# 参考答案

一、**填空题**

1．$-15$　2、$(-4)^{n-1}\boldsymbol{A}$.　3．$x-3y+z+2=0$　4．$n$　5．$(-1)^{n^2}a^{-n}$ 或 $(-1)^n a^{-n}$

二、**选择题**

1．A　2．D　3．B　4．D　5、A.

三、**解**：$L:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$

设过 $M_0$ 与 $L$ 垂直相交的直线为 $L_0$.

$L_0$ 与 $L$ 的交点为 $P_0(-1+3t_0,\ 1+2t_0,\ -t_0)$.

$L_0$ 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0M_0}=(3t_0-3,\ 2t_0,\ -t_0-3)$.

$\because\ L_0\perp L$，$\therefore\ 3(3t_0-3)+2\times(2t_0)+(-1)\times(-t_0-3)=0$

解得 $t_0=\dfrac{3}{7}$，$\therefore\ L_0$ 的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

四、**解**：$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\\ &=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ &=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ &=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ &=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

五、**解**：因为 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，两边乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}|\neq 0$$

$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ 可逆

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-3&-2&0&1&0&0\\1&-2&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&0\\2&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

六、证：（1） $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0},\ 1\leq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha})=1$.（C 卷有）

$\therefore\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=1$

(2)解 1: 因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$ ，$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

$$|k\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{A}^n|=|k\boldsymbol{E}_3+2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=\left|k\boldsymbol{E}_3+2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\ \ 0\ \ -1)\right|$$

$$=k^2\left|k\boldsymbol{E}_1+2^{n-1}(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|$$

$$=k^2\,|k+2^{n-1}+2^{n-1}|$$

$$=k^2(k+2^n)$$

解 2：$|k\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{A}^n|=\left|\begin{pmatrix}k&&\\&k&\\&&k\end{pmatrix}+2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}k+2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&k&0\\-2^{n-1}&0&k+2^{n-1}\end{vmatrix}$

$$=k^2(k+2^n)$$

七、证：因 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆，

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\neq 0$

即 $\boldsymbol{B}$ 可逆.