定理(演绎定理)：对PC中任意公式集合 Γ 公式 A,B，$\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 当且仅当$\Gamma\vdash A\to B$

证明:$(A\to(A_j\to B))\to((A\to A_j)\to(A\to B))$,$(A\to A_j)\to(A\to B)$,

$A\to B$ 得到一个以 Γ为前提对$A\to B$ 的演绎过程。

从而 $\Gamma\vdash A\to B$.

必要性) 已知 $\Gamma;A\vdash B$ 往证 $\Gamma\vdash A\to B$

对 $\Gamma;A\vdash B$ 的演绎序列的长度l用归纳法。

当l=1时。序列中只有 B 。或者 B 为公理或者为假设中的元素 $B\in\Gamma;A$

从而(1) B为公理。(2) $B\in\Gamma$ (3)$B=A$

对(1)有$B,B\to(A\to B),A\to B$ 构成了一个证明，从而 $\Gamma\vdash A\to B$

对(2)有 $B,B\to(A\to B),A\to B$ 构成了一个以Γ为前提对 $A\to B$ 的演绎过程，从而$\Gamma\vdash A\to B$

对(3)由 $A=B$ 知 $\vdash A\to B$ 从而 $\Gamma\vdash A\to B$.

假设当演绎序列的长度比l小时结论成立。长度为l时，演绎序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_l(=B)$ 观察B。如果B为公理或者为假设中的元素，可仿照l=1时的情形证明结论成立。如果 $B=A_j$ 则由于$\Gamma;A\vdash A_j$ 由于 $j<l$ 知 $\Gamma\vdash A\to A_j$ 即$\Gamma\vdash A\to B$ 。如果B为 $A_j,A_k(j,k<l)$ 用分离规则导出。不妨设 $A_k=A_j\to B$ 由于 $\Gamma;A\vdash A_j,\Gamma;A\vdash A_j\to B$ 有$\Gamma\vdash A\to A_j$

$\Gamma\vdash A\to(A_j\to B)$ 此两序列加上公式