

第8.3章 集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 自然数与自然数集合
- 集合的基数
- 可数集

第一节 集合的等势与优势

一、集合的等势

1. 等势定义

定义 9.1 设 A, B 是集合, 如果存在着从 A 到 B 的双射函数, 就称 A 和 B 是等势的, 记作 $A \approx B$. 如果 A 不与 B 等势, 则记作 $A \not\approx B$.

2. 集合等势的实例.

例 (1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是 \mathbb{Z} 到 \mathbb{N} 的双射函数. 从而证明了 $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

(2) $N \times N \approx N$.

$N \times N$ 中所有的元素排成有序图形

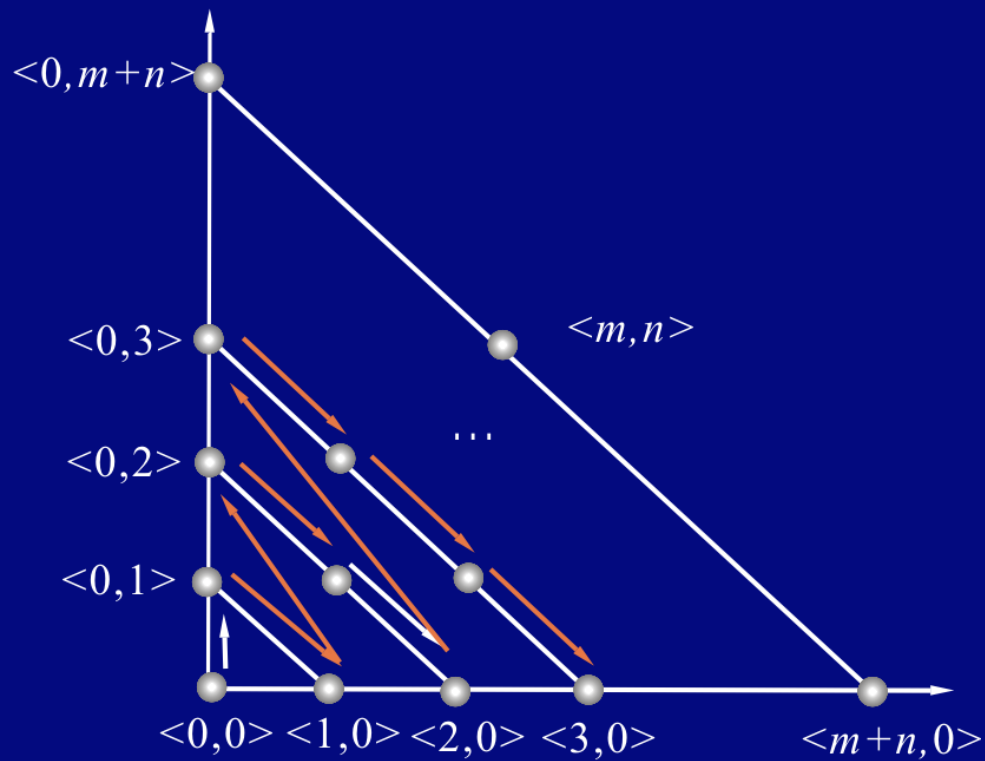


图 1

双射函数 $f : N \times N \rightarrow N$, $f(< m, n >) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$

(3) $N \approx Q$.

为建立 N 到 Q 的双射函数, 先把所有形式为 p/q (p, q 为整数且 $q > 0$) 的数排成一张表. 在计数中只考虑每个数的第一次出现. 表中数 p/q 上方的方括号内标明了这个有理数所对应的计数结果.

双射函数 $f: N \rightarrow Q$, 其中 $f(n)$ 是 $[n]$ 下方的有理数. 从而证明了 $N \approx Q$.

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, g_1(x,y) = 2xy$$

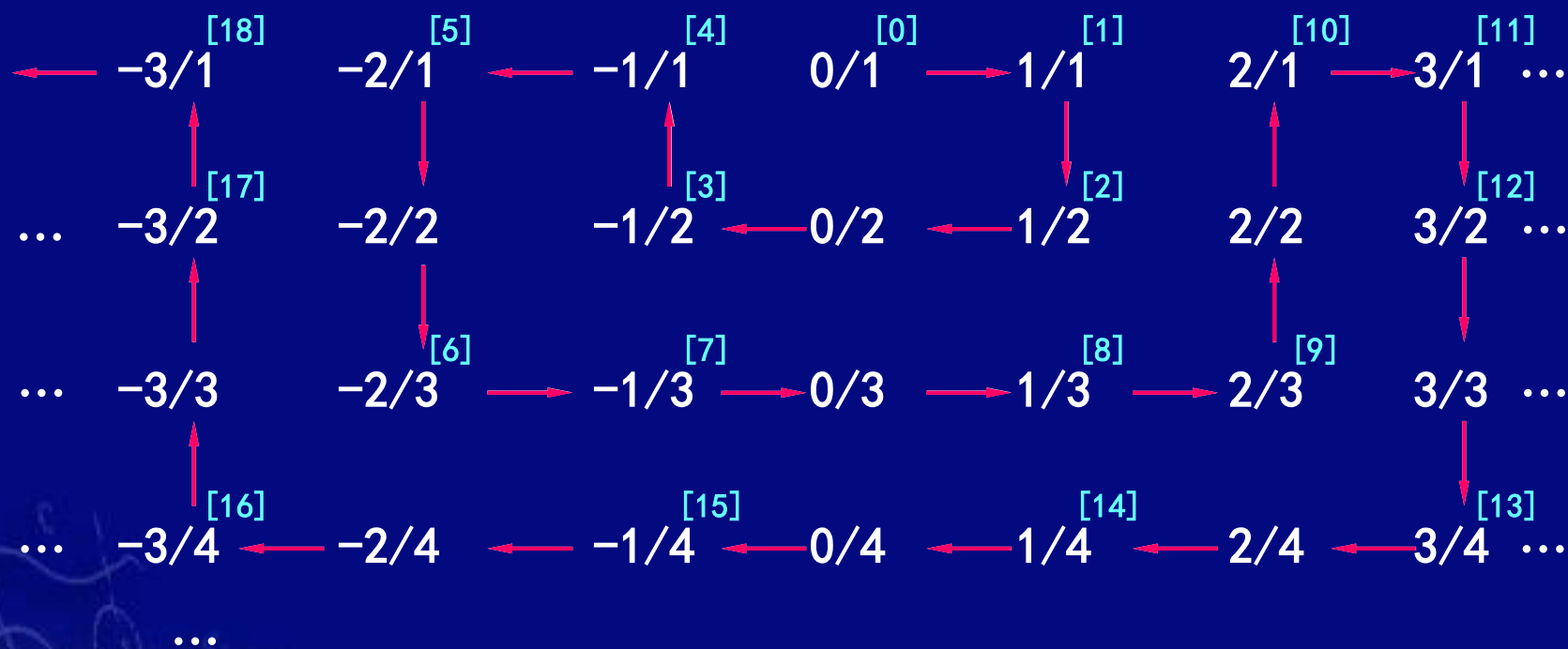


图 2



(4) $(0,1) \approx R$. 其中实数区间 $(0,1) = \{x \mid x \in R \wedge 0 < x < 1\}$. 令

双射函数 $f : (0,1) \rightarrow R, \quad f(x) = \tan \pi \frac{2x-1}{2}$

(5) $[0,1] \approx (0,1)$. 其中 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 分别为实数开区间和闭区间.

双射函数 $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n, n=1,2,\dots \\ x & \text{其它 } x \end{cases}$$

(6) 对任何 $a, b \in R, a < b, [0,1] \approx [a,b]$.

双射函数 $f : [0,1] \rightarrow [a,b], f(x) = (b-a)x + a$

类似地可以证明, 对任何 $a, b \in R, a < b$, 有 $(0,1) \approx (a,b)$.

例 设 A 为任意集合, 则 $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

证 如下构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f: P(A) \rightarrow \{0,1\}^A, f(A') = \chi_{A'}, \forall A' \in P(A).$$

其中 $\chi_{A'}$ 是集合 A' 的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g \in \{0,1\}^A$, 那么有 $g: A \rightarrow \{0,1\}$. 令

$$B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$$

则 $B \subseteq A$, 且 $\chi_B = g$, 即 $\exists B \in P(A), f(B) = g$. 从而证明了 f 是满射的. 由等势定义得

$$P(A) \approx \{0,1\}^A.$$


$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, g_1(x, y) = 2xy$$

3. 等势的性质

定理 9.1 设 A, B, C 是任意集合,

- (1) $A \approx A$.
- (2) 若 $A \approx B$, 则 $B \approx A$.
- (3) 若 $A \approx B, B \approx C$, 则 $A \approx C$.

证明思路: 利用等势的等义.

- (1) I_A 是从 A 到 A 的双射
- (2) 若 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是从 B 到 A 的双射.
- (3) 若 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是双射, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是从 A 到 C 的双射.



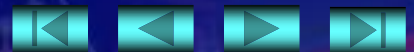
$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
 $g_1(x, y) = 2xy$

二、重要的等势或不等势的结果

1. 等势结果

$$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$$

任何实数区间都与实数集合 R 等势



2. 不等势的结果

定理 9.2 (康托定理)

- (1) $N \approx R$
- (2) 对任意集合 A 都有 $A \approx P(A)$.

证明思路:

- (1) 只需证明任何函数 $f: N \rightarrow [0,1]$ 都不是满射的.

任取函数 $f: N \rightarrow [0,1]$, 列出 f 的所有函数值.

然后构造一个 $[0,1]$ 区间的小数 b , 使得 b 与所有的函数值都不相等.

- (2) 任取函数 $f: A \rightarrow P(A)$, 构造 $B \in P(A)$, 使得 B 与 f 的任何函数值都不等.

证 (1) 首先规定 $[0,1]$ 中数的表示. 对任意的 $x \in [0,1]$, 令

$$x = 0.x_1x_2\dots, 0 \leq x_i \leq 9$$

注意在 x 的表示式中不允许在某位 (比如第 i 位为 0) 之后有无数个 9 的情况. 若遇到这种情况, 则将 x 的第 i 位变成 1, 而后面全是 0.

设 $f: N \rightarrow [0,1]$ 是从 N 到 $[0,1]$ 的任何一个函数. 如下列出 f 的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\dots$$

$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\dots$$

...

$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\dots$$

...

令 y 的表示式为 $0.b_1b_2\dots$, 并且满足 $b_i \neq a_i^{(i)}$, $i=1,2,\dots$, 那么 $y \in [0,1]$, 且 y 与上面列出的任何一个函数值都不相等. 这就推出 $y \notin \text{ran}f$, 即 f 不是满射的.



(2) 我们将证明任何函数 $g: A \rightarrow P(A)$ 都不是满射的.

设 $g: A \rightarrow P(A)$ 是从 A 到 $P(A)$ 的函数, 如下构造集合 B :

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \in P(A)$, 但对任意 $x \in A$ 都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$. 即 $B \notin \text{rang.}$

注意: 根据这个定理可以知道 $N \neq P(N)$, $N \neq \{0,1\}^N$.

三. 优势

1. 优势定义

定义 9.2

(1) 设 A, B 是集合, 如果存在从 A 到 B 的单射函数, 就称 B 优势于 A , 记作 $A \leqslant B$.

如果 B 不是优势于 A , 则记作 $A \not\leqslant B$.

(2) 设 A, B 是集合, 若 $A \leqslant B$ 且 $A \neq B$, 则称 B 真优势于 A , 记作 $A < B$.

如果 B 不是真优势于 A , 则记作 $A \nless B$.

实例 $N \leqslant N, N \leqslant R, A \leqslant P(A)$,

$R \not\leqslant N$

$N < R, A < P(A)$, 但 $N \nless N$.



2. 优势的性质.

定理 9.3 设 A, B, C 是任意的集合, 则

(1) $A \preceq A$

(2) 若 $A \preceq B$ 且 $B \preceq A$, 则 $A \approx B$

(3) 若 $A \preceq B$ 且 $B \preceq C$, 则 $A \preceq C$

证明: 略



例 证明 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$.

设 $x \in [0,1)$, $0.x_1x_2\dots$ 是 x 的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个 1.

对于 x , 如下定义 $f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^N$, 使得

$$f(x) = t_x, \text{ 且 } t_x: N \rightarrow \{0,1\}, \quad t_x(n) = x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

例如 $x = 0.10110100\dots$, 则对应于 x 的函数 t_x 是:

$$n \quad 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \dots$$

$$t_x(n) \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots$$

易见 $t_x \in \{0,1\}^N$, 且对于 $x, y \in [0,1)$, $x \neq y$, 必有 $t_x \neq t_y$, 即 $f(x) \neq f(y)$.

这就证明了 $f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^N$ 是单射的.

考虑 $t \in \{0,1\}^N$, 其中

$$t(0)=0, t(n)=1, n=1, 2, \dots$$

按照 f 的定义, 只有 $x=0.011\dots$ 才能满足 $f(x)=t$. 但根据规定, 这个数 x 应该记为 $0.100\dots$, 所以根本不存在 $x \in [0,1)$, 满足 $f(x)=t$.

定义函数 $g: \{0,1\}^N \rightarrow [0,1)$. g 的映射法则恰好与 f 相反. 即

$$\forall t \in \{0,1\}^N, \quad t: N \rightarrow \{0,1\}, \quad g(t)=0.x_1x_2\dots, \quad \text{其中 } x_{n+1}=t(n).$$

但不同的是, 将 $0.x_1x_2\dots$ 看作数 x 的十进制表示. 这样就避免了形如 $0.0111\dots$ 和 $0.1000\dots$ 在二进制表示中对应了同一个数的情况, 从而保证了 g 的单射性.

根据定理 9.3 有 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$. 再使用等势的传递性得 $\{0,1\}^N \approx \mathbb{R}$.



总结：

重要的等势或优势的结果.

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $R \approx [a, b] \approx (c, d) \approx \{0, 1\}^N \approx P(N)$
- $\{0, 1\}^A \approx P(A)$
- $N < \cdot R$
- $A < \cdot P(A)$

其中 $[a, b]$, (c, d) 代表任意的实数闭区间和开区间.

第二节 集合的基数

一. 自然数与自然数集合

1. 定义

定义 9.3 设 a 为集合, 称 $a \cup \{a\}$ 为 a 的后继, 记作 a^+ ,

即 $a^+ = a \cup \{a\}$.

如下定义自然数:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

...

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

...



定义 9.4 设 A 为集合,如果满足下面的两个条件:

$$(1) \emptyset \in A$$

$$(2) \forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)$$

则称 A 是归纳集.

例如下面的集合

$$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots\}$$

$$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots, a, a^+, a^{++}, a^{+++}, \dots\}$$

都是归纳集.

定义 9.5

(1) 一个自然数 n 是属于每一个归纳集的集合.

(2) 自然数集 N 是所有归纳集的交集.

两个定义得到同样的结果.

鉴于自然数都是集合, 有关集合的运算对自然数都是适用的, 例如:

$2 \cup 5$, $3 \cap 4$ 等



2. 自然数的性质

(1) 对任何自然数 n 有 $n \approx n$.

(2) 对任何自然数 n, m , 若 $m \in n$, 则 $m \subseteq n$.

(3) 对任何自然数 n 和 m , 以下三个式子:

$$m \in n, m \approx n, n \in m$$

必成立其一且仅成立其一. 这个性质称为自然数的三歧性.

3. 自然数的相等与大小顺序

对任何自然数 m 和 n ,

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n$$



$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, g_1(x,y) = 2xy$$

二、有穷集和无穷集.

定义 9.6

一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势；

如果一个集合不是有穷的，就称作无穷集.

实例：

$\{a,b,c\}$ 是有穷集，因为 $3=\{0,1,2\}$ ，且

$$\{a,b,c\} \approx \{0,1,2\} = 3$$

N 和 R 都是无穷集，因为没有自然数与 N 和 R 等势

利用自然数的性质可以证明：任何有穷集只与惟一的自然数等势.



三、基数

1. 集合基数的定义

定义 9.7

- (1) 对于有穷集合 A , 称与 A 等势的那个惟一的自然数为 A 的基数, 记作 $\text{card}A$, 即

$$\text{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n \quad (\text{对于有穷集 } A, \text{card}A \text{ 也可以记作 } |A|)$$

- (2) 自然数集合 N 的基数记作 \aleph_0 , 即

$$\text{card}N = \aleph_0$$

- (3) 实数集 R 的基数记作 \aleph (读作阿列夫), 即

$$\text{card}R = \aleph$$



2. 基数的相等和大小

定义 9.8 设 A, B 为集合, 则

$$(1) \text{ card}A = \text{card}B \Leftrightarrow A \approx B$$

$$(2) \text{ card}A \leq \text{card}B \Leftrightarrow A \preceq B$$

$$(3) \text{ card}A < \text{card}B \Leftrightarrow \text{card}A \leq \text{card}B \wedge \text{card}A \neq \text{card}B$$

根据上一节关于势的讨论不难得到:

$$\text{card}\mathbb{Z} = \text{card}\mathbb{Q} = \text{card}\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$$

$$\text{card}P(\mathbb{N}) = \text{card}2^{\mathbb{N}} = \text{card}[a, b] = \text{card}(c, d) = \aleph$$

$$\aleph_0 < \aleph$$

其中 $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.



由于对任何集合 A 都满足 $A \prec P(A)$, 所以有

$$\text{card}A < \text{card}P(A)$$

这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$$

其中:

$0, 1, 2, \dots, n, \dots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

\aleph_0, \aleph, \dots 是无穷基数,

\aleph_0 是最小的无穷基数, \aleph 后面还有更大的基数, 如 $\text{card}P(R)$ 等.



四. 可数集

1. 可数集的定义

定义 9.9 设 A 为集合, 若 $\text{card}A \leq \aleph_0$, 则称 A 为可数集或可列集.

实例: $\{a, b, c\}$, 5 , 整数集 \mathbb{Z} , 有理数集 \mathbb{Q} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 等都是可数集,

实数集 \mathbb{R} 不是可数集, 与 \mathbb{R} 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序. 回顾前边的可数集, 特别是无穷可数集, 都是用这种方法来证明的.

2. 关于可数集有下面的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集.

例 求下列集合的基数.

(1) $T = \{x \mid x \text{ 是单词“BASEBALL”中的字母}\}$

(2) $B = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 9 \wedge 2x = 8\}$

(3) $C = P(A), A = \{1, 3, 7, 11\}$

解 (1) 由 $T = \{B, A, S, E, L\}$ 知 $\text{card}T = 5$.

(2) 由 $B = \emptyset$, 可知 $\text{card}B = 0$.

(3) 由 $|A| = 4$ 可知 $\text{card}C = \text{card}P(A) = |P(A)| = 2^4 = 16$.

例 设 A, B 为集合, 且

$\text{card}A = \aleph_0$, $\text{card}B = n$, n 是自然数, $n \neq 0$.

求 $\text{card}A \times B$.

解 方法一

由 $\text{card}A = \aleph_0$, $\text{card}B = n$, 可知 A, B 都是可数集. 令

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$$

对任意的 $\langle a_i, b_j \rangle, \langle a_k, b_l \rangle \in A \times B$ 有

$$\langle a_i, b_j \rangle = \langle a_k, b_l \rangle \Leftrightarrow i = k \wedge j = l$$

定义函数

$$f: A \times B \rightarrow N$$

$$f(\langle a_i, b_j \rangle) = in + j, \quad i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, n-1$$

易见 f 是 $A \times B$ 到 N 的双射函数, 所以

$$\text{card}A \times B = \text{card}N = \aleph_0$$



方法二

直接使用可数集的性质求解.

因为 $\text{card}A=\aleph_0$, $\text{card}B=n$, 所以 A, B 都是可数集.

根据性质 (3) 可知 $A \times B$ 也是可数集, 所以

$$\text{card}A \times B \leq \aleph_0$$

显然当 $B \neq \emptyset$ 时, $\text{card}A \leq \text{card}A \times B$, 这就推出

$$\aleph_0 \leq \text{card}A \times B$$

综合上述得到 $\text{card}A \times B = \aleph_0$.

作业

- 29
- 34
- 37
- 39

第8.3章 习题课

一、本章的主要内容及要求

1. 主要内容

- 集合等势的定义
- 等势的性质
- 集合优势的定義
- 优势的性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 自然数及其自然数集合的定义
- 可数集与不可数集
- 集合的基数


$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, g_1(x, y) = 2xy$$

2. 要求

- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

二、练习

1. 设 A, B 为二集合, 证明: 如果 $A \approx B$, 则 $P(A) \approx P(B)$

 证 因为 $A \approx B$, 存在双射函数 $f: A \rightarrow B$, 因此存在反函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 如下构造函数

$$g: P(A) \rightarrow P(B),$$

$$g(T) = f(T), \quad \forall T \subseteq A \quad (\text{这里的 } f(T) \text{ 是 } T \text{ 在函数 } f \text{ 的像})$$

证明 g 的满射性. 对于任何 $S \subseteq B$, 存在 $f^{-1}(S) \subseteq A$, 且

$$g(f^{-1}(S)) = f \circ f^{-1}(S) = S$$

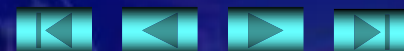
证明 g 的单射性.

$$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1)) = f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1) = I_A(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$$

综合上述得到 $P(A) \approx P(B)$.



说明：证明集合 A 与 B 等势的方法

方法一：直接构造从 A 到 B 的双射函数

给出一个从 A 到 B 的函数 $f: A \rightarrow B$

证明 f 的满射性

证明 f 的单射性

方法二：利用定理 9.3，构造两个单射函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow A$.

给出函数 f 和 g

证明 f 和 g 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算 A 与 B 的基数，得到 $\text{card}A = \text{card}B$.

注意：

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合 A 与自然数集合 N 等势的方法就是找到一个“数遍” A 中元素的顺序.



2. 已知 $A=\{n^7 | n \in N\}$, $B=\{n^{109} | n \in N\}$, 求下列各题:

(1) $\text{card}A$;

(2) $\text{card}B$;

(3) $\text{card}(A \cup B)$

(4) $\text{card}(A \cap B)$



解: (1) 构造双射函数 $f: N \rightarrow A, f(n)=n^7$, 因此 $\text{card}A=\aleph_0$,

(2) 构造双射函数 $g: N \rightarrow A, g(n)=n^{109}$, 因此 $\text{card}B=\aleph_0$,

(3) 可数集的并仍旧是可数集, 因此 $\text{card}(A \cup B) \leq \aleph_0$,

但是 $\text{card}(A \cup B) \geq \text{card}A = \aleph_0$,

从而得到 $\text{card}(A \cup B) = \aleph_0$.

(4) 因为 7 与 109 互素, $\text{card}(A \cap B) = \{n^{7 \times 109} | n \in N\}$,

与 (1) 类似得到 $\text{card}(A \cap B) = \aleph_0$



3. 已知 $\text{card}A = \aleph_0$, 且 $\text{card}B < \text{card}A$, 求 $\text{card}(A-B)$

 解: 由 $A-B \subseteq A$ 得到 $\text{card}(A-B) \leq \text{card}A$, 即

$$\text{card}(A-B) \leq \aleph_0$$

由 $\text{card}B < \text{card}A$ 可知 B 为有穷集,

即存在自然数 n 使得 $\text{card}B = n$.

假设 $\text{card}(A-B) < \aleph_0$, 那么存在自然数 m ,

使得 $\text{card}(A-B) = m$.

从而得到

$$\text{card}A \leq \text{card}(A \cup B) = \text{card}((A-B) \cup B) \leq n + m,$$

与 $\text{card}A = \aleph_0$ 矛盾.

因此, $\text{card}(A-B) = \aleph_0$.