第14章 图的基本概念

本章内容

1.1 图的基本概念

- 图的定义
- 图的一些概念和规定
- 简单图和多重图
- 顶点的度数与握手定理
- 图的同构
- 完全图与正则图
- 子图与补图

无序积与多重集合

- 设A，B为任意的两个集合，称$\{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$为A与B的无序积，记作A&B。

  可将无序积中的无序对$\{a, b\}$记为(a, b)，并且允许$a=b$。

  无论a, b是否相等，均有$(a, b)=(b, a)$，因而A&B＝B&A。

- 元素可以重复出现的集合称为多重集合或者多重集，某元素重复出现的次数称为该元素的重复度。

  例如　在多重集合$\{a, a, b, b, b, c, d\}$中，

  a, b, c, d的重复度分别为2, 3, 1, 1。

无向图和有向图

定义1 一个无向图是一个有序的二元组<V，E>, 记作G，其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E称为边集，它是无序积V&V的多重子集，其元素称为无向边，简称边。

定义2 一个有向图是一个有序的二元组<V，E>，记作D，其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E为边集，它是笛卡儿积V×V的多重子集，其元素称为有向边，简称边。

说明

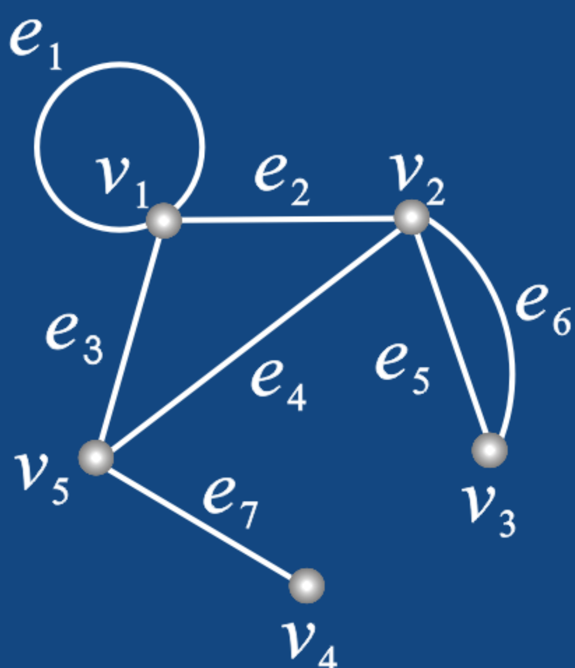
- 可以用图形表示图，即用小圆圈（或实心点）表示顶点，用顶点之间的连线表示无向边，用有方向的连线表示有向边。

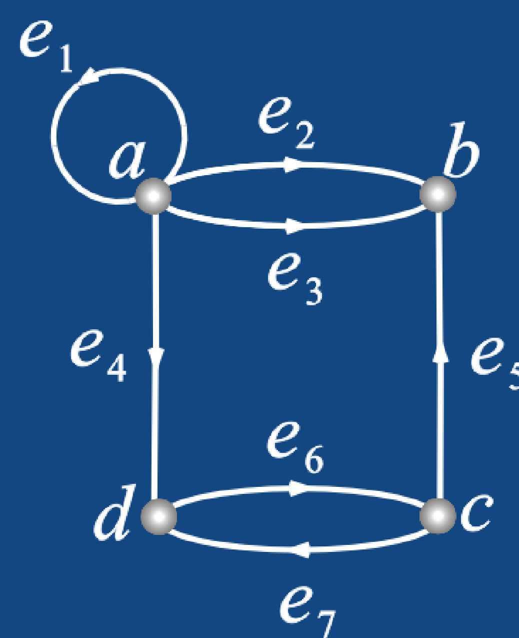
例1.1

例1.1 （1） 给定无向图$G=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，
$E=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_1,v_5),(v_4,v_5)\}$.

（2） 给定有向图$D=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{a,b,c,d\}$，
$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$。

画出G与D的图形。





图的一些概念和规定

- G表示无向图，但有时用G泛指图(无向的或有向的)。
- D只能表示有向图。
- V(G)，E(G)分别表示G的顶点集和边集。
- 若|V(G)|＝n，则称G为n阶图。
- 若|V(G)|与|E(G)|均为有限数，则称G为有限图。
- 若边集E(G)＝∅，则称G为零图，此时，又若G为n阶图，则称G为n阶零图，记作N_n，特别地，称N_1为平凡图。
- 在图的定义中规定顶点集V为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果，为此规定顶点集为空集的图为空图，并将空图记为∅。

标定图与非标定图、基图

- 将图的集合定义转化成图形表示之后，常用e_k表示无向边(v_i, v_j)（或有向边$\langle v_i, v_j\rangle$），并称顶点或边用字母标定的图为标定图，否则称为非标定图。
- 将有向图各有向边均改成无向边后的无向图称为原来图的基图。
- 易知标定图与非标定图是可以相互转化的，任何无向图G的各边均加上箭头就可以得到以G为基图的有向图。

关联与关联次数、环、孤立点

- 设G＝<V, E>为无向图，$e_k = (v_i, v_j) \in E$，
  称v_i, v_j为e_k**的端点**，e_k与v_i或e_k与v_j是彼此相**关联**的。
  若$v_i \neq v_j$，则称e_k与v_i或e_k与v_j的**关联次数为1**。
  若$v_i = v_j$，则称e_k与v_i的**关联次数为2**，并称e_k为**环**。
  任意的$v_l \in V$，若$v_l \neq v_i$且$v_l \neq v_j$，则称e_k与v_l的**关联次数为0**。
- 设D＝<V, E>为有向图，$e_k = \langle v_i, v_j \rangle \in E$，
  称v_i, v_j为e_k的**端点**。
  若$v_i = v_j$，则称e_k为D中的**环**。
- 无论在无向图中还是在有向图中，无边关联的顶点均称为**孤立点**。

相邻与邻接

- 设无向图G＝<V，E>，v_i，v_j∈V，e_k，e_l∈E。

  若∃e_t∈E，使得e_t＝(v_i，v_j)，则称v_i与v_j是**相邻的**。

  若e_k与e_l至少有一个公共端点，则称e_k与e_l是**相邻的**。

- 设有向图D＝<V，E>，v_i，v_j∈V，e_k，e_l∈E。

  若∃e_t∈E，使得e_t＝<v_i，v_j>，则称v_i为e_t的**始点**，v_j为e_t的**终点**，并称v_i**邻接到**v_j，v_j**邻接于**v_i。

  若e_k的终点为e_l的始点，则称e_k与e_l**相邻**。

邻域

- 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，$\forall v\in V$，

  称$\{u \mid u\in V\wedge (u, v)\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**邻域**，记做$N_G(v)$。

  称$N_G(v)\cup\{v\}$为v的**闭邻域**，记做$\overline{N_G}(v)$。

  称$\{e \mid e\in E\wedge e$与v相关联$\}$为v的**关联集**，记做$I_G(v)$。

- 设有向图$D=\langle V, E\rangle$，$\forall v\in V$，

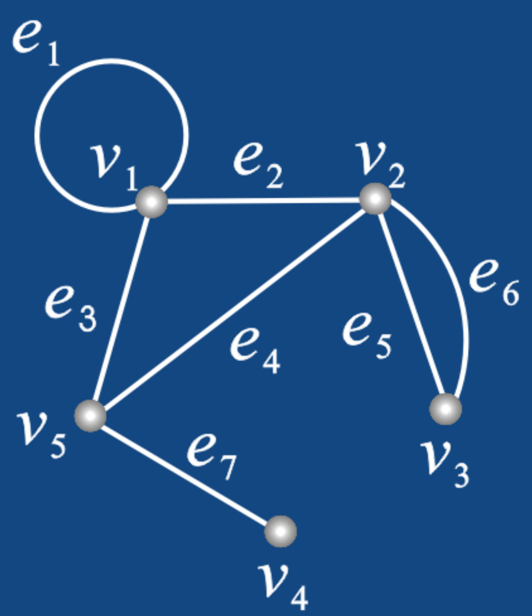
  称$\{u \mid u\in V\wedge \langle v, u\rangle\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**后继元集**，记做$\Gamma^+_D(v)$。

  称$\{u \mid u\in V\wedge \langle u, v\rangle\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**先驱元集**，记做$\Gamma^-_D(v)$。

  称$\Gamma^+_D(v)\cup\Gamma^-_D(v)$为$v$的**邻域**，记做$N_D(v)$。

  称$N_D(v)\cup\{v\}$为v的**闭邻域**，记做$\overline{N_D}(v)$。

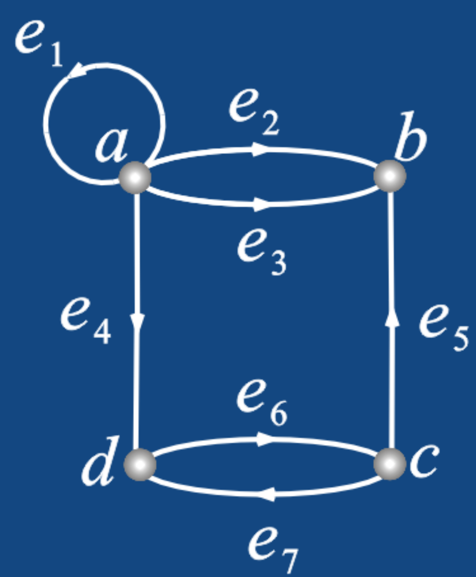
举例



$$N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}$$

$$\overline{N_G}(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}$$

$$I_G(v_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$$



$$\Gamma^+_D(d) = \{c\}$$

$$\Gamma^-_D(d) = \{a, c\}$$

$$N_D(d) = \{a, c\}$$

$$\overline{N_D}(d) = \{a, c, d\}$$

简单图与多重图

定义1.3 在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于1条，则称这些边为平行边，平行边的条数称为重数。

在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于1条，并且这些边的始点和终点相同（也就是它们的方向相同），则称这些边为平行边。

含平行边的图称为多重图。

既不含平行边也不含环的图称为简单图。

例如：在图1.1中，

(a) 中e_5与e_6是平行边，

(b) 中e_2与e_3是平行边，但e_6与e_7不是平行边。

(a) 和 (b) 两个图都不是简单图。

顶点的度数

定义1.4 设G＝<V, E>为一无向图，$\forall v \in V$，称v作为边的端点次数之和为v的度数，简称为度，记做 $d_G(v)$。

在不发生混淆时，简记为$d(v)$。

设D＝<V，E>为有向图，$\forall v \in V$，

称v作为边的始点次数之和为v的出度，记做$d^+_D(v)$，简记作$d^+(v)$。

称v作为边的终点次数之和为v的入度，记做$d^-_D(v)$，简记作$d^-(v)$。

称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数，记做$d(v)$。

图的度数的相关概念

- 在无向图G中，

  最大度　　$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\}$

  最小度　　$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\}$

- 在有向图D中，

  最大出度　$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V(D)\}$

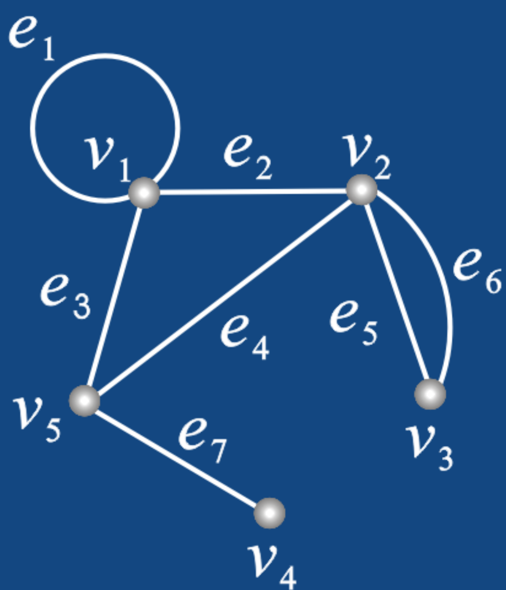
  最小出度　$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V(D)\}$

  最大入度　$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V(D)\}$

  最小入度　$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V(D)\}$

- 称度数为1的顶点为悬挂顶点，与它关联的边称为悬挂边。度为偶数(奇数)的顶点称为偶度(奇度)顶点。

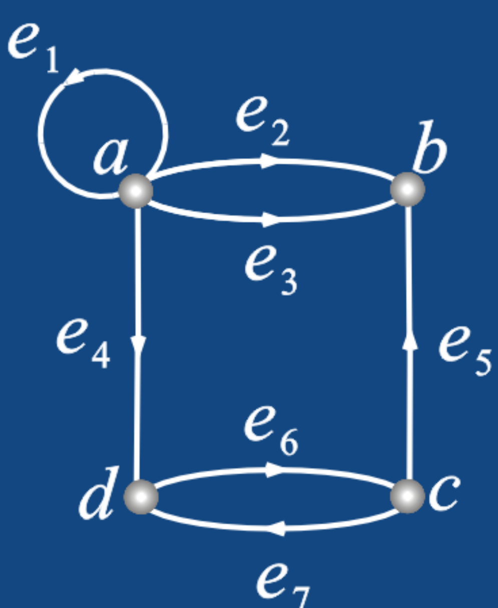
图的度数举例



$d(v_1)=4$（注意，环提供2度），

$\Delta=4$，$\delta=1$，

v_4是悬挂顶点，e_7是悬挂边。



$d^+(a)=4$，$d^-(a)=1$
（环e_1提供出度1，提供入度1），
$d(a)=4+1=5$。$\Delta=5$，$\delta=3$，
$\Delta^+=4$（在a点达到）
$\delta^+=0$（在b点达到）
$\Delta^-=3$（在b点达到）
$\delta^-=1$（在a和c点达到）

握手定理

定理1.1 设G＝<V, E>为任意无向图，V＝{$v_1, v_2, \ldots, v_n$}，|E|＝m，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

说明 任何无向图中，各顶点度数之和等于边数的两倍。

证明 G中每条边(包括环)均有两个端点，
所以在计算G中各顶点度数之和时，
每条边均提供2度，当然，m条边，共提供2m度。

定理1.2 设D＝<V, E>为任意有向图，V＝{$v_1, v_2, \ldots, v_n$}，|E|＝m，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, 且 \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

握手定理的推论

推论 任何图(无向的或有向的)中，奇度顶点的个数是偶数。

证明 设G=<V，E>为任意一图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$

则$V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varnothing$ ，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$和 $\sum_{v\in V_2}d(v)$ ，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$ 为偶数，

但因V_1中顶点度数为奇数， 所以$|V_1|$必为偶数。

问题研究

问题：在一个部门的25个人中间，由于意见不同，是否可能每个人恰好与其他5个人意见一致？

解答：不可能。考虑一个图，其中顶点代表人，如果两个人意见相同，可用边连接，所以每个顶点都是奇数度。存在奇数个度数为奇数的图，这是不可能的。

说明：

(1) 很多离散问题可以用图模型求解。

(2) 为了建立一个图模型，需要决定顶点和边分别代表什么。

(3) 在一个图模型中，边经常代表两个顶点之间的关系。

度数列

设G＝<V, E>为一个n阶无向图，V＝$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，称$d(v_1)$，$d(v_2)$，…，$d(v_n)$为G的度数列。

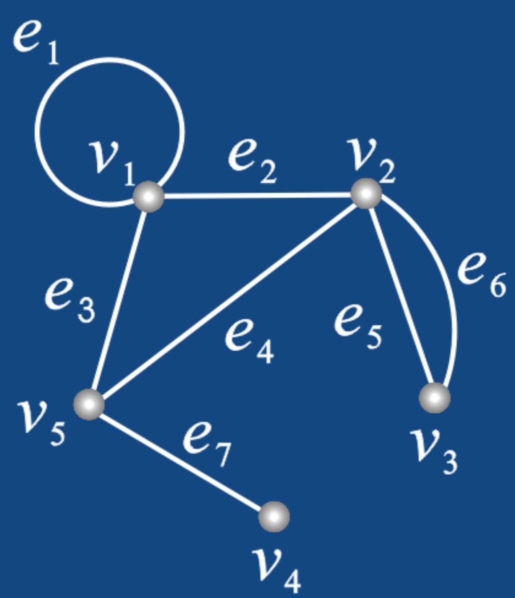
对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的。

反之，对于给定的非负整数列$d=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，若存在V＝$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图G，使得$d(v_i)=d_i$，则称$d$是可图化的。

特别地，若所得图是简单图，则称d是可简单图化的。

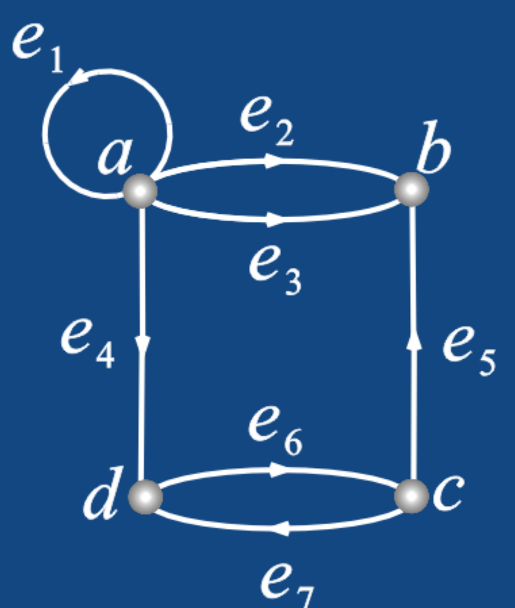
类似地，设D＝<V, E>为一个n阶有向图，V＝$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，称$d(v_1)$，$d(v_2)$，…，$d(v_n)$为D的度数列，另外称$d^+(v_1)$，$d^+(v_2)$，…，$d^+(v_n)$与$d^-(v_1)$，$d^-(v_2)$，…，$d^-(v_n)$分别为D的出度列和入度列。

度数列举例



按顶点的标定顺序，度数列为

4, 4, 2, 1, 3。



按字母顺序，度数列，出度列，入度列分别为

5, 3, 3, 3

4, 0, 2, 1

1, 3, 1, 2

可图化的充要条件

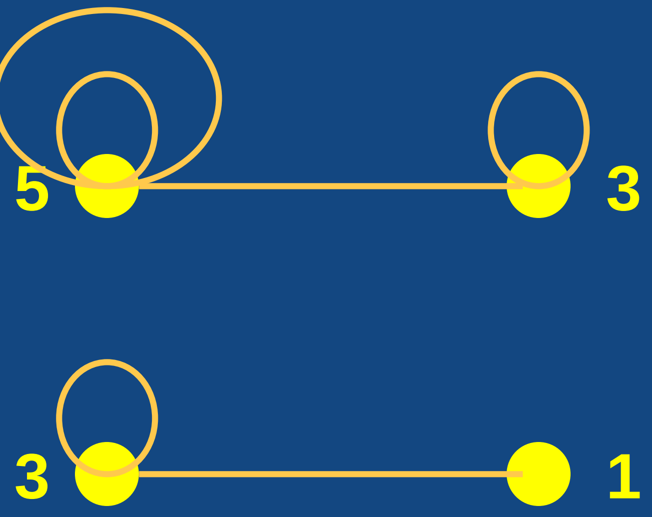
定理1.3 设非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$，则d是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \pmod 2$$

证明 **必要性。**由握手定理显然得证。

充分性。由已知条件可知，d中有偶数个奇数度点。

奇数度点两两之间连一边，剩余度用环来实现。



可图化举例

由定理14.3立即可知，

(3, 3, 2, 1)，(3, 2, 2, 1, 1)等是不可图化的，

(3, 3, 2, 2)，(3, 2, 2, 2, 1)等是可图化的。

定理1.4

定理1.4 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G)\leqslant n-1$。

证明 因为G既无平行边也无环，

所以G中任何顶点v至多与其余的$n-1$个顶点均相邻，

于是$d(v)\leqslant n-1$，由于v的任意性，所以$\Delta(G)\leqslant n-1$。

例1.2 判断下列各非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

（1）（5, 5, 4, 4, 2, 1）

不可图化。

（2）（5, 4, 3, 2, 2）

可图化，不可简单图化。若它可简单图化，

设所得图为G，则$\Delta(G)=\max\{5, 4, 3, 2, 2\}=5$，

这与定理1.4矛盾。

例14.2

(3) (3, 3, 3, 1)

可图化，不可简单图化。假设该序列可以简单图化，

设$G=\langle V, E\rangle$以该序列为度数列。

不妨设$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

且 $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=3, d(v_4)=1$，

由于$d(v_4)=1$，因而v_4只能与v_1，v_2，v_3之一相邻，

于是v_1，v_2，v_3不可能都是3度顶点，这是矛盾的，

因而(3)中序列也不可简单图化。

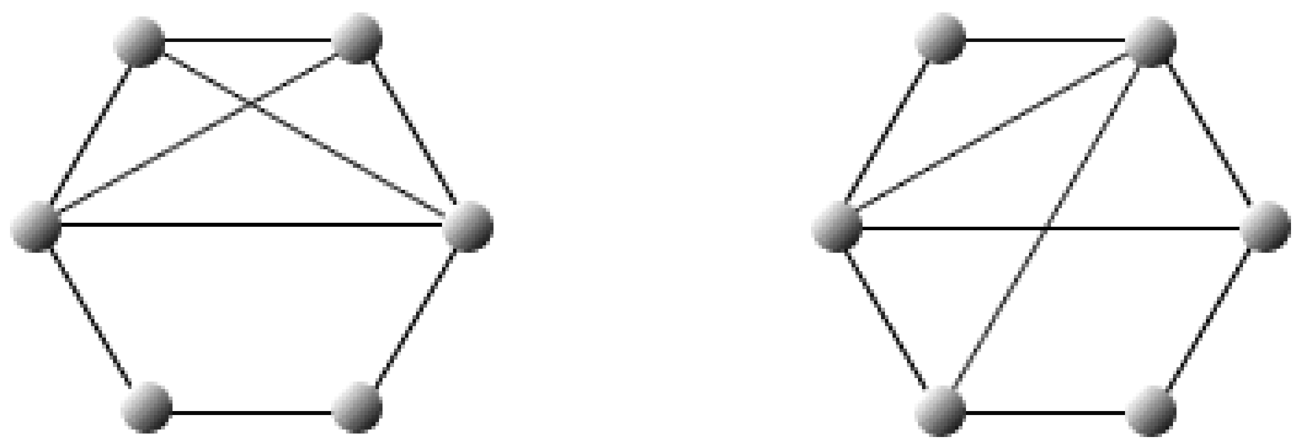
(4) $(d_1, d_2, \ldots d_n)$，$d_1>d_2>\ldots>d_n\geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。

可图化，不可简单图化。

例14.2

(5) (4, 4, 3, 3, 2, 2)

可简单图化。下图中两个6阶无向简单图都以(5)中序列为度数列。



(1)　　　　　　　　(2)

图的同构

定义1.5 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为两个无向图，

若存在双射函数f：$V_1\to V_2$，对于$v_i, v_j\in V_1$，$(v_i, v_j)\in E_1$当且仅当 $(f(v_i), f(v_j))\in E_2$， 并且 (v_i, v_j)与$(f(v_i), f(v_j))$的重数相同，

则称G_1与G_2是同构的，记做$G_1\cong G_2$。

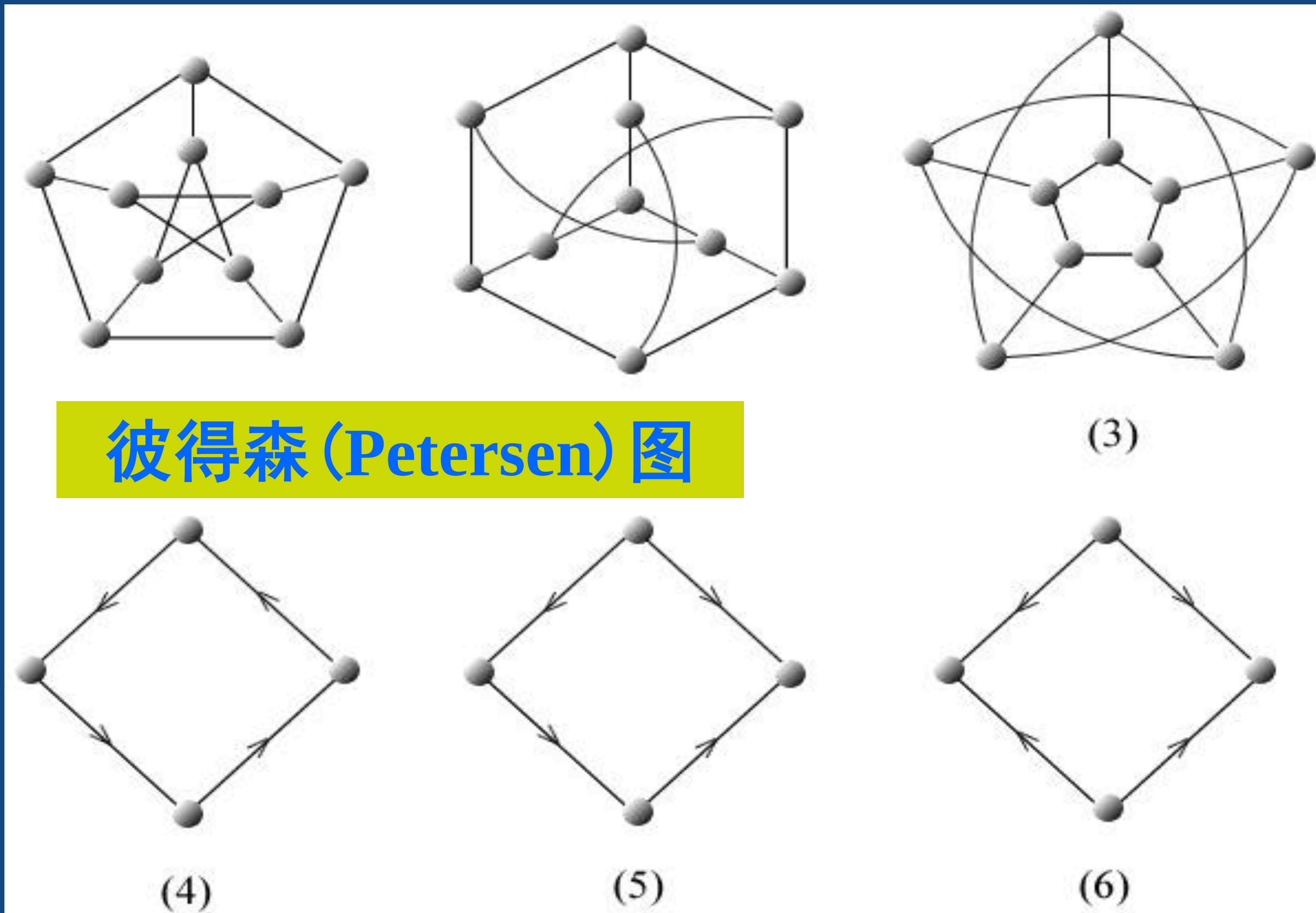
说明 （1）类似地，可以定义两个有向图的同构。

（2）图的同构关系看成全体图集合上的二元关系。

（3）图的同构关系是等价关系。

（4）在图同构的意义下，图的数学定义与图形表示是一一对应的。

图的同构举例



图同构的必要条件：

- 节点数目相等
- 边数相等
- 度数相同的节点数目相等

- 至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件。

- 对于一般情况，给定正整数n 和 m， 构造所有非同构的 n 阶 m 条边的无向（有向）简单图仍是目前还没有解决的难题。

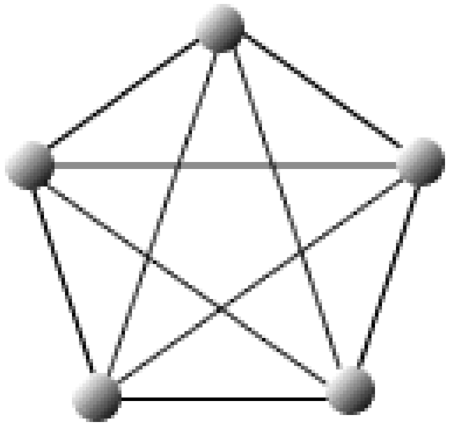
完全图

定义1.6 设G为n阶无向简单图，若G中每个顶点均与其余的n-1个顶点相邻，则称G为n阶无向完全图，简称n阶完全图，记做K_n（n≥1）。

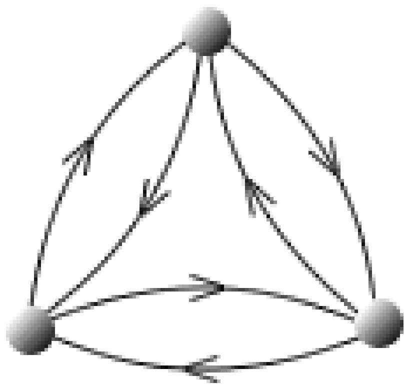
设D为n阶有向简单图，若D中每个顶点都邻接到其余的n-1个顶点，又邻接于其余的n-1个顶点，则称D是n阶有向完全图。

设D为n阶有向简单图，若D的基图为n阶无向完全图Kn，则称D是n阶竞赛图。

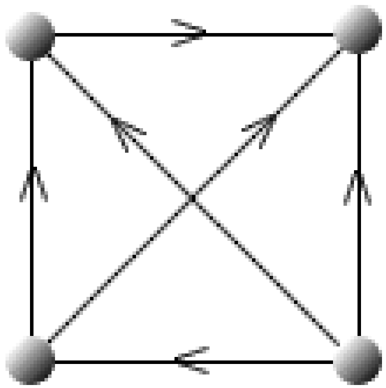
完全图举例



K_5



3阶有向完全图



4阶竞赛图

n阶无向完全图的边数为：　$n(n-1)/2$

n阶有向完全图的边数为：　$n(n-1)$

n阶竞赛图的边数为：　$n(n-1)/2$

正则图

定义1.7 设G为n阶无向简单图，若$v \in V(G)$，均有$d(v)=k$，则称G为k-**正则图**。

举例 n阶零图是0-正则图

n阶无向完全图是$(n-1)$-正则图

彼得森图是3-正则图

说明 n阶k-正则图中，边数$m=kn/2$。

当k为奇数时，n必为偶数。

∷ 子图

定义1.8 设$G=\langle V, E\rangle$，$G'=\langle V', E'\rangle$为两个图(同为无向图或同为有向图)，若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G'是G的子图，G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$。

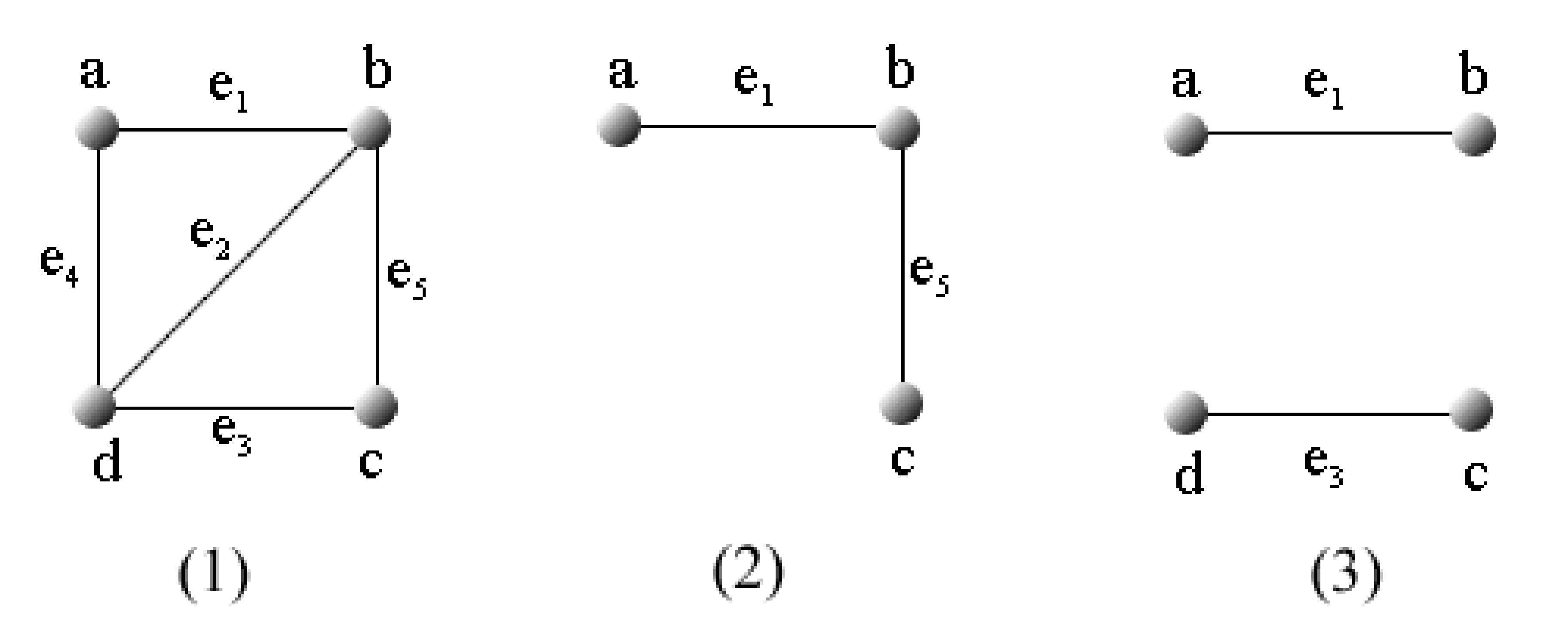
若$V'\subset V$或$E'\subset E$，则称G'为G的真子图。

若$V'=V$，则称G'为G的生成子图。

设$G=\langle V, E\rangle$为一图，$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，称以V_1为顶点集，以G中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图为G的V_1导出的子图，记作$G[V_1]$。

设$E_1\subset E$且$E_1\neq\varnothing$，称以E_1为边集，以E_1中边关联的顶点为顶点集V_1的图为G的E_1导出的子图，记作$G[E_1]$。

导出子图举例



在上图中，设G为(1)中图所表示，

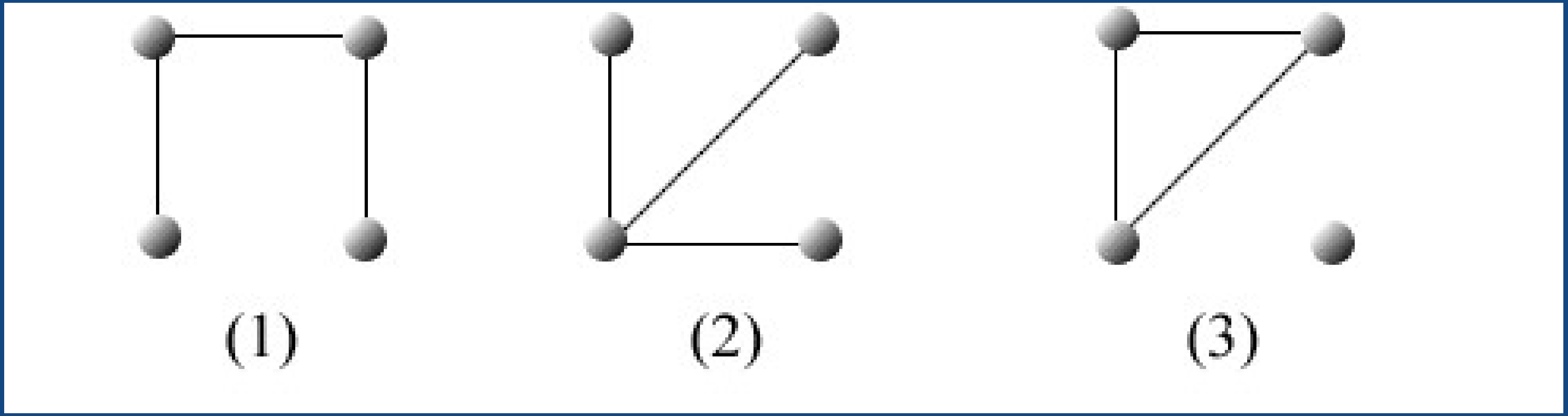
取$V_1 = \{a, b, c\}$，则V_1的导出子图$G[V_1]$为(2)中图所示。

取$E_1 = \{e_1, e_3\}$，则E_1的导出子图$G[E_1]$为(3)中图所示。

定义1.9

定义1.9 设$G=\langle V, E\rangle$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$。

若图$G\cong\overline{G}$，则称为G是自补图。



(1) 为自补图

(2) 和 (3) 互为补图

∵ 定义1.10

定义1.10 设$G=\langle V, E\rangle$为无向图。

(1) 设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e，称为**删除e**。

设$E'\subset E$，用$G-E'$表示从G中删除E'中所有的边，称为**删除E'**。

(2) 设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的一切边，称为**删除顶点v**。

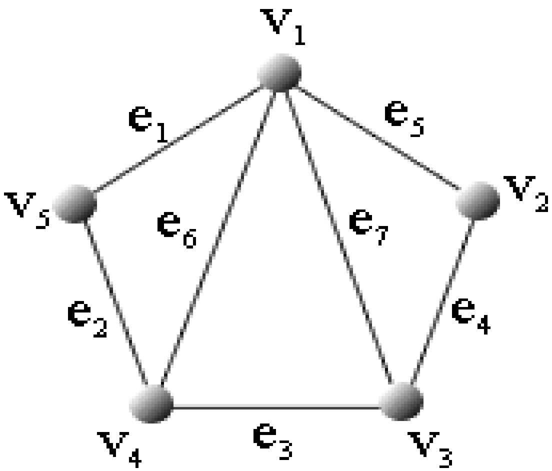
设$V'\subset V$，用$G-V'$表示从G中删除V'中所有顶点，称为**删除V'**。

(3) 设边$e=(u, v)\in E$，用$G\backslash e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u, v用一个新的顶点w(或用u或v充当w)代替，使w关联除e外u, v关联的所有边，称为**边e的收缩**。

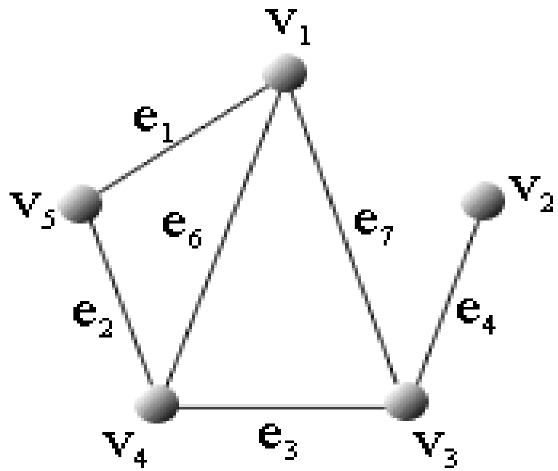
(4) 设$u, v\in V$(u, v可能相邻，也可能不相邻)，用$G\cup(u, v)$(或$G+(u, v)$)表示在u, v之间加一条边(u, v)，称为**加新边**。

说明 在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边。

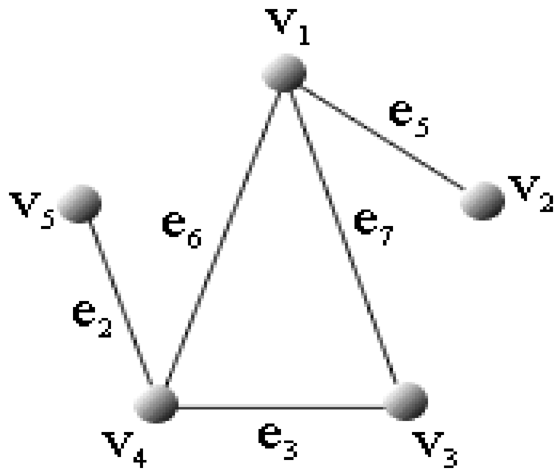
举例



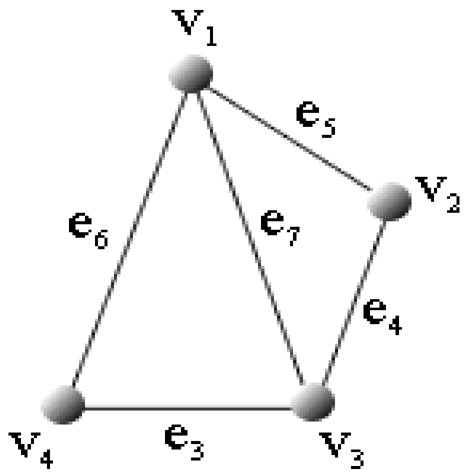
G



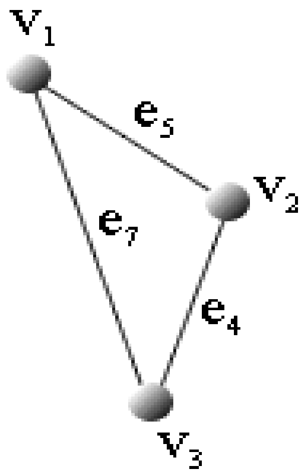
$G-e_5$



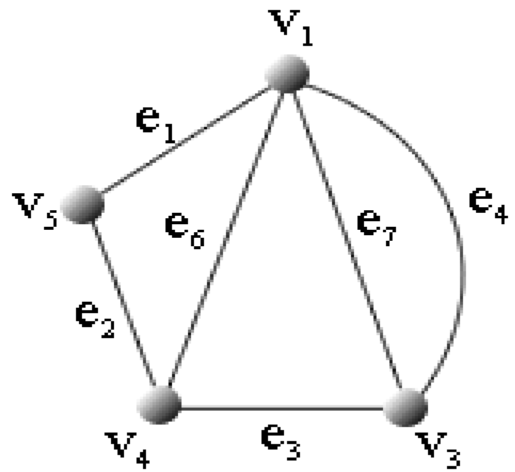
$G-\{e_1, e_4\}$



$G-v_5$



$G-\{v_4, v_5\}$



$G\backslash e_5$

1.2 通路与回路

定义1.11 设G为无向标定图，G中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_{i0}e_{j1}v_{i1}e_{j2}v_{i2}\ldots e_{jl}v_{il}$称为$v_{i0}$到$v_{il}$的**通路**，其中，$v_{ir-1}$，$v_{ir}$为$e_{jr}$的**端点**，$r$ ＝1，2，…，l，v_{i0}，v_{il}分别称为Γ的**始点**与**终点**，Γ中边的条数称为它的**长度**。

若$v_{i0} = v_{il}$，则称通路为**回路**。

若Γ的**所有边各异**，则称Γ为**简单通路**，

又若$v_{i0} = v_{il}$，则称Γ为**简单回路**。

若Γ的所有**顶点**（除v_{i0}与v_{ij}可能相同外）**各异**，所有**边也各异**，则称Γ为**初级通路**或**路径**，

又若$v_{i0} = v_{il}$，则称Γ为**初级回路**或**圈**。

将长度为奇数的圈称为**奇圈**，长度为偶数的圈称为**偶圈**。

关于通路与回路的说明

- 在初级通路与初级回路的定义中，仍将初级回路看成初级通路(路径)的特殊情况，只是在应用中初级通路(路径)都是始点与终点不相同的，长为1的圈只能由环生成，长为2的圈只能由平行边生成，因而在简单无向图中，圈的长度至少为??。
- 若Γ中有边重复出现，则称Γ为复杂通路，

  又若$v_{i0}=v_{il}$，则称Γ为复杂回路。
- 在有向图中，通路、回路及分类的定义与无向图中非常相似，只是要注意有向边方向的一致性。
- 在以上的定义中，将回路定义成通路的特殊情况，即回路也是通路，又初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真。

通路和回路的简单表示法

(1) 只用边的序列表示通路(回路)。定义14.11中的Γ可以表示成e_{j1} ，e_{j2} ，… ，e_{jl}。

(2) 在简单图中也可以只用顶点序列表示通路(回路)。定义中的Γ也可以表示成v_{i0} ，v_{i2} ，… ，v_{il}。

(3) 为了写出非标定图中的通路(回路)，可以先将非标定图标成标定图，再写出通路与回路。

(4) 在非简单标定图中，当只用顶点序列表示不出某些通路(回路)时，可在顶点序列中加入一些边(这些边是平行边或环)，可称这种表示法为混合表示法。

∵ 定理1.5

定理1.5 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路。

证明

设$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_l v_l$ ($v_0 = v_i$, $v_l = v_j$) 为G中一条长度为l的通路，

若$l \leqslant n-1$，则Γ满足要求，

否则必有$l+1>n$，即Γ上的顶点数大于G中的顶点数，

于是必存在k, s, $0 \leqslant k < s \leqslant l$，使得 $v_s = v_k$,

即在Γ上存在v_s到自身的回路C_{sk},

在Γ上删除C_{sk}上的一切边及除v_s外的一切顶点，

得$\Gamma' = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_k e_{s+1} \ \ldots e_l v_l$, Γ'仍为v_i到v_j的通路，

且长度至少比Γ减少1。

若Γ'还不满足要求，则重复上述过程，由于G是有限图，经过有限步后，必得到v_i到v_j长度小于或等于$n-1$的通路。

定理1.6

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则v_i到v_j一定存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）。

定理1.6 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路。

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的初级回路。

例1.4

例1.4 无向完全图$K_n(n\geqslant 3)$中有几种非同构的圈？

解答 长度相同的圈都是同构的，

因而只有长度不同的圈才是非同构的，

易知$K_n(n\geqslant 3)$中含长度为3，4，…，n的圈，

所以$K_n(n\geqslant 3)$中有n-2种非同构的圈。

例1.5

例1.5 无向完全图K_3的顶点依次标定为a, b, c。在定义意义下K_3中有多少个不同的圈？

解答 在同构意义下，K_3中只有一个长度为3的圈。

但在定义意义下，不同起点(终点)的圈是不同的，

顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，

因而K_3中有6个不同的长为3的圈：

$$abca，acba，bacb，bcab，cabc，cbac$$

如果只考虑起点(终点)的差异，

而不考虑顺时针逆时针的差异，应有3种不同的圈，

当然它们都是同构的，画出图来只有一个。

1.3 图的连通性

- 无向图的连通性
- 无向图中顶点之间的短程线及距离
- 无向图的连通程度：点割集、割点、边割集、割边、连通度
- 有向图的连通性及判别方法
- 扩大路径法与极大路径
- 二部图及其判别方法

无向图的连通性

定义1.12 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，$\forall u, v\in V$，若u, v之间存在通路，则称u, v是**连通的**，记作$u\sim v$。

$\forall v\in V$，规定$v\sim v$。

无向图中顶点之间的连通关系

$\sim=\{(u, v) \mid u, v\in V$且$u$与$v$之间有通路$\}$

是自反的、对称的、传递的，因而$\sim$是V上的等价关系。

连通图与连通分支

定义1.13 若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为**连通图**，否则称G是**非连通图**或**分离图**。

说明： 完全图K_n ($n \geqslant 1$) 都是连通图

零图N_n ($n \geqslant 2$) 都是分离图。

定义1.14 设无向图$G = \langle V, E \rangle$，V关于顶点之间的连通关系～的**商集**$V/\sim = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$，$V_i$为等价类，称导出子图$G[V_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) 为G的**连通分支**，**连通分支数**k常记为$p(G)$。

说明 若G为连通图，则$p(G) = 1$。

若G为非连通图，则$p(G) \geqslant 2$。

在所有的n阶无向图中，n阶零图是连通分支最多的，$p(N_n) = n$。

∵ 无向图中顶点之间的短程线及距离

定义1.15 设u, v为无向图G中任意两个顶点，若$u \sim v$，称u, v之间**长度最短的通路**为u, v之间的**短程线**，短程线的长度称为u, v之间的**距离**，记作$d(u, v)$。

当u, v不连通时，规定$d(u, v)=\infty$。

距离有以下性质：

(1) $d(u, v) \geqslant 0$，$u=v$时，等号成立。

(2) 具有对称性，$d(u, v)=d(v, u)$。

(3) 满足三角不等式： $\forall u, v, w \in V(G)$，则

$$d(u, v)+d(v, w) \geqslant d(u, w)$$

说明： 在完全图$K_n (n \geqslant 2)$中，任何两个顶点之间的距离都是1。

在n阶零图$N_n (n \geqslant 2)$中，任何两个顶点之间的距离都为∞。

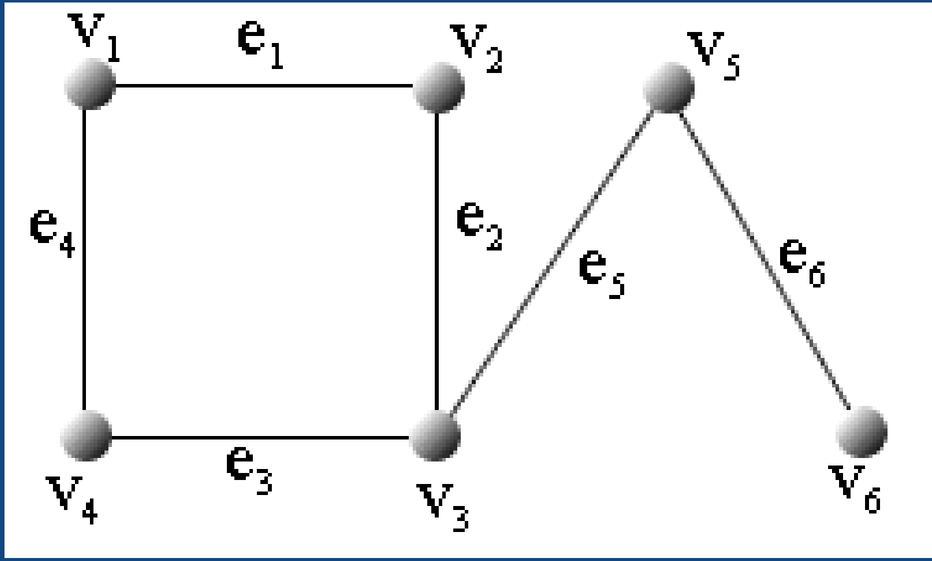
如何定义连通度

- **问题**：如何定量地比较无向图的连通性的强与弱？
- **点连通度**：为了破坏连通性，至少需要删除多少个顶点？
- **边连通度**：为了破坏连通性，至少需要删除多少条边？
- “**破坏连通性**”是指“变得更加不连通” 。

无向图的点割集

定义1.16 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，若存在$V'\subset V$，且$V'\neq\varnothing$，使得$p(G-V')>p(G)$，**则称V' 为G 的点割集**；若对于任意的$V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$，则称V'是G的**极小点割集**。

若V'是单元集，即$V'=\{v\}$，则称v为**割点**。



$\{v_2, v_4\}$，$\{v_3\}$，$\{v_5\}$都是**极小**点割集v_3, v_5都是割点

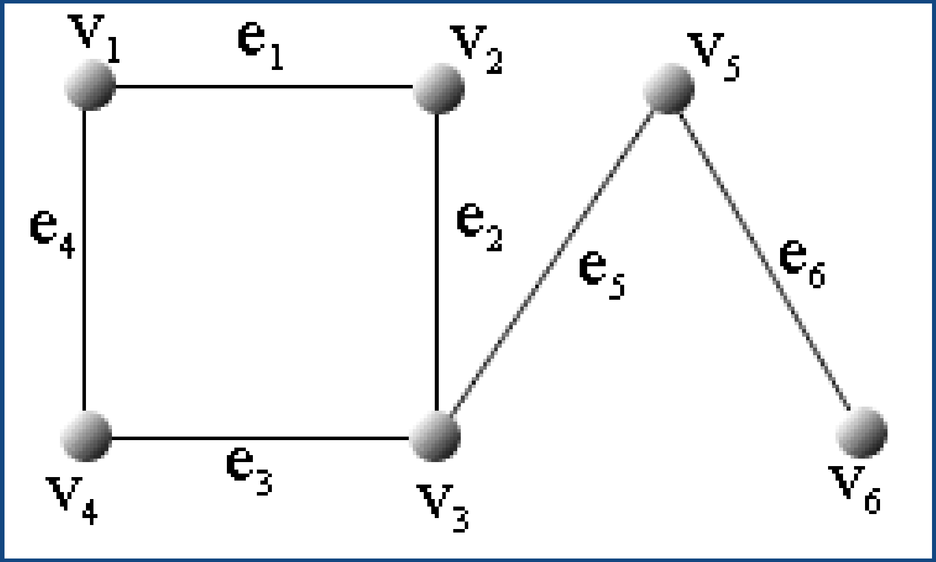
v_1与v_6不在任何**极小**割集中。

实际上，点割集是若删去它们就会使图不连通的顶点的集合，而割点是若删去此一顶点就会使图不连通的顶点。

无向图的边割集

定义1.17　　设无向图$G=\langle V, E\rangle$，若存在$E'\subseteq E$，且$E'\neq\varnothing$，使得$p(G-E')>p(G)$，则称E'是G的边割集，或简称为割集；若对于任意的$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称E'是G的极小边割集，

若E'是单元集，即$E'=\{e\}$，则称e为割边或桥。



$\{e_6\}$，$\{e_5\}$，$\{e_2, e_3\}$，$\{e_1, e_2\}$，$\{e_3, e_4\}$，$\{e_1, e_4\}$，$\{e_1, e_3\}$，$\{e_2, e_4\}$都是极小边割集，
e_6, e_5是桥。

实际上，边割集是若删去它们就会使图不连通的边的集合，而割边是若删去此一边就会使图不连通的边。

点连通度

定义1.18 设G为无向连通图且为非完全图，则称

$$\kappa(G)=\min\{|V'|\,|\,V'\text{为}G\text{的点割集}\}$$

为G的**点连通度**，简称**连通度**。

说明 连通度是为了产生一个不连通图需要删去的点的**最少**数目。

规定完全图$K_n(n\geq1)$的点连通度为$n-1$，

规定非连通图的点连通度为0，

若$\kappa(G)\geq k$，则称G是k-连通图，k为非负整数。

说明 $\kappa(G)$有时简记为κ。

上例中图的点连通度为1，此图为1-连通图。

K_5的点连通度$K=4$，所以K_5是1-连通图，2-连通图，3-连通图，4-连通图。

若G是k-连通图（$k\geq1$）则在G中删除任何$k-1$个顶点后，所得图一定还是连通的。

∴ 边连通度

定义1.19 设G是无向连通图，称

$$\lambda(G)=\min\{|E'|\mid E'\text{是G的边割集}\}$$

为G的**边连通度**。

规定非连通图的边连通度为0。

若$\lambda(G)\geq r$，则称G是r **边-连通图**。

说明 $\lambda(G)$也可以简记为λ。

若G是 r 边-连通图，则在G中任意删除r-1条边后，所得图依然是连通的。

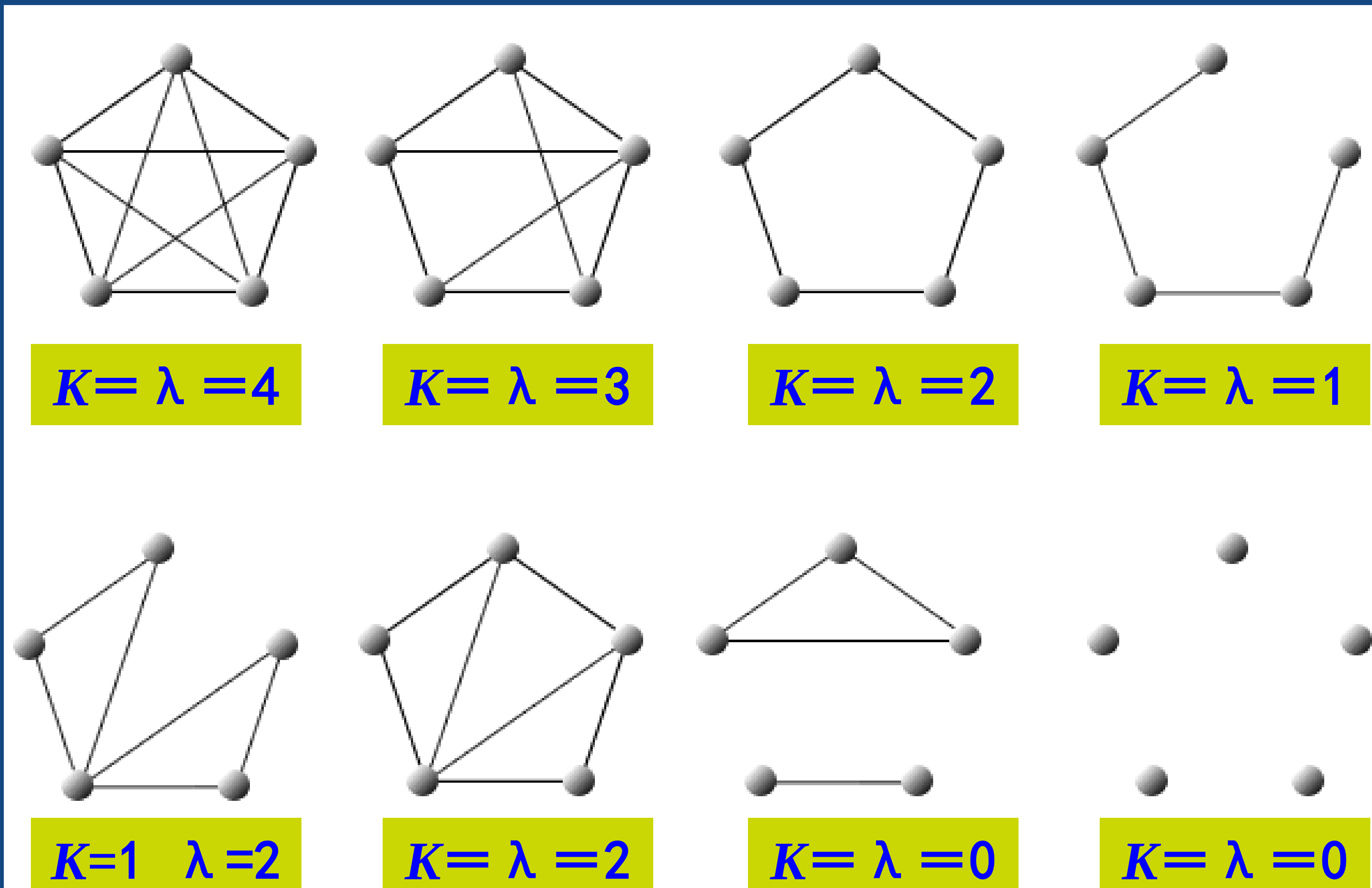
完全图K_n的边连通度为n-1，因而K_n是r边-连通图，0≤r≤n-1。

平凡图G 由于E ′= ∅ 则λ＝0

图14.8中图的边连通度λ＝1，它只能是1边-连通图。

例1.6

求所示各图的点连通度，边连通度，并指出它们各是几连通图及几边连通图。最后将它们按点连通程度及边连通程度排序。



例1.6的解答

设第i个图的点连通度为K_i，边连通度为λ_i，I＝1, 2, ..., 8。

容易看出，$K_1=\lambda_1=4$，$K_2=\lambda_2=3$，$K_3=\lambda_3=2$，$K_4=\lambda_4=1$，
$K_5=1$ $\lambda_5=2$，$K_6=\lambda_6=2$，$K_7=\lambda_7=0$，$K_8=\lambda_8=0$。

(1) 是k-连通图，k边-连通图，$k=1, 2, 3, 4$。

(2) 是k-连通图，k边-连通图，$k=1, 2, 3$。

(3) 是k-连通图，k边-连通图，$k=1, 2$。

(4) 是1-连通图，1边-连通图。

(5) 是1-连通图，k边-连通图，$k=1, 2$。

(6) 是k-连通图，k边-连通图，$k=1, 2$。

(7) 是0-连通图，0边-连通图。

(8) 是0-连通图，0边-连通图。

点连通程度为(1)＞(2)＞(3)＝(6)＞(4)＝(5)＞(7)＝(8)。

边连通程度为(1)＞(2)＞(3)＝(5)＝(6)＞(4)＞(7)＝(8)。

定理14.7（惠特尼）

定理14.7 对于任何无向图G，有

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$ （证明）

- 证明：如果图G是不连通图或者是平凡图，则有$\kappa(G)=\lambda(G)=0\leq \delta(G)$；

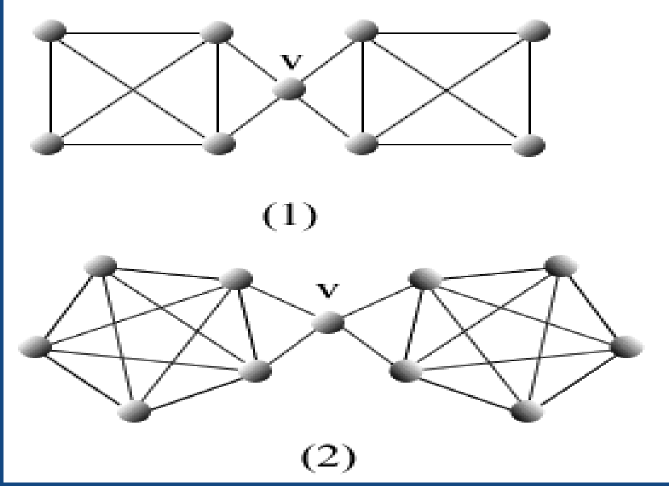
　　任给一个连通图G，若$\lambda(G)=k$，则存在边割E'，$|E'|=k$。现取E'中每一条边的一个端点构成顶点集V'，即$V'=\{u \mid (u, v)\in E'且v\notin V'\}$。显然$|V'|\leq k$。而G－V'是不连通的，即V'是G的一个顶点割。所以$\kappa(G)\leq |V'|\leq \lambda(G)$。

　　若G是非平凡图，则因为每一个顶点所关联的边构成一个边割，故有$\lambda(G)\leq \delta(G)$。

　　综上所述，有$\kappa(G)\leq \lambda(G)\leq \delta(G)$。

例14.7 (1)给出一些无向简单图，使得 $\kappa = \lambda = \delta$ 。

(2)给出一些无向简单图，使得 $\kappa < \lambda < \delta$ 。



解答 (1) n阶无向完全图K_n和n阶零图N_n都满足要求。

(2)在两个K_n($n \geqslant 4$)之间放置一个顶点v，使v与两个K_n中的每一个的任意两个不同的顶点相邻，所得简单图满足要求。

因为这样的图中有一个割点，所以点连通度为1，

又因为无桥，而有两条边组成的边割集，所以边连通度为2，

当$n=4$时，$\delta=3$，当$n \geqslant 5$时，$\delta=4$。

有向图的连通性

定义14.20 设$D=\langle V, E\rangle$为一个有向图。$v_i, v_j \in V$，若从v_i到v_j存在通路，则称v_i**可达**v_j，记作$v_i \to v_j$，

规定v_i总是可达自身的，即$v_i \to v_i$。

若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$，则称v_i与v_j是**相互可达**的，记作$v_i \leftrightarrow v_j$。

规定$v_i \leftrightarrow v_i$。

说明 $\to$与$\leftrightarrow$都是V上的二元关系，并且不难看出$\leftrightarrow$是V上的等价关系。

定义14.21 设$D=\langle V, E\rangle$为有向图，$v_i, v_j \in$V，若$v_i \to v_j$，称v_i到v_j**长度最短的通路**为v_i到v_j的**短程线**，

短程线的长度为v_i到v_j的距离，记作$d\langle v_i, v_j\rangle$。

说明 与无向图中顶点v_i与v_j之间的连通性$v_i \sim v_j$相比，$v_i \to v_j$除无对称性外，具有$v_i \sim v_j$所具有的一切性质。

连通图

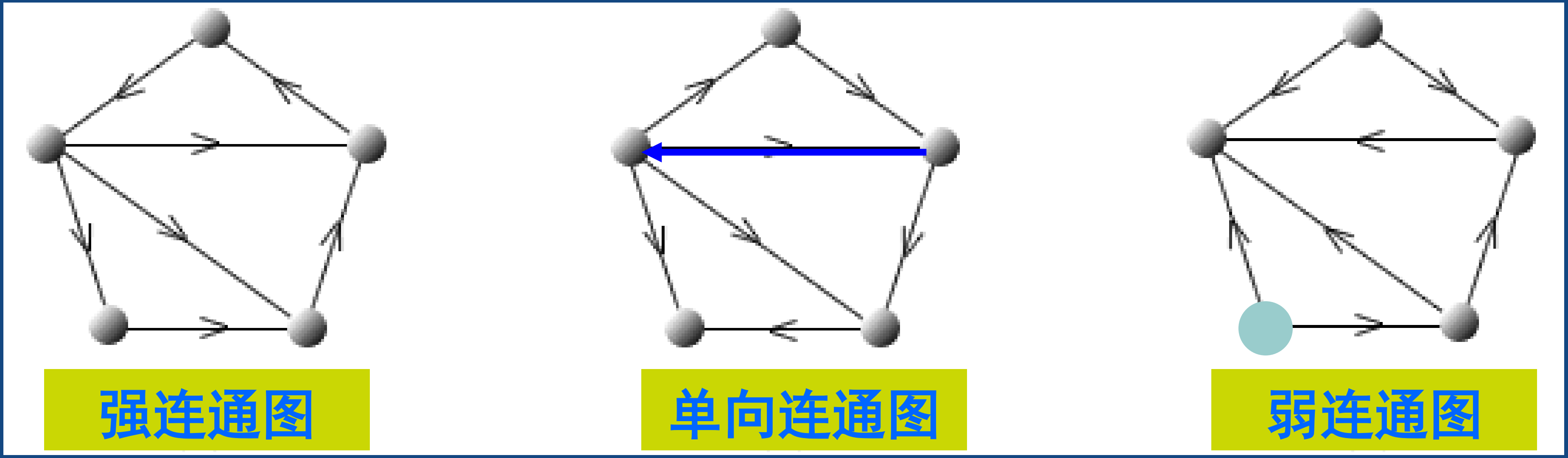
定义14.22 设$D=\langle V, E\rangle$为一个有向图。若D的基图是连通图，则称D是**弱连通图**，简称为**连通图**。

若$v_i, v_j\in V$，$v_i\to v_j$与$v_j\to v_i$至少成立其一，则称D是**单向连通图**。

若均有$v_i \leftrightarrow v_j$，则称D是**强连通图**。

说明 强连通图一定是单向连通图，

单向连通图一定是弱连通图。



强连通图与单向连通图的判定定理

定理14.8 设有向图$D=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。$D$是强连通图当且仅当$D$中存在经过每个顶点至少一次的回路。

证明 充分性显然。

下面证明必要性。

由D的强连通性可知，$v_i \to v_{i+1}$，$i=1, 2, \ldots, n-1$。

设Γ_i为v_i到v_{i+1}的通路。

又因为$v_n \to v_1$，设Γ_n为v_n到v_1的通路，则Γ_1, Γ_2, …, Γ_{n-1}, Γ_n所围成的回路经过D中每个顶点至少一次。

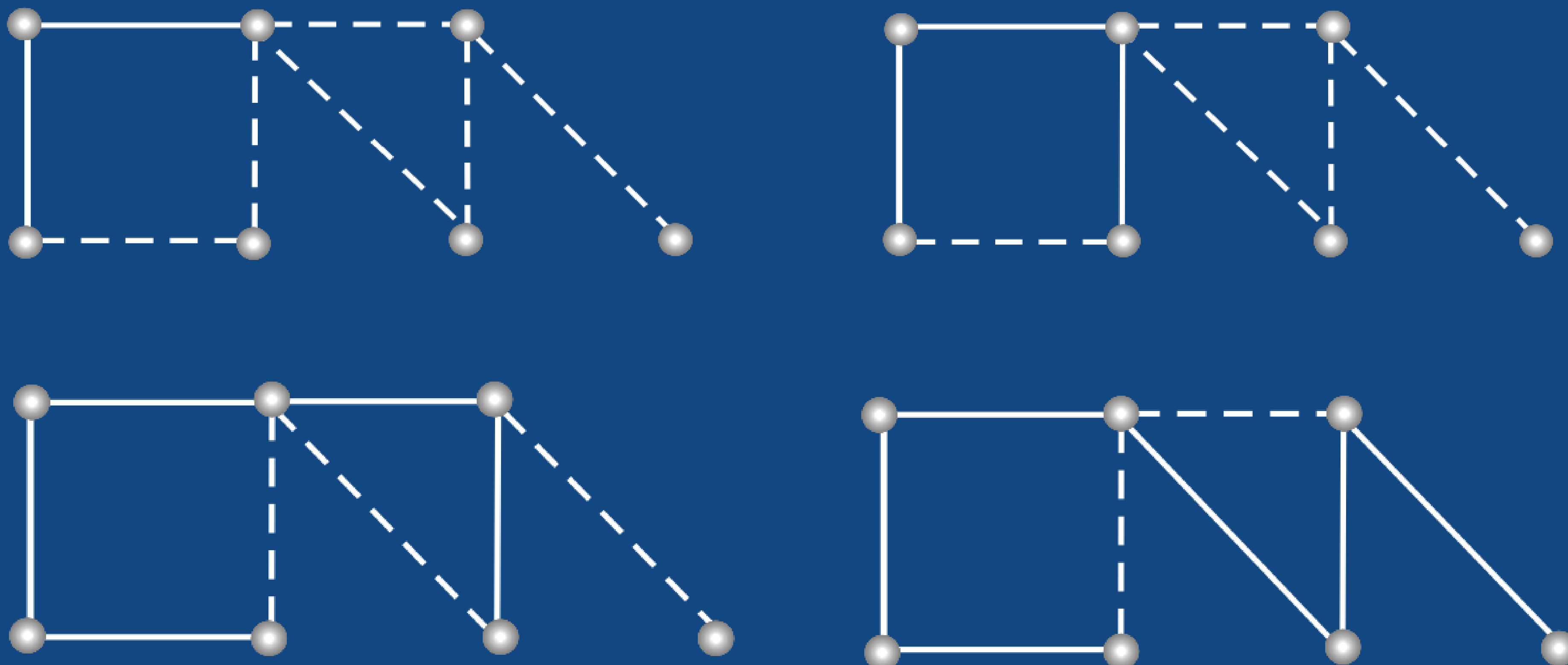
定理14.9 设D是n阶有向图，D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路。

扩大路径法

- 设$G=\langle V, E\rangle$为n阶无向图，$E\neq\varnothing$，设 Γ_l为G中一条路径，
  若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来。
  继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止。
  设最后得到的路径为Γ_{l+k}(长度为l的路径扩大成了长度为$l+k$的路径)，称Γ_{l+k}为“极大路径”，
  称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”。
- 有向图中可以类似地讨论，只须注意，在每步扩大中保持有向边方向的一致性。

关于极大路径的说明

- 由某条路经扩大出的极大路径不唯一。
- 极大路径不一定是图中最长的路径。



例14.8

例14.8 设G为n（$n \geqslant 4$）阶无向简单图，$\delta(G) \geqslant 3$。

证明G中存在长度大于或等于4的圈。

证明 不妨设G是连通图，否则，因为G的各连通分支的最小度也都大于或等于3，因而可对它的某个连通分支进行讨论。

设u, v为G中任意两个顶点，由G是连通图，因而u, v之间存在通路，由定理14.5的推论可知，u, v之间存在路径，用“扩大路径法”扩大这条路径，设最后得到的“极大路径”为$\Gamma_l = v_0 v_1 \ldots v_l$，易知$l \geqslant 3$。

若v_0与v_l相邻，则$\Gamma_l \cup (v_0, v_l)$为长度大于或等于4的圈。

否则，由于$d(v_0) \geqslant \delta(G) \geqslant 3$，因而$v_0$除与$\Gamma_l$上的$v_1$相邻外，还存在$\Gamma_l$上的顶点$v_k$ ($k \neq 1$) 和v_t ($k < t < l$) 与v_0相邻，则$v_0 v_1 \ldots v_k \ldots v_t v_0$为一个圈且长度大于或等于4

二部图

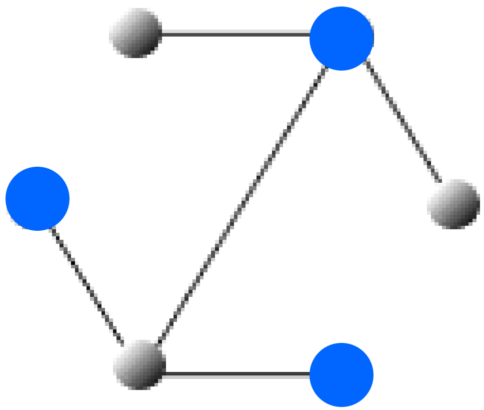
定义14.23 设$G=\langle V, E\rangle$为一个无向图，若能将V分成V_1和V_2（$V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$），使得$G$中的每条边的两个端点都是一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，则称$G$为二部图（或称二分图，偶图等），称$V_1$和$V_2$为互补顶点子集。

常将二部图G记为$\langle V_1, V_2, E\rangle$。

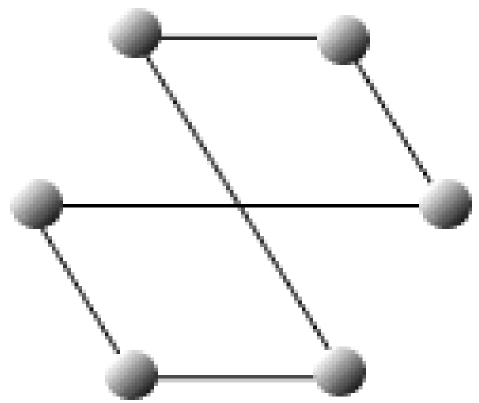
若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$。

说明 n阶零图为二部图。

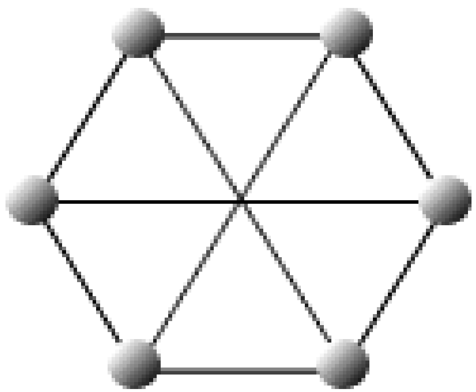
二部图举例



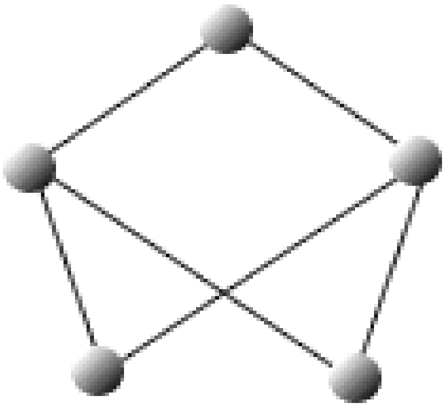
K_6的子图



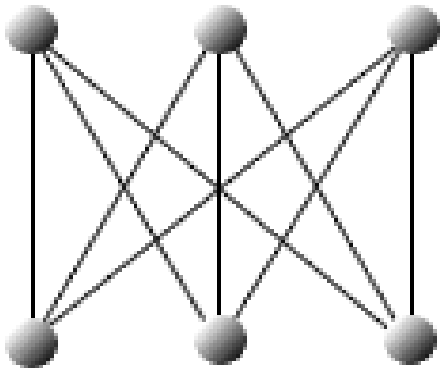
K_6的子图



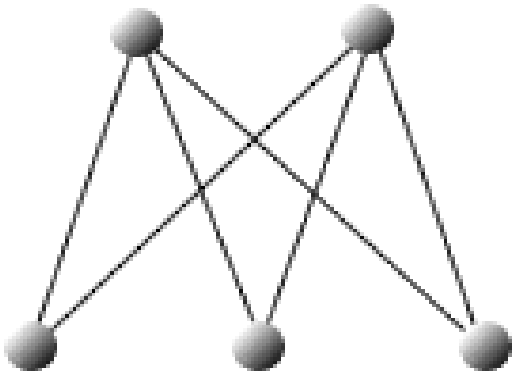
$K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{2,3}$

二部图的判定定理

定理14.10 一个无向图$G=\langle V, E\rangle$是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路。

证明 必要性。

设图G是二部图，令$C=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_0$是G的一条回路，其长度为k+1。

不失一般性，假设$v_0 \in V_1$，由二部图的定义知，$v_1 \in V_2$，$v_2 \in V_1$。由此可知，$v_{2i} \in V_1$且$v_{2i+1} \in V_2$。

又因为$v_0 \in V_1$，所以$v_k \in V_2$，因而k为奇数，故C的长度为偶数。

二部图的判定定理

充分性。

不妨设G为连通图，否则可对每个连通分支进行讨论。

设v_0为G中任意一个顶点，令

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{为偶数}\}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{为奇数}\}$$

易知，$V_1 \neq \varnothing, V_2 \neq \varnothing, V_1 \cap V_2 = \varnothing$，$V_1 \cup V_2 = V(G)$。

下面只要证明V_1中任意两顶点不相邻, V_2中任意两点也不相邻。

若存在$v_i, v_j \in V_1$相邻，令$(v_i, v_j) = e$,

设v_0到v_i, v_j的短程线分别为Γ_i，Γ_j,

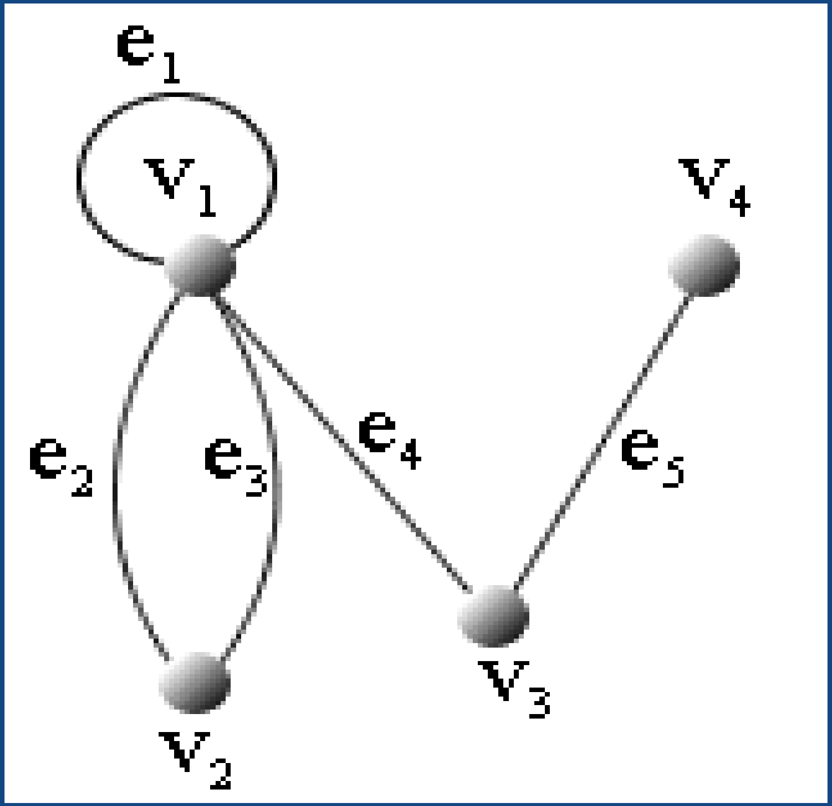
则它们的长度$d(v_0, v_i)$, $d(v_0, v_j)$都是偶数，

于是$\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup e$中一定含奇圈，这与已知条件矛盾。

类似可证，V_2中也不存在相邻的顶点，于是G为二部图。

14.4 图的矩阵表示

定义14.24 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$m_{ij}$为顶点$v_i$与边$e_j$的关联次数，则称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的**关联矩阵**，记作$M(G)$。



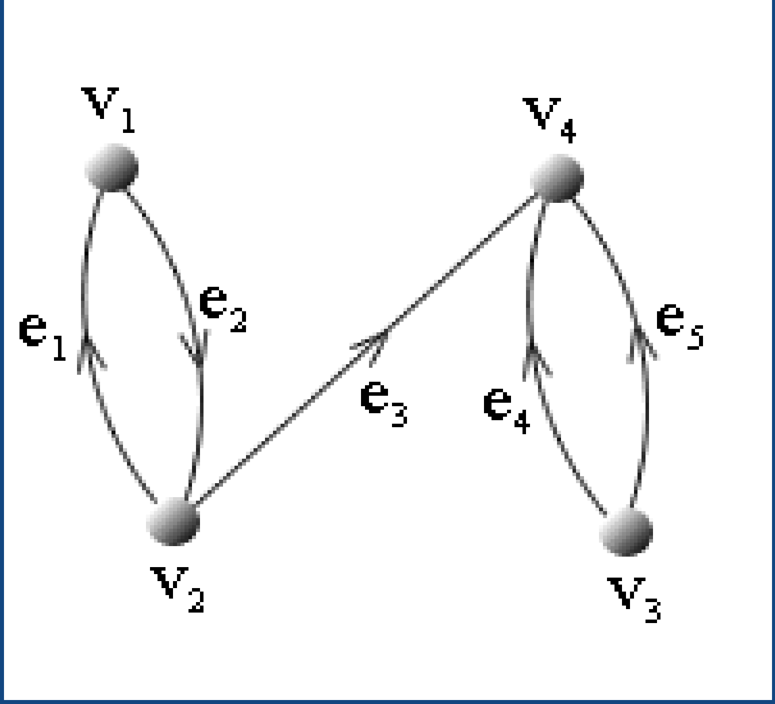
$$M(G)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵

定义14.25 设有向图$D=\langle V, E\rangle$中无环，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0 & v_i\text{为}e_j\text{不关联} \\ -1 & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

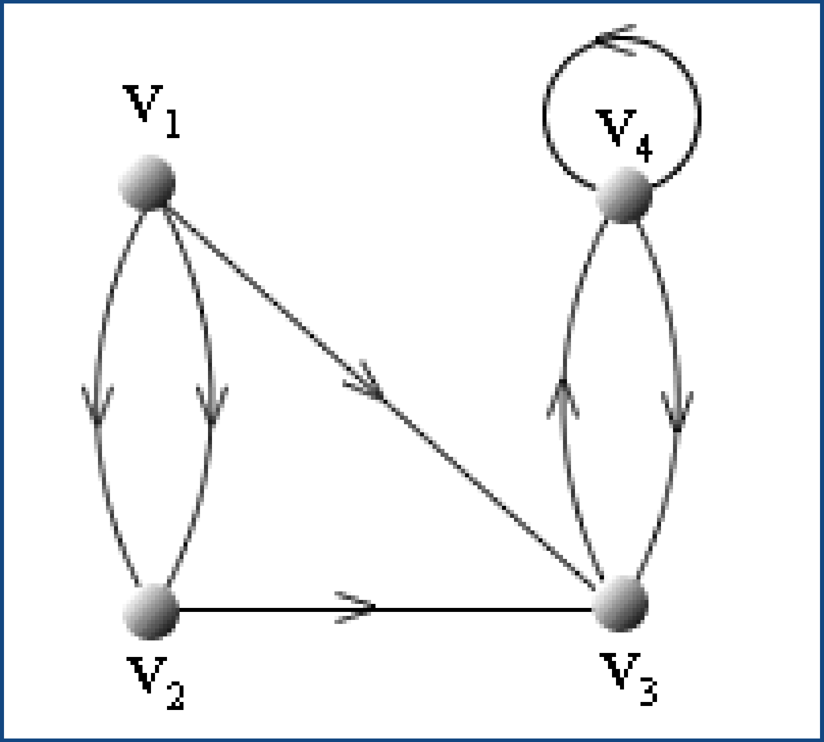
则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记作$M(D)$。



$$M(D)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

定义14.26 设有向图$D=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为D的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为$A$。



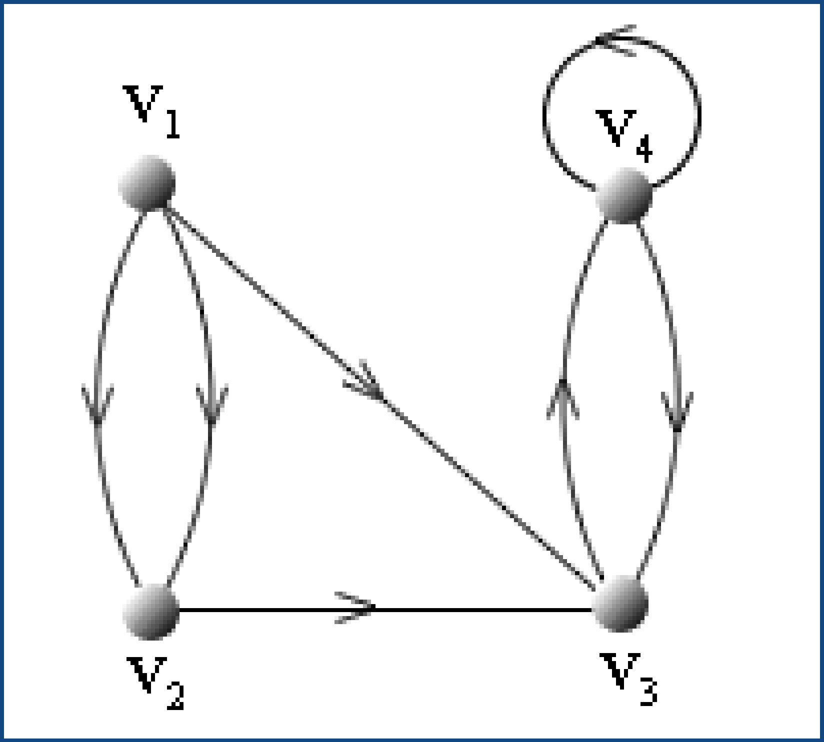
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

有向图的可达矩阵

定义14.27 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图。$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的**可达矩阵**，记作$P(D)$，简记为P。

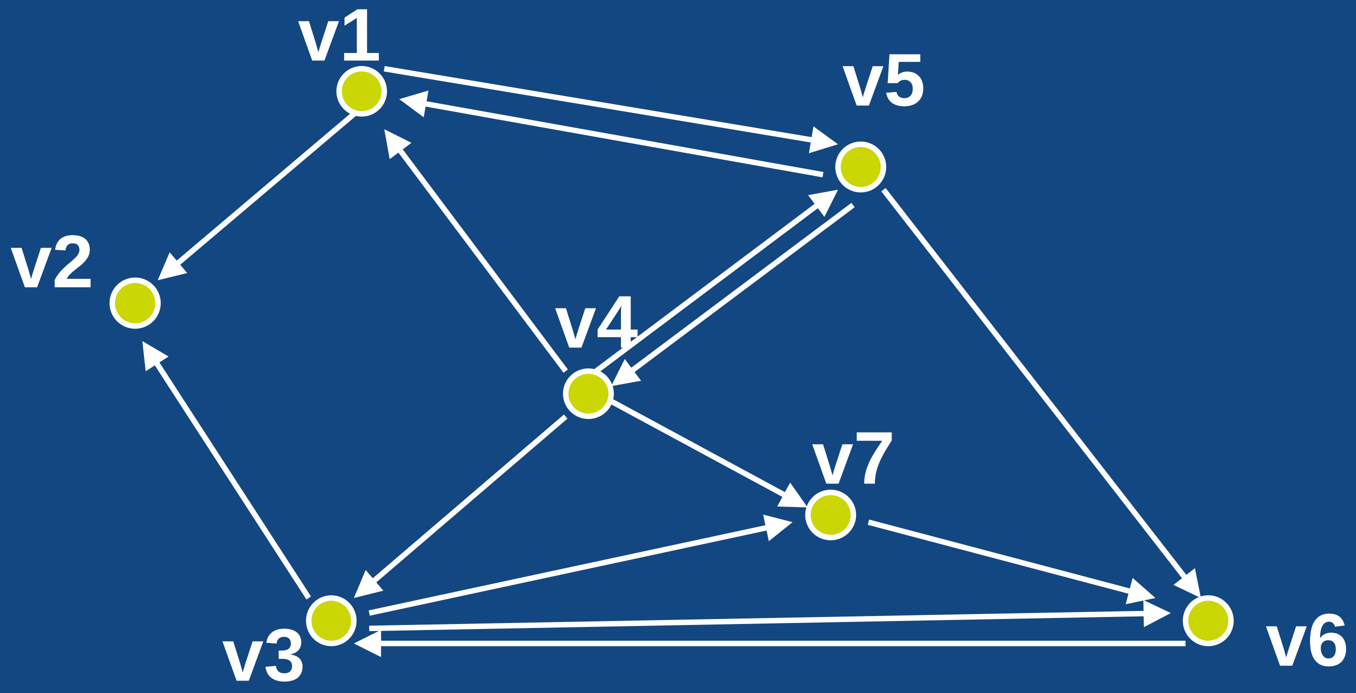


$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

练习、路径问题

顶点v_1～v_7代表七座城市，有方向的边v_iv_j表示从v_i城到v_j城的单行车道，问从v_1城到v_7城有无道路相通？

如下图所示：



通过观察上图容易得出解答。

如果我们进一步问：若v_1城到v_7有道路相通，共有几条不同的道路？

14.5 图的运算

定义14.28 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为两个图。

若$V_1\cap V_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是不交的。

若$E_1\cap E_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是边不交的或边不重的。

说明： 不交的图，必然是边不交的，但反之不真。

∴ 图的运算

定义14.29 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）。

(1) 称以$E_1\cup E_2$为边集，以$E_1\cup E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**并图**，记作$G_1\cup G_2$。

(2) 称以E_1-E_2为边集，以E_1-E_2中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**差图**，记作G_1-G_2。

(3) 称以$E_1\cap E_2$为边集，以$E_1\cap E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**交图**，记作$G_1\cap G_2$。

(4) 称以$E_1\oplus E_2$为边集（为集合之间的对称差运算），以$E_1\oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**环和**，记作$G_1\oplus G_2$。

定义14.29的说明

(1) 若$G_1=G_2$，则

$$G_1\cup G_2=G_1\cap G_2=G_1(G_2)$$

$$G_1-G_2=G_2-G_1=G_1\oplus G_2=\varnothing$$

这就是在图的定义中给出空图概念的原因。

(2) 当G_1与G_2边不重时，

$$G_1\cap G_2=\varnothing \qquad G_1-G_2=G_1$$

$$G_2-G_1=G_2 \qquad G_1\oplus G_2=G_1\cup G_2$$

(3) 图之间环和的定义也可以用并、交、差给出，即

$$G_1\oplus G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$$

∴ 基本要求

- 理解与图的定义有关的诸多概念，以及它们之间的相互关系。
- 深刻理解握手定理及其推论的内容，并能熟练地应用它们。
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图等概念及其它们的性质和相互关系，并能熟练地应用这些性质和关系。
- 深刻理解通路与回路的定义、相互关系及其分类，掌握通路与回路的各种不同的表示方法。
- 理解无向图的点连通度、边连通度等概念及其之间的关系，并能熟练地求出给定的较为简单的图的点连通度与边连通度。
- 理解有向图连通性的概念及其分类，掌握判断有向连通图类型的方法。

本章作业

- 4，6，11，14，18
- 23，28，34，39，41，48

二、练习题

1． 无向图 G 有 16 条边，3 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点度数均小于 3，问 G 的阶数 n 为几？

解

解本题的关键是应用握手定理．设除 3 度与 4 度顶点外，还有 x 个顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_x$，则 $d(v_i) \leq 2$，$i=1,2,\ldots,x$，于是得不等式

$$32 \leq 24+2x$$

得 $x \geq 4$，阶数 $n \geq 4+4+3=11$．

2．9 阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6. 证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点. .

证

证本题的关键是利用握手定理的推论.

方法一：穷举法

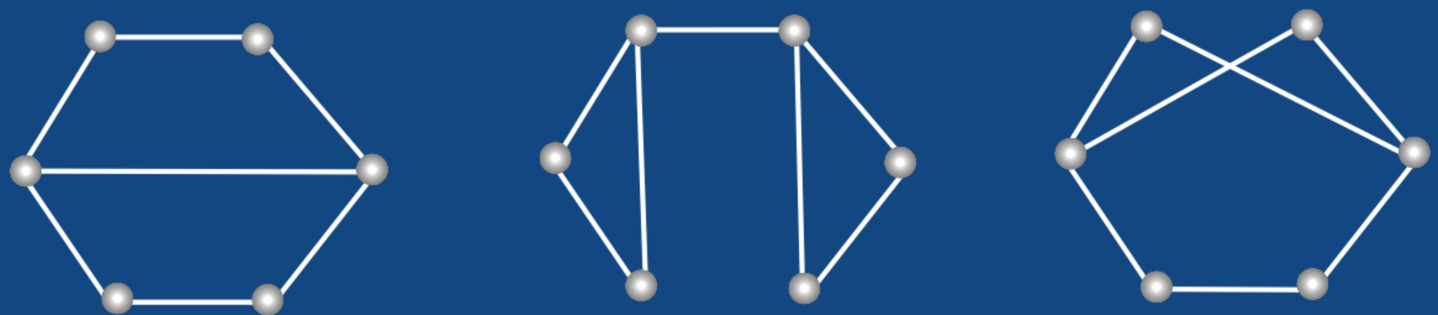
设 G 中有 x 个 5 度顶点，则必有 $(9-x)$ 个 6 度顶点，由握手定理推论可知，$(x,9-x)$ 只有 5 种可能：(0,9), (2,7), (4,5), (6,3), (8,1) 它们都满足要求.

方法二：反证法

否则，由握手定理推论可知，“G 至多有 4 个 5 度顶点并且至多有 4 个 6 度顶点”,这矛盾于 G 是 9 阶图.

3．数组 2, 2, 2, 2, 3, 3 能简单图化吗？若能，画出尽可能多的非同构的图来.

解　只要能画出 6 阶无向简单图，就说明它可简单图化. 图 11 的 4 个图都以此数列为度数列，请证明它们彼此不同构，都是 K_6 的子图.



(1)　　(2)　　(3)

图 11

4. 设 $D=<V,E>$为有向简单图，已知 $\delta(D)\geq 2$，$\delta^+(D)>0$，$\delta^-(D)>0$，证明 D 中存在长度 $\geq \max\{\delta^+,\delta^-\}+1$ 的圈.

证

用扩大路径法证明.

情况一：$\delta^-\geq\delta^+$. 证明 D 中存在长度 $\geq\delta^-+1$ 的圈.

设$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$为极大路径，则 $l\geq\delta^-$（为什么？）. 由于 $d^-(v_0)\geq\delta^-$，所以在Γ上存在 $v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_{\delta^-}}$ 邻接到 v_0，于是 $v_0v_1\ldots v_{i_1}\ldots v_{i_2}\ldots v_{i_{\delta^-}}v_0$ 为 D 中长度 $\geq\delta^-+1$ 的有向圈，示意图为图 12 所示，其中红色圈满足要求.

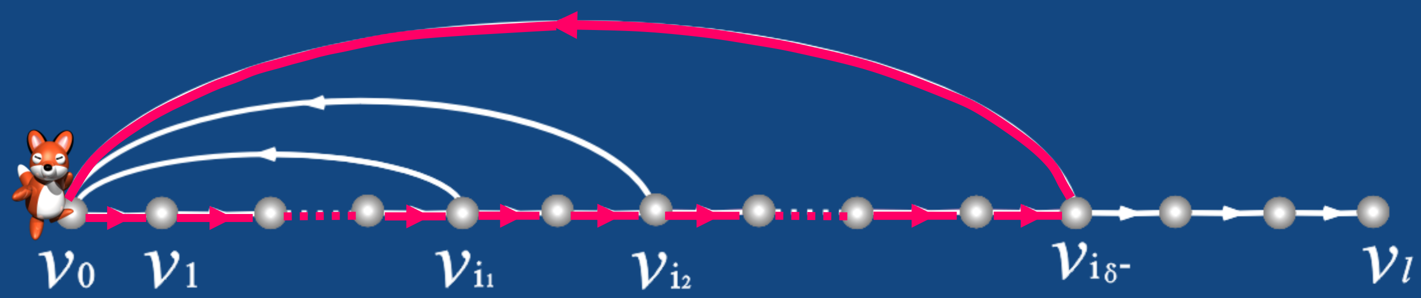


图 12

情况二：$\delta^+\geq\delta^-$，只需注意 $d^+(v_l)\geq\delta^+$.

PLAY

5．有向图 D 如图 13 所示

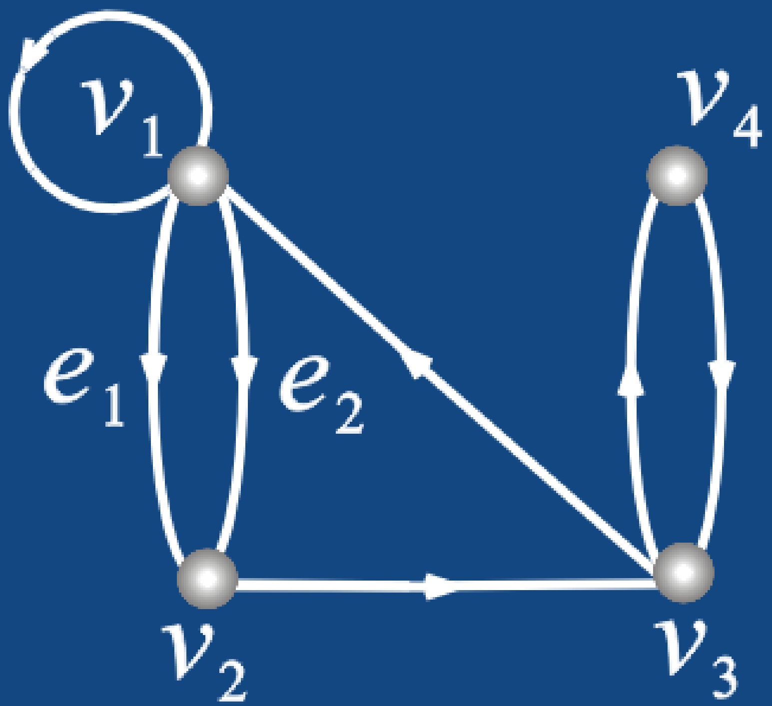


图 13

回答下列诸问：

（1） D 中有几种非同构的圈?

（2） D 中有几种非圈的非同构的简单回路?

（3） D 是哪类连通图?

（4） D 中 v_1 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的通路各有多少条？并指出其中有几条是非初级的简单通路?

（5） D 中 v_1 到 v_1 长度为 1，2，3，4 的回路各有多少条？并讨论它们的类型.

（6） D 中长度为 4 的通路（不含回路）有多少条?

（7） D 中长度为 4 的回路有多少条?

（8） D 中长度≤4 的通路有多少条？其中有几条是回路?

（9） 写出 D 的可达矩阵.

解

（1）D 中有 3 种非同构的圈，长度分别为 1，2，3，请画出它们的图形.

（2）D 中有 3 种非圈的非同构的简单回路，它们的长度分别为 4，5，6. 请画出它们的图形来.

（3）D 是强连通的（为什么？）

为了解（4）--（8），只需先求 D 的邻接矩阵的前 4 次幂.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

（4）v_1 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的通路数分别为 0，0，2，2. 其中只有长度为 4 的两条是非初级的简单通路（定义意义下），见图 14 所示.

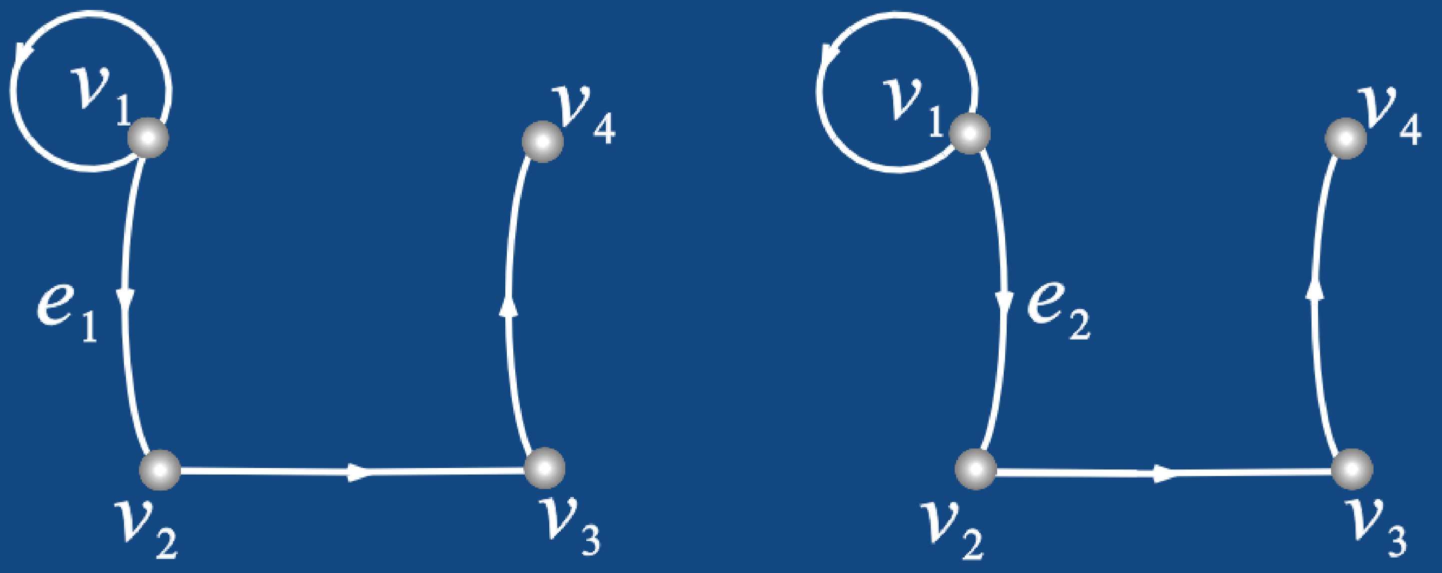


图 14

（5）v_1 到 v_1 长度为 1，2，3，4 的回路数分别为 1，1，3，5. 其中长度为 1 的是初级的（环）；长度为 2 的是复杂的；长度为 3 的中有 1 条是复杂的，2 条是初级的；长度为 4 的有 1 条是复杂的，有 4 条是非初级的简单回路. 请在图中行遍以上各回路.

（6）长度为 4 的通路（不含回路）为 33 条.

（7）长度为 4 的回路为 11 条.

（8）长度≤4 的通路 88 条，其中 22 条为回路.

（9）4×4 的全 1 矩阵.