第十七章 平面图

本章的主要内容

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图

第一节 平面图的概念

图的平面性问题是图论典型问题之一。生活中许多问题都与该问题有关。

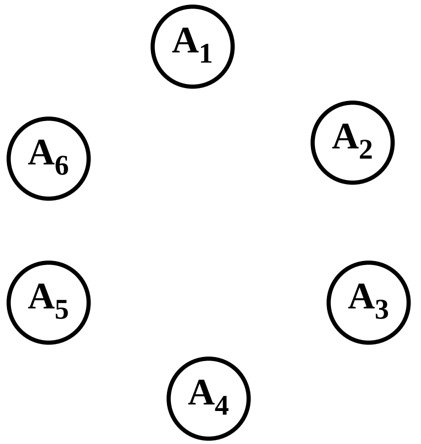
例子1：电路板设计问题

在电路板设计时，需要考虑的问题之一是连接电路元件间的导线间不能交叉。否则，当绝缘层破损时，会出现短路故障。

显然，电路板可以模型为一个图，“要求电路元件间连接导线互不交叉”，对应于“要求图中的边不能相互交叉”。

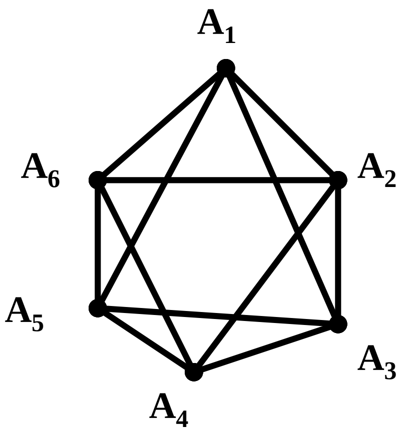
例子2：空调管道的设计

某娱乐中心有6个景点，位置分布如下图。



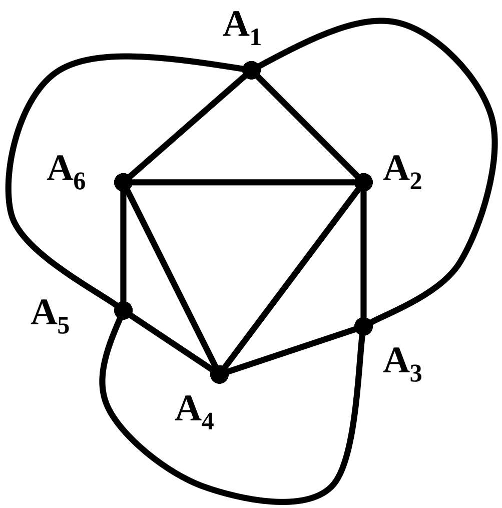
分析者认为：(1) A_1与A_4, (2) A_2与A_5, (3) A_3与A_6间人流较少，其它景点之间人流量大，必须投资铺设空调管道，但要求空调管道间不能交叉。如何设计？

如果把每个景点分别模型为一个点，景点间连线，当且仅当两景点间要铺设空调管道。那么，上面问题直接对应的图为：

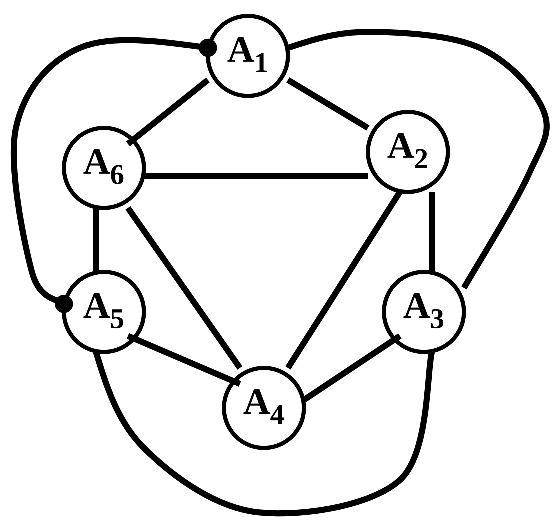


于是，问题转化为：能否把上图画在平面上，使得边不会相互交叉？

通过尝试，可以把上图画为：



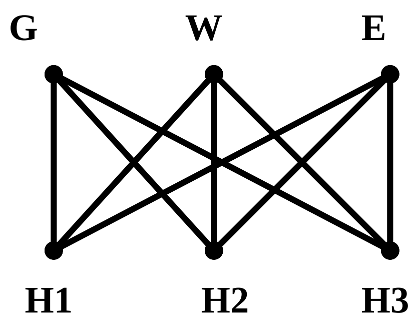
于是，铺设方案为：



例子3：3间房子和3种设施问题

问题：要求把3种公用设施(煤气，水和电)分别用煤气管道、水管和电线连接到3间房子里，要求任何一根线或管道不与另外的线或管道相交，能否办到？

上面问题可以模型为如下偶图：

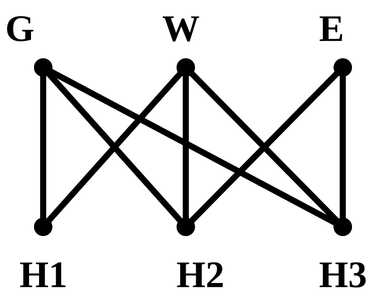


问题转化为，能否把上面偶图画在平面上，使得边与边之间不会交叉？

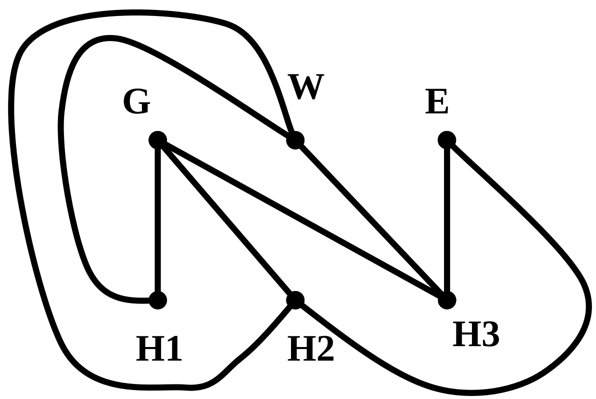
上面的例子都涉及同一个图论问题：能否把一个图画在平面上，使得边与边之间没有交叉？

针对这一问题，我们引入如下概念

定义**1** 如果能把图**G**画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称**G**可以嵌入平面，或称**G**是可平面图。可平面图**G**的边不交叉的一种画法，称为**G**的一种平面嵌入，**G**的平面嵌入表示的图称为平面图。



图**G**



图**G**的平面嵌入

1． 平面图的定义

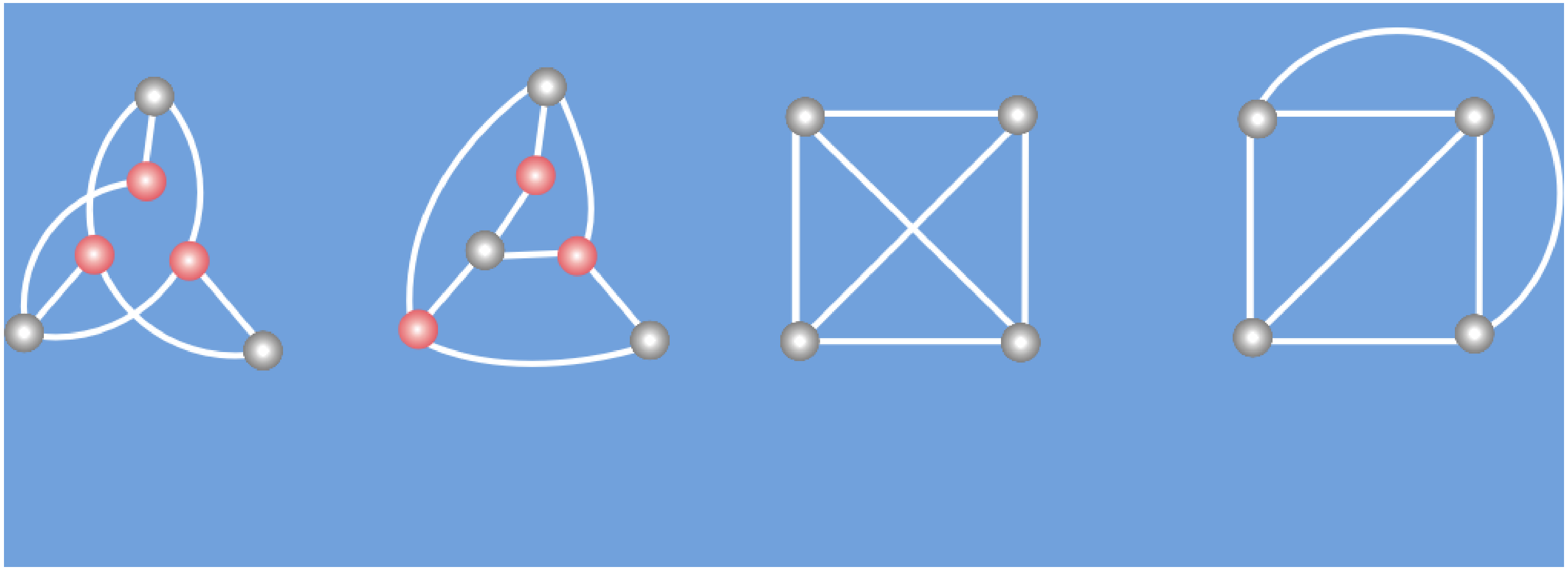
定义 17.1

(1) G 可嵌入曲面 S——若能将 G 除顶点外无边相交地画在 S 上

(2) G 是可平面图或平面图——G 可嵌入平面Π

(3) 平面嵌入——画出的无边相交的平面图

(4) 非平面图——无平面嵌入的无向图



(1) (2) (3) (4)

图 1

图 1 中 (2) 是 (1) 的平面嵌入，(4) 是 (3) 的平面嵌入.

2. 几点说明及一些简单结论

- 一般所谈平面图不一定是指平面嵌入，图 1 中 4 个图都是平面图，但讨论某些性质时，一定是指平面嵌入.
- K_5, $K_{3,3}$ 都不是平面图（待证）
- 设 $G'\subseteq G$，若 G 为平面图，则 G' 也是平面图（定理 17.1）
- 设 $G'\subseteq G$，若 G' 为非平面图，则 G 也是非平面图（定理 17.2），由此可知，K_n（$n\geq 6$），$K_{3,n}$（$n\geq 4$）都是非平面图.
- 平行边与环不影响平面性.

二、平面图的面与次数（这里针对平面图的平面嵌入）

1. 定义

定义 17.2

（1）G 的面——由 G 的平面嵌入的边将平面化分成的区域

（2）无限面或外部面——（可用 R_0 表示）——面积无限的面

（3）有限面或内部面（可用 $R_1, R_2, \ldots, R_k$ 等表示）——面积有限的面

（4）面 R_i 的边界——包围 R_i 的回路组

（5）面 R_i 的次数——R_i 边界的长度，用 $\deg(R_i)$表示

2. 几点说明

- 若平面图 G 有 k 个面，可笼统地用 $R_1, R_2, \ldots, R_k$ 表示，不需要指出外部面.
- 定义 17.2（4）中回路组是指：边界可能是初级回路（圈），可能是简单回路，也可能是复杂回路. 特别地，还可能是非连通的回路之并.

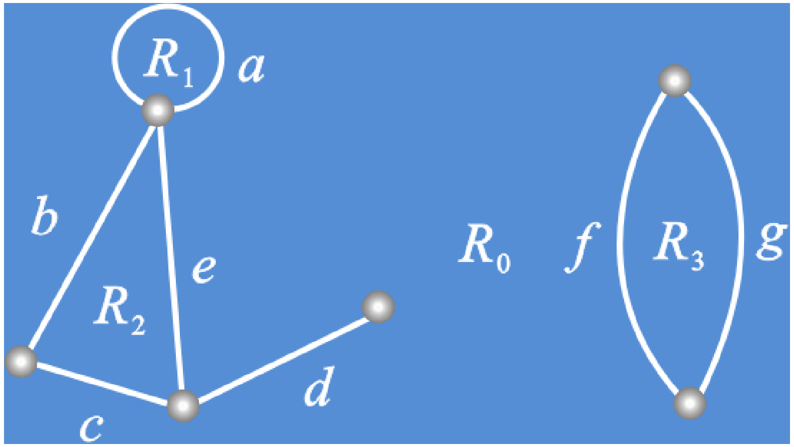


图 2

图 2 所示平面图有 4 个面，$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$. 请写各面的边界.

定理 17.3 平面图各面次数之和等于边数的两倍. 即：设 G=(n, m)是平面图，则：

$$\sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m$$

证明：对G的任意一条边e, 如果e是某面割边，那么由面的次数定义，该边给G的总次数贡献2次；如果e不是割边，那么，它必然是两个面的公共边，因此，由面的次数定义，它也给总次数贡献2次。于是有：

$$\sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m$$

第二节 欧拉公式

定理17.6 (欧拉公式) 设G=(n, m)是连通平面图， ϕ是G的面数，则：

$$n - m + \phi = 2$$

证明：情形1，如果G是树，那么m=n-1, ϕ=1。在这种情况下，容易验证，定理中的恒等式是成立的。

情形2，G不是树的连通平面图（对m 用归纳法）。

假设在这种情形下，欧拉等式不成立。则存在一个含有最少边数的连通平面图G, 使得它不满足欧拉等式。设这个最少边数连通平面图G=(n, m), 面数为ϕ，则：

$$n - m + \phi \neq 2$$

因为G不是树，所以存在非割边e。显然，G-e是连通平面图，边数为m-1, 顶点数为n, 面数为ϕ-1。

由最少性假设，G-e满足欧拉等式：

$$n - (m - 1) + (\phi - 1) = 2$$

化简得：$n - m + \phi = 2$

这是一个矛盾。

注：该定理可以采用对面数ϕ作数学归纳证明。

定理17.7 设G是具有φ个面k个连通分支的平面图，则：

$$n - m + \phi = k + 1$$

证明：对第i (1≦i≦k) 个分支来说，设顶点数为n_i，边数为m_i，面数为ϕ_i, 由欧拉公式：

$$n_i - m_i + \phi_i = 2$$

所以，

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i + \phi_i) = 2k$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2k$$

而：

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = m \qquad \sum_{i=1}^{k} \phi_i = \phi + k - 1$$

所以得：$n - m + \phi = k + 1$

定理17.8 设G是具有n个点m条边ф个面的连通平面图，如果对G的每个面f，有：deg（f）≥ l ≥3, 则：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证明：一方面，由次数公式得：

$$2m = \sum_{f \in \Phi} \deg(f) \ge l\phi \Rightarrow \phi \le \frac{2m}{l}$$

另一方面，由欧拉公式得：$\phi = 2 - n + m$

所以有：$\phi = 2 - n + m \le \dfrac{2m}{l}$

整理得：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

注：(1)上面定理17.8也可以叙述为：

设G=(n, m)是连通图，如果：

$$m > \frac{l}{l-2}(n-2)$$

则G是非可平面图。

(2)定理17.8的条件是G是平面图的必要条件,不是充分条件。

例1 求证：$K_{3,3}$是非可平面图。

证明：注意到，$K_{3,3}$是偶图，不存在奇圈，所以，每个面的次数至少是4,即 l=4

所以，$$\frac{l}{l-2}(n-2)=\frac{4}{2}(6-2)=8$$

而m=9，这样有：

$$m>\frac{l}{l-2}(n-2)$$

所以，由定理17.8，$K_{3,3}$是非平面图。

定理17.10 设G是具有n个点m条边ф个面的简单平面图，则：

$$m\leq 3n-6$$

证明：情形1，G连通。

因为G是简单图，所以每个面的次数至少为3，即l=3。于是，由定理17.8得：

$$m \le 3n - 6$$

情形2，若G不连通。设$G_1,G_2,\ldots,G_k$是连通分支。

一方面,由定理17.7： $n - m + \phi = k + 1$

另一方面，由次数公式得： $\phi \le \frac{2m}{3}$

所以得： $m \le 3n - 3(k+1) \le 3n - 6$

例2，证明：K_5是非可平面图。

证明：K_5是简单图，m=10, n=5。3n-6=9。

得，$m > 3n - 6$ ，所以K_5是非可平面图。

推论 设G是具有n个点m条边的连通平面图，若G的每个面均由长度是 l 的圈围成，则：

$$m(l-2) = l(n-2)$$

证明：由次数公式，欧拉公式容易得证。

定理17.12 设G是具有n个点m条边的简单平面图，则：

$$\delta \le 5$$

证明：若不然，设 $\delta \ge 6$

由握手定理：

$$6n \le \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n-6$$

这与G是简单平面图矛盾。

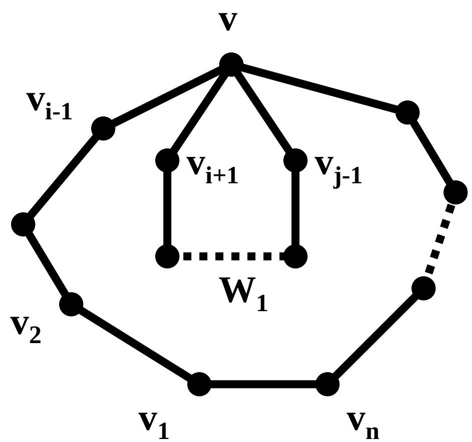
注：该结论是证明"5色定理"的出发点。

定理 一个连通平面图是2连通的，当且仅当它的每个面的边界是圈。

证明：“必要性”： 设G是2连通的平面图，因为环总是两个面的边界，且环面显然由圈围成。不失一般性，假设G没有环，那么G没有割边，也没有割点。所以，每个面的边界一定是一条回路。

设C是G的任意面的一个边界，我们证明，它一定为圈。若不然，设C是G的某面的边界，但它不是圈。

因C是一条回路且不是圈，因此，C中存在子圈。设该子圈是W_1.因C是某面的边界，所以W_1与C的关系可以表示为下图的形式：



容易知道：v为G的割点。矛盾！

“充分性” 设平面图G的每个面的边界均为圈。此时删去G中任意一个点不破坏G的连通性，这表明G是2连通的。

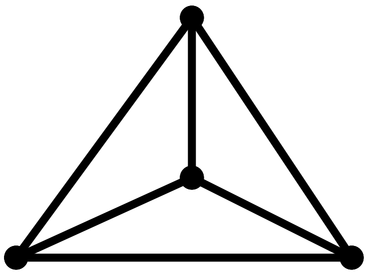
推论 若一个平面图是2连通的，则它的每条边恰在两个面的边界上。

三、极大平面图

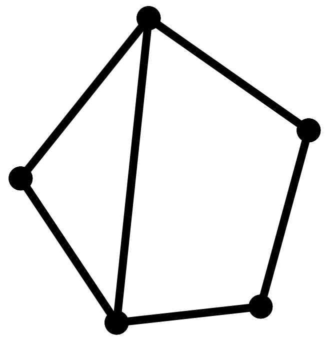
1． 定义

定义 17.3 若在简单平面图 G 中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称 G 为极大平面图.

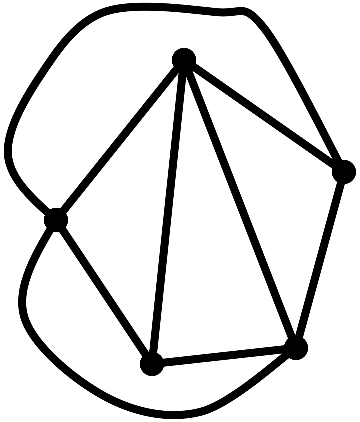
注意：若简单平面图 G 中已无不相邻顶点，G 显然是极大平面图，如 K_1（平凡图），K_2, K_3, K_4 都是极大平面图.



极大平面图



非极大平面图



极大平面图

注：只有在简单图前提下才能定义极大平面图。

引理 设G是极大平面图，则G必然连通；若G的阶数大于等于3，则G无割边。

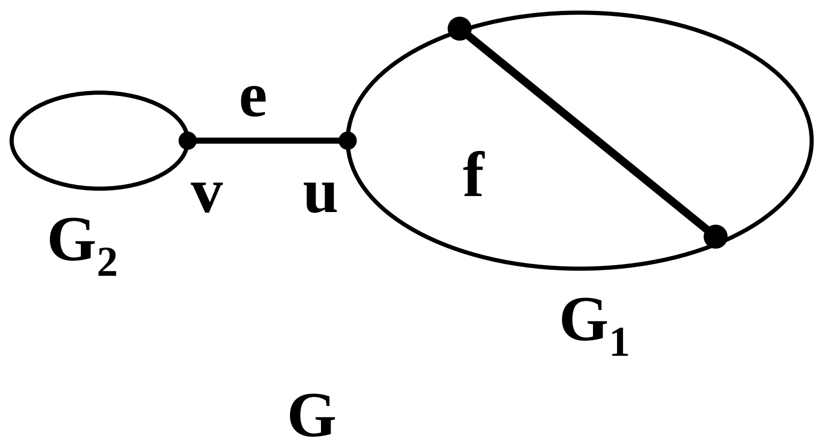
（1）先证明G连通。

若不然，G至少两个连通分支。设G_1与G_2是G的任意两个连通分支。

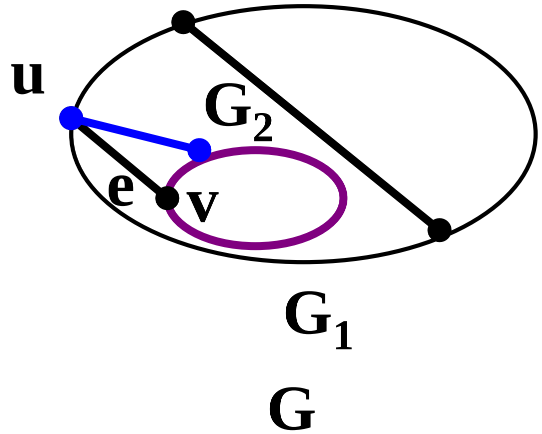
把G_1画在G_2的外部面上，并在G_1, G_2上分别取一点u与v.连接u与v得到一个新平面图G*。但这与G是极大平面图相矛盾。

（2）当极大平面图G的阶数n≥3时，我们证明G中没有割边。

若不然，设G中有割边e=uv，则G-uv不连通，恰有两个连通分支G_1与G_2。



设u在G_1中，而v在G_2中。由于$n\geq 3$, 所以，至少有一个分支包含两个以上的顶点。设G_2至少含有两个顶点。又设G_1中含有点u的面是 f , 将G_2画在 f 内。



由于G是简单图，所以，在G_2的外部面上存在不等于点v的点t。现在，在G中连接点u与t得新平面图G^*,它比G多一条边。这与G的极大性相矛盾。

下面证明极大平面图的一个重要性质。

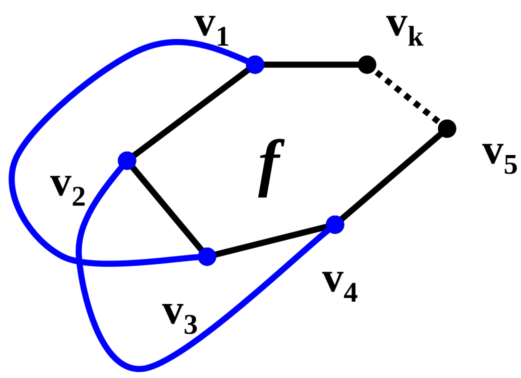
定理1 设G是至少有3个顶点的平面图，则G是极大平面图，当且仅当G的每个面的次数是3且为简单图。

注：该定理可以简单记为是“极大平面图的三角形特征”，即每个面的边界是三角形。

证明：“必要性”

由引理知，G是简单图、G无割边。于是G的每个面的次数至少是3。

假设G中某个面f的次数大于等于4。记f的边界是$v_1v_2v_3v_4\ldots v_k$。如下图所示。



如果v_1与v_3不邻接，则连接v_1v_3，没有破坏G的平面性，这与G是极大平面图矛盾。所以v_1v_3必须邻接，但必须在 f 外连线；同理v_2与v_4也必须在f外连线。但边v_1v_3与边v_2v_4在 f 外交叉，与G是平面图矛盾！

所以，G的每个面次数一定是3.

定理的充分性证明：

由定理17.3 知 $2m = 3\phi$，根据欧拉公式 $\phi = 2+m-n$代入得 $m = 3n - 6$.

若G 不是极大平面图，则G中存在不相邻顶点 u, v，使得 $G' = G +（u，v）$还是简单平面图，G'的边数$m' = m+1, n' = n$, 故 $m' > 3n'-6$ 矛盾。

推论：设**G**是**n**个点，**m**条边和ϕ个面的极大平面图，且n≥3. 则：（1）m=3n-6；（2）ϕ=2n-4.

证明：因为**G**是极大平面图，所以，每个面的次数为**3.**由次数公式：

$$2m = \sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 3\phi$$

由欧拉公式：

$$\phi = 2 - n + m$$

所以得：

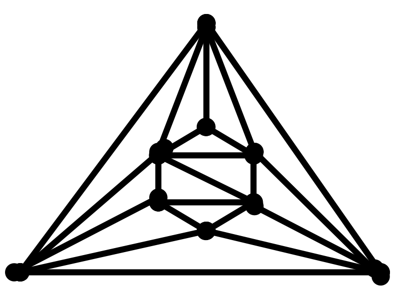
$$\frac{2}{3} m = 2 - n + m$$

所以得：$m = 3n - 6$

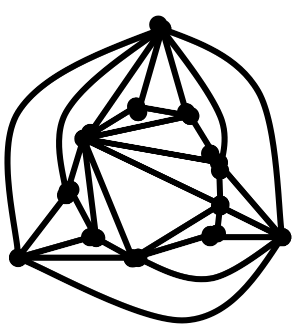
又 $m = n + \phi - 2$

所以：$\phi = 2n - 4$

注：顶点数相同的极大平面图并不唯一。例如：



正20面体



非正20面体

还在研究中的问题是：顶点数相同的极大平面图的个数和结构问题。

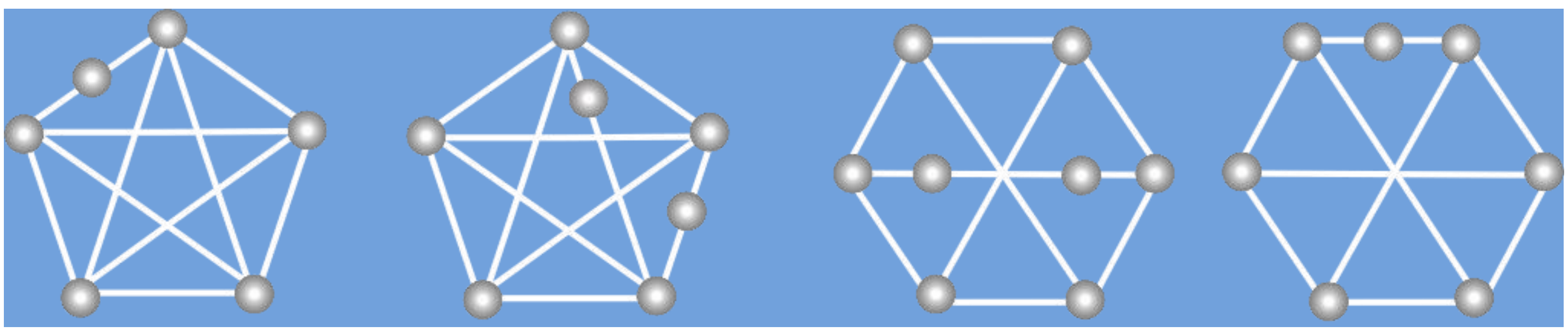
与极大平面图相对应的图是极小不可平面图。

四、极小非平面图

定义 17.4　若在非平面图 G 中任意删除一条边，所得图 G' 为平面图，则称 G 为极小非平面图.

由定义不难看出：

- K_5, $K_{3,3}$ 都是极小非平面图
- 极小非平面图必为简单图
- 图 5 中所示各图也都是极小非平面图.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 5

本节作业

4，7，14，15

第三节　平面图的判定

我们已经明确：对于3阶以上的具有m条边的简单图G来说，如果G满足如下条件之一：(1)$m>3n-6$; (2) K_5是G的一个子图；(3) $K_{3,3}$是G的一个子图，那么，G是非可平面图。

但上面的条件仅为G是非可平面图的充分条件。

这次课要解决的问题是：给出判定一个图是否是可平面图的充分必要条件。

最早给出图的平面性判定充要条件的是波兰数学家库拉托斯基(30年代给出)。后来，美国数学家惠特尼，加拿大数学家托特，我国数学家吴文俊等都给出了不同的充要条件。

吴文俊（著名数学家、中国科学院院士）

1919年5月12日出生于上海，祖籍浙江嘉兴，数学家，中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，系统科学研究所名誉所长。

吴文俊毕业于交通大学数学系，**1949年，获法国斯特拉斯堡大学博士学位；1957年，当选为中国科学院学部委员（院士）；1991年，当选第三世界科学院院士；2001年2月，获2000年度国家最高科学技术奖。**

吴文俊的研究工作涉及数学的诸多领域，其主要成就表现在拓扑学和数学机械化两个领域。他为拓扑学做了奠基性的工作；他的示性类和示嵌类研究被国际数学界称为“吴公式”，“吴示性类”，“吴示嵌类”，至今仍被国际同行广泛引用。

2017年5月7日7时21分，吴文俊在北京不幸去世，享年98岁。

我们主要介绍波兰数学家库拉托斯基的结果。

库拉托斯基定理主要基于K_5和$K_{3,3}$是非可平面图这一事实而提出的平面性判定方法。

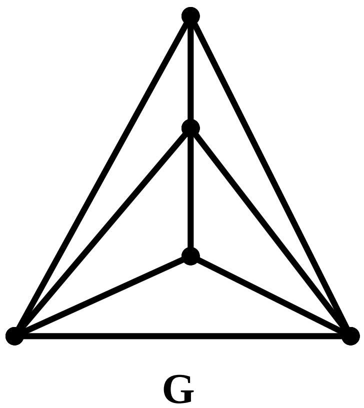
所以，我们称K_5与$K_{3,3}$为库拉托斯基图。

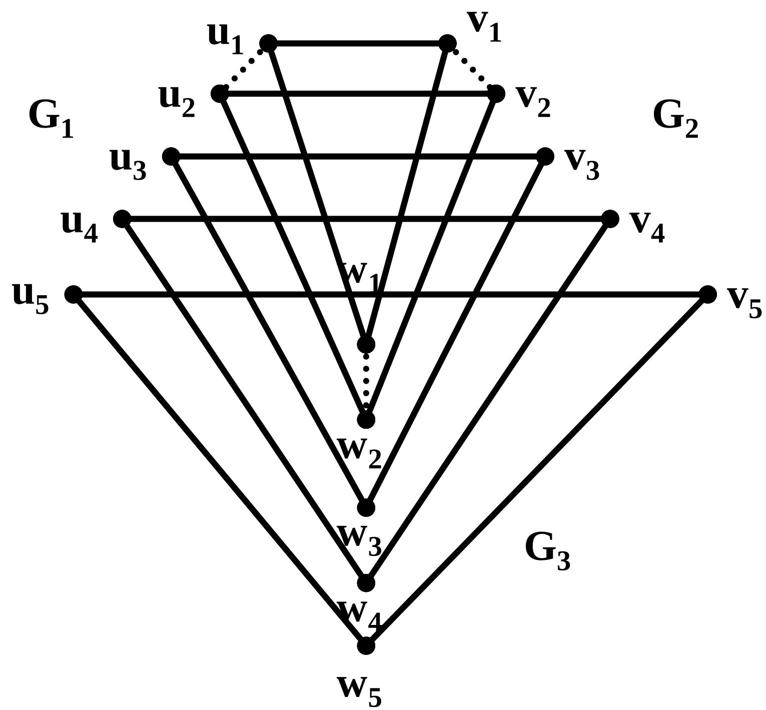
一个自然的猜测是：G是可平面图的充分必要条件是G不含子图K_5和$K_{3,3}$。

上面命题必要性显然成立！但充分性能成立吗？

十分遗憾！下面例子给出了回答：NO!

下面的图G是一个点数为5，边数为9的极大平面图。考虑 $F=G\times K_3$





$$F = G \times K_3$$

注：F由G的3个拷贝组成，分别是G_1,G_2,G_3。三个拷贝中的边没有画出。图中虚线不是对应的G_i中边。

可以证明：**F**中不含$\mathbf{K_5}$和$\mathbf{K_{3,3}}$，且**F**是非可平面图。

尽管我们的直觉猜测错了，但库拉托斯基还是基于$\mathbf{K_5}$与$\mathbf{K_{3,3}}$得到了图的平面性判据。

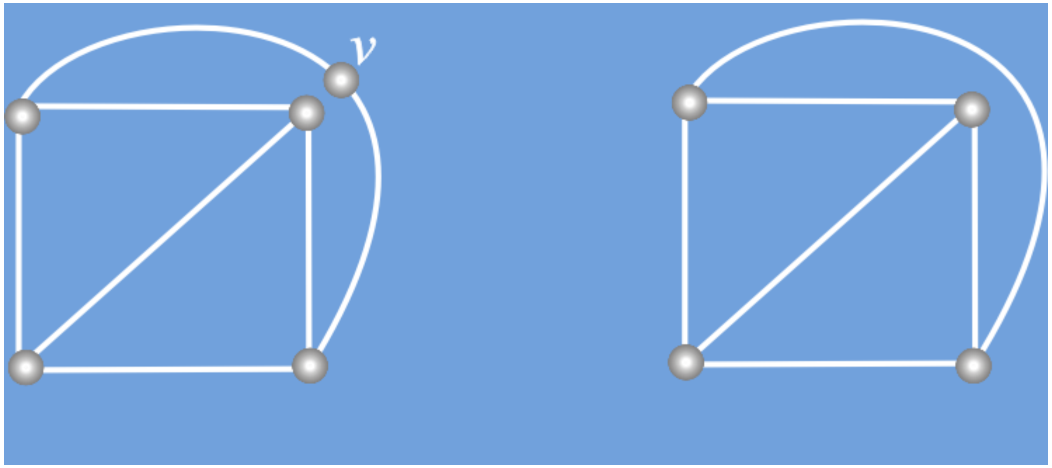
一、为判断定理做准备

1. 插入 2 度顶点和消去 2 度顶点

定义 17.5

(1) 消去 2 度顶点 v，见图 6 中，由 (1) 到 (2)

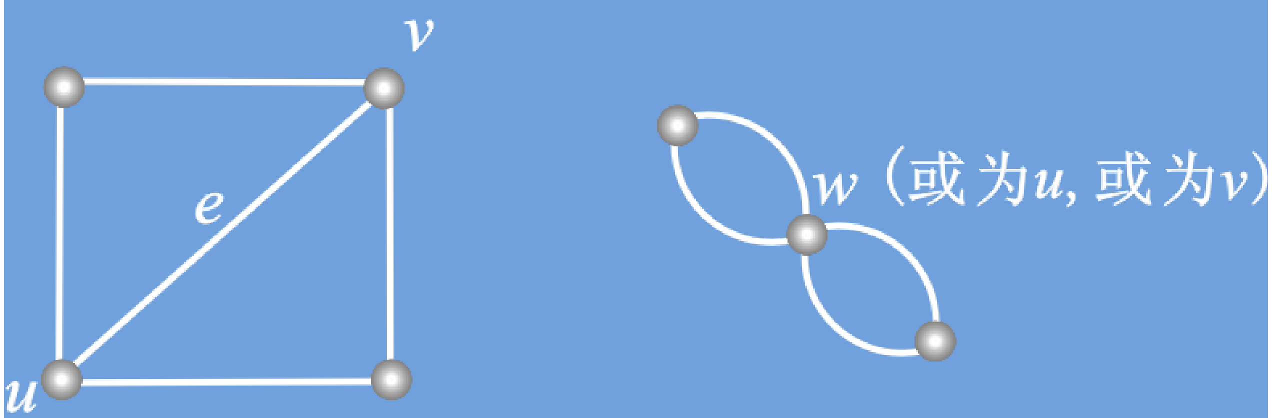
(2) 插入 2 度顶点 v，见图 6 中，从 (2) 到 (1).



(1) (2)

图 6

2. 收缩边 e，见图 7 所示.



(1)　　(2)

图 7

3. 图之间的同胚

定义 17.6　若 $G_1 \cong G_2$，或经过反复插入或消去 2 度顶点后所得 $G'_1 \cong G'_2$，则称 G_1 与 G_2 同胚.

图 6 中 (1) 与 (2) 同胚.

定理1 (库拉托斯基定理) 图G是可平面的，当且仅当它不含K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

例1 求证：下面两图均是非平面图。

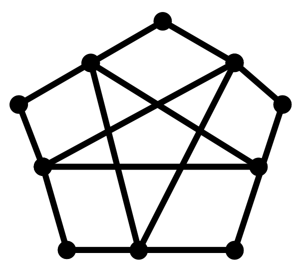


图 G_1

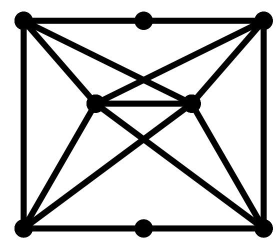


图 G_2

证明：对于G_1来说，按G_1在2度顶点内收缩后，可得到K_5。所以，由库拉托斯基定理知G_1是非可平面图。

对于G_2来说，先取如下子图

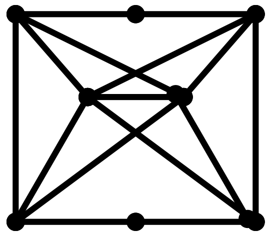
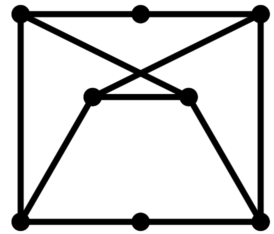
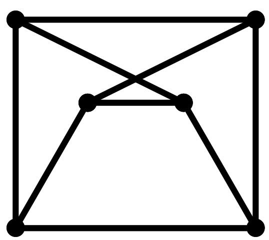


图 G_2



G_2的一个子图

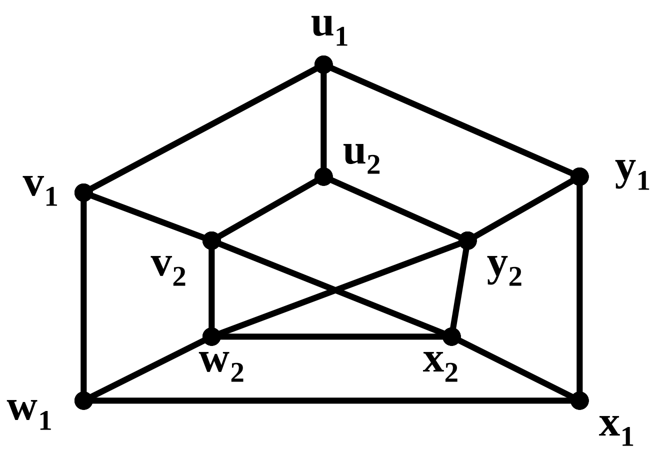
对上面子图，按2度顶点收缩得与之同胚子图$K_{3,3}$:



$K_{3,3}$

所以，G_2是非可平面图。

例2 确定下图是否是可平面图。



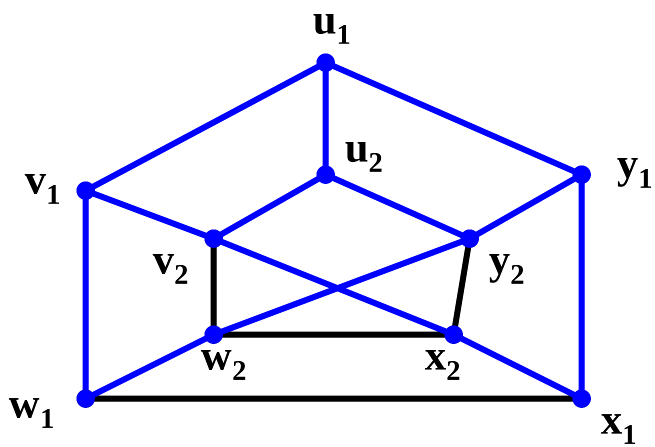
分析：我们根据图的结构形式，怀疑该图是非可平面图。但我们必须找到证据！

当然我们可能考虑是否m>3n-6。遗憾的是该图不满足这个不等式！

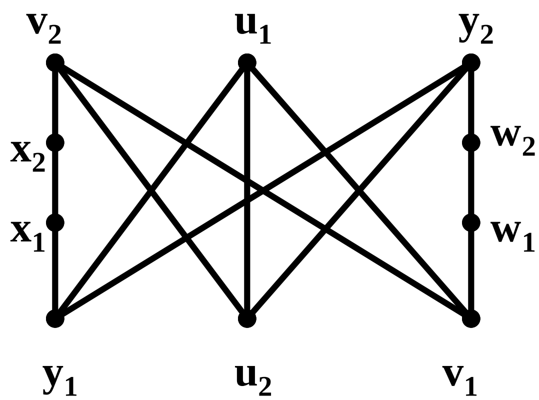
所以，我们要在该图中寻找一个与k_5或$K_{3,3}$同胚的子图！

由于该图的最大度为4的顶点才4个，所以，不存在与K_5同胚的子图。因此，只有寻找与$K_{3,3}$同胚的子图！

解：取G中蓝色边的一个导出子图：



也就是得到G的如下形式的一个子图：



上图显然和$K_{3,3}$同胚。由库拉托斯基定理知，G是非可平面的。

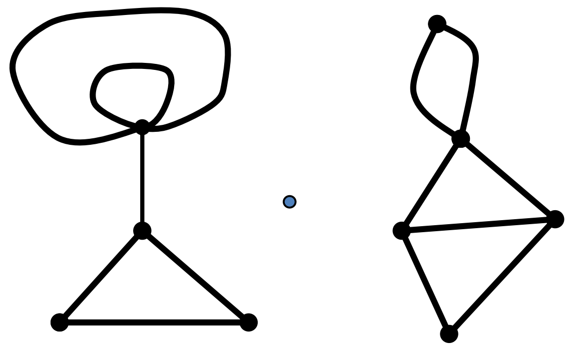
注：(1) 库拉托斯基定理可以等价叙述为：

库拉托斯基定理：图G是非可平面的，当且仅当它含有K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

补充内容：块及其性质

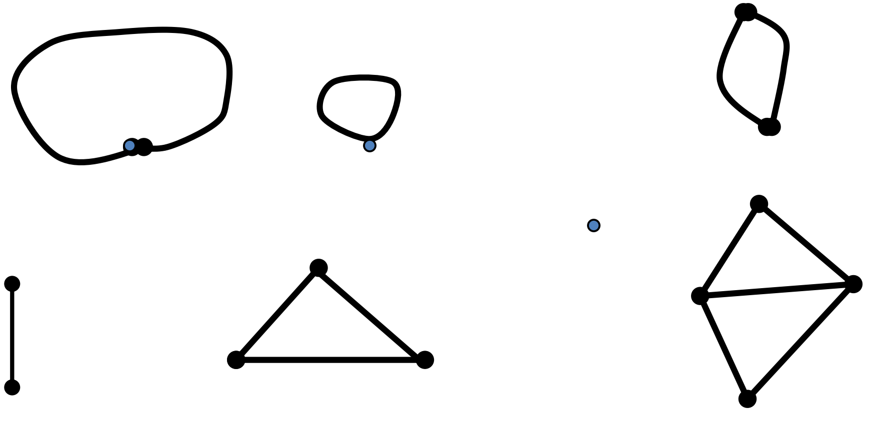
定义 没有割点的连通图称为是一个块图，简称块；G的一个子图B称为是G的一个块，如果(1), 它本身是块；(2), 若没有真包含B的G的块存在。

例 找出下图G中的所有块。



图G

解：由块的定义得：



定理**B1** 若$|V(G)|\geqq 3$, 则G是块，当且仅当G无环且任意两顶点位于同一圈上。

定理**B2** 点**v**是图**G**的割点当且仅当**v**至少属于**G**的两个不同的块。

注：该定理揭示了图中的块与图中割点的内在联系：不同块的公共点一定是图的割点。也就是说，图的块可以按割点进行寻找。所以，该定理的意义在于：可以得到寻找图中全部块的算法。

(2) 库拉托斯基 (1896---1980) 波兰数学家。1913年开始在苏格兰格拉斯哥大学学习工程学，1915年回到波兰发沙大学转学数学，主攻拓扑学。1921年获博士学位。1930年在利沃夫大学作数学教授期间，发现并证明了图论中的库拉托斯基定理。1939年后到发沙大学做数学教授。他的一生主要研究拓扑学与集合论。

库拉托斯基于1954年率波兰数学家代表团对我国进行了学术访问，还送给了华罗庚一些波兰数学家写的数论函数论文。

库拉托斯基定理：图G是非可平面的，当且仅当它含有K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

定义2 给定图G, 去掉G中的环，用单边代替平行边而得到的图称为G的基础简单图。

定理2 (1) 图G是可平面的，当且仅当它的基础简单图是可平面的；

(2) 图G是可平面图当且仅当G的每个块是可平面图。

证明：(1) 由平面图的定义，该命题显然成立。

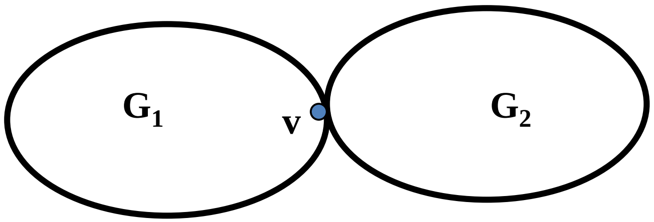
(2) 必要性显然。下面证明充分性。

不失一般性，假设G连通。我们对G的块数n作数学归纳证明。

当$n=1$时，由条件，结论显然成立；

设当$n<k$ 时，若G的每个块是可平面的，有G是可平面的。下面考虑$n=k$时的情形。

设点v是G的割点，则按照v，G可以分成两个边不重子图G_1与G_2, 即$G=G_1\cup G_2$, 且$G_1\cap G_2=\{v\}$。

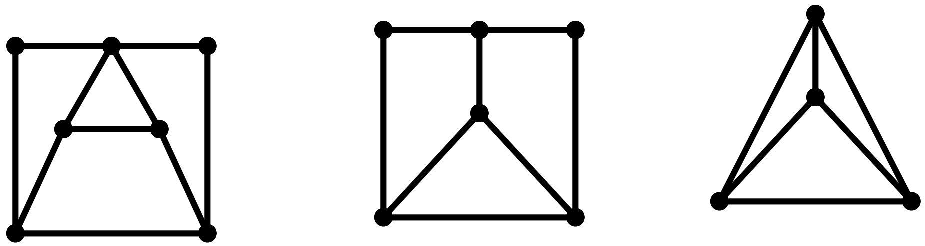


按归纳假设，G_1与G_2都是可平面图。取G_1与G_2的平面嵌入满足点v都在外部面边界上，则把它们在点v处对接后，将得到G的平面嵌入。即证G是可平面图。

关于图的可平面性刻画，德国数学家瓦格纳(Wangner)在1937年得到了一个定理。

定义3 设uv是简单图G的一条边。去掉该边，重合其端点，再删去由此产生的环和平行边。这一过程称为图G的初等收缩或图的边收缩运算。

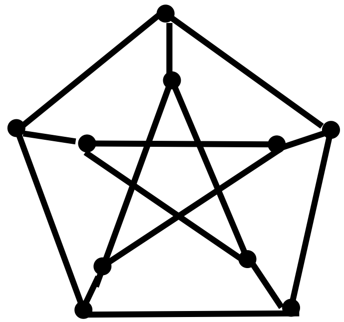
称G可收缩到H,是指对G通过一系列边收缩后可得到图H。



定理2 (瓦格纳定理)：简单图G是可平面图当且仅当它不含有可收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

注：这是瓦格纳1937年在科隆大学博士毕业当年提出并证明过的一个定理。

例3 求证彼得森图是非可平面图。

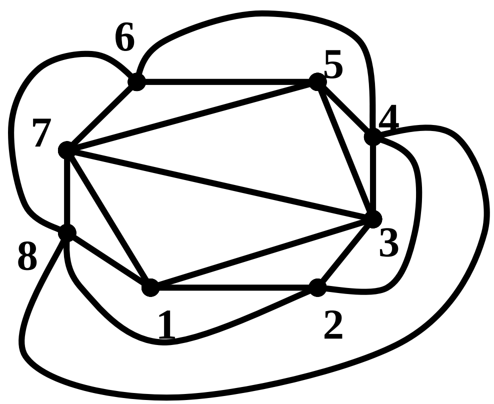


证明：很明显，彼得森图通过一些边收缩运算后得到K_5。由瓦格纳定理得证。

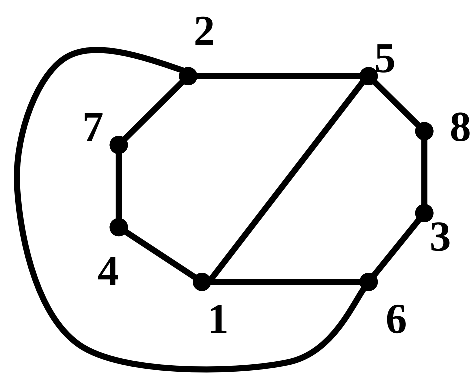
定理3 至少有9个顶点的简单可平面图的补图是不可平面的，而9是这个数目中的最小的一个。

注：该定理是由数学家巴特尔、哈拉里和科达马首先得到。然后由托特(1963)给出了一个不太笨拙的证明，他采用枚举法进行验证。还不知道有简洁证明，也没有得到推理方法证明。

例4 找出一个8个顶点的可平面图，使其补图也是可平面的。



G



G的补

例5 设G是一个简单图，若顶点数n≥11,则G与G的补图中，至少有一个是不可平面图 (要求用推理方法).

证明：设G是一个n阶可平面图，则：

$$m(G) \le 3n-6$$

所以：

$$m(\overline{G}) = m(K_n) - m(G) \ge \frac{n(n-1)}{2} - (3n-6)$$

考虑：

$$m(\overline{G}) - (3n-6) \ge \frac{n(n-1)}{2} - 2(3n-6) = \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 24)$$

令:

$$f(n)=\frac{1}{2}(n^{2}-13n+24)$$

则:

$$f'(n)=n-\frac{13}{2}$$

所以， 当n≥6.5时，f(n)单调上升。而当n=11时：

$$f(11)>0$$

所以， 当n≥11时，有： $m(\overline{G})>(3n-6)$

即证明了简单可平面图G的补图是非可平面图。

例6 设G_i是一个有n_i个点，m_i条边的图，i=1,2。证明：若G_1与G_2同胚，则：

$$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

证明：设G_1经过p_1次2度顶点插入，p_2次2度顶点消去得到H_1, G_2经过q_1次2度顶点插入，q_2次2度顶点消去得到H_2, 使得：

$$H_1 \cong H_2$$

又设H_1与H_2的顶点数分别为n_1^*和n_2^*,边数分别为m_1^*与m_2^*。那么：

$$n_1^* = n_1 + P_1 - P_2 \qquad m_1^* = m_1 + P_1 - P_2$$

$$n_2^* = n_2 + q_1 - q_2 \qquad m_2^* = m_2 + q_1 - q_2$$

所以：$n_1 + m_2 = n_1 * + m_2 * + P_1 - P_2 + q_1 - q_2$

$n_2 + m_1 = n_2 * + m_1 * + P_1 - P_2 + q_1 - q_2$

而由 $H_1 \cong H_2$ 得：$m_1 * = m_2 *, n_1 * = n_2 *$

所以：$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$

第四节 平面图的对偶图

一、对偶图的定义

定义 17.7　设 G 是某平面图的某个平面嵌入，构造 G 的对偶图 G^* 如下：

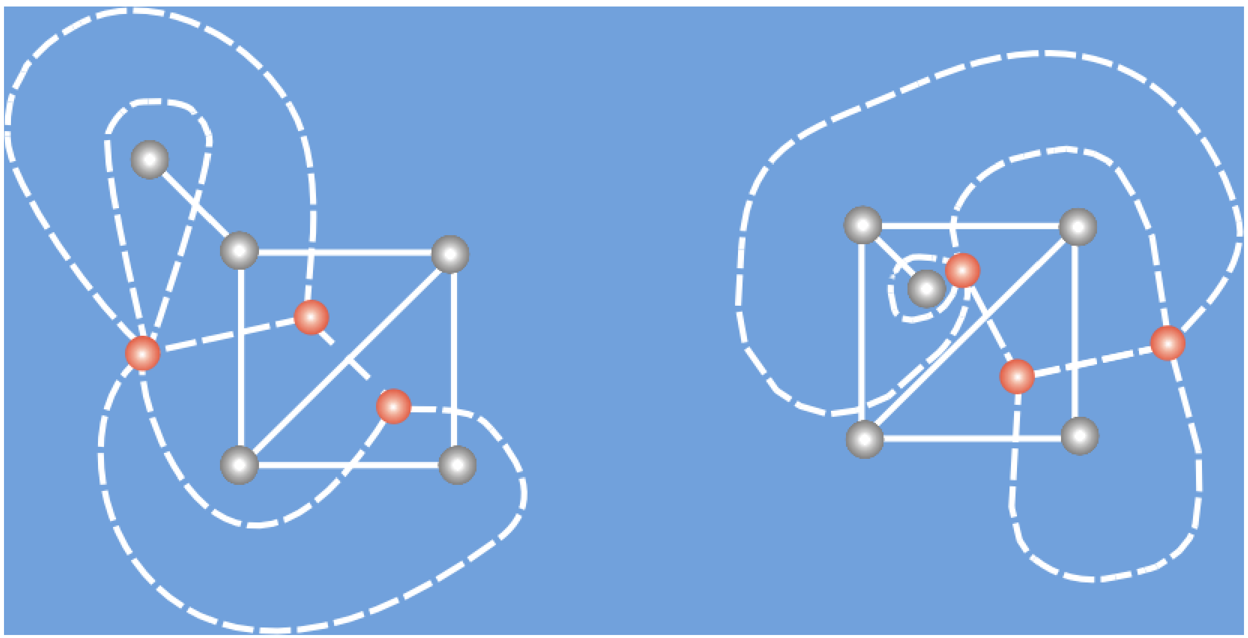
在 G 的面 R_i 中放置 G^* 的顶点 v^*_i.

设 e 为 G 的任意一条边.

若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上，做 G^* 的边 e^* 与 e 相交，且 e^* 关联 G^* 的位于 R_i 与 R_j 中的顶点 v^*_i 与 v^*_j，即 $e^*=(v^*_i,v^*_j)$，e^* 不与其它任何边相交.

若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上，则 e^* 是以 R_i 中 G^* 的顶点 v^*_i 为端点的环，即 $e^*=(v^*_i,v^*_i)$.

图 10 两图中，实线边图为平面图，虚线边图为其对偶图.



(1)　　(2)

图 10

从定义不难看出 G 的对偶图 G^*有以下性质：

- G^*是平面图，而且是平面嵌入.
- G^*是连通图
- 若边 e 为 G 中的环，则 G^*与 e 对应的边 e^*为桥，若 e 为桥，则 G^*中与 e 对应的边 e^*为环.
- 在多数情况下，G^*为多重图（含平行边的图）.
- 同构的平面图（平面嵌入）的对偶图不一定是同构的.
- 在图 10 中所示两个平面图是同构的，但它们的对偶图不同构.

平面图G	对 应	对偶图
点 边 环 割边 回路 边割集		面 边 割边 环 边割集 回路

二、平面图与对偶图的阶数、边数与面数之间的关系.

定理 17.17　设 G^*是连通平面图 G 的对偶图，n^*, m^*, r^*和 n, m, r 分别为 G^*和 G 的顶点数、边数和面数，则

（1）$n^*= r$

（2）$m^*=m$

（3）$r^*=n$

（4）设 G^*的顶点 v^*_i 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v^*_i)=\deg(R_i)$

证明线索：（1）、（2）平凡.（3）应用欧拉公式.（4）的证明中注意，桥只能在某个面的边界中，非桥边在两个面的边界上.

定理 17.18　设 G^*是具有 k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图 G 的对偶图，则

（1）$n^*= r$

（2）$m^*=m$

（3）$r^*=n-k+1$

（4）设 G^*的顶点 v^*_i 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v^*_i)=\deg(R_i)$

其中 n^*, m^*, r^*, n, m, r 同定理 17.17.

证明（3）时应同时应用欧拉公式及欧拉公式的推广.

定理5 平面图G的对偶图必然连通

证明：在G*中任意取两点v_i*与v_j*。我们证明该两点连通即可！

用一条曲线 *l* 把v_i*和v_j*连接起来，且 *l* 不与G*的任意顶点相交。

显然，曲线 *l* 从v_i*到v_j*经过的面边序列，对应从v_i*到v_j*的点边序列，该点边序列就是该两点在G*中的通路。

注: (1) 由定理5知：(G*)*不一定等于G;

例 1　G是平面图，则 $(G^*)^* \cong G$ 当且仅当G是连通的。

证明："必要性"

由于G是平面图，由定理5，G*是连通的。而由G*是平面图，再由定理5，(G*)*是连通的。

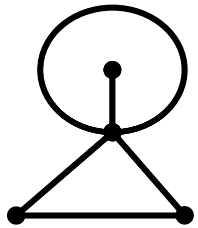
所以，由 $(G^*)^* \cong G$ 得：G是连通的。

"充分性"

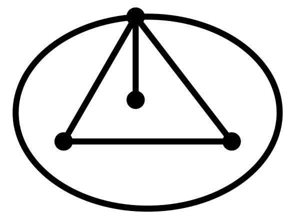
由对偶图的定义知，平面图G与其对偶图G*嵌入在同一平面上，当G连通时，容易知道：G*的无界面 f^{**} 中仅含G的唯一顶点v,而除v外，G中其它顶点u均与G*的有限面形成一一对应，且对应顶点间邻接关系保持不变，即： $(G^*)^* \cong G$

同构的平面图可以有不同构的对偶图。

例如，下面的两个图：$G_1 \cong G_2$



G_1



G_2

但 $G_1{}^* \not\cong G_2{}^*$

这是因为：G_2中有次数是1的面，而G_1没有次数是1的面。所以，它们的对偶图不能同构。

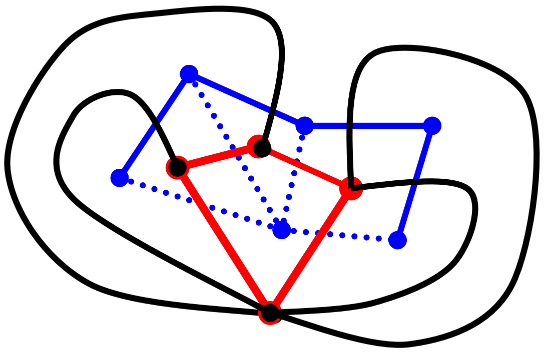
例2 证明：

(1) B是平面图G的极小边割集，当且仅当

$$\left\{ c^{*} \in E(G^{*}) \middle| c \in B \right\} = C^{*}$$

是G*的圈。

(2) 欧拉平面图的对偶图是二部图。

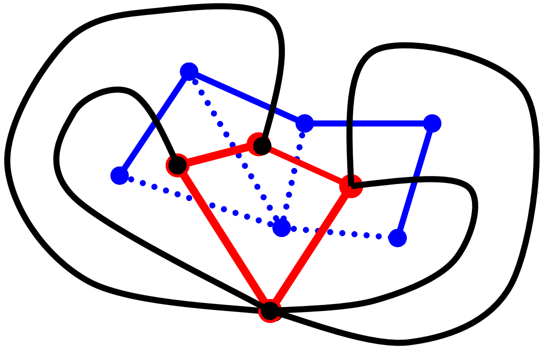


示意图

证明: (1)

对B的边数作数学归纳。

当B的边数n=1时，B中边是割边



示意图

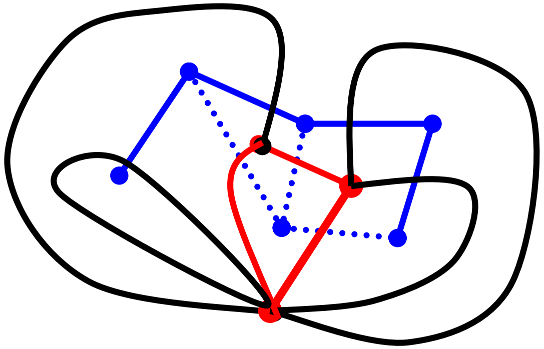
显然，在G*中对应环。所以，结论成立。

设对B的边数n<k 时，结论成立。考虑n=k的情形。

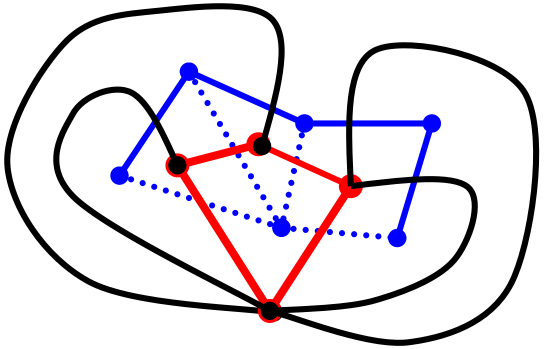
设$c_1 \in B$, 于是$B-c_1$是$G-c_1=G_1$的一个极小边割集。由归纳假设:

$$\{c^* \in E(G_1^*) \mid c \in B - c_1\} = C_1^*$$

是G_1^*的一个圈。且圈C_1^*上的顶点对应于G_1中的面f, f 的边界上有极小边割集$B-e_1$的边。



示意图G_1



示意图

现在，把e_1加入到G_1中，恢复G。

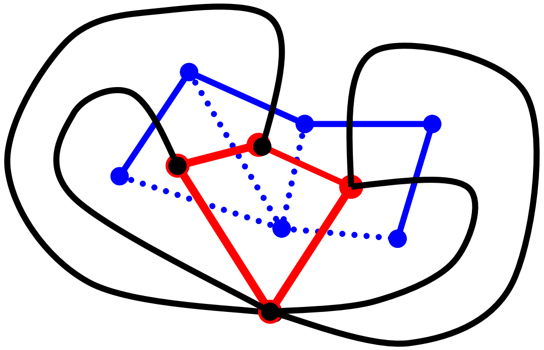
由于G是平面图，其作用相当于圈C_1*上的一个顶点对应于G_1中的一个平面区域 f, 被e_1划分成两个顶点f_1*与f_2*, 并在其间连以e_1所对应的边e_1*。

所以，B对应在G*中的C*仍然是一个圈。由归纳法，结论得到证明。

充分性：

G*中的一个圈，对应于G中

的边的集合B显然是G中的一个边割集。



示意图

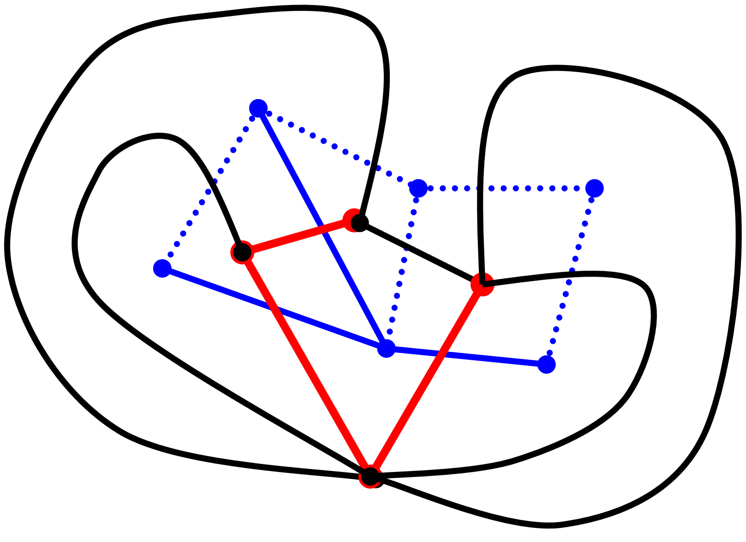
若该割集不是极小边割集，则它是G中极小边割集之和。而由必要性知道：每个极小边割集对应G*的一个圈，于是推出B在G*中对应的边集合是圈之并。但这与假设矛盾。

(2) 因欧拉图的任意边割集均有偶数条边。于是由(1), G*中不含奇圈。所以G*是二部图。

例3 设T是连通平面图G的生成树，

$$E^* = \left\{ e^* \in E(G^*) \middle| e \notin E(T) \right\}$$

证明：$T^*=G^*[E^*]$是G^*中的生成树。



示意图

证明：情形1，如果G是树。

在这种情况下，$E^* = \Phi$. 则T^*是平凡图，而G^*的生成树也是平凡图，所以，结论成立；

情形2，如果G不是树。

因G的每个面必然含有边e不属于E(T),即G^*的每个顶点必然和E^*中的某边关联，于是T^*必然是G^*的生成子图。

下面证明：T^*中没有圈。

若T^*中有圈。则由例2知：T的余树中含有G的极小边割集。但我们又可以证明：如果T是连通图G的生成树，那么，T的余树不含G的极小边割集。这样，T^*不能含G^*的圈。

又因在G中，每去掉T的余树中的一条边，G的面减少一个，当T的余树中的边全去掉时，G变成一颗树T.

于是，有：

$$\left|E(T^*)\right| = \left|E(\overline{T})\right| = \phi(G) - 1 = \left|V(G^*)\right| - 1$$

所以，T*是G*的生成树。

三、自对偶图

定义 17.8　设 G^* 是平面图 G 的对偶图，若 $G^* \cong G$，则称 G 为自对偶图.

轮图定义如下：

在 $n-1$（$n\geq 4$）边形 C_{n-1} 内放置 1 个顶点，使这个顶点与 C_{n-1} 上的所有的顶点均相邻. 所得 n 阶简单图称为 n 阶轮图. n 为奇数的轮图称为奇阶轮图，n 为偶数的轮图称为偶阶轮图，常将 n 阶轮图记为 W_n.

轮图都是自对偶图.

图 11 中给出了 W_6 和 W_7.

请画出它们的对偶图，

从而说明它们都是自对偶图.

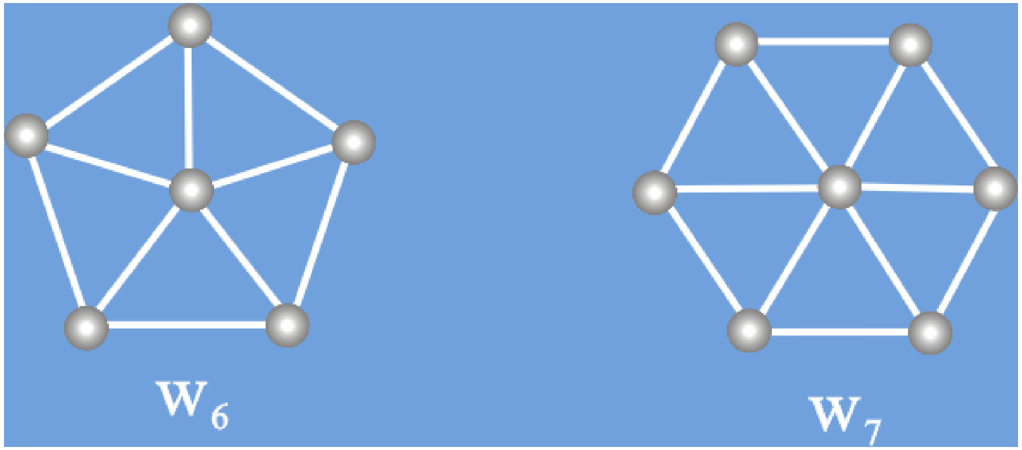


图 11

第十七章 习题课

一、本章的主要内容及要求

1. 主要内容

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图

2．本章的基本要求

- 深刻理解本部分的基本概念：平面图、平面嵌入、面、次数、极大平面图、极小非平面图、对偶图

  牢记极大平面图的主要性质和判别方法

- 熟记欧拉公式及推广形式，并能用欧拉公式及推广形式证明有
- 关定理与命题.

  会用库拉图斯基定理证明某些图不是平面图.

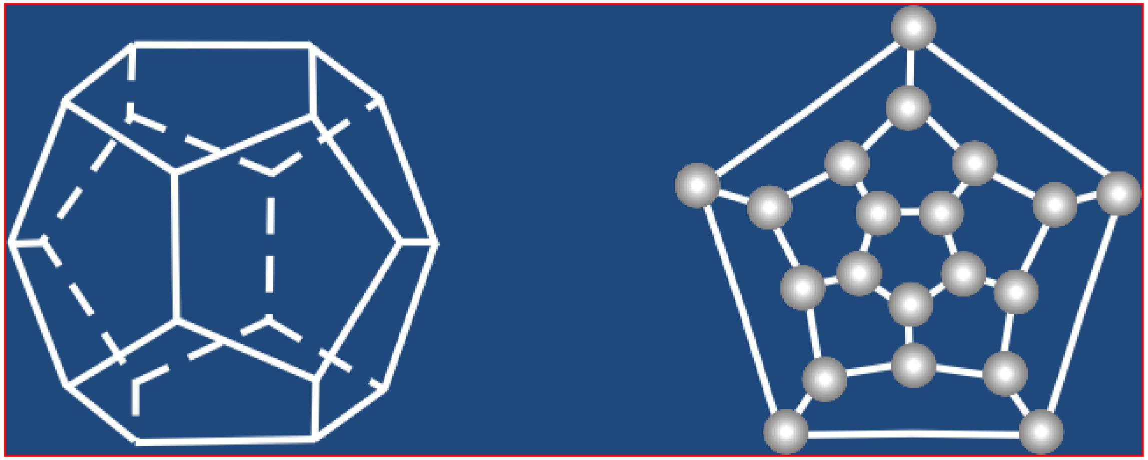
- 记住平面图与它的对偶图阶数、边数、面数之间的关系

二、练习题

1． 设 G 是连通的简单的平面图，面数 $r<12$，$\delta(G)\geq 3$.

（1）证明 G 中存在次数≤4 的面

（2）举例说明当 $r=12$ 时，（1）中结论不真.



解本题可用的定理有欧拉公式、握手定理、各面次之和与边数的关系等. 使用反证法证明. 设 G 的阶数、边数、面数分别为 n, m, r.

（1） 否则，由欧拉公式得

$2m > 5r = 5\,(2+m-n)$ ①

由于$\delta(G)\geq 3$ 及握手定理又有

$2m \geq 3n$ ②

由①与②得 $m\geq 30$ ③

又有

$r=2+m-n < 12$ ④

由④及②又可得

$m<30$ ⑤

③,⑤是矛盾的.

（2） 正十二面体是一个反例.

2. 设 G 是阶数 $n\geq 11$ 的无向平面图，证明 G 和 $\overline{G}$ 不可能全是平面图.

证 只需证明 G 和 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平面图. 采用反证法. 否则 $\overline{G}$ 与 G 都是平面图，下面来推出矛盾.

G 与 $\overline{G}$ 的边数 m, m' 应满足 $m+m'=\dfrac{n(n-1)}{2}$ （K_n 的边数） ①

由鸽巢原理知 m 或 m'，不妨设 m， $m \geq \dfrac{n(n-1)}{4}$ ②

又由定理 17.12 知 $m \leq 3n-6$ ③

由②与③得 $n^2-13n+24 \leq 0$ ④

由④解得 $2 \leq n \leq 10$ ⑤

⑤与 $n \geq 11$ 矛盾.

其实，当 n=9,10 时，命题结论已真.

3. 证明图 14 所示图为非平面图

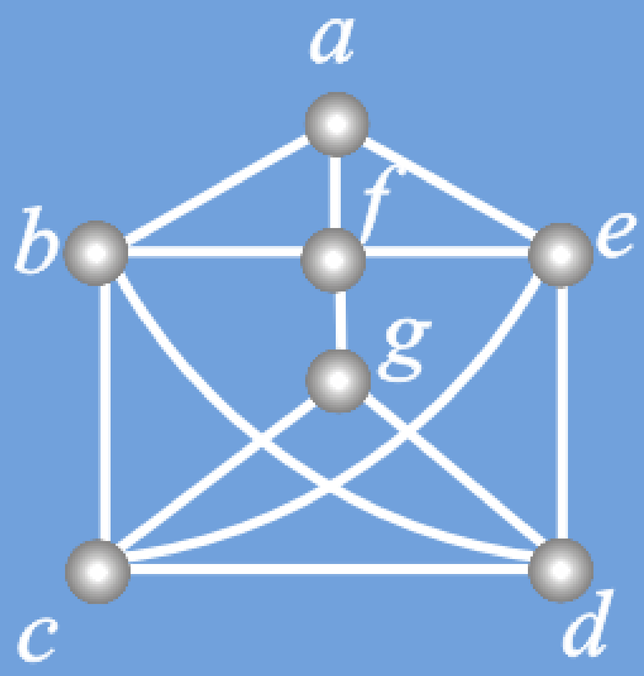


图 14

用库拉图斯基定理证明

方法一.　图 15 所示图为图 14 所示图的子图，它是 $K_{3,3}$（请找出互补顶点子集），由库拉图斯基定理得证命题.

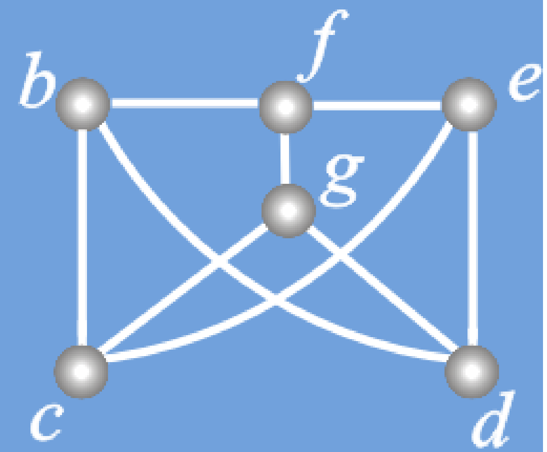


图 15

方法二.

图 16 所示图为图 14 的子图（删除边(a,f)），收缩图 16 中的(a,e) 和 (f,g) 所得图为 K_5，由库拉图斯基定理得证命题.

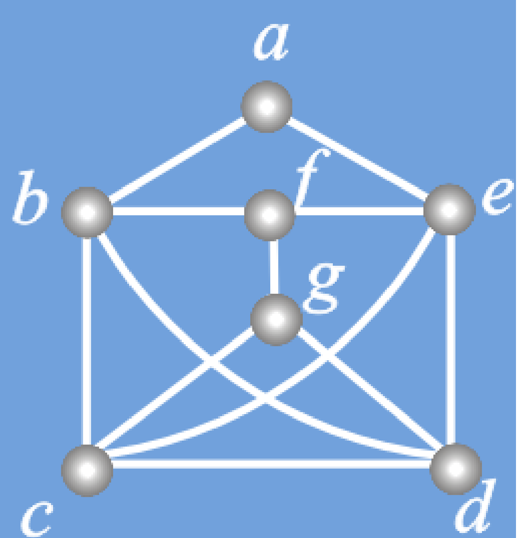


图 16

4. 设 G 为 n（$n\geq3$）阶极大平面图，证明 G 的对偶图 G^* 是 2-边连通的 3-正则图.

证 证明中用到 $n\geq3$ 的极大平面图的性质，以及平面图与对偶图的关系，对偶图的连通性等.

（1）证 G^* 是 2-边连通的.

由 G^* 的连通性可知，$\lambda(G^*)\geq1$，又因为 G 为极大平面图，故 G 为简单图，所以 G^* 中无桥（因为 G 中无环），所以，$\lambda(G^*)\geq2$. 故 G^* 为 2-边连通的.

（2）证 G^* 是 3-正则图.

易知 G^* 为简单图，且每个顶点的度数均为 3（由定理 17.7 决定），故 G^* 为 3-正则图.

本节作业

17，21，24