7.6 等价关系和划分

本节的目的就是要研究可用以对集合中元素进行分类的一种重要二元关系--等价关系。

一、 等价关系的定义与实例

定义 7.15 设 R 为非空集合上的关系．如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系．设 R 是一个等价关系，若 $\langle x,y\rangle\in R$，称 x 等价于 y，记做 $x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，如下定义 A 上的关系 R:

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x 与 y 模 3 相等，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等．不难验证 R 为 A 上的等价关系，因为

$\forall x\in A$，有 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x,y\in A$，若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，则有 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x,y,z\in A$，若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$，则有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

模 3 等价关系的关系图

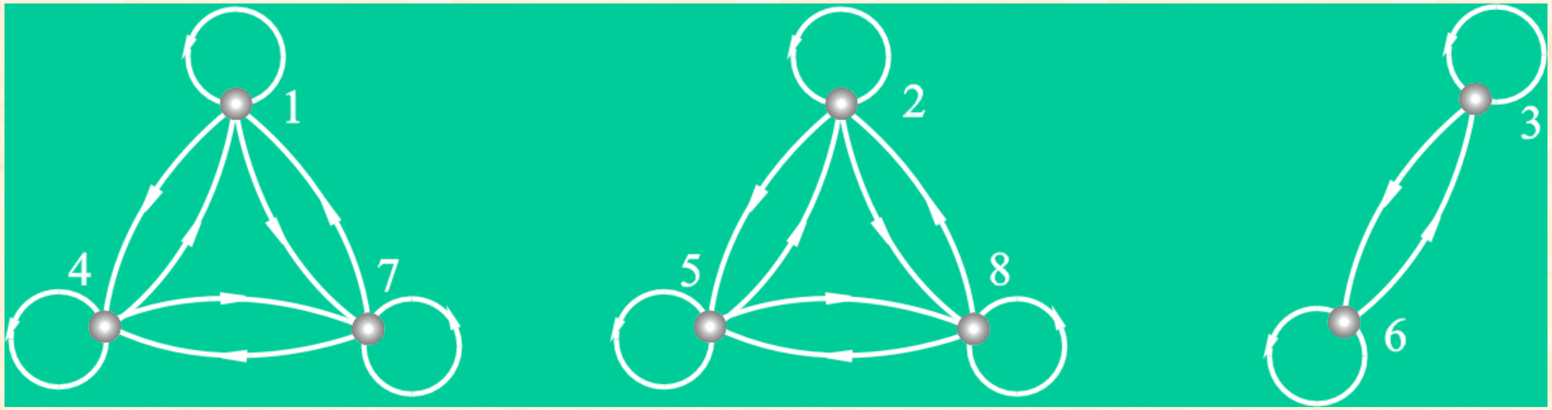


图6

【例7.6.1】

（1)　人类集合中的"同龄"、"同乡"关系都是等价关系。

（2）三角形集合的相似关系、全等关系都是等价关系。

（3） 住校学生的"同寝室关系"是等价关系。

（4） 命题公式间的逻辑等价关系是等价关系。

（5） 对任意集合A， A上的恒等关系I_A和全域关系$A\times A$是等价关系。

【例7.6.2】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$ 且$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。我们易证$R$是一个等价关系。

【例7.6.3】 整数集合I中的二元关系

$R=\{\langle x, y\rangle \mid m|(x-y), m\in I_+\}$, 其中"|"表示整除关系，证明$R$是等价关系。

证明

（1） $\forall x \in I$，因为$x-x=0$ ，所以$m|(x-x)$，因此$\langle x, x\rangle \in R$， R是自反的。

（2）$\forall x, y \in I$，设$\langle x, y\rangle \in R$，则$m|(x-y)$，即

$$\frac{x-y}{m} = k \in I$$

$$\frac{y-x}{m} = -\frac{x-y}{m} = -k \in I$$

故$\langle y, x\rangle \in R$，所以$R$是对称的。

（3） $\forall x, y, z \in I$，设 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, z\rangle \in R$，则

$$\frac{x-y}{m}=k\in I \qquad \frac{y-z}{m}=l\in I$$

因而

$$\frac{x-z}{m}=\frac{x-y+y-z}{m}=k+l\in I$$

故 $\langle x, z\rangle \in R$，所以 R 是传递的。

因此，R 是一个等价关系。

二、等价类及其性质

1．等价类

定义 7.16 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$或 $\bar{x}$.

A={1, 2, … , 8}上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

【例7.6.4】 设R是$X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$上的二元等价关系，$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in X$且$(x-y)/2$是整数$\}$。

(1) 给出关系矩阵；

(2) 画出关系图；

(3) 求出等价类。

解 （1） R的关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2） R的关系图

（3） $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \{0, 2, 4\}$

$[1]_R = [3]_R = \{1, 3\}$

等价类是关系图中互不相连的各个部分的顶点组成。

【例7.6.5】 若在例7.6.3中取m=4，即设R为整数集上的≡4关系，它有四个不同的等价类：

$[0] = \{..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\} = \{x|4整除x\}$

$[1] = \{..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...\} = \{x|4除x余1\}$

$[2] = \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...\} = \{x|4除x余2\}$

$[3] = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\} = \{x|4除x余3\}$

2．等价类的性质

定理 7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

（1）$\forall x \in A$, $[x]$是 A 的非空子集.

（2）$\forall x,y \in A$，如果 xRy，则 $[x] = [y]$.

（3）$\forall x,y \in A$，如果 $x \not R y$，则 $[x]$与$[y]$不交.

（4）$\cup \{[x] \mid x \in A\} = A$

证　（1）由等价类的定义可知，$\forall x \in A$ 有$[x] \subseteq A$．又由自反性有 $x \in [x]$，即$[x]$非空.

（2）任取 z，则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle z,x\rangle \in R$$

$$\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle z,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,z\rangle \in R$$

从而证明了 $z \in [y]$．综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$．同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

(3)　假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在 $z\in[x]\cap[y]$，从而有 $z\in[x]\wedge z\in[y]$，

即 $\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R$ 成立.

根据 R 的对称性和传递性必有 $\langle x,y\rangle\in R$，与 $x \not R\, y$ 矛盾

(4)　先证 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

任取 y，　$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$

任取 y，　$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$

从而有 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$ 成立.

综上所述得 $\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

关于等价类有下面十分显然的事实：

(1) 对任何集合A，I_A有$|A|$个不同的等价类，每个等价类都是单元素集。

(2) 对任何集合A，$A \times A$只有一个等价类为A（即每个元素的等价类全为A）。

(3) 同一等价类可以有不同的表示元素，或者说，不同的元素可能有相同的等价类。

三、商集与集合的划分

1. 商集

定义 7.17 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记做 A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A 关于模 3 等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}$$

$$A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

2．集合的划分

定义 7.18 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足下面条件：

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块.

例 设 $A=\{a,b,c,d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下：

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$$

$$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

$$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$$

$$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$$

$$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$$

$$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分.

【例7.6.6】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，则

$$\pi_1=\{\{1,3\}, \{0, 2, 4\}\}$$

$$\pi_2=\{\{0, 1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\pi_3=\{\{3\}, \{0, 1, 2, 4\}\}$$

$$\pi_4=\{\{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

均为A的划分，且π_1中的元素恰是例7.6.3的等价类。

定理7.6.4 设R为集合A上的等价关系，那么R对应的A划分是$\{[x]_R | x\in A\}$。

该定理的证明留作练习。

定理7.6.5 设π是集合A的一个划分，则如下定义的关系R为A上的等价关系：

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid \exists B\,(B\in\pi\wedge x\in B\wedge y\in B)\}$$

称R为π对应的等价关系。

证明是极为容易的，请读者自己完成。

定理7.6.6 设π是集合A的划分，R是A上的等价关系，那么，对应π的等价关系为R，当且仅当R对应的划分为π。

证明 $A=\Phi$时，只有Φ划分和等价关系Φ， 结论显然成立。下文设$A\neq\Phi$。

先证必要性。设对应π的等价关系为R，R对应的划分为π'，欲证$\pi=\pi'$。为此对任一元素$a\in A$，设B， B'分别是π，π'中含a的单元。那么，对A中任一元素b，有 $b\in B \Leftrightarrow aRb$（$R$是对应的等价关系）

$$\Leftrightarrow b\in [a]_R$$

$$\Leftrightarrow b\in B' \quad \text{（}\pi'\text{是}R\text{对应的划分）}$$

这就是说$B=B'$。 由于a是A中任意元素， 故可断定$\pi=\pi'$

再证充分性。设R对应的划分为π，π对应的等价关系为R'，欲证$R=R'$。为此考虑对A中任意元素a， b，有

$$aRb \quad b\in [a]_R$$

$$\Leftrightarrow \exists B(B\in\pi \wedge [a]_R=B\wedge b\in B)$$

$$(\pi\text{为}R\text{对应的划分})$$

$$\Leftrightarrow \exists B(B\in\pi \wedge a\in B\wedge b\in B)$$

$$\Leftrightarrow aR'b$$

$$\Leftrightarrow R'\text{为}\pi\text{对应的等价关系）}$$

故$R=R'$。

四、商集与划分的对应关系

商集 A/R 就是 A 的一个划分，不同的商集对应于不同的划分.

任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R：

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge\ x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中}\}$$

则 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π.

A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

例 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 如下图，先做出 A 的所有划分，从左到右分别记作 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5$.

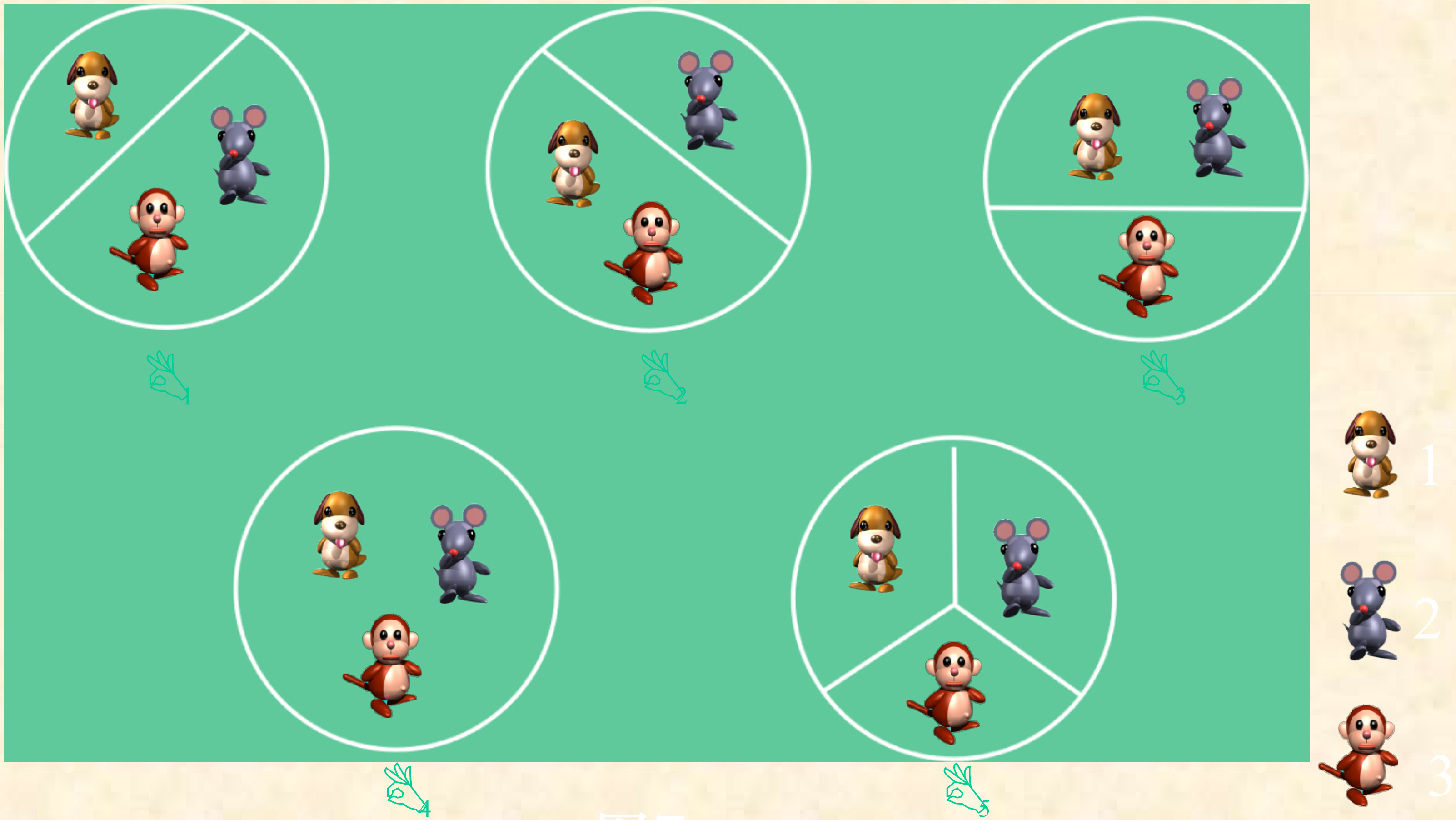


图7

这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是：

π_4 对应于全域关系 E_A, π_5 对应于恒等关系 I_A,

π_1,π_2 和 π_3 分别对应于等价关系 R_1, R_2 和 R_3. 其中

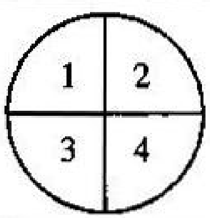
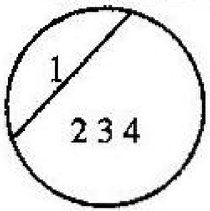
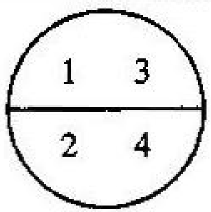
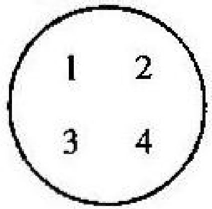
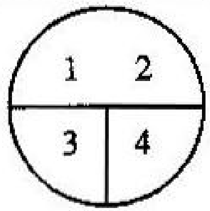
$$R_1=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

$$R_2=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

【例7.6.7】 设A 是一个集合且$|A|=4$，则A上共有多少种不同的等价关系？

解 本题利用划分与等价关系的一一对应，用划分求等价关系， 具体求解见下表

4=1+1+1+1	4=1+3	4=2+2	4=4	4=1+1+2
1 种	C_4^1 种	$\frac{1}{2}C_4^2$ 种	1 种	C_4^2 种
				

【例7.6.8】设$A=\{1, 2, 3, 4\}$ 且$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。计算$A/R$。

解 从该例子中，我们有

$[1]_R=\{1, 2\}=[2]_R$，同时$[3]_R=\{3, 4\}=[4]_R$。

所以 $A/R=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$。

【例7.6.9】整数集合A中的二元关系

$R=\{\langle x, y\rangle \mid 2 \mid (x-y)\}$，其中“|”表示整除关系。求$A/R$。

解

［0］$=\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$，即由偶整数组成，因为它们整除2的余数是0。

［1］$=\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$，即由奇整数组成，因为它们整除2的余数是1。

因此A/R是由偶整数集合和奇整数集合组成的集合。

由上两个例子我们有对有穷集合A如何求A/R的步骤：

(1) 从集合A中任意选一个元素a，并计算a所在的等价类［a］。

(2) 如果［a］$\neq A$，选另一个元素b，$b \in A$且$b \notin$［a］，计算［b］。

(3) 如果A不与上面计算的所有等价类的并相等，则在A中选不在这些等价类中的元素x且计算［x］。

(4) 重复(3)直到集合A与所有等价类的并相等，则结束。

定义7.6.5 设π_1，π_2为集合的两个划分。称π_1细分π_2，如果π_1的每一划分块都包含于π_2的某个划分块。

π_1细分π_2表示为$\pi_1 \leq \pi_2$。当$\pi_1 \leq \pi_2$且$\pi_1 \neq \pi_2$，则表示为$\pi_1 < \pi_2$，读作π_1真细分于π_2。

【例7.6.10】 当$A=\{a, b, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$时，

$\pi_1=\{\{a, b\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{d}\}\}$细分

$\pi_2=\{\{a, b, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{d}\}\}$，

$\pi_3=\{\{a\}, \{b\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{d}\}\}$细分所有划分。而所有划分均细分$\pi_4=\{\{a, b, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}\}$。并且，$\pi_1$真细分$\pi_2$，$\pi_3$真细分$\pi_1$。

定理7.6.7 设R_1，R_2为集合A上的等价关系，π_1，π_2分别是R_1，R_2所对应的划分，那么

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ 当且仅当 } \pi_1 \leq \pi_2$$

证明 当$A=\Phi$时命题显然真。 以下设$A \neq \Phi$。

先证必要性。 设$R_1 \subseteq R_2$， B_1为π_1中任一划分块， 令$B_1=[a]_{R1}$， $a \in A$。 考虑$[a]_{R2}=B_2 \in \pi_2$。 对任一$b \in B_1$， 即$b \in [a]_{R1}$, 有bR_1a, 从而有bR_2a（因$R_1 \subseteq R_2$），故$b \in [a]_{R2}=B_2$。 这就是说$B_1 \subseteq B_2$， 因而$\pi_1 \leq \pi_2$。

再证充分性。设$\pi_1 \le \pi_2$，对任意x, y, 若xR_1y，那么有π_1中划分块$B_1 =［x］_R$，使x，$y \in B_1$。由于$\pi_1 \le \pi_2$，故有π_2中划分块B_2，使$B_1 \subseteq B_2$，从而x，$y \in B_2$，即x，y属同一个R_2等价类，因此xR_2y。至此我们证得$R_1 \subseteq R_2$。

本定理表明，越“小”（含有较少序偶）的等价关系对应越细的划分，反之亦然。很明白，最小的等价关系是恒等关系I_A，它对应于最细的划分（每一划分块恰含一个元素），最大的等价关系是全关系E_A，它对应于最粗的划分（只有一个划分块）。

补充：

（1）设Z是整数集，m是大于1的正整数，Z中关系R定义如下：

$$\forall a,b \in Z, aRb \Leftrightarrow \frac{a-b}{m} \in Z$$

证明:R是等价关系，并求Z关于R的商集Z/R。

（2）设A={1,2,3,4,5,6}，定义A中的二元关系如下：

R={<1,1>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,6>,<3,2>,<3,3>,<3,6>,<4,1>,<4,4>,<5,5>,<6,2>,<6,3>,<6,6>}

判断R是否是等价关系？

若是等价关系，写出A的关于R的等价类。

7.7 偏序关系

序关系是关系的一大类型，它们的共同点是都具有传递的，因此可根据这一特性比较集合中各元素的先后顺序。事物之间的次序常常是事物群体的重要特征，决定事物之间次序的还是事物间的关系。本节的目的则是要研究可用以对集合中元素进行排序的关系--序关系。其中很重要的一类关系称作偏序关系。偏序的作用是用来排序（称偏序是因为A上的所有元素不一定都能按此关系排序，所以又称为半序、部分序）。

一、偏序关系

1．定义 7.19

偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$.

设$\preccurlyeq$为偏序关系，如果$<x, y> \in \preccurlyeq$，则记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x“小于或等于”y.

2. 实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

如果集合A上有偏序关系R，则称A为偏序集（*ordered sets*），用序偶$\langle A，R\rangle$表示之。

若$\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，常记作$x \preccurlyeq y$，读作"$x$小于或等于$y$"，说明$x$在偏序上排在$y$的前面或者相同。

为简明起见，我们用记号$\preccurlyeq$表示一般的偏序关系，从而$\langle A，\preccurlyeq\rangle$表示一般的偏序集。

注意　这里的“小于或等于”不是指数的大小，而是指在偏序关系中的顺序性。x小于或等于y的含义是：按照这个序，x排在y的前边或者x就是y。根据不同偏序的定义，对偏序有着不同的解释。例如，正整数集合上的整除关系“|”为一偏序关系，$<I_+, |>$为一偏序集，2|4(通常写为$2\preccurlyeq 4$)的含义是2整除4，2在整除关系上排在4的前面，也就是说2比4小。

【例7.7.1】

（1） 设A是集合S的子集为元素所构成的集合，包含关系"$\subseteq$"是A上的一个偏序关系，因此$\langle A, \subseteq\rangle$是一个偏序集。

（2） 实数集R上的"$\leq$"即小于等于关系为一偏序关系，$\langle R,\leq\rangle$表示偏序集。实数集R上的"$\geq$"即大于关系也是偏序关系，$\langle R, \geq\rangle$也表示一个偏序集。$7\geq 6$，可以写作$7 \preccurlyeq 6$，理解为在大于等于偏序关系中，7排在6的前面。

3．相关概念

定义 7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$x,y\in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：

$x\prec y$(或 $y\prec x$)， $x=y$， x 与 y 不是可比的.

定义 7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$\forall x,y\in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义 7.22 $x,y\in A$，如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$，则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系，2 覆盖 1，4 和 6 覆盖 2．但 4 不覆盖 1.

例如，实数集合上的小于等于关系是偏序关系且任意两个数均是可比的。而正整数上的整除关系也是偏序关系，但不是任意两个数都可比，如2与3不可比，因为2不能整除3。

【例7.7.3】 设A是正整数m=12的因子的集合，并设 $\preccurlyeq$ 为整除的关系，求cov A。

解

cov A={ $\langle 1, 2\rangle$ ，$\langle 1, 3\rangle$ ，$\langle 2, 4\rangle$ ，$\langle 2, 6\rangle$ ，$\langle 3, 6\rangle$ ，$\langle 4, 12\rangle$ ，$\langle 6, 12\rangle$ }

我们可对偏序关系的关系图作简化。由于偏序关系自反，各结点处均有环，约定全部略去环。

由于偏序关系反对称且传递，关系图中任何两个不同结点之间不可能有相互到达的边或通路，因此可约定边的向上方向为箭头方向， 省略全部箭头。最后由于偏序关系具有传递性，我们还可将由传递关系可推定的边也省去。 经过这种简化的具有偏序关系的关系图称为**哈斯（*Hasse*）图**。哈斯图既表示一个偏序关系，又表示一个偏序集。

二、偏序集与哈斯图

1．偏序集

定义 7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集，记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系$\leq$构成偏序集$<Z,\leq>$

集合 A 的幂集 $P(A)$和包含关系 $R_{\subseteq}$构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

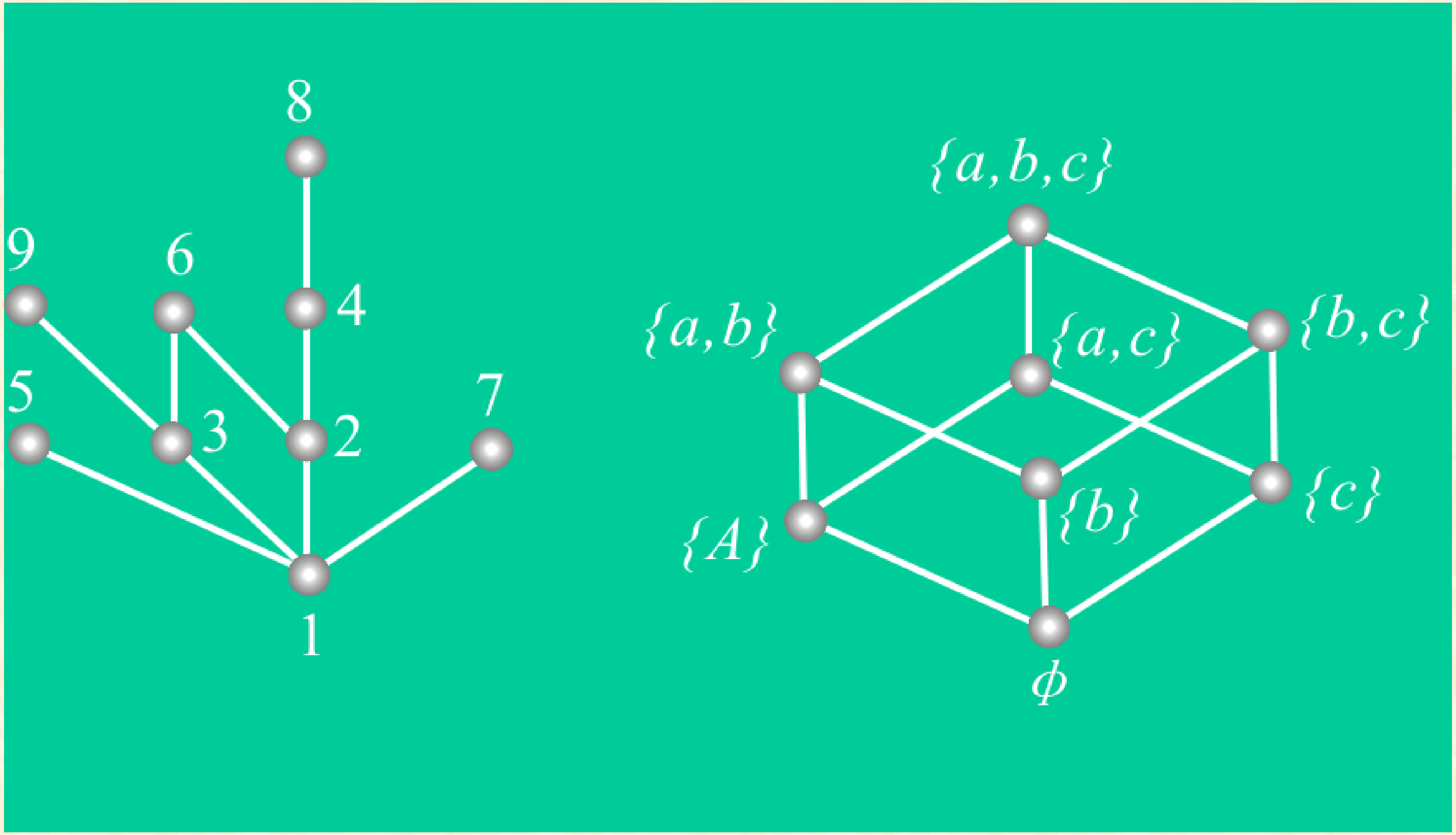
2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

例 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, R 整除>和<$P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$>的哈斯图.



例 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

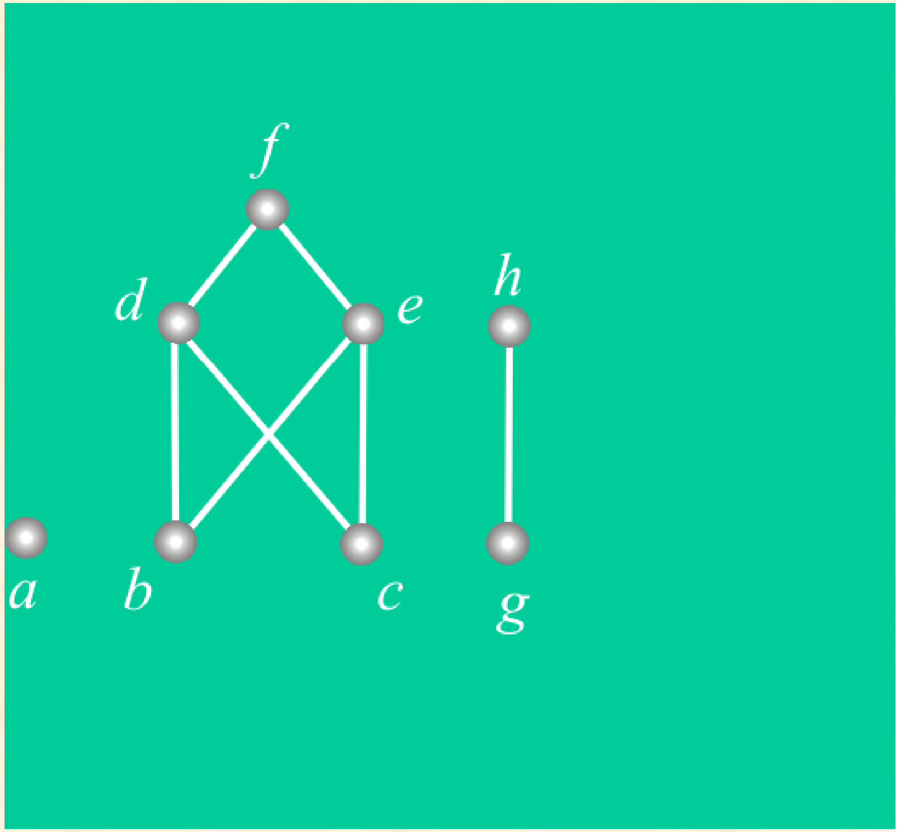


图 9

解 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

【例7.7.5】 画出下面几个偏序集的哈斯图：

（1） $\langle S_8, |\rangle$ ，其中S_8表示8的所有因子作元素构成的集合。

（2） $\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, |\rangle$ ，其中"|"是集合上的数之间的整除关系。

（3） $\langle S_{30}, |\rangle$ ，其中S_{30}表示30 的所有因子作元素构成的集合。

解 先分别求出其覆盖。

（1） $S_8=\{1, 2, 4, 8\}$

$\mathrm{cov}\{S_8\}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 8\rangle\}$

（2） $\mathrm{cov}\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$

$=\{\langle 2, 6\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 6, 12\rangle, \langle 12, 24\rangle, \langle 12, 36\rangle\}$

（3） $S_{30}=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$\mathrm{cov}\, S_{30}=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle,$

$\langle 2, 10\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 3, 15\rangle, \langle 5, 10\rangle,$

$\langle 5, 15\rangle, \langle 6, 30\rangle, \langle 10, 30\rangle, \langle 15, 30\rangle\}$

画出其哈斯图，如图7.7.2所示，（a）、（b）、（c）分别表示上述各偏序集。

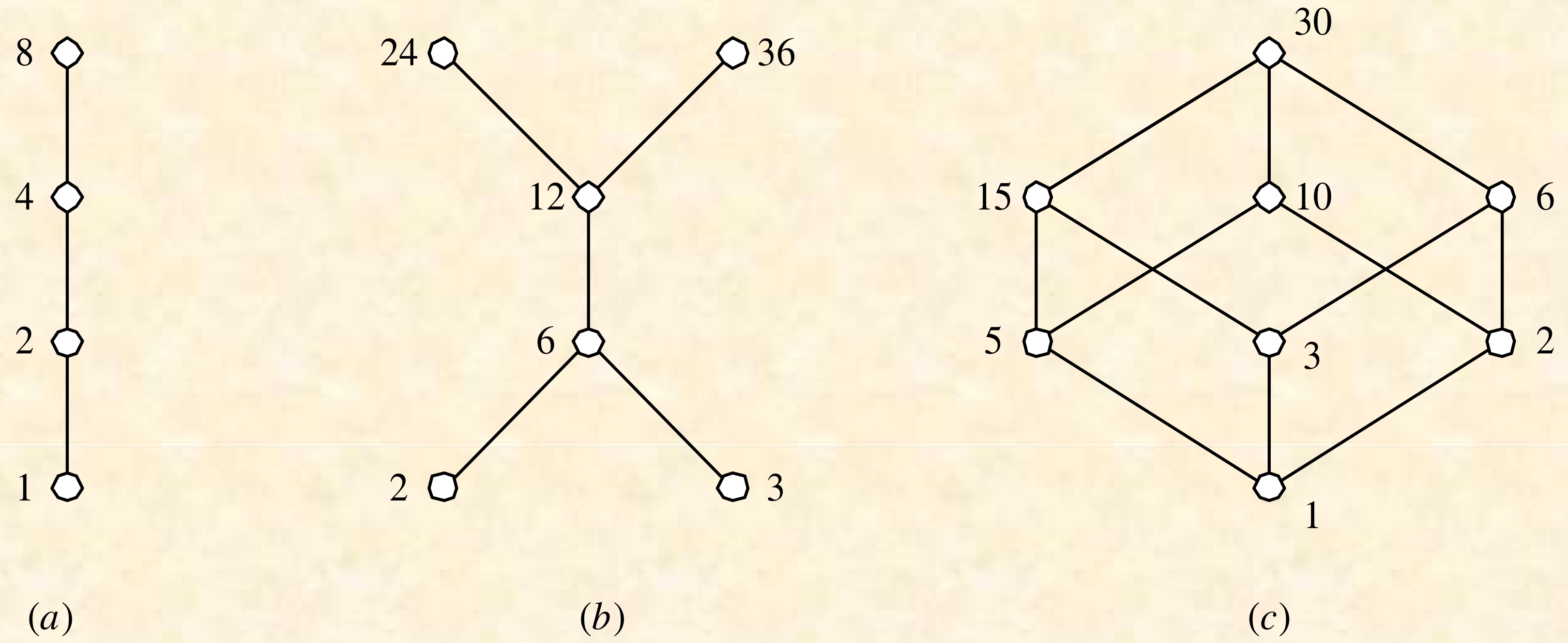


图 7.7.2

【例7.7.6】 由图7.7.3所示的哈斯图，写出对应的偏序关系、关系矩阵。

解 $A=\{a, b, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$

偏序关系 $\preccurlyeq=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$

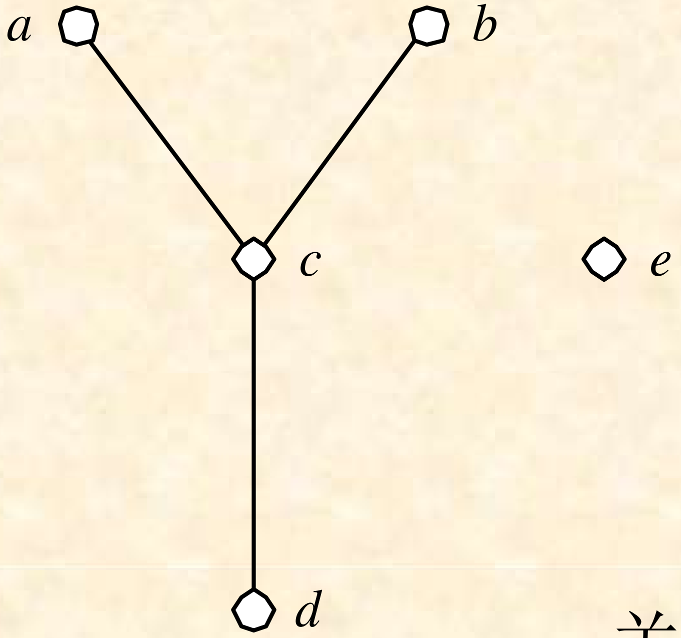


图 7.7.3

$$\text{关系矩阵}\ M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

偏序集中链和反链的概念是十分重要的。

定义7.7.4 设偏序集〈A, $\preccurlyeq$〉， $B \subseteq A$。

(1) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都是可比的，则称B为A上的链（*chain*），B中元素个数称为链的长度。

(2) 如果对任意的$x, y \in B$，x和y都不是可比的，则称B为A上的反链（*antichain*），B中元素个数称为反链的长度。

我们约定，若A的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

【例7.7.7】 图7.7.4中的哈斯图表示一偏序集，举例说明链及反链。

长度为5的链有$\{a, c, e, h, m\}$，$\{a, b, e, i, n\}$等。

长度为4的链有$\{b, d, g, m\}$，$\{c, e, h, k\}$，$\{c, d, f, j\}$等。

长度为3的链有$\{b, e, i\}$，$\{f, d, c\}$，$\{n, i, e\}$等。

长度为2的链有$\{d, f\}$，$\{m, h\}$等。

长度为1的链有$\{m\}$，$\{n\}$等。

长度为4的反链只有$\{f, g, h, i\}$和$\{n, m, k, j\}$。

长度为3的反链有$\{j, k, i\}$，$\{f, g, e\}$, $\{d, h, i\}$等。

长度为2的反链有$\{d, e\}$，$\{b, c\}$，$\{g, h\}$，$\{f, e\}$等。

长度为1的反链有$\{a\}$，$\{e\}$等。

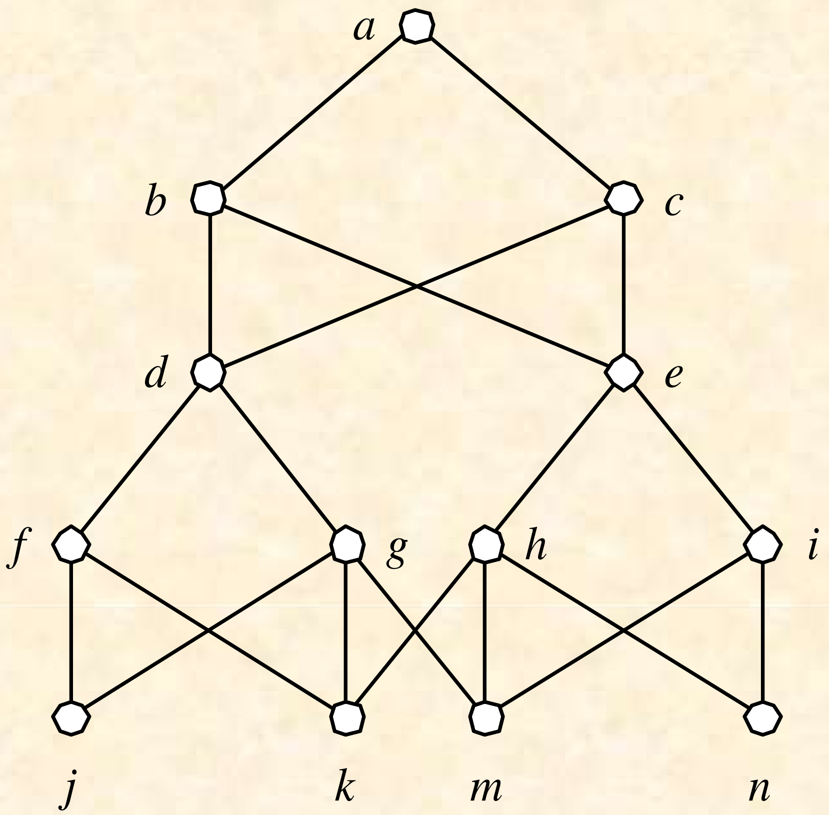


图 7.7.4

从例题7.7.7的哈斯图上可看出，在每个链中总可从最高结点出发沿着覆盖方向遍历该链中所有结点。每个反链中任意两个结点间均无连线。

三、偏序集中的特殊元素.

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义 7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元.

（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元.

（3）若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极小元.

（4）若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极大元.

性质:

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

从以上定义可以看出，最小元与极小元是不一样的。最小元是B中最小的元素，它与B中其它元素都可比；而极小元不一定与B中元素都可比，只要没有比它更小的元素，它就是极小元，同理最大元是B中最大的元素，它与B中其它元素都可比；而极大元不一定与B中元素都可比，只要没有比它更大的元素，它就是极大元。

【例7.7.8】 偏序集〈{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, ≼〉，由图7.7.5所示哈斯图给出。

（1）$B=\{1, 2, 3, 5\}$

B的最大元为5。

B的极大元为5。

B的最小元为1。

B的极小元也为1。

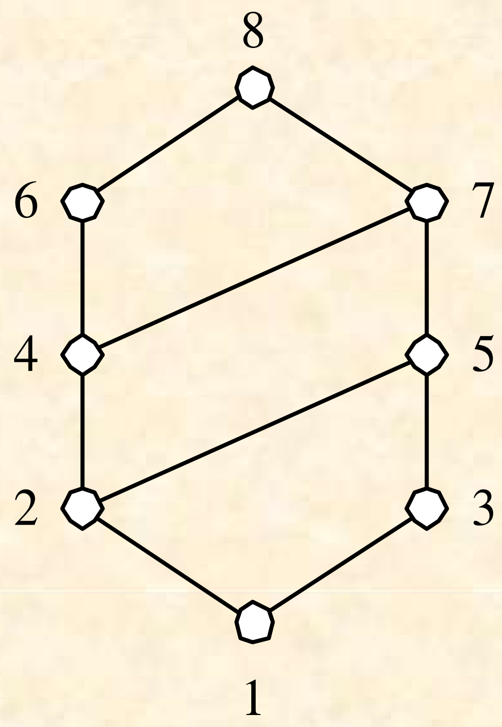


图 7.7.5

（2）$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

B无最大元和最小元。

B的极大元是6, 7，极小元是2, 3。

（3）$B=\{4, 5, 8\}$

B的最大元是8，无最小元。

B的极大元为8，极小元为4, 5。

（4）$B=\{4, 5\}$

B无最大元，也无最小元。

B的极大元是4, 5，极小元也是4, 5。

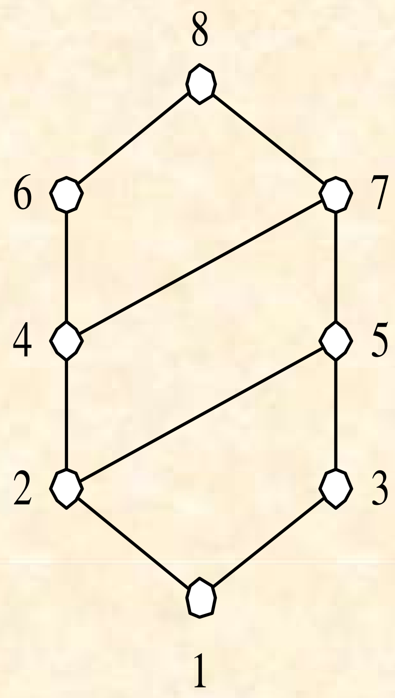


图 7.7.5

从例7.7.8中可知，最大元、最小元未必存在，若存在则必唯一。极大元、极小元虽存在，但却不唯一，它们之间不可比，并处在子集哈斯图的同一层次上，极大元在最高层，极小元在最低层。关于这些，有下面的定理。

定理7.7.1 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$。

（1）若b为B的最大（最小）元，则b为B的极大（极小）元。

（2）若B有最大（最小）元，则B的最大（最小）元唯一。

（3）若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。

当$n=1$时，B中仅有一个元素，它既是极大元，也是极小元。

当$n=2$时，设$B=\{b_1, b_2\}$。那么，$b_1 \preccurlyeq b_2$时b_1为极小元，b_2为极大元；$b_2 \preccurlyeq b_1$时b_2为极小元，b_1为极大元；$\neg b_1 \preccurlyeq b_2$且$\neg b_2 \preccurlyeq b_1$时，$b_1$，$b_2$同为极大元，也同为极小元。

设$n=k$时命题为真。若$n=k+1$，$B=\{b_1,b_2,...,b_k,b_{k+1}\}$。据归纳假设，$\{b_1,b_2,...,b_k\}$有极大元$b_i$，极小元$b_\mathrm{j}$。考虑$\{b_i, b_{k+1}\}$，若$b_i \preccurlyeq b_{k+1}$，$b_{k+1}$显然是$B$的极大元；若$b_{k+1} \preccurlyeq b_i$，或两者不可比较，则$b_i$是$B$的极大元。同理可证，$b_\mathrm{j}$或$b_{k+1}$是$B$的极小元。

归纳完成，（3）得证。

定理7.7.2(偏序集的分解定理) 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为一有限的偏序集，且A中最长链的长度为n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n。即A有一划分，使划分有n个划分块，且每个划分块为一反链。

证明 对n进行归纳。

当n=1时，A中没有任何两个不同元素有≼关系，因此A本身既为一链，又为一反链，因此划分$\{A\}$即满足要求。

设n=k时命题成立。现令n=k+1。

设M为A中所有极大元素的集合。由于A为有限集，因此M必为一非空的反链（极大元之间是不可比较的）。考虑有序集〈A-M，≼〉，它不可能有长度为n的链（否则A中链的长度将超过n，关于这一点请读者思考），因而〈A-M，≼〉中最长链的长度应当为n-1=k。据归纳假设，A-M有k个划分块的划分，且每个划分块为一反链。这k个反链连同反链M，恰构成A的k+1个划分块组成的划分。所以归纳完成。

定理7.7.3 设〈A, ≼〉为一偏序集，$|A|=mn+1$，那么，A中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链。

证明 若A中链的长度不超过n，那么据定理7.7.2，A中必有长度为$m+1$的n个划分块的反链，否则$|A|\leq mn$。

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义 7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

（1）若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的上界.

（2）若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的下界.

（3）令 $C = \{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

（4）令 $D = \{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

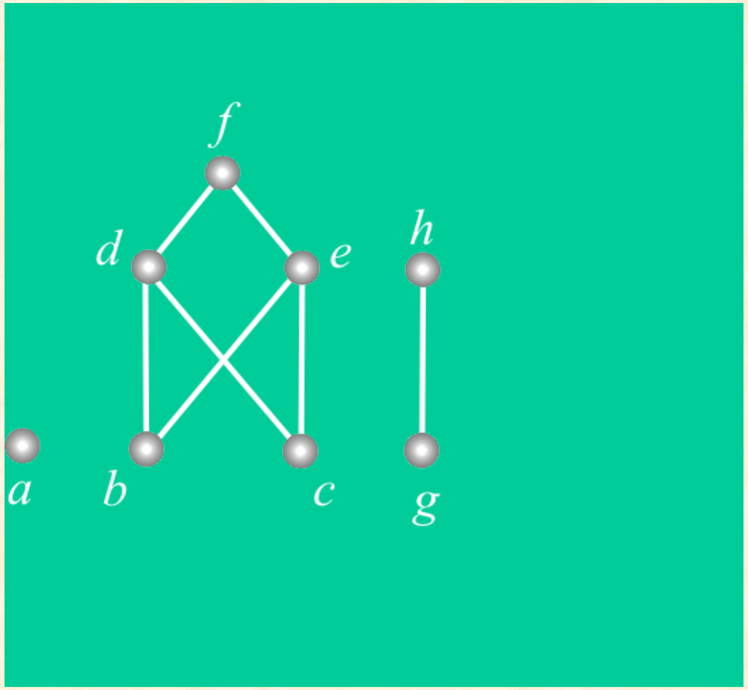
性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

例 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元：a, b, c, g；　　极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

例 设 X 为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且 $A\neq\varnothing$. 若 $|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

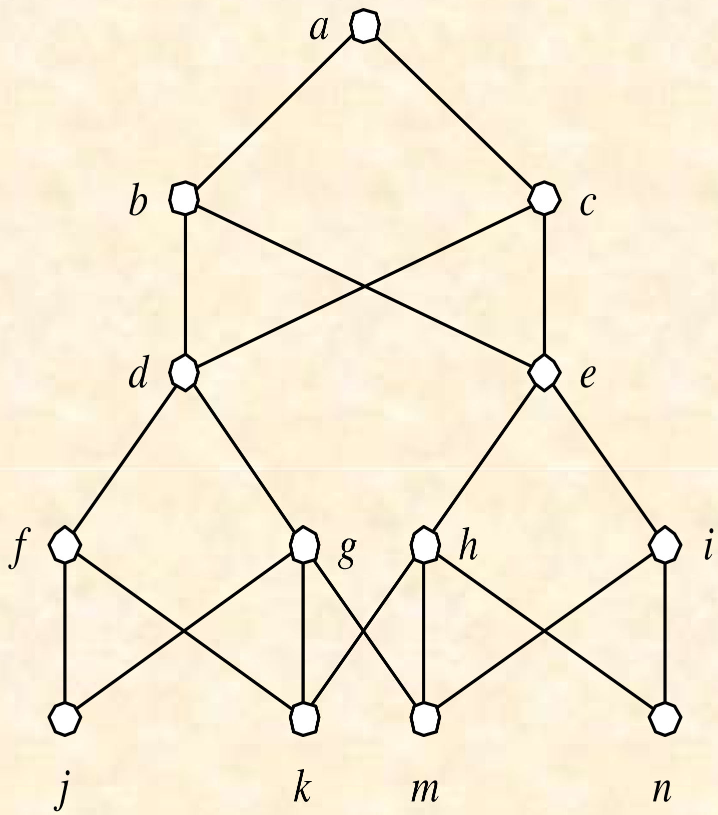
(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n\geq 2$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x\in X$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X-\{x\}, x\in X$.

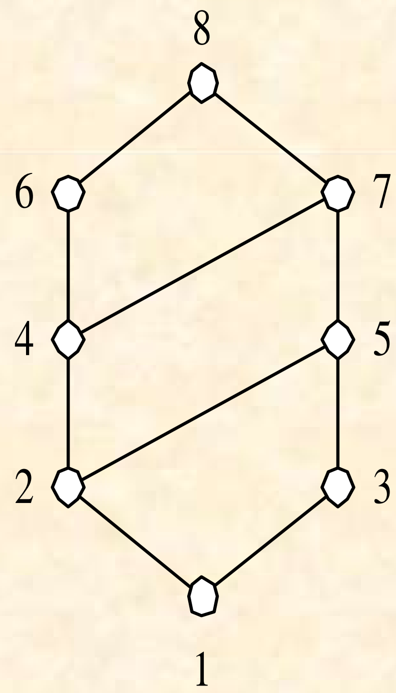
【例7.7.10】设偏序集〈A, ≼〉如图7.7.4所示，考虑集合B={d, e}，它有上界a, b, c，但无最小上界；它有下界k, m等，但没有最大下界。当B={f, g, h, i}时，它有上界a, b, c等，无最小上界；它没有下界和最大下界。



再设偏序集〈A, ≼〉如图7.7.5所示。

（1）当B={2, 3, 4, 5, 7}时，B有上界7, 8，下界1；最小上界7，最大下界1。

（2）当B={2, 5, 4, 6}时，B有上界8，下界2, 1；最小上界8，最大下界2。



作业

1. 图7.2为一偏序集〈A,R〉的哈斯图。

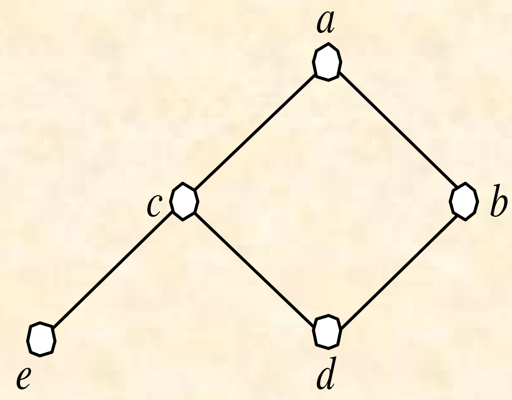


图7.2

（1）下列命题哪些为真？

aRb，dRa，cRd，cRb，bRe，aRa，eRa；

（2）画出R的关系图；

（3）指出A的最大、最小元（如果有的话），极大、极小元；

（4）求出子集B1={c, d, e}，B2={b, c, d}，B3={b, c, d, e}的上界、下界，上确界、下确界（如果有的话）。

2. 设A={a, b, c, d, e}，A上的偏序关系R={〈c, a〉，〈c,d〉}$\cup I_A$。

(1)画出R的哈斯图；

(2)求A关于R的极大元和极小元。

定理7.7.4 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$。

（1）若b为B之最大元（最小元），则b必为B最小上界（最大下界）。

（2）若b为B之上（下）界，且$b \in B$，则b必为B的最大（最小）元。

（3）如果B有最大下界（最小上界），则最大下界（最小上界）唯一。

证明略。

定义7.7.8 设〈A, ≼〉为偏序集，如果A的任何非空子集都有最小元，则称≼为良序关系（*well founded relation*），称〈A, ≼〉为良序集(*well ordered set*)。

【例7.7.11】 设I_n及N={1, 2, 3,...},对于小于等于关系来说是良序集合，即〈I_n,≼〉是良序集合。

定理4.7.5 一个良序集一定是全序集。

证明 设〈A, ≼〉为良序集合，则对任意两个元素x, y∈A可构成子集{x,y}，必存在最小元素，这个最小元素不是x就是y，因此一定有x≼y或y≼x。所以〈A, ≼〉为全序集合。

定理7.7.6 一个有限的全序集一定是良序集。

证明 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，令〈A, ≼〉是全序集合。

用反证法，假定〈A, ≼〉不是良序集合，则必存在一个非空子集$B\subseteq A$，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找出两个元素x与y是无关的，由于〈A, ≼〉是全序集，$x, y\in A$，所以x, y必有关系，得出矛盾，故〈A, ≼〉必是良序集合。

上述结论对于无限的全序集合不一定成立。

例如，大于0小于1的全部实数，按大小次序关系是一个全序集合，但不是良序集合，因为集合本身就不存在最小元素。

定理7.7.8（良序定理） 任意的集合都是可以良序化的。

课后作业

- 32（4）（5）
- 33
- 36
- 39
- 46
- 50

第8节 习题课

一、 本章的主要内容及要求

1． 主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从 A 到 B 的关系、A 上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质
- A 上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A 上关系的自反、对称、传递闭包
- A 上的等价关系、等价类、商集与 A 的划分
- A 上的偏序关系与偏序集

2．要求：

- 基本概念要清楚

  熟练掌握关系的三种表示法

  能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）

  掌握含有关系运算的集合等式

  掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念

- 以下基本运算要熟练

  $A\times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

  求等价类和商集 A/R

  给定 A 的划分 π，求出 π 所对应的等价关系

  求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界

- 掌握基本的证明方法

  证明涉及关系运算的集合等式

  证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

二、练习

1．设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{<x,y> \mid x, y \in A$ 且 $x+2y \le 6\}$,

$S = \{<1,2>, <1,3>,<2,2>\}$，求

（1）R 的集合表达式

（2）R^{-1}

（3）dom R, ran R, fld R

（4）$R \circ S$, R^3

（5）$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

- 解

（1） $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

（2） $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

（3） $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

（4） $R\circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

（5） $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$;

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

2．设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R:

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解

$A\times A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,$
$\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

根据有序对 $\langle x,y\rangle$ 中的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将 A 划分成等价类:

$A/R=\{\{\langle 1,1\rangle\}, \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}, \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\},$
$\{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}, \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\},$
$\{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}, \{\langle 4,4\rangle\}\}$

3．设 R 是 Z 上的模 n 等价关系，即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\, n),$$

试给出由 R 确定的 Z 的划分 π.

解 设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$，则

$$[r] = \{kn+r \mid k \in Z\}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\pi = \{[r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

4．设偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图所示.

（1）写出 A 和 R 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

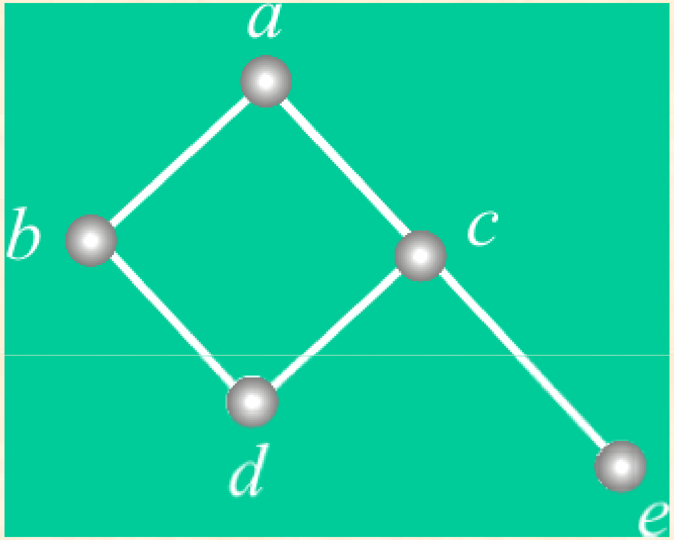


图11

解

（1）$A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,c\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$

（2）极大元和最大元是 a，极小元是 d, e；没有最小元.

5．设 R 是 A 上的二元关系， 设 $S=\{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R\wedge<c,b>\in R)\}$.
证明如果 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

证

R 是 A 上的等价关系.

证 S 在 A 上自反　任取 x,

$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R$　（因为 R 在 A 上自反）

$\Rightarrow \exists x\,(<x,x>\in R\wedge<x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$

证 S 在 A 上对称　任取$<x,y>$,

$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R\wedge<c,y>\in R)$

$\Rightarrow \exists c\,(<c,x>\in R\wedge<y,c>\in R)$　（因为 R 在 A 上对称）

$\Rightarrow <y,x>\in S$

证 S 在 A 上传递　任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$

$\Rightarrow \exists c\,(<x,c>\in R\wedge<c,y>\in R) \wedge \exists d\,(<y,d>\in R\wedge<d,z>\in R)$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$　（因为 R 在 A 上传递）

$\Rightarrow <x,z>\in S$

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义 $A\times B$ 上二元关系 T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证

证明自反性　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

证明反对称性　任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

证明传递性　任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

小结：关系性质的证明

- 证明 R 在 A 上自反

  任取 x,

  $x \in A \Rightarrow$ ………………………………… $\Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

  前提　　　　　推理过程　　　　　结论

- 证明 R 在 A 上对称

  任取$\langle x,y\rangle$，

  $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow$ ………………………………… $\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

  前提　　　　　推理过程　　　　　结论

- 证明 R 在 A 上反对称

  任取$<x,y>$，

  $<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

  前提　　　　　推理过程　　　　　结论

- 证明 R 在 A 上传递

  任取$<x,y>,<y,z>$，

  $<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

  前提　　　　　推理过程　　　　　结论

7．R,S 为 A 上的关系，证明 $R\subseteq S \Rightarrow t(R)\subseteq t(S)$

证 只需证明对于任意正整数 n, $R^n\subseteq S^n$. 对 n 归纳.

n=1，显然为真.

假设对于 n，命题为真，任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R^n\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\ (<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\ (<x,t>\in S^n \wedge <t,y>\in S)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in S^n\circ S$$

$$\Rightarrow <x,y>\in S^{n+1}$$

小结：涉及关系运算的集合包含或者等式的证明

- 方法：证明集合包含或者相等的证明方法.

  数学归纳法（主要用于幂运算）

- 证明中用到关系运算的定义和公式，如：

$$x\in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in R)$$

$$y\in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R)$$

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1}$$

$$<x,y>\in R\circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)$$

$$<x,y>\in R\restriction A \Leftrightarrow x\in A\wedge <x,y>\in R$$

$$y\in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A\wedge <x,y>\in R)$$

$$r(R) = R\cup I_A$$

$$s(R) = R\cup R^{-1}$$

$$t(R) = R\cup R^2\cup \ldots$$