7.4 关 系 的 性 质

本节总假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假定不失一般性。因为任一A到B的关系R，即$R \subseteq A\times B$, $A\times B \subseteq (A\cup B)\times(A\cup B)$，所以关系$R$总可看成是$A\cup B$上的关系，它与原关系$R$具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对$R$的讨论无损于问题的本质。

一、五种性质的定义

1. 自反性与反自反性

定义 7.11 设 R 为 A 上的关系,

（1）若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的. （$I_A \subseteq R$? ）

（2）若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的. （$R \cap I_A = \varnothing$? ）

实例:

自反关系：全域关系 E_A, 恒等关系 I_A, 小于等于关系 L_A, 整除关系 D_A

反自反关系：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$R_1 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$R_3 = \{\langle 1,3\rangle\}$

R_2 是自反的，R_3 是反自反的，R_1 既不是自反的也不是反自反的.

2．对称性与反对称性

定义 7.12 设 R 为 A 上的关系，

（1）若 $\forall x\forall y(x,y\in A\land<x,y>\in R\rightarrow<y,x>\in R)$，则称 R 为 A 上对称的关系．　($R=R^{-1}$ ？)

（2）若 $\forall x\forall y(x,y\in A\land<x,y>\in R\land<y,x>\in R\rightarrow x=y)$，则称 R 为 A 上的反对称关系．　($R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ ？)

实例：

对称关系：A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$

反对称关系：恒等关系 I_A 和空关系也是 A 上的反对称关系．

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系，其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\},\qquad R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$$

$$R_3=\{<1,2>,<1,3>\},\qquad R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$$

R_1 既是对称也是反对称的. R_2 是对称的但不是反对称的.

R_3 是反对称的但不是对称的. R_4 既不是对称的也不是反对称的.

3．传递性

定义 7.13 设 R 为 A 上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land <x,y> \in R \land <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R),$$

则称 R 是 A 上的传递关系.

实例：

A 上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A 和空关系$\varnothing$

小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系, R_2 不是 A 上的传递关系.

【例】设$A=\{a, b, c\}$，以下各关系

R_i（$i=1, 2, \ldots, 8$）均为A上二元关系。

（1）$R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$是自反的，而$R_2=\{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$不是自反的，是反自反的。存在既不自反也不反自反的二元关系，例如$R_3=\{\langle a,a\rangle\}$。显然$A$上的$\Phi$关系是反自反的，不是自反的。

值得注意的是，当 $A=\Phi$时（这时A上只有一个关系Φ），A上空关系既是自反的，又是反自反的，因为$A=\Phi$使两者定义的前提总为假。

（2）$R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$ 是对称的；$R_5 = \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,a\rangle\}$ 不是对称的；$R_6 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle\}$ 是反对称的。其实R_5既不是对称的，也不是反对称的。特别有意思的是，存在既对称又反对称的二元关系，例如A上的恒等关系I_A。

（3）$R_7 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$ 是传递的，但$R_7 - \{\langle a,c\rangle\}$ 便不是传递的了。

应当注意，A上的空关系Φ，$R_8 = \{\langle a,b\rangle\}$ 等是传递的，因为传递性定义的前提对它们而言均为假。

（4）任何非空集合上的空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；其上的相等关系是自反、对称、反对称、传递的；其上的全关系是自反、对称、传递的。

（5）三角形的相似关系、全等关系是自反、对称、传递的。

（6）正整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；但整数集合上的整除关系只有传递性 (<0,0>,<1,-1>)。

判断一个关系是否具有上述某种的性质 ，除直接用定义，还有下面的充要条件。

二．关系性质的等价描述

下面给出这五种性质成立的充分必要条件.

定理 7.9 设 R 为 A 上的关系, 则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

若$\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \in R)$，
则称R在A上是自反的.

R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

证明

（1）必要性.

任取$\langle x,y\rangle$，由于 R 在 A 上自反必有

$\langle x,y\rangle \in I_A \Rightarrow x,y \in A \land x=y \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x，有

$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

因此 R 在 A 上是自反的.

R在A上反自反当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$

（2） 先证必要性： 用反证法。

假设$R\cap I_A\neq\Phi$，必存在 $\langle x, y\rangle \in R\cap I_A \Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_A$，由于$I_A$是$A$上的恒等关系，从而有$x=y$，所以 $\langle x, x\rangle \in R$，这与$R$ 在A上是反自反的相矛盾。

再证充分性：任取$x\in A$，则有$x\in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R$(由于$I_A\cap R=\Phi$)，从而证明了$R$在$A$上是反自反的。

若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

若$\forall x \forall y(x,y \in A \land \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$，
则称R为A上对称的关系

R在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(3) 必要性.

任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1}$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$\langle x,y\rangle$，由 $R = R^{-1}$ 得

$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

所以 R 在 A 上是对称的.

R在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

（4） 必要性.

若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$,
则称R为A上的反对称关系.

任取$\langle x,y\rangle$，有

$$\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R$$
$$\Rightarrow x=y\wedge x,y\in A \quad \text{(因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称的)}$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in I_A$$

这就证明了 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}$$
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in I_A \qquad (R\cap R^{-1}\subseteq I_A)$$
$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

R在A上传递当且仅当 $R^\circ R \subseteq R$

> 设R为A上的关系, 若
> $\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$, 则称$R$是$A$上的传递关系.

(5) 必要性.

任取$\langle x,y\rangle$有

$\langle x,y\rangle \in R\circ R$

$\Rightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$ (因为 R 在 A 上是传递的)

所以 $R\circ R \subseteq R$.

充分性.

任取$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R$, 则

$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R\circ R$

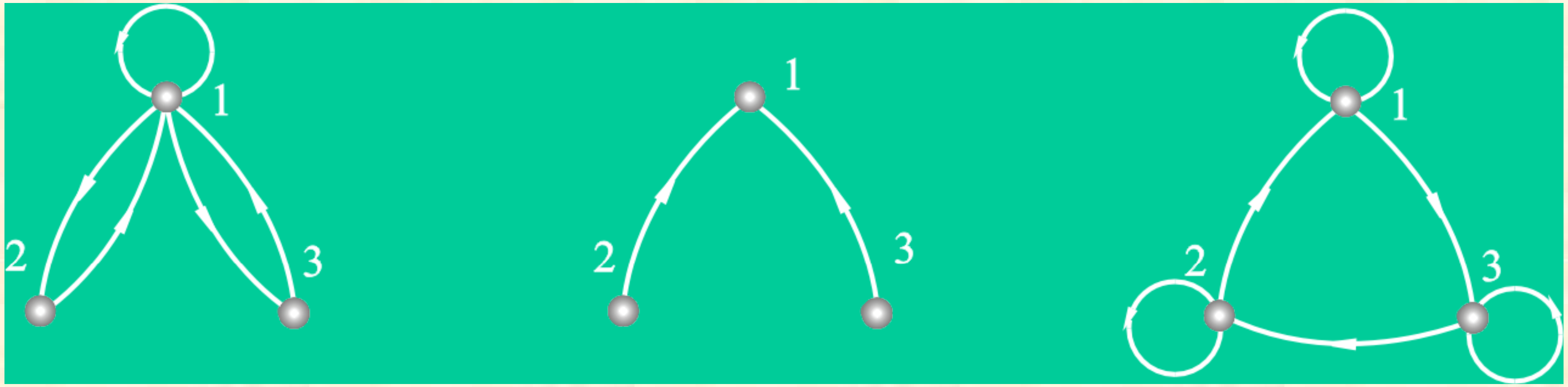
$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R$

所以 R 在 A 上是传递的.

三、关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在位置，M 中相应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边,是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

例 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(1)　　　　(2)　　　　(3)

图 4

（1）不是自反也不是反自反的；对称的，不是反对称的；不是传递的.

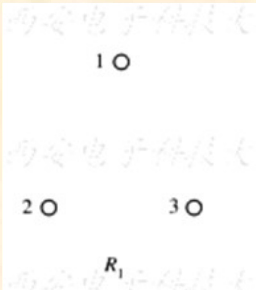
（2）是反自反但不是自反的；是反对称的但不是对称的；是传递的.

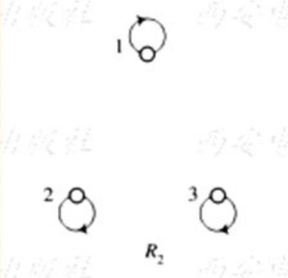
（3）是自反但不是反自反的；是反对称的但不是对称的；不是传递的.

【例】 设R_i是$A=\{1, 2, 3\}$上的二元关系（如图7.4.1所示），判断它们各具有什么性质？ 并说明理由。

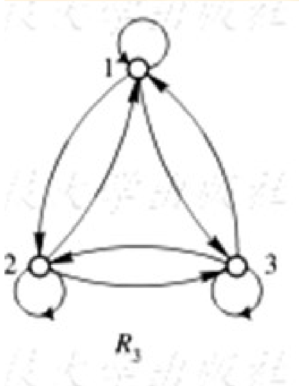
解 根据关系图的特征，我们可判断下列各关系具有的性质。

R_1具有反自反性、对称性、 反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，既无双边又无单边，既无双边又无三角形。

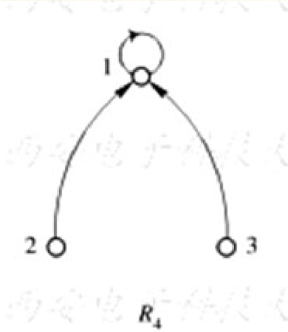




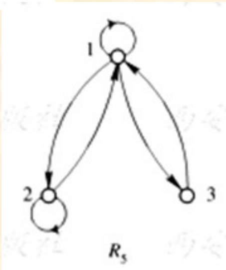
R_2具有自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处有一环，既无双边又无单边，既无双边又无三角形。



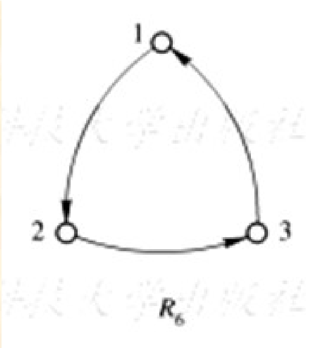
R_3具有自反性、对称性、传递性。因为每一结点处有一环，有边就有双边，有双边又有双环，有三角形就是向量三角形。



R_4具有反对称性、传递性。因为无双边，无三角形。

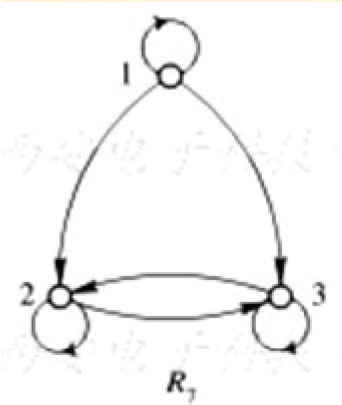


R_5具有对称性。因为无单边。



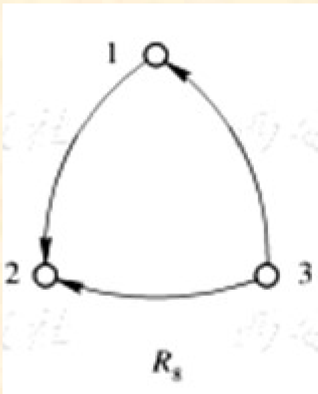
R_6

R_6具有反自反性、反对称性。因为每一结点处均无环。



R_7

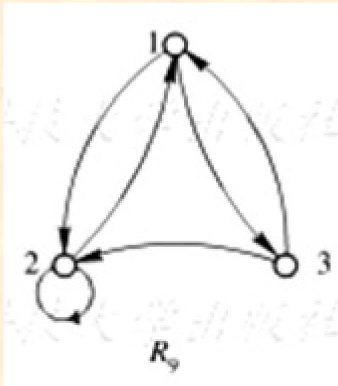
R_7具有自反性、传递性。因为每一结点处有一环，有三角形，且是向量三角形。



R_8

R_8具有反自反性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，有三角形，且是向量三角形。

R_9均不具备。



R_9

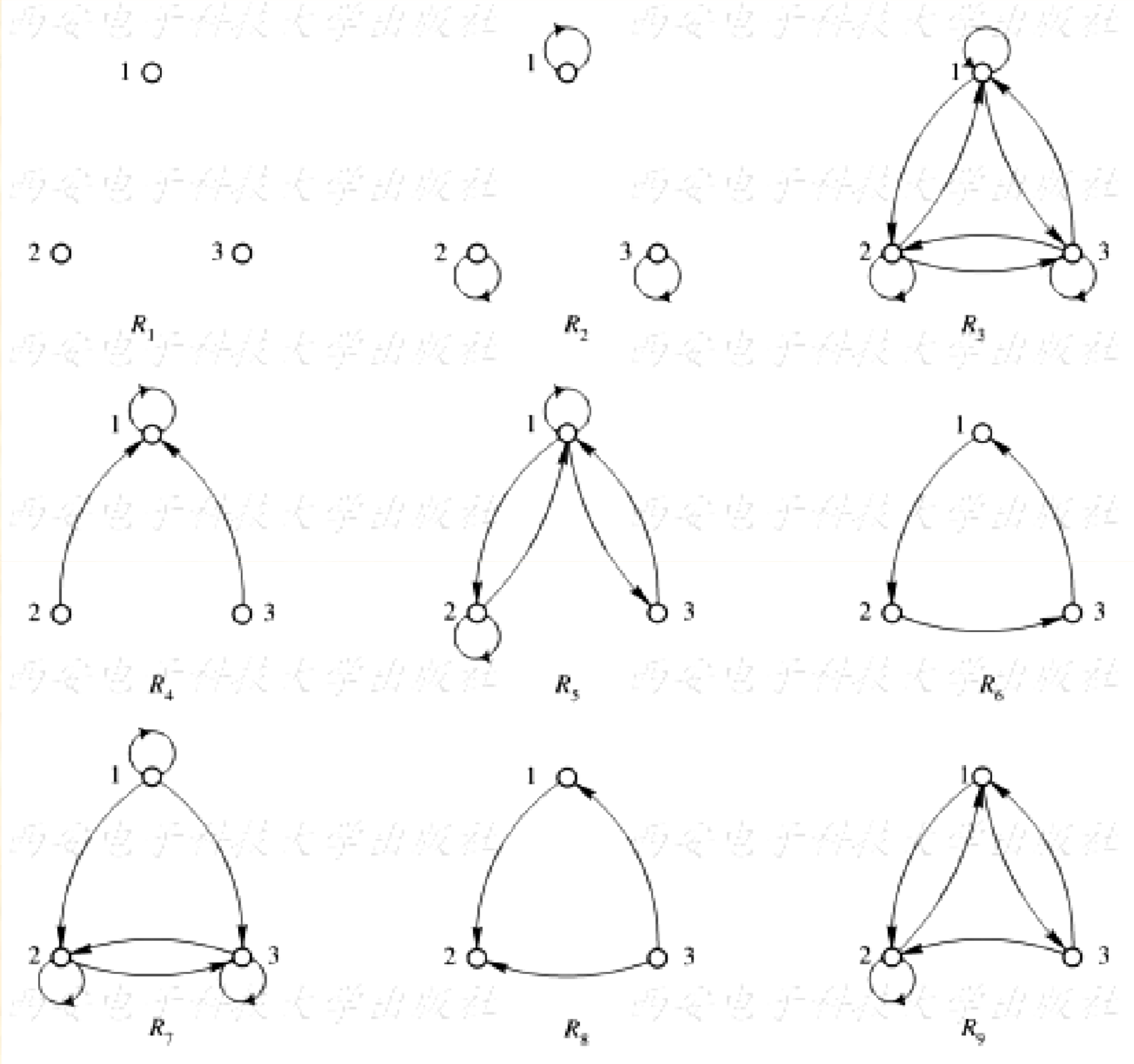


图7.4.1

关系是序偶的集合，可作交、并、差、逆、复合运算。如果已知某些关系具有某一性质，经过关系运算后的结果是否仍具有这一性质，是一个令人关注的问题。如果是，我们称该性质对这一运算封闭。现在我们来讨论五大特性对基本运算的封闭性。

定理7.4.2 设R_1、R_2是A上的自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 o R_2$也是A上的自反关系。证明留给读者。

定理7.4.3 设R_1、R_2是A上的对称关系，则R_1^{-1} 、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$也是A上的对称关系。

证明 仅证对称性对并运算封闭。

设R_1，R_2对称要证$R_1 \cup R_2$对称。任取$\langle x，y \rangle \in R_1 \cup R_2$，那么$\langle x，y \rangle \in R_1$或$\langle x，y \rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$对称知$\langle y，x \rangle \in R_1$或$\langle y，x \rangle \in R_2$，因而$\langle y，x \rangle \in R_1 \cup R_2$。$R_1 \cup R_2$对称性得证。

定理7.4.4 设R_1、R_2是A上的传递关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$是A上的传递关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是传递的 $(R_1 = \{<1,3>\}, R_2 = \{<3,4>\})$。

证明 (1) 证传递性对求逆运算封闭。

设R_1传递，要证R_1^{-1}传递，设有$\langle x, y\rangle \in R_1^{-1}$，$\langle y, z\rangle \in R_1^{-1}$，那么$\langle y, x\rangle \in R_1$，$\langle z, y\rangle \in R_1$。由$R_1$具有传递性可得$\langle z, x\rangle \in R_1$，即$\langle x, z\rangle \in R_1^{-1}$。

R_1^{-1}在A上是传递的，得证。

(2) 证传递性对交运算封闭。

设R_1，R_2传递，要证$R_1 \cap R_2$传递。设有$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2$，那么$\langle x, y\rangle \in R_1$，$\langle x, y\rangle \in R_2$，$\langle y, z\rangle \in R_1$，$\langle y, z\rangle \in R_2$。由$R_1$，$R_2$具有传递性，可得$\langle x, z\rangle \in R_1$，$\langle x, z\rangle \in R_2$，从而$\langle x, z\rangle \in R_1 \cap R_2$。故$R_1 \cap R_2$在$A$上是传递的，得证。

定理7.4.5 设R_1、R_2是A上的反对称关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 - R_2$是A上的反对称关系。但$R_1 \cup R_2$不一定是反对称的 $(R_1 = \{<1,3>\}, R_2 = \{<3,1>\})$ 。

证明 仅证反对称性对差运算封闭。

设 R_1，R_2反对称，要证$R_1 - R_2$反对称。

设〈x，y〉$\in (R_1 - R_2)$且〈y，x〉$\in (R_1 - R_2)$，因而〈x，y〉$\in R_1$，〈y，x〉$\in R_1$，从而由R_1的反对称性得$x=y$。这就完成了$R_1 - R_2$反对称的证明。

定理7.4.6 设R_1、R_2是A上的反自反关系，则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$是A上的反自反关系。

证明留给读者。

我们举例说明反自反性、对称性、反对称性、传递性对合成运算均不封闭。

【例7.4.3】 $A=\{a, b, c\}$，讨论在下列各种情况下 $R\circ S$具有的性质。

(1) $R=\{\langle a, b\rangle\}$, $S=\{\langle b, a\rangle\}$， R、S是反自反的。

(2) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$,

$S=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$， R、S是对称的。

(3) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$,

$S=\{\langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$， R、S是反对称的。

(4) $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$,

$S=\{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$，$R$、$S$是传递的。

解

（1） $R\circ S=\{\langle a, a\rangle\}$，所以$R\circ S$不是反自反的。

（2） $R\circ S=\{\langle a, c\rangle\}$，所以$R\circ S$不是对称的。

（3） $R\circ S=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$，所以$R\circ S$是对称的。

（4） $R\circ S=\{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$， 因为 $\langle b, a\rangle \in R\circ S$， $\langle a, c\rangle \in R\circ S$，但 $\langle b, c\rangle \notin R\circ S$，所以$R\circ S$不是传递的。

补充(1)设A={1,2,3,4,6,12}，A中“整除”关系记为R，问：R是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？

(2)设A={2,3,4,6,12,24,36}，A中“整除”关系记为R，求R^{-1}及R的关系矩阵，说明R^{-1}的属性。

(3)设A={a,b,c,d}，判定下列关系的性质

R1={<a,a>,<b,a>}

R2={<a,a>,<b,c>,<d,a>}

R3={<c,d>}

R4={<a,a>,<b,b>,<c,c>}

R5={<a,c>,<b,d>}

四、关系的性质和运算之间的联系.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5　关系的闭包

闭包运算是关系运算中一种比较重要的特殊运算，是对原关系的一种扩充。在实际应用中，有时会遇到这样的问题，给定了的某一关系并不具有某种性质，要使其具有这一性质，就需要对原关系进行扩充，而所进行的扩充又是“最小”的。这种关系的扩充就是对原关系的这一性质的闭包运算。

一、闭包定义

定义 7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包是 A 上的关系 R', 使得 R'满足以下条件:

(1) R'是自反的 (对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。它们分别是具有自反性或对称性或传递性的R的“最小”超集合。称r、s、t为闭包运算，它们作用于关系R后，分别产生包含R的、最小的具有自反性、对称性、传递性的二元关系。这三个闭包运算也可由下述定理来构造。

二、闭包的构造方法

1．集合表示

定理　设 R 为 A 上的关系，则有

（1）$r(R)=R\cup R^0$

（2）$s(R)=R\cup R^{-1}$

（3）$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对于有穷集合 $A(|A|=n)$上的关系,(3)中的并最多不超过 R^n.

证明思路:

（1）和（2）：证明右边的集合满足闭包定义的三个条件.

（3）采用集合相等的证明方法.

证明左边包含右边，即 $t(R)$包含每个 R^n.

证明右边包含左边，即 $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$具有传递的性质.

证

（1）由 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 可知 $R\cup R^0$ 是自反的，且满足 $R\subseteq R\cup R^0$

设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R\subseteq R''$ 和 $I_A\subseteq R''$

从而 $R\cup R^0\subseteq R''$

综上所述 $R\cup R^0$ 满足闭包定义的三个条件，所以

$r(R)=R\cup R^0$.

（3） 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

方法：用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n\subseteq t(R)$

$n=1$ 时有 $R^1=R\subseteq t(R)$.

假设 $R^n\subseteq t(R)$成立，那么对任意的$<x,y>$有

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,t>\in R^n\wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,t>\in t(R)\wedge <t,y>\in t(R))$$

$$\Rightarrow <x,y>\in t(R)$$ （因为 $t(R)$是传递的）

这就证明了 $R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

再证 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$成立，为此只须证明 $R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

任取$<x,y>,<y,z>$，则

$$<x,y>\in R\cup R^2\cup\ldots\wedge<y,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\exists s(<x,z>\in R^t\circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\exists s(<x,z>\in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

从而证明了 $R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

【例7.5.1】 设$A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，$R_3=\{\langle 1, 2\rangle\}$，求它们的闭包。

解 $r(R_1)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

$s(R_1)=R \cup R^{-1}$

$=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$t(R_1)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$r(R_2)=I_A \cup R$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$s(R_2)=R \cup R^{-1}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}=R_2$

$t(R_2)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$r(R_3)=I_A \cup R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$s(R_3)=R \cup R^{-1}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$t(R_3)=\{\langle 1, 2\rangle\}=R_3$

2. **矩阵表示和图表示**

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t，则

$$M_r=M+E \qquad M_s=M+M' \qquad M_t=M+M^2+M^3+\ldots$$

其中 E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t，则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外，以下述方法添加新的边.

考察 G 的每个顶点，如果没有环就加上一个环. 最终得到的是 G_r.

考察 G 的每一条边，如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到 G_s.

考察 G 的每个顶点 x_i，找从 x_i 出发的所有 2 步, 3 步, …, n 步长的路径（n 为 G 中的顶点数）.设路径的终点为 $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$，如果没有从 x_i 到 x_{jl} (l=1,2,…,k)的边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t.

【例7.5.2】 设R是集合$A=\{a,b,c,d\}$上的二元关系

$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$。求$R$的闭包：

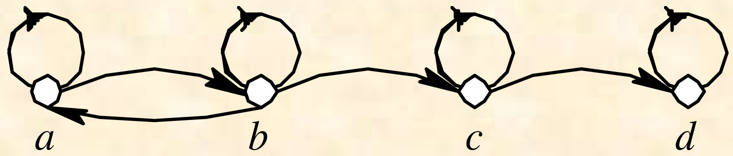
r（R）、s（R）、t（R），并画出对应的关系图。

解 $r(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, a\rangle,$
$\langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, b\rangle,$
$\langle d, c\rangle\}$

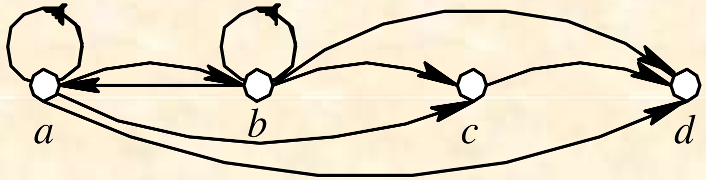
$t(R)=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle,$
$\langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$

其对应的关系图分别如图7.5.1(a)、(b)、(c)所示。



(a)

(b)

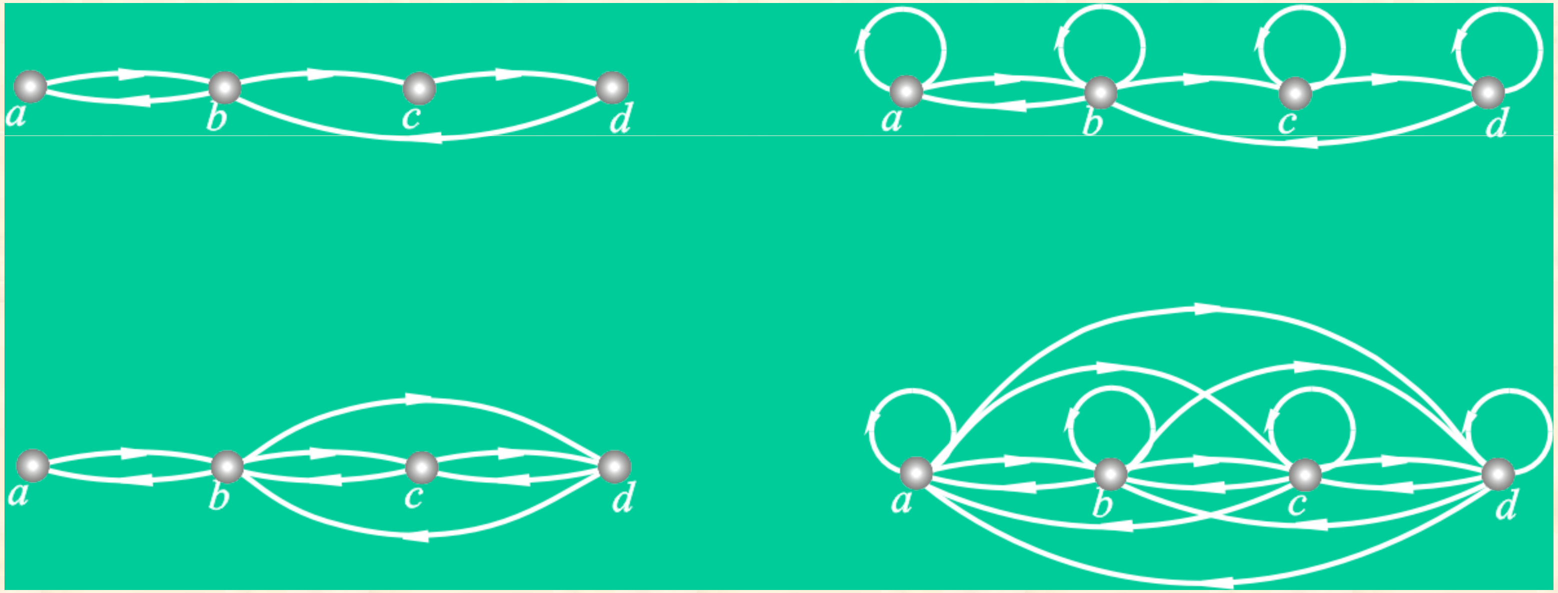


(c)

图 7.5.1

练习　　设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$,

R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



$s(R)$　　　　　　　　$t(R)$

图 5

从以上讨论可以看出，传递闭包的求取是很复杂的。但是，当集合A为有限集时，A上二元关系的传递闭包的求取便可大大简化。

推论 A为非空有限集合，$|A|=n$。R是A上的关系，则存在正整数$k \le n$，使得

$$t(R)=R^{+}=R \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{\mathrm{k}}$$

补充：设$A=\{1,2,3,4,5\}$，A中关系$R=\{<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>\}$，求$t(R)$

解：$R^2=\{<1, 3>, <4, 2>, <5, 3>\}$

$R^3=\{<4, 3>\}$

$R^4=\Phi$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$

$=\{<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>, <1, 3>,$

$<4,2>, <5, 3>, <4, 3>\}$

下列算法是求取R^+的有效算法。

Warshall(沃夏尔) 算法：设R为有限集A上的二元关系，$|A|=n$，M为R的关系矩阵，可如下求取R^+的关系矩阵 W。

（1） 置 W为M。

（2） 置i=1。

（3） 对所有j， $1 \leq j \leq n$， 做

① 如果W［j, i］=1，则对每一k=1, 2, …, n，置W［j, k］为W［j, k］$\vee W$［i, k］，即当第j行、第i列为1时，对第j行每个分量重新置值，取其当前值与第i行的同列分量之析取。

② 否则对下一j值进行①。

（4） 置i为i+1（遍历所有“纽带”元素）。

（5） 若$i \le n$，回到步骤（3），否则停止。

【例4.5.3】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$, 则

$R^2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$

$R^3=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

因此$R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle,$

$\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle,$

$\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle,$

$\langle 4, 4\rangle\}$

现用*Warshall*算法求取R^+。

显然，

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

以下使用*Warshall*算法求取 W。

（1） W以M为初值。

（2） 当i＝1时，由于 W中只有W［1，1］＝1，故需将第一行各元素与其本身作逻辑和，并把结果送第一行。即重新置值为 $W[1, k] \vee W[1, k] = W[1, k]$，但 W 事实上无改变。

（3） 当i=2时，由于 W［1，2］＝ W［4，2］＝1，故需将第一行和第四行各分量重新置值为 $W[1, k] \vee W[2, k]$ 和 $W[4, k] \vee W[2, k]$。于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（4） 当i=3时，由于 W［1，3］＝W［2，3］＝W［4，3］=1，故需将第一、二、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［3, k］＝W［1，k］，W［2，k］∨ W［3，k］=W［2，k］，W［4，k］∨ W［3，k］= W［3，k］。于是有：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（5） 当i＝4时，由于 W［1，4］＝ W［2, 4］= W［3, 4］= W［4， 4］=1，故需将第一、二、三、四行各分量重新置值，分别为 W［1，k］∨ W［4, k］＝ W［1，k］，W［2，k］∨ W［4，k］= W［2，k］，W［3，k］∨ W［4，k］= W［3，k］， W［4，k］∨ W［4，k］= W［4，k］。最终 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故$R^+ = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle,$

$\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle,$

$\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle,$

$\langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$。

下面几个定理给出了闭包的主要性质。

定理 7.11 设R是集合A上任一关系，那么

（1） R自反当且仅当$R=r(R)$。

（2） R对称当且仅当$R=s(R)$。

（3） R传递当且仅当$R=t(R)$。

证明 （1）、（3）的证明留给读者， 现证（2）。

（2）的充分性由$s(R)$定义立得。

为证必要性， 设R对称, 那么$R=R^{-1}$。 另一方面，$s(R)=R\cup R^{-1}=R\cup R=R$， 故$s(R)=R$。

定理7.12 对非空集合A上的关系R_1、R_2，若 $R_1 \subseteq R_2$，则

（1） $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2） $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3） $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 （1）和（2）的证明留作练习，下面仅证明（3）。

因为$t(R_2)$传递，且 $R_2 \subseteq t(R_2)$，但$R_1 \subseteq R_2$，故 $R_1 \subseteq t(R_2)$

因$t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系， 所以$t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

定理 对非空集合A上的关系R_1、R_2，则

（1） $r(R_1)\cup r(R_2)=r(R_1\cup R_2)$

（2） $s(R_1)\cup s(R_2)=s(R_1\cup R_2)$

（3） $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

证明 (1）和（2）的证明留作练习， 下面仅证明（3）。

因为 $R_1\subseteq R_1\cup R_2$, 由定理7.12知

$$t(R_1)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

同理 $$t(R_2)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

所以 $$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R1\cup R_2)$$

定理7.13 设R是集合A上任意二元关系，则

（1） 如果R是自反的，那么$s(R)$和$t(R)$都是自反的。

（2） 如果R是对称的，那么$r(R)$和$t(R)$都是对称的。

（3） 如果R是传递的，那么$r(R)$是传递的。

证明

（1）是显然的。

（2） 由于

$r(R)^{-1}=(I_A \cup R)^{-1}=I_A^{-1} \cup R^{-1}=I_A \cup R=r(R)$, 故$r(R)$是对称的。

另外， 由于对任意自然数n，

$(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$，又由于R对称， 故 $(R^n)^{-1} = R^n$。 因此，对任意$\langle x, y\rangle \in t(R)$, 总有$i$使$\langle x, y\rangle \in R^i$， 从而$\langle y, x\rangle \in (R^i)^{-1}=R^i$， 即$\langle y, x\rangle \in t(R)$。 故$t(R)$对称。

（3） 本式证明留给读者。 请注意， R传递并不保证$s(R)$传递。 例如， $R=\{\langle a, b\rangle\}$是传递的， 但是$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$却不是传递的。

定理 7.14 设R为集合A上的任一二元关系，

那么

（1） $rs(R)=sr(R)$

（2） $rt(R)=tr(R)$

（3） $st(R)\subseteq ts(R)$

证明

（1） $sr(R)=s(I_A\cup R)=I_A\cup R\cup(I_A\cup R)^{-1}$

$$=I_A\cup R\cup R^{-1}=I_A\cup s(R)=rs(R)$$

（2） 易证$(I_A \cup R)^n = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

对一切正整数n均成立，于是

$$tr(R) = t(I_A \cup R) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_A \cup R)^i$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_A \cup \bigcup_{j=1}^{i} R^j)$$

$$= I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$= I_A \bigcup t(R) = rt(R)$$

（3） 由定理7.12可知， 任一闭包运算Δ和任意二元关系R_1、R_2， 如果$R_1 \subseteq R_2$，那么$\Delta(R_1) \subseteq \Delta(R_2)$； 又据闭包定义， 对任意二元关系$R$有$R \subseteq s(R)$，故$t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R) = ts(R)$ (由定理7.13，$ts(R)$是对称的，所以$sts(R) = ts(R)$)。 于是可得到

$$st(R) \subseteq ts(R)$$

【例7.5.4】 设R是集合X上的二元关系，X=$\{a, b, \mathrm{c}\}$，$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle\}$。求$st(R)$和$ts(R)$，并画出关系图。

解 $t(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle\}$

$st(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle, \langle \mathrm{c}, a\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle\}$

$ts(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, \mathrm{c}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle \mathrm{c}, b\rangle, \langle a, \mathrm{c}\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle \mathrm{c}, a\rangle, \langle \mathrm{c}, \mathrm{c}\rangle\}$

$st(R)$和$ts(R)$的关系图分别如图7.5.2(a)、(b)所示。

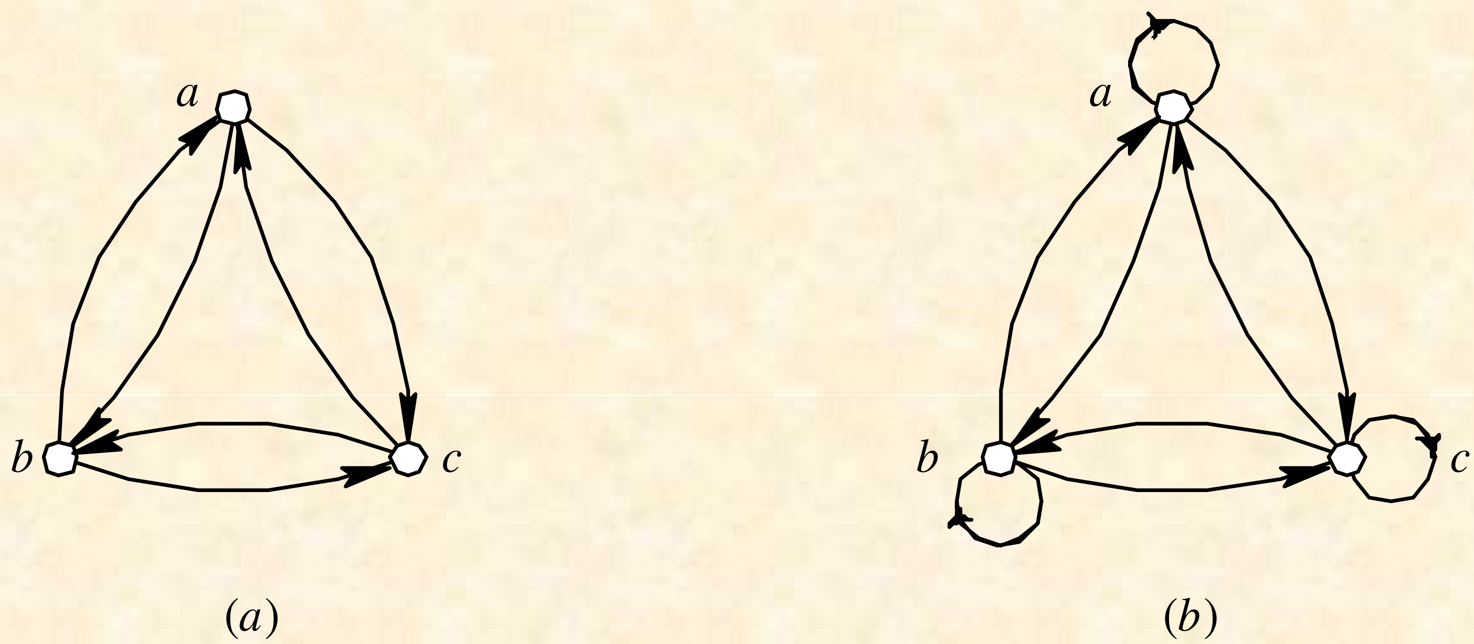


图 7.5.2

补充

(1)设A={a,b,c,d,e}，定义A中的关系：

R1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>}

R2={<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>}

判断R1、R2是否具有自反性、对称性和传递性，然后求出它们的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

(2)设A={a,b,c,d,e}，定义A中的关系：

R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,e>}，求t(R)。

课后作业

- 21
- 22
- 24 R_1-R_2 对自反性的封闭性、 $R_1\cup R_2$ 对反对称性和传递性的封闭性分别给出反例。
- 25
- 29
- 30