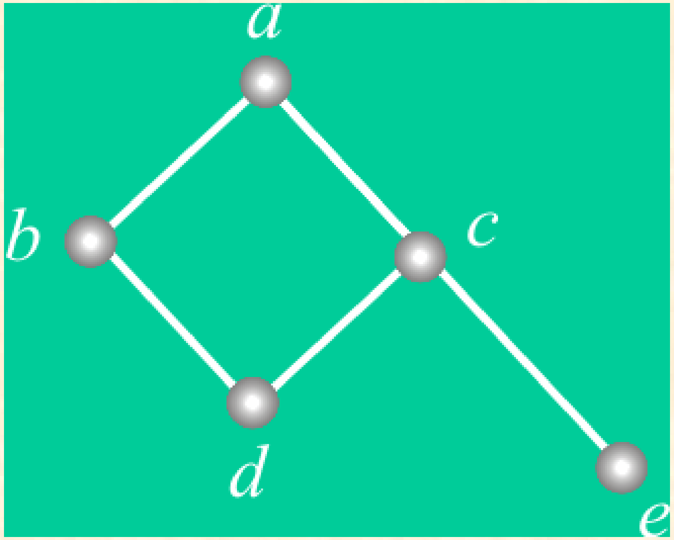


图11

解

（1）$A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>, <e,c>, <e,a>, <b,a>, <c,a>\} \cup I_A$

（2）极大元和最大元是 a，极小元是 d, e；没有最小元.

5．设 R 是 A 上的二元关系， 设 $S = \{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R \wedge <c,b>\in R)\}$.

证明如果 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

证

R 是 A 上的等价关系.

证 S 在 A 上自反 任取 x,

$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R$ （因为 R 在 A 上自反）

$\Rightarrow \exists x\,(<x,x>\in R \wedge <x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$

证 S 在 A 上对称 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R \wedge <c,y>\in R)$

$\Rightarrow \exists c\,(<c,x>\in R \wedge <y,c>\in R)$ （因为 R 在 A 上对称）

$\Rightarrow <y,x>\in S$

证 S 在 A 上传递 任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$

$\Rightarrow \exists c\,(<x,c>\in R \wedge <c,y>\in R) \wedge \exists d\,(<y,d>\in R \wedge <d,z>\in R)$

$\Rightarrow <x,y>\in R \wedge <y,z>\in R$ （因为 R 在 A 上传递）

$\Rightarrow <x,z>\in S$

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义 $A\times B$ 上二元关系 T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证

证明自反性　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

证明反对称性　任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

证明传递性　任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

小结：关系性质的证明

- 证明 R 在 A 上自反

  任取 x,

  $x \in A \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

  前提　　　　推理过程　　　　结论

- 证明 R 在 A 上对称

  任取$\langle x,y\rangle$，

  $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

  前提　　　　推理过程　　　　结论

- 证明 R 在 A 上反对称

  任取 $<x,y>$，

  $<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

  前提　　　　推理过程　　　　结论

- 证明 R 在 A 上传递

  任取 $<x,y>,<y,z>$，

  $<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

  前提　　　　推理过程　　　　结论

7．R,S 为 A 上的关系，证明　$R \subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证 只需证明对于任意正整数 n, $R^n \subseteq S^n$. 对 n 归纳.

$n=1$，显然为真.

假设对于 n，命题为真，任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in R^{n+1} \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in R^n \circ R \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t> \in R^n \wedge <t,y> \in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t> \in S^n \wedge <t,y> \in S) \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^n \circ S \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

小结：涉及关系运算的集合包含或者等式的证明

- 方法：证明集合包含或者相等的证明方法.

  数学归纳法（主要用于幂运算）

- 证明中用到关系运算的定义和公式，如：

$x\in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in R)$

$y\in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R)$

$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1}$

$<x,y>\in R\circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge<t,y>\in S)$

$<x,y>\in R\upharpoonright A \Leftrightarrow x\in A\wedge<x,y>\in R$

$y\in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A\wedge<x,y>\in R)$

$r(R) = R\cup I_A$

$s(R) = R\cup R^{-1}$

$t(R) = R\cup R^2\cup\ldots$