命题1：如果 Γ 一致且 $\Gamma \nvdash A$，那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也一致。
证明： 用反证法。假设 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不一致，则必有公式 B，使得 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ 并且 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$, 由演绎定理知 $\Gamma \vdash \neg A \to B$ 并且 $\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$, 此两演绎式对应的演绎序列加上公式 $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A), (\neg A \to \neg B) \to A, A$ 得到一个以 Γ 为前提对 A 的演绎过程。从而 $\Gamma \vdash A$. 与 $\Gamma \nvdash A$ 相矛盾。从而 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也一致。

命题2：如果 Γ 一致且 $\Gamma \vdash A$，那么 $\Gamma \cup \{A\}$ 也一致。
证明： 用反证法。假设 $\Gamma \cup \{A\}$ 不一致，则必有公式 B，使得 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 并且 $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$, 由演绎定理知 $\Gamma \vdash A \to B$ 并且 $\Gamma \vdash A \to \neg B$, 此两演绎式对应的演绎序列加上公式 $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$, $(A \to \neg B) \to \neg A, \neg A$ 得到一个以 Γ 为前提对 $\neg A$ 的演绎过程。从而 $\Gamma \vdash \neg A$. 由于 $\Gamma \vdash A$ 知 Γ 不一致。与 Γ 的一致性相矛盾。从而 $\Gamma \cup \{A\}$ 也一致。