定理(PC的合理性定理)：PC是合理的，即对任意的公式集合 Γ 和公式 A，如果 $\Gamma \vdash A$ 那么 $\Gamma \Rightarrow A$. 特别地，如果 A 是PC的定理 $(\vdash A)$，那么 A 是永真式 $(\Rightarrow A)$.

证明：对 $\Gamma \vdash A$ 对应的演绎序列的长度m用归纳法。设 $\Gamma \vdash A$ 演绎序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$.

(1) 当m=1时。序列中只有 A，此时 A 为公理或者 A 为 Γ 中的一元。
如果 A 为公理，那么 A 为永真式。从而 $\Gamma \Rightarrow A$.
如果 A 为 Γ 的成员，此时也有 $\Gamma \Rightarrow A$.

(2) 假设当m<n时结论成立，往证m=n结论也成立。
此时序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$. 观察 A. 此时 A 为公理或者 A 为 Γ 中的一元或者 A 为 A_j 或者 A 为 $A_j, A_k (j, k < n)$ 用分离规则导出。
当 A 为公理或者 A 为 Γ 中的成员时，可仿照(1)的情形证明结论成立。
如果A 为 $A_j (j < n)$，由于 $\Gamma \vdash A_j$ 且 $j < n$，由归纳假设知 $\Gamma \Rightarrow A_j$ 即 $\Gamma \Rightarrow A$.
如果A 为 $A_j, A_k (j, k < n)$ 用分离规则导出。不妨设 $A_k = A_j \rightarrow A$，由于$\Gamma \vdash A_j$ 且 $\Gamma \vdash A_j \rightarrow A$，从而 $\Gamma \Rightarrow A_j, \Gamma \Rightarrow A_j \rightarrow A$. 对任意的指派 α 此指派弄真Γ 中的所有公式，从而弄真 A_j和 $A_j \rightarrow A$，从而必把 A 弄真。