

定理16:  $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

证明:

1  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  公理3

2  $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  对(1)用前件互换定理2

3  $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$  定理13

4  $B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$  (2)与(3)用三段论定理8

5  $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$  对(4)用前件互换定理2

6  $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$  公理2

7  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$  (5)与(6)用分离规则分离而得

8  $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  公理3

9  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  (7)与(8)用三段论定理8

$$\begin{array}{l} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \\ \neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \\ \hline B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \\ B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \\ \hline \vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \end{array}$$