第十八章 图的边着色

主要内容

一、图的边着色

二、**Vizing**定理

三、边着色应用

(一)、相关概念

现实生活中很多问题，可以模型为所谓的边着色问题来处理。例如排课表问题。

排课表问题：设有m位教师，n个班级，其中教师x_i要给班级y_j上p_{ij}节课。求如何在最少节次排完所有课。

建模：令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，x_i与y_j间连p_{ij}条边，得二部图G=(X, Y).

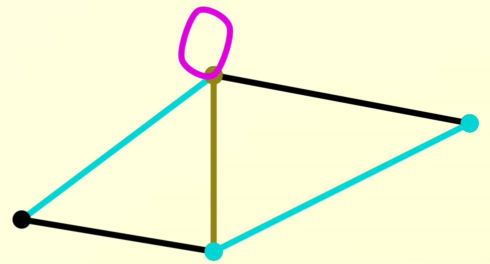
于是，问题转化为如何在G中将边集E划分为互不相交的p个匹配，且使得p最小。

如果每个匹配中的边用同一种颜色染色，不同匹配中的边用不同颜色染色，则问题转化为在G中给每条边染色，相邻边染不同色，至少需要的颜色数。

这就需要我们研究所谓的边着色问题。

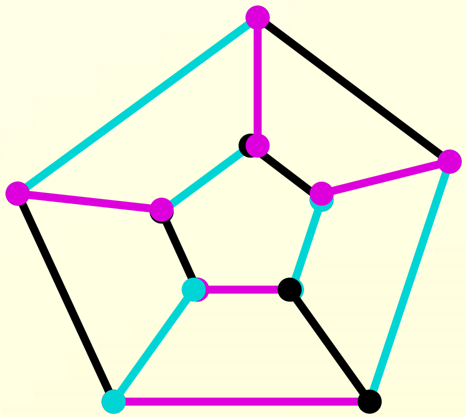
定义1 设G是图，对G的边进行染色，若相邻边染不同颜色，则称对G进行正常边着色；

如果能用k中颜色对图G进行正常边着色，称G是k边可着色的。



正常边着色

定义2 设G是图，对G进行正常边着色需要的最少颜色数，称为G的边色数，记为：$\chi'(G)$



$\chi'(G)=3$

注：对图的正常边着色，实际上是对G的边集合的一种划分，使得每个划分块是G的一个边独立集(无环时是匹配);图的边色数对应的是图的最小独立集划分数。

因此，图的边着色，本质上是对应实际问题中的“划分”问题或“分类”问题。

在对G正常边着色时，着相同颜色的边集称为该正常着色的一个色组。

(二)、几类特特殊图的边色数

1、二部图的边色数

定理1 $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$

证明：设 $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$

又设Δ=n。设颜色集合设为{0，1，2，…，n-1}，π是$K_{m,n}$的一种n着色方案，满足：

$$\forall x_i y_j \in E(K_{m,n}), \pi(x_i y_j) = (i + j)(\bmod n)$$

我们证明：上面的着色是正常边着色。

对K $_{m,n}$中任意的两条邻接边x_iy_j和x_iy_k。若

$$\pi(x_iy_j)=\pi(x_iy_k)$$

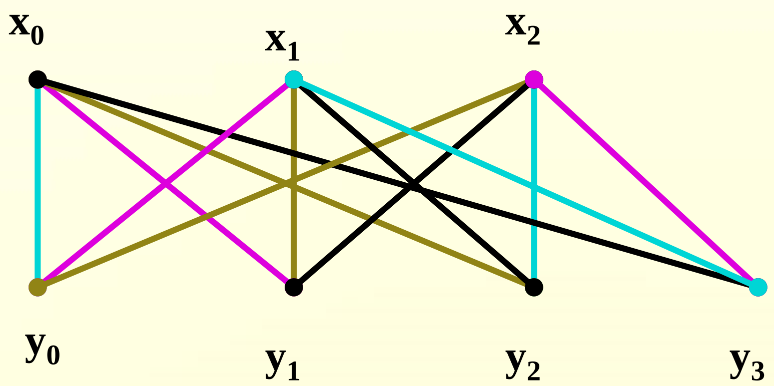
则：i+ j (mod n)=i +k (mod n),得到j=k，矛盾！

所以，上面着色是正常作色。所以：

$$\chi'(K_{m,n})\le n$$

又显然 $\chi'(K_{m,n})\ge\Delta=n$ ，所以，$\chi'(K_{m,n})=\Delta$

例1 用最少的颜色数对$K_{3,4}$正常边着色。



定义3 设π是G的一种正常边着色，若点u关联的边的着色没有用到色i，则称点u缺i色。

定理2 (哥尼，1916)若G是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta$

证明：我们对G的边数m作数学归纳。

当m=1时，Δ=1，有 $\chi'(G) = \Delta = 1$

设对于小于m条边的二部图来说命题成立。

设G是具有m条边的二部图。

取uv∈ E(G), 考虑G_1=G-uv,由归纳假设有：

$$\chi'(G_1) = \Delta(G_1) \le \Delta(G)$$

这说明，G_1存在一种Δ(G)边着色方案π。对于该着色方案，因为uv未着色，所以点u与v均至少缺少一种色。

情形1 如果u与v均缺同一种色i, 则在G_1+uv中给uv着色i, 而G_1其它边，按π方案着色。这样得到G的Δ着色方案，所以：$\chi'(G) = \Delta$

情形2 如果u缺色i, 而v缺色j，但不缺色i。

设H (i, j) 表示G_1中由i色边与j色边导出的子图。显然，该图每个分支是i色边和j色边交替出现的路或圈。

对于H(i, j)中含点v的分支来说，因v缺色j, 但不缺色i, 所以，在H(i, j)中,点v的度数为1。这说明，H(i ,j)中含v的分支是一条路P。

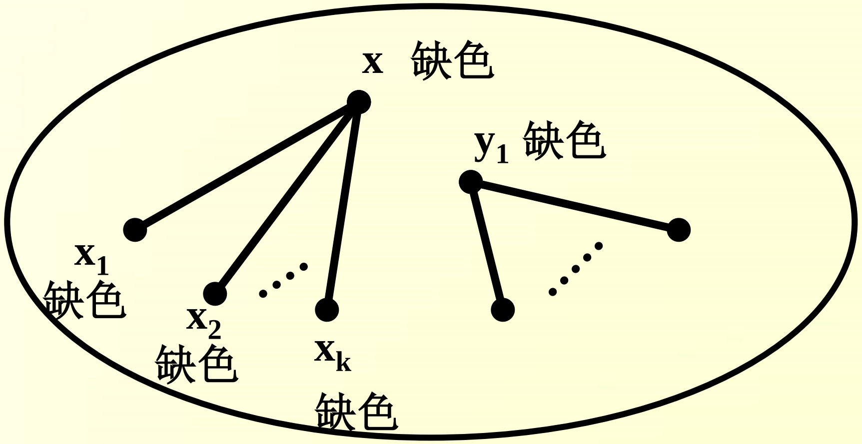
进一步地，我们可以说明，上面的路P不含点u。

因为，如果P含有点u, 那么P必然是一条长度为偶数的路，这样，P+uv是G中的奇圈，这与G是二部图矛盾！

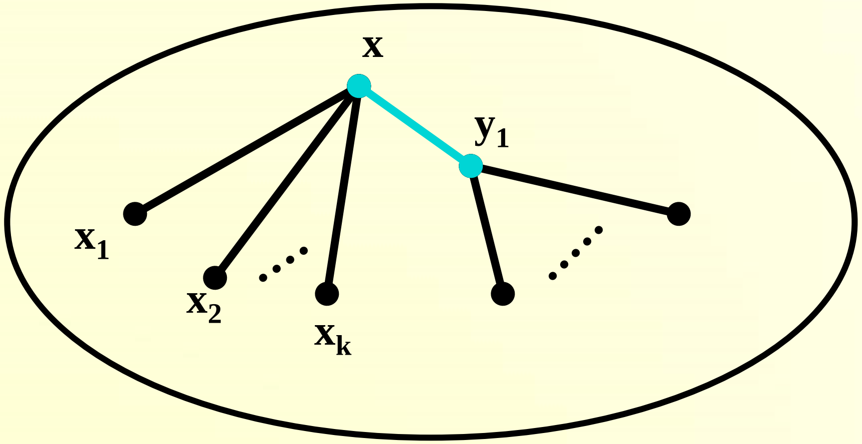
既然P不含点u, 所以我们可以交换P中着色，而不破坏G_1的正常边着色。但交换着色后，u与v均缺色i, 于是由情形1,可以得到G的Δ正常边着色，即证明：$\chi'(G) = \Delta$

2、简单图的边色数

引理：设G是简单图，x与y_1是G中不相邻的两个顶点，π是G的一个正常k边着色。若对该着色π，x, y_1以及与x相邻点均至少缺少一种颜色，则G+xy_1是k边可着色的。



正常k边着色图G



正常k边着色图G_1

定理3 (维津定理，1964) 若G是简单图，则：

$$\chi'(G) = \Delta \text{ 或 } \chi'(G) = \Delta + 1$$

证明：只需要证明 $\chi'(G) \le \Delta + 1$ **即可。**

采用对G的边数m作数学归纳证明。

当m=1时， $\Delta=1$， $\chi'(G) = 1 < \Delta + 1$

设当边数少于m时，结论成立。下面考虑边数为m≥2的简单图G。

设xy ∈E(G)，令G_1=G-xy。由归纳假设有：

$$\chi'(G_1) \le \Delta(G_1) + 1 \le \Delta(G) + 1$$

于是，存在G_1的Δ(G)+1正常边作色π。显然G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色。根据引理知G_1+xy是Δ(G)+1可着色的。即证明：$\chi'(G) \le \Delta(G)+1$

注：(1) 根据维津定理，简单图可以按边色数分成两类图，一是色数等于 Δ(G)的简单图，二是色数等于 Δ(G)+1 的简单图；

(2) 偶圈边色数为 2，长度大于等于 3 的奇圈边色数为 3；

(3) $\chi'(W_n) = n-1, n\geq 4$；

(4) n 为奇数 ($n\neq 1$) 时，$\chi'(K_n)=n$；n 为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$.

(2) 维津(Vizing)：1937年出生于乌克兰的基辅。1954年开始在托木斯克大学学习数学，1959年大学毕业保送到莫斯科斯特克罗夫研究所攻读博士学位，研究函数逼近论。但这不是他的兴趣所在，因此没有获得学位。1966年在季科夫的指导下获得博士学位。和大多数数学家一样，维津在音乐方面具有一定才能。

维津在攻读博士学位期间，发现并证明了上面的维津定理。他当时把论文投向一家非常著名的杂志，但由于审稿人认为问题本身没有意义而遭到拒绝。后来在另外一家地方杂志发表时，定理早已出名。

维津认为：一名数学家应该不断研究与发现新结果，然后让时间来检验其重要性。

3、三类特殊简单图的边色数

定理4 设**G**是简单图且Δ(G)>0。若G中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则：

$$\chi'(G)=\Delta(G)$$

证明: (1) 若简单图G恰有一个最大度点u，取u的一个邻点v,作G_1=G-uv。

那么，$\Delta(G_1)=\Delta(G)-1$。由维津定理：

$$\chi'(G_1)\le\Delta(G)-1+1=\Delta(G)$$

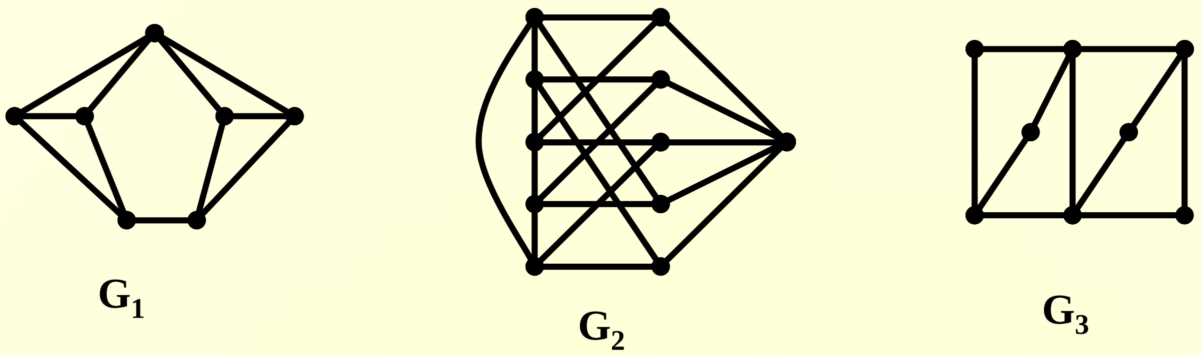
于是G_1是可Δ(G) 正常边着色的，因为G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理：G_1+uv=G是可Δ(G) 正常边着色的，即：$\chi'(G)=\Delta(G)$

(2) 若简单图G恰有2个邻接的最大度点u与v。设G_1=G-uv。那么，$\Delta(G_1)=\Delta(G)-1$。由维津定理：

$$\chi'(G_1)\le\Delta(G)-1+1=\Delta(G)$$

于是G_1是可Δ(G) 正常边着色的，因为G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理：$G_1+uv=G$是可Δ(G) 正常边着色的，即：$\chi'(G)=\Delta(G)$

例2 确定下图的边色数。



解：由定理4知道：

$\chi'(G_1)=4$ $\chi'(G_2)=5$ $\chi'(G_3)=4$

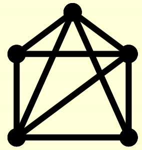
定理5 设G是简单图。若点数n=2k+1且边数m>kΔ，则：

$$\chi'(G)=\Delta(G)+1$$

证明：若不然，由维津定理，$\chi'(G)=\Delta(G)$

设π是G的Δ(G)正常边着色方案，对于G的每个色组来说，包含的边数至多(n-1)/2=k。这样：$m(G)\le \Delta k$，与条件矛盾。

例3 确定下图的边色数。



G

解：由定理5：$\chi'(G)=\Delta(G)+1=5$

定理6 设G是奇数阶Δ正则简单图, 若Δ>0, 则:

$$\chi'(G) = \Delta(G) + 1$$

证明：设n=2k+1。因G是Δ正则简单图，且Δ>0，所以：

$$m(G) = \frac{n\Delta}{2} = \frac{(2k+1)\Delta}{2} > k\Delta$$

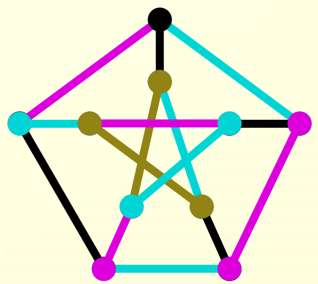
由定理5: $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$

例4 设n=2k+1,k>0。求 $\chi'(C_n)$ $\chi'(K_n)$

解：由定理6知: $\chi'(C_n) = 2 + 1 = 3$

$$\chi'(K_n) = (n-1) + 1 = n$$

例5 求出彼得森图的边色数。



G

图G 的因子：至少包含G的一条边的生成子图。

图G 的因子分解：把G分解成若干个边不重的因子之并。

图G的k因子：指图G的k度正则因子。

解：一方面，彼得森图中去掉任意一个1因子后，剩下两个5点圈，所以，不能进行1因子分解，所以：

$$\chi'(G) \geq 4$$

另一方面：通过验证，G可以4正常作色。所以：

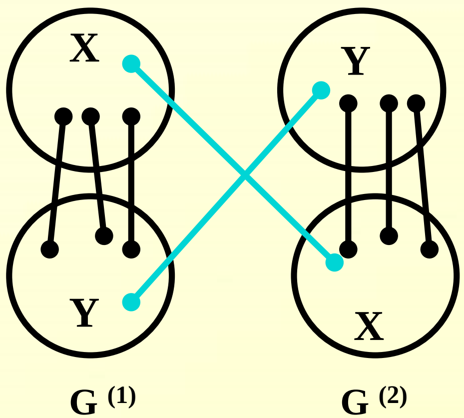
$$\chi'(G) = 4$$

例6 (1) 设G=(X, Y)是一个最大度为Δ的二部图，求证，G是某个Δ正则二部图 G*的子图。

(2) 用(1) 证明：二部图的边色数等于其最大度。

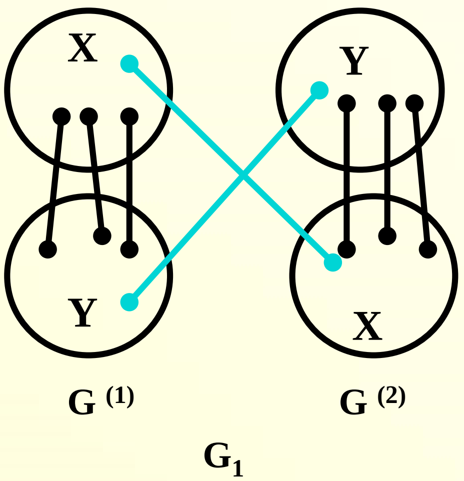
证明 (1) 按如下方式构造G^*。

如果G不是Δ正则二部图，先将G按下图所示方式构造成为G_1



G_1

$G^{(1)}$与$G^{(2)}$分别是G的拷贝。



红色 边表示x_i与x_i(y_i与y_i)之间的一条连线，要求是$d(x_i)<\Delta$ ($d(y_i)<\Delta$)，这样得到的新二部图就是G_1。

如果G_1是Δ正则二部图，则$G^*=G_1$

否则，在G_1的基础上，重复上面的过程，可得到G_2，这样不断下去，最终得到包含G的Δ正则二部图G^*。

(2) 由(1) 对于任意最大度为Δ的二部图G，均存在G的Δ正则母图G^*。又由于正则二部图存在1因子分解，所以，G^*可以划分为Δ个1因子，从而其边色数为Δ。这样G的边色数也为Δ。

例7 证明：每个哈密尔顿3正则图都有泰特(Tait)着色。3正则图的正常3边着色称为泰特着色。

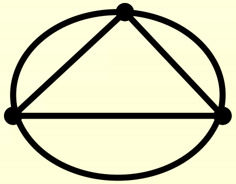
证明：设G是3正则H图，C是G的一个H圈，则C是偶圈，所以C是2可正常边着色的。因G-C是G的一个1因子，所以，可1正常边着色。因此，G是可以3边正常着色的，即G有泰特着色。

注：数学家泰特提出泰特着色主要是基于他想由此证明“四色定理”。因为如果证明了每个3连通3正则平面图的边色数是3，那么“四色定理”就得到证明。泰特认为：每个3连通3正则平面图是H图，所以由上面例7，泰特深信他已经证明了“四色定理”。可是，非常遗憾，数学家托特通过构图方式否定了每个3连通3正则平面图是H图的断言。

定理7 （Vizing定理）设无环图*G*中边的最大重数为 μ，则

$$\chi'(G) \le \Delta + \mu$$

例8 下图是一个边色数达到Δ+μ 的图，其中Δ=4, μ=2。



(三)、边着色的应用

边着色对应的实际问题就是图的匹配分解问题。边色数对应的是最小匹配分解问题。所以，生活中的许多问题都可模型为边着色问题来解决。

例1 (排课表问题) 在一个学校中，有7个教师12个班级。在每周5天教学日条件下，教课的要求由如下矩阵给出：

$$P=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \end{array}$$

其中，p_{ij}表示x_i必须教y_j班的节数。求：

(1) 一天分成几节课，才能满足所提出的要求？

(2) 若安排出每天8节课的时间表，需要多少间教室？

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{array} \\
P = & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\end{array}
$$

解：问题可模型为一个二部图。

一节课对应边正常着色的一个色组。由于G是二部图，所以边色数为G的最大度35。这样，最少总课时为35节课。平均每天要安排7节课。

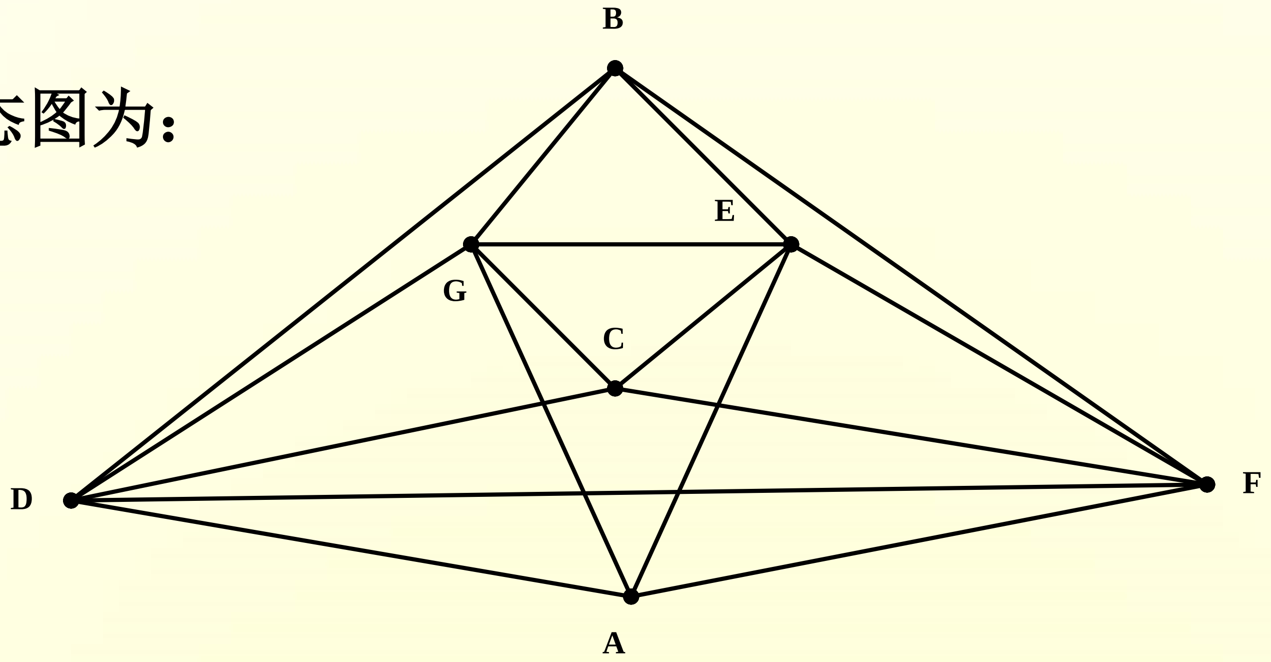
如果每天安排8节课，因为G的总边数为240，所以需要的教室数为240/40=6。

例2 (比赛安排问题) Alvin (A)曾邀请3对夫妇到他的避暑别墅住一个星期。他们是：Bob和Carrie , David和Edith, Frank和Gena。由于这6人都喜欢网球运动，所以他们决定进行网球比赛。6位客人的每一位都要和其配偶之外的每位客人比赛。另外，Alvin将分别和David， Edith， Frank， Gena进行一场比赛。若没有人在同一天进行2场比赛，则要在最少天数完成比赛，如何安排?

解：用点表示参赛人，两点连线当且仅当两人有比赛。这样得到比赛状态图。

问题对应于求状态图的一种最优边着色(用最少色数进行正常边着色)。

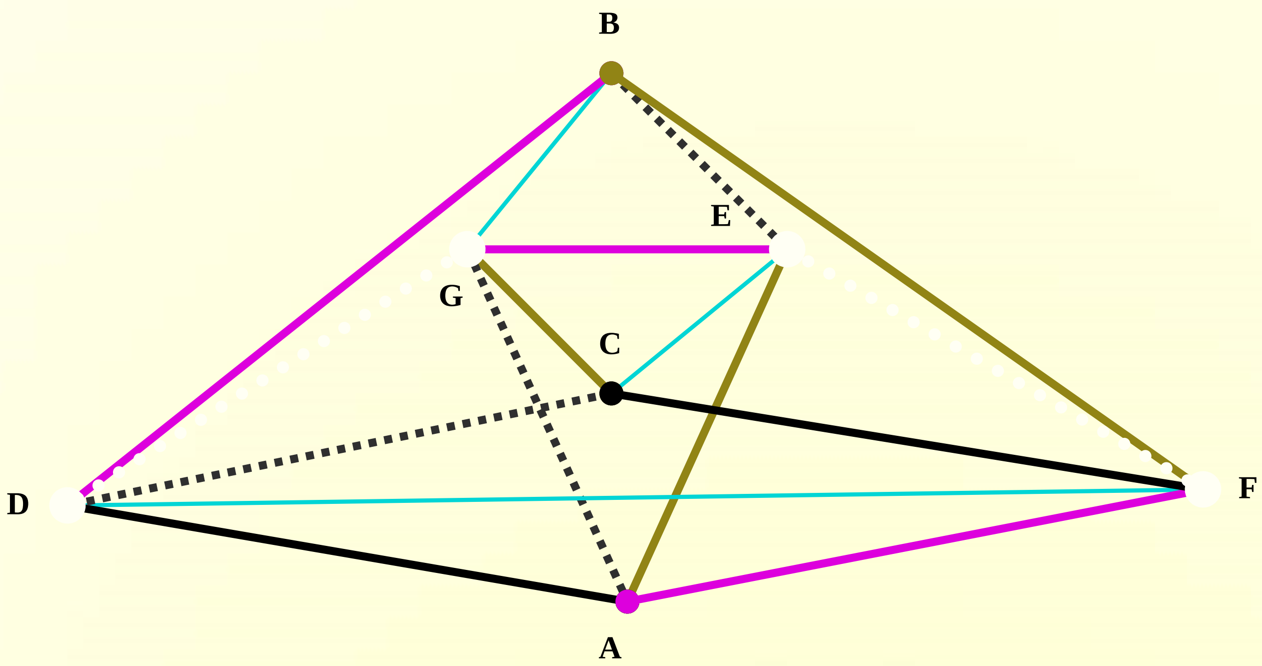
状态图为：



图G

由于n=2×3+1, 所以k=3。而Δ=5 ， m=16>3×5=kΔ,所以由定理5知： $\chi'(G)=6$

最优着色为：



图G

第十八章 习题课

一、本章的主要内容及要求

1. 主要内容

- (点) 支配集、点覆盖集、点独立集
- 边覆盖集、匹配 (边独立集)
- 二部图中的完备匹配
- 图的点着色、边着色、地图的着色

2．要求

- 深刻理解与支配集、点覆盖集、边覆盖集、点独立集、边独立集（匹配）、点着色、点色数、边着色、边色数、面着色、面色数等有关的诸多概念.
- 会求阶数 n 较小或特殊图的 $\gamma_0, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$
- 会用二部图中匹配的理论解简单问题.
- 理解并记住地图面着色与它的对偶图点着色之间的关系
- 会用点色数及边色数解决一些实际问题.

二、练习题

1．无向图 G 为图 7 所示.

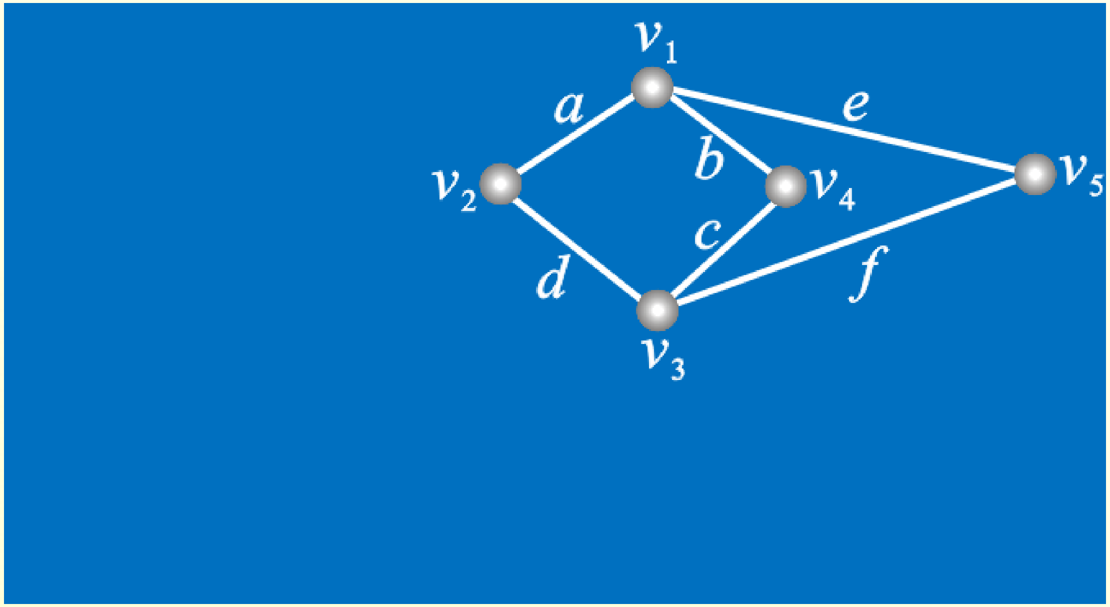


图 7

（1）G 中有不是最小支配集的极小支配集吗？求支配数 γ_0.

（2）G 中有不是最小点覆盖集的极小点覆盖集吗？求点覆盖数 α_0.

（3）G 中有不是最大点独立集的极大点独立集吗？求 β_0.

（4）G 中有完美匹配吗？为什么？求匹配数 β_1

（5）求边覆盖数 α_1

解

深刻理解定义才能解本题

(1) 共有 8 个极小支配集: $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_3\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_5\}$, $\{v_2,v_3\}$, $\{v_3,v_4\}$, $\{v_3,v_5\}$, $\{v_2,v_4,v_5\}$. 只有最后一个不是最小的，$\gamma_0=2$

(2) 共有 2 个极小点覆盖集: $\{v_1,v_3\}$, $\{v_2,v_4,v_5\}$，前者是最小的，$\alpha_0=2$

(3) 共有 2 个极大点独立集: $\{v_1,v_3\}$, $\{v_2,v_4,v_5\}$，后者是最大的，$\beta_0=3$

(4) G 不可能有完美匹配，因为它的阶数 $n=5$（奇数），$\beta_1=2$（G 的最大匹配为 2 元集）

(5) 由定理 18.3 立刻可知$\alpha_1=3$

2. 彼得松图如图 8 所示:

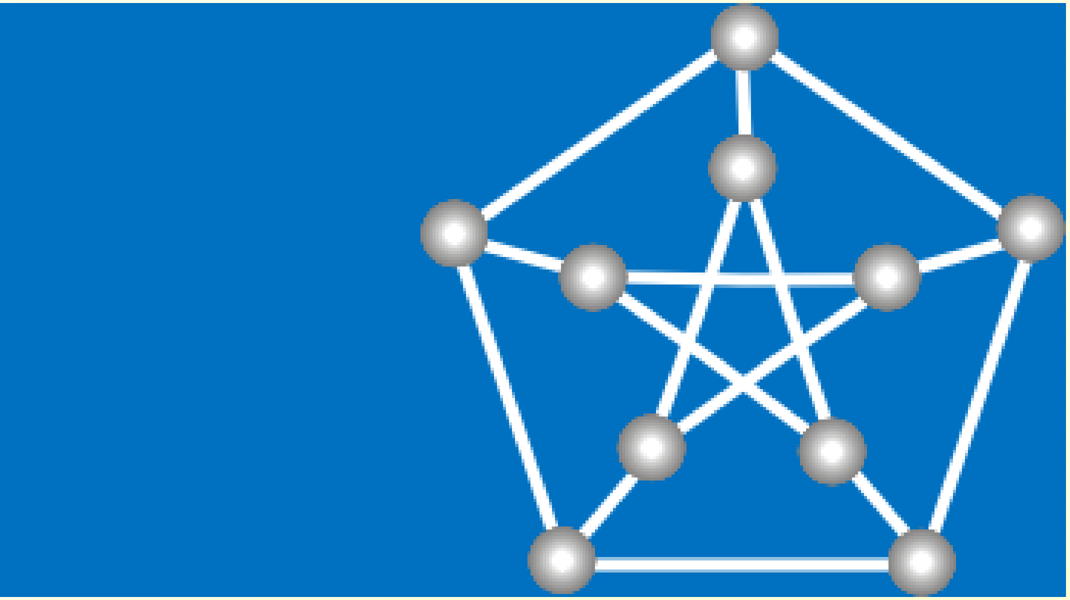
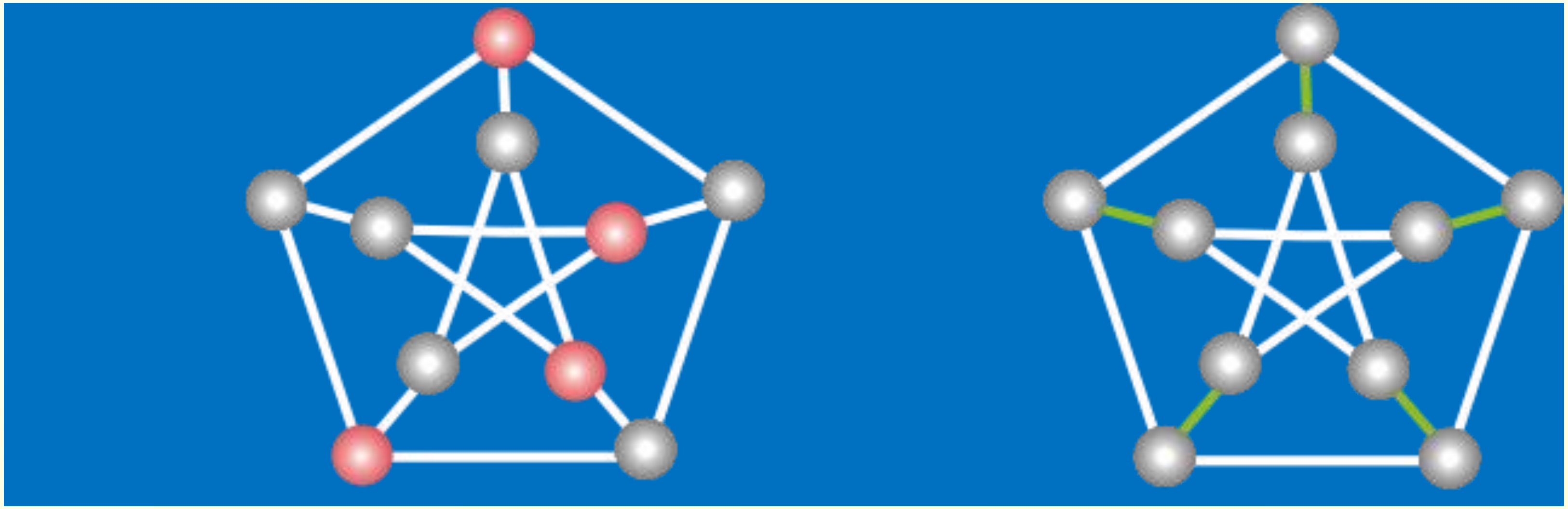


图 8

在图上给出一个最大点独立集和一个最大匹配，从而求出β_0, β_1，以及α_0和α_1.

解



(1)　　　　(2)

图 9

由观察法在图 9（1）中给出一个点独立集，在（2）中给出了一个最大匹配. 从而得出$\beta_0=4, \beta_1=5$. 由定理 18.2 推论知$\alpha_0=6$，由定理 18.3 可知$\alpha_1=5$.

3．求无向完全图 K_n（$n\geq 3$）中的α_0, α_1, β_0, β_1.

解 解本题应用定理 8.2 的推论（$\alpha_0+\beta_0=n$）与定理 8.3 中的（3）（$\alpha_1+\beta_1=n$）较为方便.

（1）由于在 K_n 中，任何两个顶点均相邻，因而$\beta_0=1$，故有$\alpha_0=n-1$（$\alpha_0+\beta_0=n$）．

（2）n 为偶数时，K_n 中存在完美匹配，所以$\beta_1=\frac{n}{2}$，故

$$\alpha_1=n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2} \quad (\alpha_1+\beta_1=n)$$

当 n 为奇数时，K_n 中不可能有完美匹配，K_n-v（从 K_n 中任意删除顶点 v）为 K_{n-1}（$n-1$ 为偶数），于是 K_{n-1} 中存在完美匹配，$\beta_1=\frac{n-1}{2}$，但 K_{n-1} 中的完美匹配为 K_n 中的最大匹配，故 K_n 中的 $\beta_1=\frac{n-1}{2}$，于是

$$\alpha_1=\frac{n+1}{2} \quad (\alpha_1+\beta_1=n)$$

4．求完全二部图 $K_{r,s}$（$1\le r\le s$）的α_0, α_1, β_0, β_1.

解　由二部图的定义及题中参数的定义，不难看出

$\alpha_0=\beta_1=r$，$\alpha_1=\beta_0=s$.

5. 求图 17 所示图的点色数χ，边色数χ'，以及面色数χ^*.

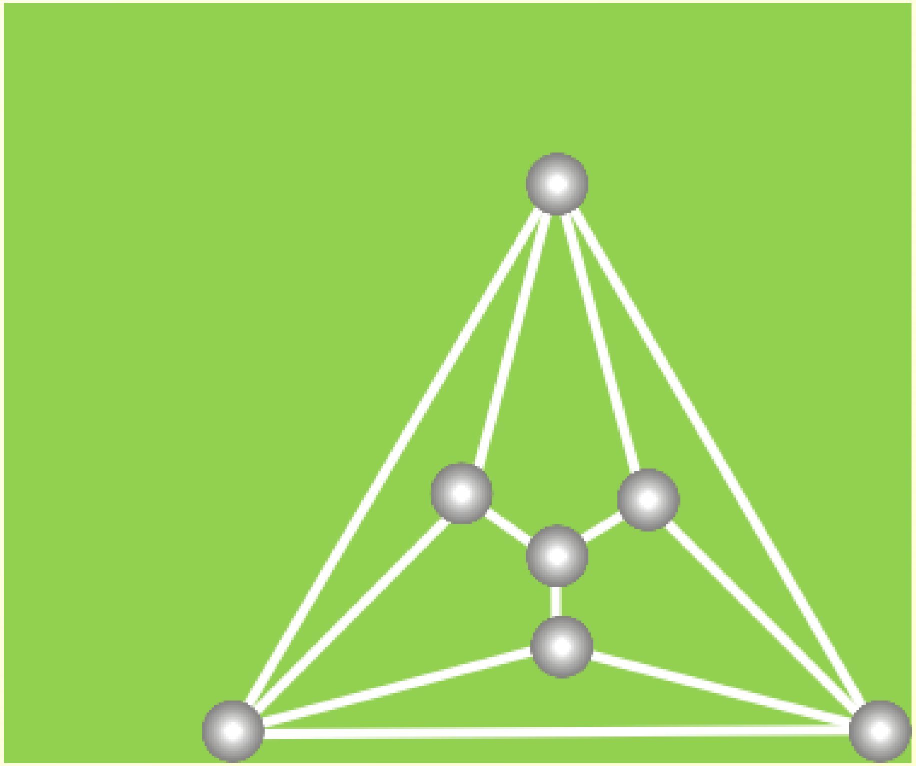


图 17

解

（1）因为 G 中含奇圈，所以$\chi\geq 3$，由布鲁克斯定理知$\chi\leq\Delta=4$，又容易证明不能用3种颜色涂色：由于 a, b, c 彼此相邻，因而至少用3种颜色涂色，设用颜色α, β, γ分别给 a, b, c 涂色．此时最省还用这三种颜色给 d, e, f 涂色，而且 d, e, f 也只能用颜色γ, α和β，这样 g 只能用另一种颜色，比如σ涂色，所以$\chi=4$.

（2）由维津（Vizing）定理可知$\chi'=4$ 或 5，但可用 4 种颜色给边涂色，见图 18 所示.

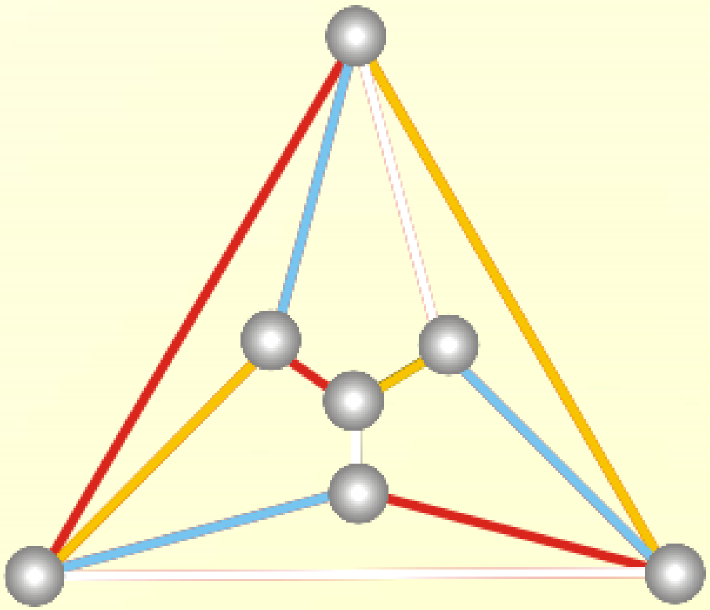


图 18

（3）易知图 17 的对偶图为图 19 所示，容易证明它的点色数为 4，所以图 17 的面色数χ^*=4，见图 20 所示.

图19

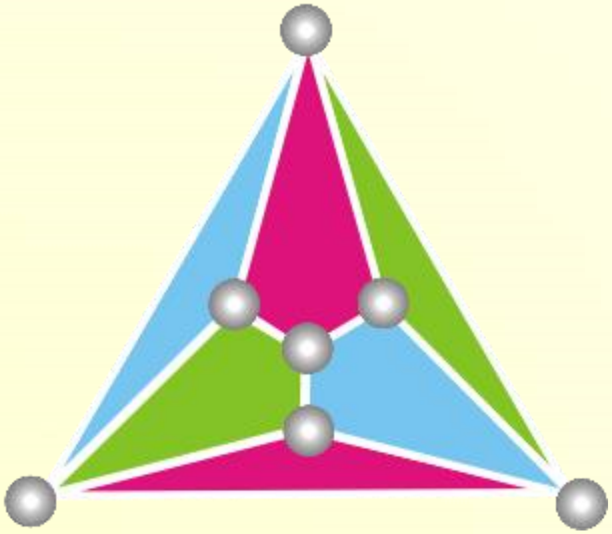


图20

6. 设 G 为 3-正则的哈密顿图，证明$\chi'(G)=3$.

证

用维津定理及握手定理即可证.

由维津定理知 $3 = \Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1 = 4$. 下面只需证可用 3 种颜色给 G 的边着色. 设 C 为 G 中的哈密顿回路，则 C 为偶圈（$3n=2m$），所以用两种颜色可给 C 的边着色. G 中不在 C 上的边彼此不邻（为什么？），因而用第 3 种颜色给它们着色即可.

7． 某校计算机系三年级学生在本学期共选 6 门选修课 C_i, i=1, 2, …, 6.

设 $S(C_i)$为选 C_i 课的学生集. 已知

$$S(C_i)\cap S(C_6) \neq \varnothing,\ i=1, 2, \ldots, 5,$$

$$S(C_i)\cap S(C_{i+1}) \neq \varnothing,\ i=1, 2, 3, 4,$$

$$S(C_5)\cap S(C_1) \neq \varnothing.$$

问这 6 门课至少几天能考完?

解

由已知条件做无向图 $G=<V,E>$，

其中 $V=\{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$，

$E=\{(Ci,Cj)|\ S(C_i)\cap S(C_j)\neq\varnothing\}$，

见图 21 所示 W_6.

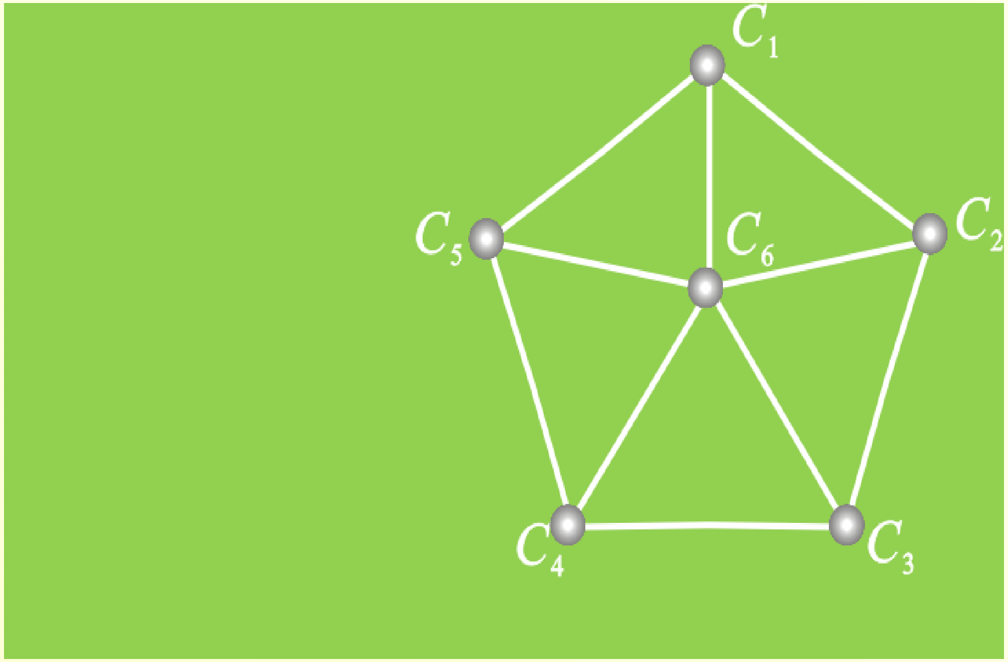


图 21

给 G 一种着色（点着色），

C_i 与 C_j 着同色

$\Leftrightarrow$ C_i 与 C_j 不相邻

$\Leftrightarrow$ 没有学生既学 C_i 又学 C_j

$\Leftrightarrow$ C_i 与 C_j 可同时考.

于是最少的考试时间为

$\chi(G)=4$（见定理 17.21）.

本节作业

32，34， 35