

例4: 证明  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \exists x (\neg A \rightarrow B)$

证明:

- 1  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$  PC中定理7逆否
- 2  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$  公理1逆否
- 3  $\forall x(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$  (1)用全称推广定理4
- 4  $\forall x(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg B)$  (2)用全称推广定理4
- 5  $\forall x(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \forall x \neg A)$  公理5
- 6  $\forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \forall x \neg A$  (3)与(5)用分离规则
- 7  $\forall x(\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow (\forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \forall x \neg B)$  公理5
- 8  $\forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \forall x \neg B$  (4)与(7)用分离规则
- 9  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B$  假设
- 10  $\forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \exists x B$  (6)与(9)用PC中三段论定理8
- 11  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B, \forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash \forall x \neg B$  演绎定理
- 12  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B, \forall x \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash \neg \forall x \neg B$  演绎定理
- 13  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \neg \forall x \neg(\neg A \rightarrow B)$  反证法
- 14  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \exists x (\neg A \rightarrow B)$  定义式