论与图论》

师与助教

授

cn/info/1021/1951.htm

edu.cn， L1621

班”群号: 598784995

李越然、李志恺

通知信息

- 课前更新PPT，上传到QQ群
- 作业占总成绩 30%，每周一上课前由各班学习委员收齐上周布置的全部作业统一提交给助教
- 每周五上课前发放上次批改好的作业。
- 发现作业批改有问题，发放作业当时找助教讨论和解决。

离散数学
----集合论与图论

计算机科学与技术学院

课程概述

离散数学是研究各种各样的离散量的结构及离散量之间的关系的一门学科，是计算机科学和其它相关学科中基础理论的核心课程。

离散数学与计算机

- 第一,目前使用最广泛的各种架构的机器都是所谓“数字模式”的，即这种机器的内部有且仅有两种不同的信息元，在硬件内用高、低电平或者介质的不同磁化方向等加以记录，数学上用“离散量”0和 1 对这两种信息元加以描述（抽象的对应物）。

- 第二,当今通过计算机运算的绝大多数课题，都是基于若干离散对象之间的种种联系，即使是诸如求某一连续函数的积分这样的问题，由计算机来处理时，仍然要将连续函数做离散化处理，即所谓数值分析方法。

- 第三,计算机系统本身就是一个有限结构或有限离散结构。

学习离散数学的目的

- 掌握离散数学知识，为后续课程（如数据结构、操作系统、计算机网络、编译理论、数字逻辑理论、数据库系统、算法分析、系统结构、人工智能等）的学习打下坚实的理论基础；
- 通过对这门课程的学习，掌握证明问题的方法，培养抽象思维的能力、慎密概括的能力和严密逻辑推理的能力。

教材和参考书

教材：

《离散数学》（第2版），屈婉玲、耿素云、张立昂，高等教育出版社，2015

参考书：

《离散数学导论》，王义和，哈尔滨工业大学出版社，2007

课程内容

离散数学

- 数理逻辑
- **集合论**
  - 集合的基本概念和运算
  - 二元关系和函数
- 图论
  - 图的基本概念
  - 欧拉图与哈密尔顿图
  - 树、平面图
  - 支配集、覆盖集、独立集、匹配 与着色
- 代数系统

集合论部分

一、 本部分的主要内容

集合代数----集合的概念和基本运算

关系----二元关系的表示、 运算、 性质、 特殊的关系

函数----函数定义、 性质、 运算

集合的基数----集合的等势、 集合的基数

二、 本部分的基本要求

掌握集合及其相关的基本概念

熟练掌握集合以及关系、 函数的基本运算

了解和使用基本的证明方法

第6章 集合代数

- 主要内容
  - 集合的基本概念----属于、包含、幂集、空集、文氏图等
  - 集合的基本运算----并、交、补、差等
  - 集合恒等式----集合运算的算律、恒等式的证明方法
- 与后面各章的关系
  - 是集合论后面各章的基础
  - 是典型的布尔代数系统

6.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义

集合 **不给出精确的数学定义？**

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

例1

1）中国所有的真皮沙发

2）所有的海鸥

3）在-1和1之间的所有有理数

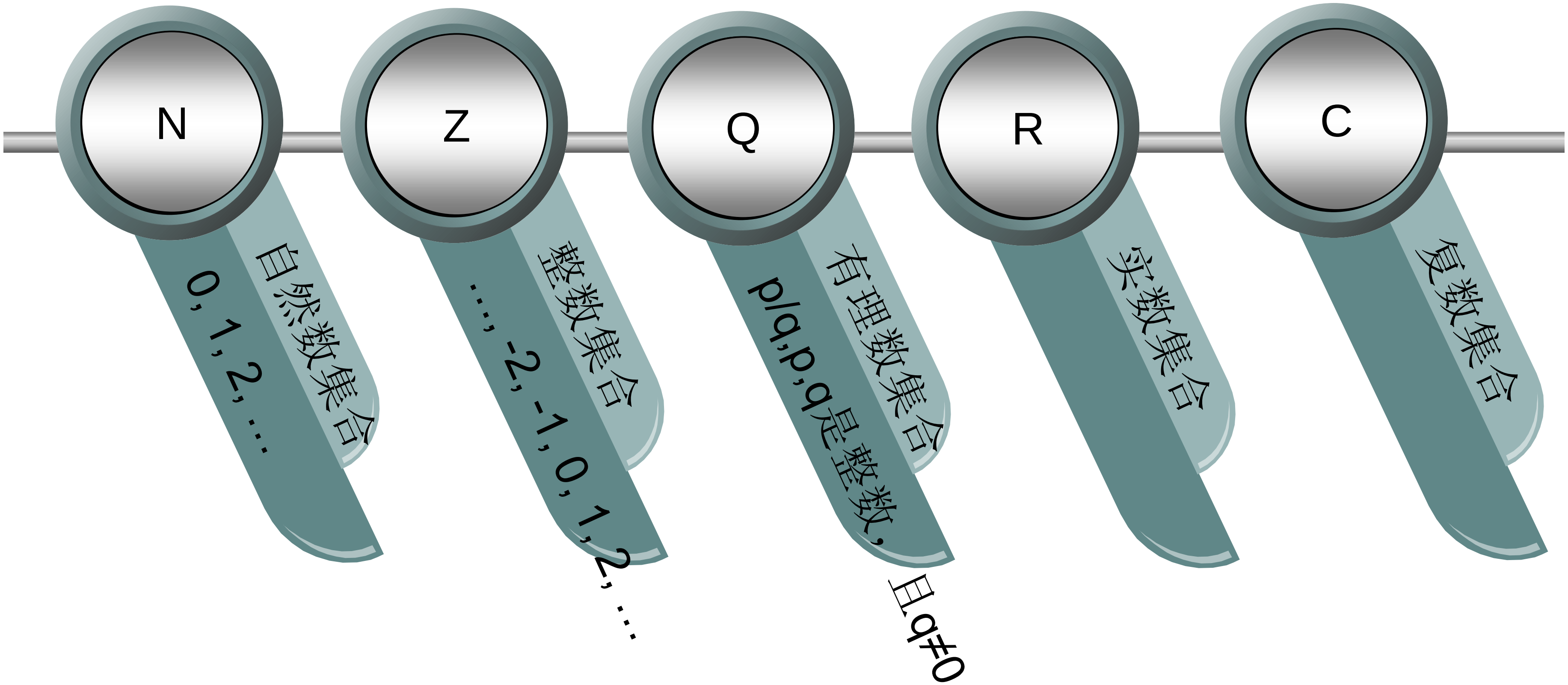
4）全体亚洲人

5）所有欧洲人和松木椅子

6）天安门广场所有的路灯和树

7）所有C语言中的标识符

常用集合



集合的表示方法

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：

- 枚举法
- 隐式法（叙述法）
- 归纳法
- 递归指定
- 文氏图

集合的表示---枚举法（显式法）

--列出集合中全部元素或部分元素的方法叫枚举法

适用场景：

- ◆一个集合仅含有限个元素
- ◆一个集合的元素之间有明显关系

例2：

（1）A＝{a，b，c，d}

（2）B = {0, 1, 4, 9, 16, …, n^2, …}

枚举法的优缺点

是一种显式表示法

优点：具有透明性

缺点：在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的局限，而且，从计算机的角度看，显式法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”。

集合的表示 ---隐式法（叙述法）

通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的方法称为叙述法（隐

X所具有的性质p

一般表示方法：$P=\{x|p(x)\}$

代表元

适用场景：

一个集合含有很多或无穷多个元素；

一个集合的元素之间有容易刻画的共同特征

其突出优点是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

例3：

（1）$A = \{x|x$是“discrete mathematics”中的所有字母$\}$;

（2）$Z = \{x|x$是一个整数$\}$;

（3）$S = \{x|x$是整数，并且$x^2+1 = 0\}$;

（4）$Q^+ = \{x|x$是一个正有理数$\}$。

集合的表示---归纳法

归纳法是通过归纳定义集合，主要由三部分组成：

第一部分：基础。指出某些最基本的元素属于某集合；

第二部分：归纳。指出由基本元素造出新元素

注意：第一部分和第二部分指出一个集合至少包括的元素，第三部分指出一个集合至多要包含的元素

例4

集合A按如下方式定义：

（1）0和1都是A中的元素；

（2）如果a, b是A中的元素，则ab, ba也是A中的元素；

（3）有限次使用(1)、(2)后所得到的字符串都是A中的元素。

试指出其定义方式。并举出集合A中的3个元素

集合的表示---递归指定集合

通过计算规则定义集合中的元素

例5 设 $a_0=1$，

$a_{i+1}=2a_i$（$i\geq 0$）

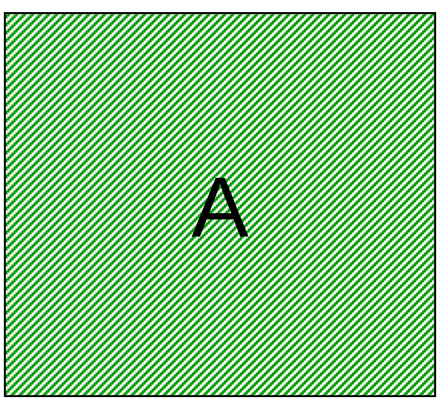
定义 $S=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$

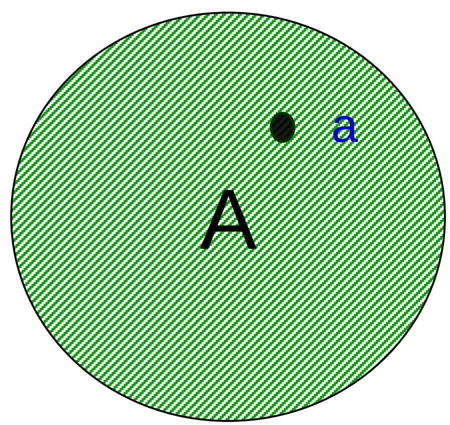
$=\{a_k \mid k\geq 0\}$，

试写出集合S中的所有元素。

集合的表示---文氏图解法

文氏图解法是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。而集合中的元素用小圆点来表示。





集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

例6

$A=\{\, x \mid x\in \mathrm{R}\wedge x^2-1=0 \,\}$，$A=\{-1,1\}$

$1\in A$，$2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

隶属关系的层次结构

例 8

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

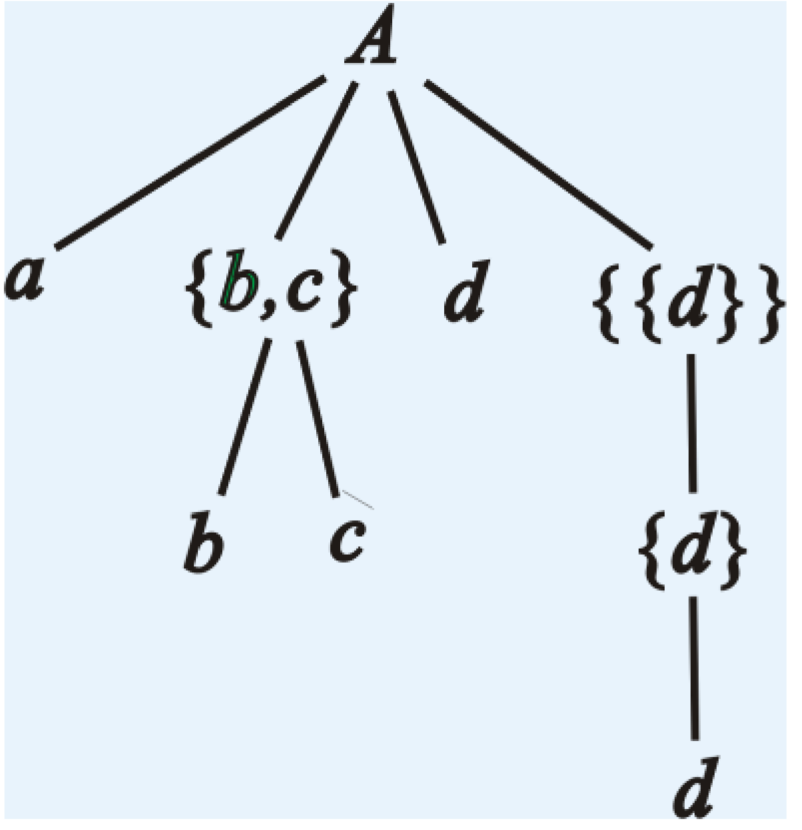
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



集合之间的关系

包含（子集） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

不包含 $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： $\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

集合的三大特征

1、互异性—集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

{1,1,2}与{1,2}是同一个集合。

2、确定性—能够明确加以“区分的”对象；

3、无序性—集合中的元素是没有顺序的。

{2,1}与{1,2}是同一个集合。

例9

设$E = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$，$x \in R\}$

$F = \{x \mid (x \in Z^+)$ 且 $(x^2 < 12)\}$。

试指出集合E和F中的元素。

解　集合$E = \{1, 2, 3\}$，$F = \{1, 2, 3\}$。

显然，集合E, F中的元素完全相同，我们称这样的两个集合相等。

二、外延性原理

A＝B当且仅当A与B具有相同的元素，否则，A≠B。

例10

设A = {BASIC, PASCAL, ADA},

B = {ADA, BASIC, PASCAL},

C = {ADA,PASCAL}

请判断A和B,C的关系。

解 根据集合元素的无序性和外延性原理可得,

A = B；A≠C。

C中的所有元素都在A中，这种关系就是包含关系，可记做C⊆A。

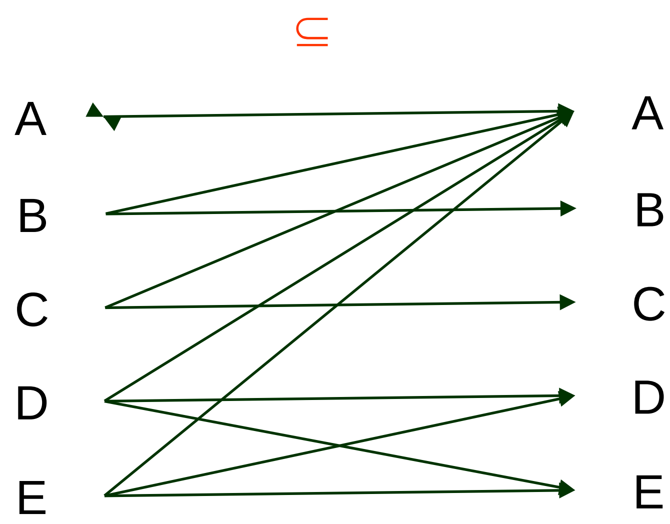
例11

设A={a,b,c,d}，B={a,b,d}，C={c,d},

D={b,c},E = {c,b}。

请判断各集合之间的包含关系。

解



例12

设D = {b,c}， E = {c,b}，

根据集合间包含关系的定义知， E$\subseteq$D 且D$\subseteq$E。

根据外延性原理，又知，集合D = E。

例13

判断下列集合之间是否具有真包含关系。

（1）{a, b}和{a, b, c, d}；

（2）{a, b, c, d}和{a, b, c, d}。

解 根据真子集的定义，有

（1） {a, b} $\subset${a, b, c, d}；

（2）因为{a, b, c, d}＝{a, b, c, d}，

所以{a, b, c, d}不是{a, b, c, d} 的真子集。

例14

设$A=\{a\}$是一个集合，$B=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$，试问

$\{A\}\in B$和$\{A\}\subseteq B$

同时成立吗？

分析　$\because \{A\}=\{\{a\}\}$，$\{\{a\}\}\in B$

$\therefore \{A\}\in B$成立；

$\because \{A\}=\{\{a\}\}$，$\{a\}\in B$

$\therefore \{A\}\subseteq B$成立。

解 $\{A\}\in B$和$A\subseteq B$同时成立。

空集与全集

空集 $\varnothing$ 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \land x \in R\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\, (x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$ （p7, 蕴含联结词）

推论 空集是惟一的.

证 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集 E

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\, (A \subseteq E)$

幂集

定义　$P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$，由集合$A$ 的所有子集构成的集合。

实例

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

计数

如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

6.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

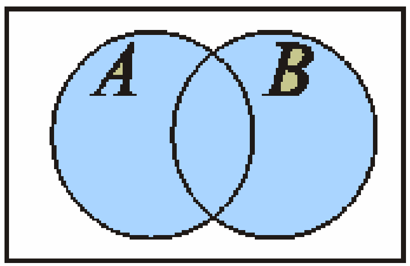
  $\cup \quad \cap \quad - \quad \sim \quad \oplus$

- 文氏图（**John Venn**）
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

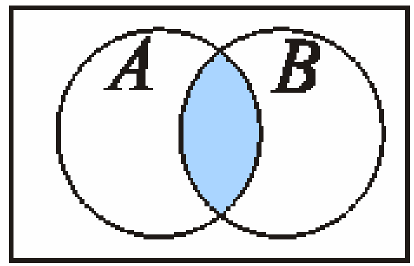
集合基本运算的定义

并	$A\cup B = \{\, x \mid x\in A \vee x\in B \,\}$
交	$A\cap B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\in B \,\}$
相对补	$A-B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\notin B \,\}$
对称差	$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$
	$= (A\cup B)-(A\cap B)$
绝对补	$\sim A = E-A$

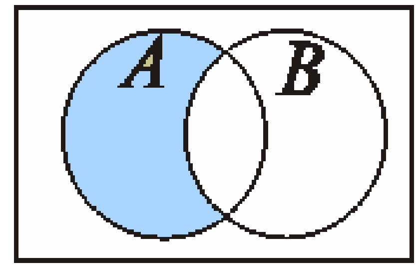
文氏图表示



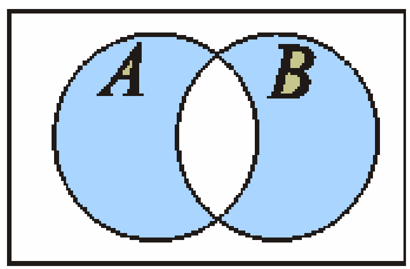
$A \cup B$



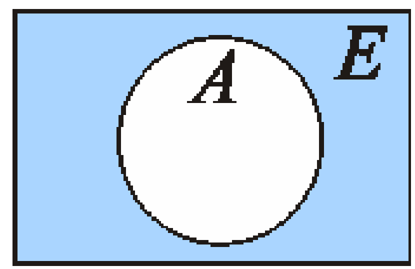
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

关于运算的说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$

- 某些重要结果

  $\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$

  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$（后面证明）

  $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

例1

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　P：爱好体育运动学生的集合

- 所有计算机系二年级学生都选修离散数学
- 数学系一年级的学生都没有选修离散数学
- 数学系学生或爱好文学或爱好体育运动
- 只有一、二年级的学生才爱好体育运动
- 除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

- $T \subseteq (M \cup R) \cap S$
- $R \cap S \subseteq T$
- $(M \cap F) \cap T = \varnothing$
- $M \subseteq L \cup P$
- $P \subseteq F \cup S$
- $S - (M \cup R) \subseteq P$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 X $= S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$， $X \nsubseteq S_3$, 则 X $= S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$， $X \nsubseteq S_1$, 则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

广义运算

1．定义 6.2

$\cup A=\{x \mid \exists z(z\in A \wedge x\in z)\}$

$\cap A=\{x \mid \forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$

2．实例

例　$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$，　$\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$，　$\cap\{a\}=a$

3．广义运算的性质

（1）$\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

（2）单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于 x

（2）广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

（3）广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1,A_2,...,A_n\}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$$

$$\cap\{A_1,A_2,...,A_n\}=A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$$

4．引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\}\mid x\in R\}=R$$

这里的 R 代表实数集合.

运算的优先权规定

1 类运算：初级运算$\cup,\cap,-,\oplus$，优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算和~运算，运算由右向左进行

2 类运算优先于 1 类运算

例　$A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，则

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A) = \cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$

$$= (a\cap b)\cup((a\cup b)-a) = (a\cap b)\cup(b-a) = b$$

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

集合运算的算律（续）

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X\subseteq Y$

任取 x，

$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

例3 证明$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

任取x

$x\in P(A) \Rightarrow x\subseteq A \Rightarrow x\subseteq B \Rightarrow x\in P(B)$

任取x

$x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow \{x\}\in P(B)$

$\Rightarrow \{x\}\subseteq B \Rightarrow x\in B$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A\text{-}B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\ (x\in A\cup B \wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$X\subseteq Y \Rightarrow X\cap Z\subseteq Y\cap Z,\ X\cup Z\subseteq Y\cup Z$

例7 证明 $A\cap C\subseteq B\cap C \wedge A-C\subseteq B-C \Rightarrow A\subseteq B$

证 $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C \subseteq B-C$

上式两边求并，得

$(A\cap C)\cup(A-C) \subseteq (B\cap C)\cup(B-C)$

$\Rightarrow (A\cap C)\cup(A\cap\sim C) \subseteq (B\cap C)\cup(B\cap\sim C)$

$\Rightarrow A\cap(C\cup\sim C) \subseteq B\cap(C\cup\sim C)$

$\Rightarrow A\cap E \subseteq B\cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

作业

本次课作业

- 4
- 8（4）（5）（6）
- 9（5）
- 15（2）
- 18（4）

下次课作业（暂时不做）

- 21
- 30（3）（4）
- 35

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$（吸收律）

证　任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) \\
&=(A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{同一律} \\
&=A\cap(E\cup B) && \text{分配律} \\
&=A\cap(B\cup E) && \text{交换律} \\
&=A\cap E && \text{零律} \\
&=A && \text{同一律}
\end{aligned}
$$

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$\underset{(1)}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{(2)}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{(3)}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{(4)}{A-B=\varnothing}$$

证明顺序：

$$(1)\Rightarrow(2),\ (2)\Rightarrow(3),\ (3)\Rightarrow(4),\ (4)\Rightarrow(1)$$

$(1) \Rightarrow (2)$ （$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ ）

显然$B \subseteq A \cup B$，下面证明$A \cup B \subseteq B$.

任取x，

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有$A \cup B \subseteq B$. 综合上述（2）得证.

$(2) \Rightarrow (3)$ （ $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$ ）

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

（将$A \cup B$用B代入)

(3) $\Rightarrow$(4) （ $A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing$ ）

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1) （ $A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$ ）

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z, X\cup Z=Y\cup Z$， $X-Z=Y-Z$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

6.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

集合 A 的**基数**：集合A中的元素数，记作 card$A$

有穷集 A： card$A$=|A|=n，n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=|A|=3；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=|$B$|=0

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，$i=1, 2, \ldots, m$.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

证明

证明要点：任何元素 x，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1 ，否则为 0

证 设 x不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$$x \notin A_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j, \ 1 \le i < j \le m$$

$$\ldots$$

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明（续）

设 x具有 n 条性质，$1\le n\le m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m}|A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

….

x 对 $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^m C_n^m=\sum_{i=0}^{n} C_n^i=0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解： $S=\{\, x \mid x\in \mathbf{Z},\ 1\le x \le 1000 \,\}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C:

$A=\{\, x \mid x\in S,\ 5 \mid x \,\}$,

$B=\{\, x \mid x\in S,\ 6 \mid x \,\}$,

$C=\{\, x \mid x\in S,\ 8 \mid x \,\}$

例1（续）

对上述子集计数：

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$,

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$, $|A\cap C| =\lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

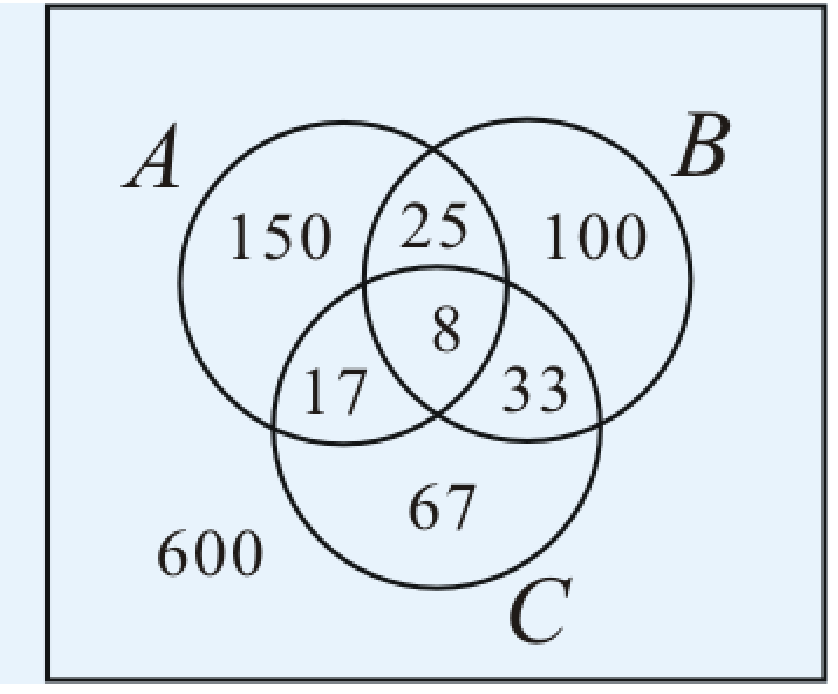
$|A\cap B\cap C| =\lfloor 1000/120 \rfloor=8$,

代入公式

$N = 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$

文氏图法

求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



例2

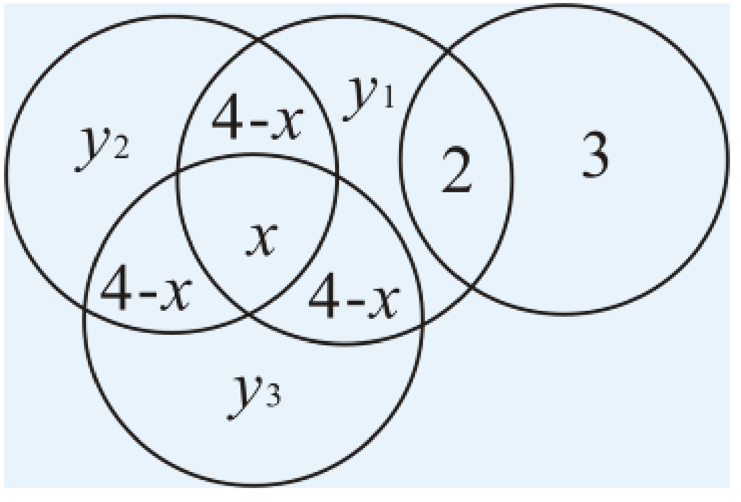
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

集合的应用

例3 用H代表硬币正面，T代表硬币反面。试写出当扔出三个硬币时可能出现的结果所组成的集合。

解: 8种可能：{HHH，HHT，HTH，HTT，THH，THT，TTH，TTT}。但这三个硬币没有顺序之分，即HHT和HTH是同一个元素，所以

A = {HHH，HHT，HTT，TTT}。

例4

一个正三角形被均分为三个小三角形，如图所示。现用黑、白二色对其小三角形着色，假设经旋转能使之重合的图像算一种。试写出由不同图像构成的集合。

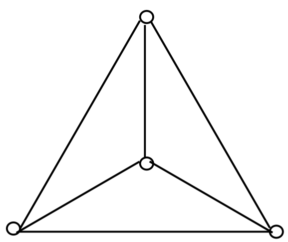


图1

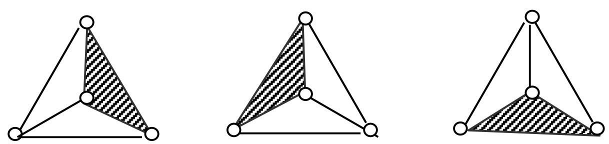
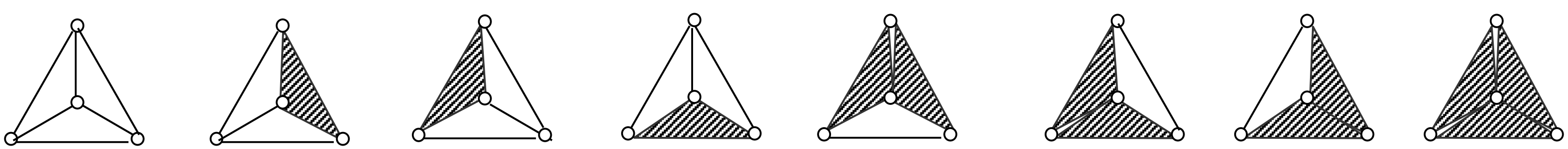


图2

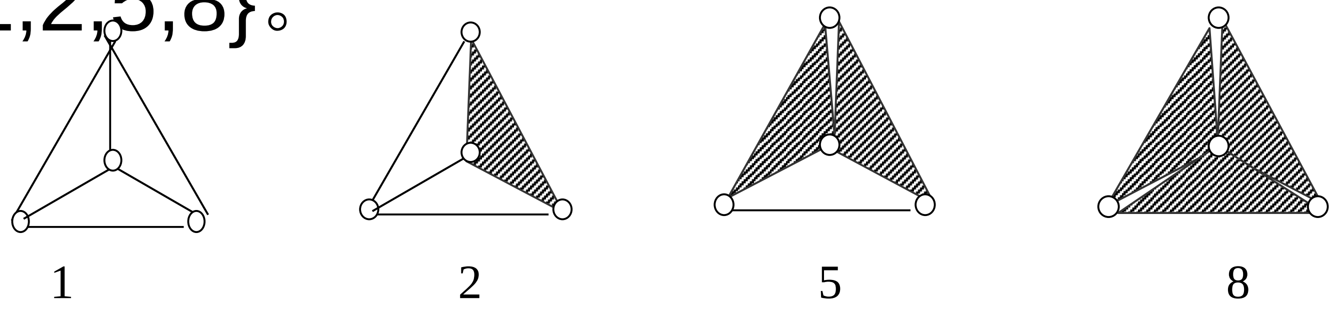


1 2 3 4 5 6 7 8

图3

例4 解

因为每个小三角形均可着色，三个小三角形共有2×2×2 = 8种着色方案，所以可得8种不同的图像。又因为经旋转能使之重合的图像算一种，如图2，所以共有4种不同的着色方案。因此由不同图像构成的集合为{1,2,5,8}。



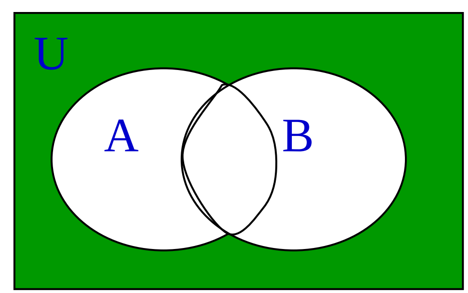
例5

在20个大学生中，有10人爱好音乐，有8人爱好美术，有6人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

解 设所有的大学生的集合为U，爱好音乐的学生集合为A，爱好美术的学生集合为B，既爱好音乐和又爱好美术的学生组成的集合为$A\cap B$，则既不爱好音乐又不爱好美术的学生

组成的集合为$\overline{A}\cap\overline{B}$。

如右图：



例5解（续）

根据已知有$|U| = 20$，$|A| = 10$，$|B| = 8$，

$$|A \cap B| = 6$$

又因为，$|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B|$

$$= 10+8 - 6 = 12$$

从而，$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - |A \cup B| = 20 - 12 = 8$

即不爱好音乐又不爱好美术的学生有8个。

本章全部作业（下周一提交）

已布置

- 4
- 8（4）（5）（6）
- 9（5）
- 15（2）
- 18（4）

- 新布置
- 21
- 30（3）（4）
- 35

第六章 习题课

一、 本章的主要内容及要求

1． 主要内容

- 集合的表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合：空集、全集、幂集
- 文氏图及有穷集合的计数
- 集合的$\cup$, $\cap$, $-$, $\sim$, $\oplus$等运算以及广义$\cup$, $\cap$运算
- 集合运算的算律及其应用

二、要求

- 熟练掌握集合的两种表示法
- 能够判别元素是否属于给定的集合
- 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系
- 熟练掌握集合的基本运算（普通运算和广义运算）
- 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法

二、练习题

1．判断下列命题是否为真。

（1）$\varnothing \subseteq \varnothing$

（2）$\varnothing \in \varnothing$

（3）$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

（4）$\varnothing \in \{\varnothing\}$

（5）$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

（6）$\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$

（7）$\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

（8）$\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

解 （1）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）为真，其余为假.

分析

（1） 判断元素 a 与集合 A 的隶属关系是否成立的基本方法如下：

把 a 作为一个整体，检查它在 A 中是否出现，注意这里的 a 可能是集合表达式.

（2） 判断 $A\subseteq B$ 的四种方法：

- 若 A,B 是用枚举方式定义的，依次检查 A 的每个元素是否在 B 中出现.
- 若 A,B 是谓词法定义的，且 A, B 中元素性质分别为 P 和 Q，那么"如果 P 则 Q"意味着 $A\subseteq B$，"P 当且仅当 Q"意味着 $A=B$.
- 通过集合运算判断 $A\subseteq B$，即 $A\cup B = B$, $A\cap B = A$, $A-B = \varnothing$三个等式中有一个为真，则 $A\subseteq B$.
- 可以通过文氏图判断集合的包含（注意这里是判断，而不是证明）

2．设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$，　　$S_2=\{2, 4, 6, 8\}$

$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$　　$S_4=\{3, 4, 5\}$

$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下 X 是否与 $S_1,\ldots,S_5$ 中某个集合相等?

如果是，又与哪个集合相等?

（1）若 $X\cap S_5=\varnothing$

（2）若 $X\subseteq S_4$ 但 $X\cap S_2=\varnothing$

（3）若 $X\subseteq S_1$ 且 $X\nsubseteq S_3$

（4）若 $X-S_3=\varnothing$

（5）若 $X\subseteq S_3$ 且 $X\nsubseteq S_1$

（1）和 S_5 不交的子集不含有 3 和 5，因此 $X=S_2$.

（2）S_4 的子集只能是 S_4 和 S_5. 由于与 S_2 不交，不能含有偶数，因此 $X=S_5$.

（3）S_1, S_2, S_3, S_4 和 S_5 都是 S_1 的子集，不包含在 S_3 的子集含有偶数，因此 $X=S_1, S_2$ 或 S_4.

（4）$X-S_3=\varnothing$意味着 X 是 S_3 的子集，因此 $X=S_3$ 或 S_5.

（5）由于 S_3 是 S_1 的子集，因此这样的 X 不存在.

3. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1）$A-B = A \Leftrightarrow B=\varnothing$

（2）$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

（3）$A\oplus A = A$

（4）如果 $A\cap B = B$，则 $A = E$.

（5）$A = \{x\}\cup x$，则 $x\in A$ 且 $x \subseteq A$.

解题思路：

- **先将等式化简或恒等变形.**
- **查找集合运算的相关的算律，如果与算律相符，结果为真.**
- **注意以下两个重要的充要条件**

$$A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$$

$$A-B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}$$

如果与条件相符，则命题为真.

- 如果不符合算律，也不符合上述条件，可以用文氏图表示集合，看看命题是否成立.如果成立，再给出证明.
- 试着举出反例，证明命题为假.

（1）$B=\varnothing$是 $A-B=A$ 的充分条件，但不是必要条件．当 B 不空但是与 A 不交时也有 $A-B=A$.

（2）这是 DM 律，命题为真.

（3）不符合算律，反例如下：

$A=\{1\}$，$A\oplus A=\varnothing$，但是 $A\neq\varnothing$.

（4）命题不为真．$A\cap B=B$ 的充分必要条件是 $B\subseteq A$，不是 $A=E$.

（5）命题为真，因为 x 既是 A 的元素，也是 A 的子集.

4．**证明** $A\cup B = A\cup C \wedge A\cap B = A\cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- **分析命题：含有 3 个命题：**

$A\cup B = A\cup C$ $\quad$ $A\cap B = A\cap C$ $\quad$ $B = C$

① $\quad$ ② $\quad$ ③

- 证明要求

前提：命题①和②

结论：命题③

- 证明方法：

恒等式代入

反证法

利用已知等式通过运算得到新的等式

方法一：恒等变形法

$$B = B\cap(B\cup A) = B\cap(A\cup B) = B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C)$$

$$= (A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C = (A\cup C)\cap C = C$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 x ($x\in B$ 且 $x\notin C$)，或存在 x ($x\in C$ 且 $x\notin B$). 不妨设为前者. 若 x 属于 A，则 x 属于 $A\cap B$ 但是 x 不属于 $A\cap C$，与已知矛盾；若 x 不属于 A，则 x 属于 $A\cup B$ 但 x 不属于 $A\cup C$，也与已知矛盾.

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.

由已知等式①和②可以得到

$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$，即 $A\oplus B=A\oplus C$.

从而有

$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$

根据结合律得

$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$

由于 $A\oplus A=\varnothing$，化简上式得 $B=C$.

5．设 A,B 为集合，试确定下列各式成立的充分必要条件：

（1）$A-B=B$

（2）$A-B=B-A$

（3）$A\cap B=A\cup B$

（4）$A\oplus B=A$

解题思路:

求解集合等式成立的充分必要条件可能用到集合的算律、不同集合之间的包含关系、以及文氏图等. 具体求解过程说明如下:

(1) 化简给定的集合等式

(2) 求解方法如下:

- 利用已知的算律或者充分必要条件进行判断
- 先求必要条件，然后验证充分性
- 利用文氏图的直观性找出相关的条件,再利用集合论的证明方法加以验证

（1） $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\varnothing$．求解过程如下：

由 $A-B=B$ 得

$(A\cap\sim B)\cap B = B\cap B$

化简得 $B=\varnothing$．再将这个结果代入原来的等式得 $A=\varnothing$．从而得到必要条件 $A=B=\varnothing$.

再验证充分性．如果 $A=B=\varnothing$成立，则 $A-B=\varnothing=B$ 也成立.

（2） $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$．求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性．由 $A-B=B-A$ 得

$(A-B)\cup A=(B-A)\cup A$

从而有 $A=A\cup B$，即 $B\subseteq A$．同理可证 $A\subseteq B$.

（3）$A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由 $A\cap B=A\cup B$ 得

$A\cup(A\cap B) = A\cup(A\cup B)$

化简得 $A =A\cup B$，从而有 $B\subseteq A$. 类似可以证明 $A\subseteq B$.

（4）$A\oplus B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由 $A\oplus B = A$ 得

$A\oplus(A\oplus B) = A\oplus A$

根据结合律有

$(A\oplus A)\oplus B = A\oplus A$

即 $\varnothing\oplus B = \varnothing$，就是 $B = \varnothing$.

本章总结

1、与集合相关的概念和特殊集合：集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等；

2、与集合运算相关的概念和定理：集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理。