定理(**演绎定理**): 对PC中任意公式集合 Γ 公式 A, B, $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 当且仅当 $\Gamma \vdash A \to B$

证明: 充分性) 已知 $\Gamma \vdash A \to B$ 往证 $\Gamma; A \vdash B$
有演绎过程 $A_1, A_2, \cdots, A_m (= A \to B)$ 在此序列中加上公式 A, B 得到一个以 $\Gamma; A$ 为前提对 B 的演绎过程。

必要性) 已知 $\Gamma; A \vdash B$ 往证 $\Gamma \vdash A \to B$

对 $\Gamma; A \vdash B$ 的演绎序列的长度l用归纳法。
当l=1时。序列中只有 B 。或者 B 为公理或者为假设中的元素 $B \in \Gamma; A$
从而(1) B为公理。(2) $B \in \Gamma$ (3)$B = A$
对(1)有$B, B \to (A \to B), A \to B$ 构成了一个证明，从而 $\Gamma \vdash A \to B$
对(2)有 $B, B \to (A \to B), A \to B$ 构成了一个以Γ 为前提对 $A \to B$ 的演绎过程，从而$\Gamma \vdash A \to B$
对(3)由$A = B$知 $\vdash A \to B$ 从而 $\Gamma \vdash A \to B$.
假设当演绎序列的长度比l小时结论成立。长度为l时，演绎序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_l (= B)$ 观察B。如果B为公理或者为假设中的元素，可仿照l=1时的情形证明结论成立。如果 $B = A_j$ 则由于$\Gamma; A \vdash A_j$ 由于 $j < l$ 知 $\Gamma \vdash A \to A_j$ 即$\Gamma \vdash A \to B$ 。如果B为 $A_j, A_k (j, k < l)$ 用分离规则导出。不妨设 $A_k = A_j \to B$ 由于 $\Gamma; A \vdash A_j, \Gamma; A \vdash A_j \to B$ 有$\Gamma \vdash A \to A_j$
$\Gamma \vdash A \to (A_j \to B)$ 此两序列加上公式$(A \to (A_j \to B)) \to ((A \to A_j) \to (A \to$