

# Équations de Saint-Venant

ENSTA 2004

Considérons un récipient contenant un liquide. Lorsqu'on déplace le récipient, le liquide se met en mouvement. Imaginons qu'il soit désiré de déplacer le récipient sur un tapis roulant entre deux ateliers (par exemple: étiquetage puis collage). On souhaite en pratique effectuer ce mouvement avec une certaine célérité, en limitant les oscillations résiduelles du liquide à la fin du mouvement.

Dans ce qui suit, on se propose de calculer des loi de déplacement du récipient ne générant pas d'oscillations du liquide à la fin du mouvement.

## 1 Modèle 1D

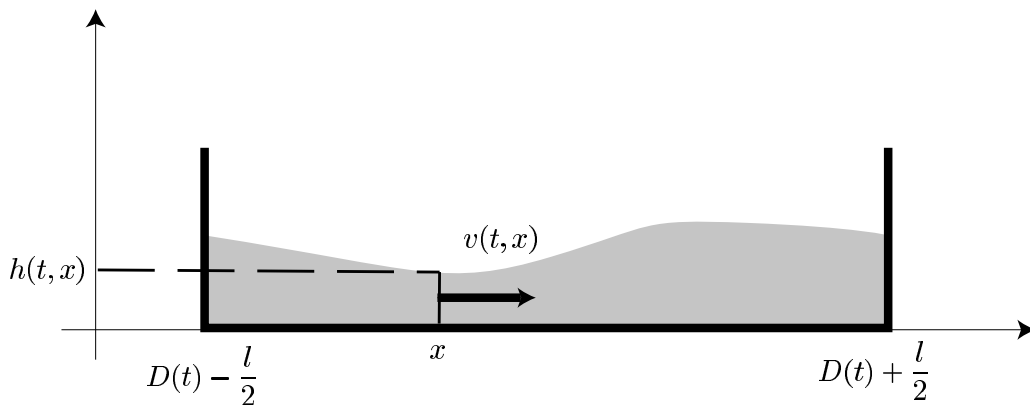


Figure 1: Récipient 1D contenant un liquide.

Le système ainsi considéré est défini par

- $D(t)$  la position du centre du récipient
- la coordonnée horizontale du liquide  $x \in [D(t) - l/2, D(t) + l/2]$  où  $l$  est la longueur du récipient
- le profil de hauteur  $[D(t) - l/2, D(t) + l/2] \ni x \mapsto h(x, t)$  avec  $h(x, t) > 0$ ;
- le profil de vitesse  $[D(t) - l/2, D(t) + l/2] \ni x \mapsto v(x, t)$  dans le référentiel absolu
- $g$  la gravité, la masse volumique du liquide étant prise égale à 1.

Montrer qu'un modèle du système est

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) &= 0 \\ h(0, x) &= h_0(x) \\ v(0, x) &= v_0(x) \\ v(t, D(t) - \frac{l}{2}) &= \dot{D}(t) \\ v(t, D(t) + \frac{l}{2}) &= \dot{D}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Dans ce qui suit on va faire ressortir de ce modèle une structure de système à retards. Pour cela il nous faut faire quelques opérations sur les équations.

## 2 Utilisation des invariants de Riemann

Soient  $J_1 = v + 2\sqrt{gh}$ ,  $J_2 = v - 2\sqrt{gh}$ ,  $\lambda_1 = v - \sqrt{gh}$  et  $\lambda_2 = v + \sqrt{gh}$ . Vérifier qu'on a les propriétés suivantes

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial J_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial J_2}{\partial x} = 0.$$

Note: ces grandeurs sont appelées invariants de Riemann. Les équations de la dynamique du système s'écrivent sous la forme conservative

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

où  $U = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}$  et  $f(U) = \begin{pmatrix} hv \\ \frac{(hv)^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}$ . Le Jacobien de  $f$  est

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - v^2 & 2v \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont  $\lambda_1 = v - \sqrt{gh}$ ,  $\lambda_2 = v + \sqrt{gh}$  et ses vecteurs propres sont

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \text{ et } r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + \sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

On dit que  $J_1$  est un 1-invariant de Riemann car  $\nabla J_1 \cdot r_1 = 0$  et que  $J_2$  est un 2-invariant de Riemann car  $\nabla J_2 \cdot r_2 = 0$ .

## 3 Référentiel lié au récipient

Utilisons maintenant le changement de coordonnées suivant

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ z = x - D(t) \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$J_+(t, z) = J_2(t, z + D(t)) , J_-(t, z) = J_1(t, z + D(t)).$$

On a

$$J_2(t, x) = J_+(t, x - D(t)) , J_1(t, x) = J_-(t, x - D(t)).$$

Vérifier qu'on obtient alors  $\frac{\partial J_-}{\partial z} = \frac{\partial J_1}{\partial x}$  ,  $\frac{\partial J_-}{\partial t} = \frac{\partial J_1}{\partial t} + \dot{D} \frac{\partial J_1}{\partial x}$ . Ce qui signifie

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (\lambda_1 - \dot{D}) \frac{\partial J_+}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

De la même manière

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} + (\lambda_2 - \dot{D}) \frac{\partial J_-}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Montrer que les conditions limites sont

$$\frac{J_+ + J_-}{2} \left( t, -\frac{l}{2} \right) = \frac{J_+ + J_-}{2} \left( t, \frac{l}{2} \right) = \dot{D}(t), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

## 4 Approximation au premier ordre dans les coordonnées de Riemann

Autour de  $(h, hv) = (\bar{h}, 0)$ , étudions  $\delta J_+ = J_+ - \bar{J}_+$  avec  $\bar{J}_+ = -2\sqrt{g\bar{h}}$  et  $\delta J_- = J_- - \bar{J}_-$  avec  $\bar{J}_- = 2\sqrt{g\bar{h}}$ . Sous l'hypothèse que  $\|\dot{D} - v\| \ll \sqrt{g\bar{h}}$ , montrer qu'on obtient deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\delta J_+)}{\partial t} - \sqrt{g\bar{h}} \frac{\partial (\delta J_+)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\delta J_-)}{\partial t} + \sqrt{g\bar{h}} \frac{\partial (\delta J_-)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations ont une forme découplée particulièrement simple qui admet une quadrature explicite.

## 5 Écriture sous la forme d'un système à retard

Chercher des solutions des équations précédentes sous la forme

$$\delta J_+(t, x) = \varphi_+ \left( t + \frac{x}{c} \right) , \delta J_-(t, x) = \varphi_- \left( t - \frac{x}{c} \right) .$$

Ecrire les deux conditions limites (4) sous la forme équivalente

$$\varphi_+ \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) + \varphi_- \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) = 2\dot{D}(t) \quad (5)$$

$$\varphi_+ \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) + \varphi_- \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) = 2\dot{D}(t). \quad (6)$$

## 6 Paramétrisation explicite

Les équations (5, 6) peuvent s'écrire formellement

$$\begin{pmatrix} e^{-s\frac{\Delta}{2}} & e^{s\frac{\Delta}{2}} \\ e^{s\frac{\Delta}{2}} & e^{-s\frac{\Delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dot{D}. \quad (7)$$

Notons  $M$  la matrice précédente. Montrer que cette matrice d'opérateurs possède un noyau dans  $C(\mathbb{R})$  dont les éléments  $\bar{\pi}$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} \pi(t) \\ -\pi(t+\Delta) \end{pmatrix}$  où  $\pi$  est une fonction  $2\Delta$ -périodique. En déduire la solution générale

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(t) \\ -\pi(t+\Delta) \end{pmatrix} + \frac{1}{e^{-s\Delta} - e^{s\Delta}} \begin{pmatrix} e^{-s\frac{\Delta}{2}} & -e^{s\frac{\Delta}{2}} \\ -e^{s\frac{\Delta}{2}} & e^{-s\frac{\Delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dot{D}.$$

Posons alors  $2\dot{D} = (e^{s\frac{\Delta}{2}} + e^{-s\frac{\Delta}{2}}) \dot{\mathcal{V}}$ , vérifier qu'on obtient alors

$$\begin{aligned} \varphi_+(t) &= \pi(t) + \dot{\mathcal{V}}(t) \\ \varphi_-(t) &= -\pi(t+\Delta) + \dot{\mathcal{V}}(t). \end{aligned}$$

Calculer alors  $\delta J_+$ ,  $\delta J_-$  et  $J_+$ ,  $J_-$  au premier ordre. En déduire  $v$  et  $h$ .

**Famille de solutions.** Pour les déplacements du type  $D(t) = \frac{1}{2}(\nu(t+\Delta/2) + \nu(t-\Delta/2))$  où  $\nu$  est une fonction régulière quelconque, les trajectoires du système sont de la forme

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{J_+(t, x - D(t)) + J_-(t, x - D(t))}{2} \\ v(t, x) &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathcal{V}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) + \pi\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathcal{V}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) - \pi\left(t + \Delta - \frac{x - D(t)}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

et

$$\begin{aligned} h(t, x) &= \frac{1}{16g} [J_-(t, x - D(t)) - J_+(t, x - D(t))]^2 \\ h(t, x) &= \left[ \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{4g}} \left( \dot{\mathcal{V}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) - \pi\left(t + \Delta - \frac{x - D(t)}{c}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \dot{\mathcal{V}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) - \pi\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Ces équations montrent que toutes les variables du système, c'est à dire  $h$ ,  $v$  et  $D$  s'expriment au moyen de  $\mathcal{V}$  et de  $\pi$  une fonction  $2\Delta$ -périodique. Nous allons montrer comment, dans certains cas particuliers, on se débarrasse de  $\pi$ .

## 7 Planification de trajectoires entre deux points stationnaires

Définissons

$$\mathcal{V}(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\Delta}{2} \\ \sigma(t) & \frac{\Delta}{2} \leq t \leq T + \frac{\Delta}{2} \\ 1 & t > T + \frac{\Delta}{2}. \end{cases}$$

Imposons les conditions initiales suivantes

$$\forall x \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} h(0, x) = \bar{h} \\ v(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

Montrer que les conditions initiales précédentes imposent

$$\forall t \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{V}(-t) + \pi(-t) - \dot{V}(t) + \pi(\Delta + t) = 0 \\ \dot{V}(-t) + \pi(-t) + \dot{V}(t) - \pi(\Delta + t) = 0. \end{array} \right.$$

et donc

$$\forall t \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{V}(t) = -\pi(t) \\ \dot{V}(t) = \pi(\Delta + t). \end{array} \right.$$

En déduire, en utilisant le fait que  $\mathcal{V}(s) = 0$  pour  $s < \frac{\Delta}{2}$  que la fonction  $\pi$  est nulle.

## 8 Paramétrisation du mouvement

Toutes les variables du système s'écrivent au moyen de  $\mathcal{V}$  et de  $\dot{\mathcal{V}}$ . Ainsi, modulo la partie de torsion,  $\mathcal{V}$  est une sortie plate. Au premier ordre on a

$$D(t) = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{V}\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + \mathcal{V}\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (10)$$

$$v(t, x) = \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathcal{V}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) + \dot{\mathcal{V}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) \right] \quad (11)$$

$$h(t, x) = \bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}} \left( \dot{\mathcal{V}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) - \dot{\mathcal{V}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) \right). \quad (12)$$

Ces équations sont la paramétrisation des solutions du modèle linéarisé. Vérifier que ce sont des solution au premier ordre des équations aux dérivées partielles du modèle.

## 9 Codage en Matlab

Dans le répertoire **Mfiles** le programme **root** utilise les formules précédentes pour calculer le mouvement du récipient.

Il est possible de changer le mouvement en changeant le fichier **potent**. Etudier l'effet des variations des paramètres  $L$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $T$ ,  $M$ . Le paramètre  $Tf$  détermine la durée de l'affichage. On peut ainsi obtenir un cliché du mouvement à  $T/4$  en posant  $Tf = T/4$ .

## 10 Comparaison avec le modèle nonlinéaire

La paramétrisation exacte des trajectoires du système que nous venons d'établir repose sur une approximation au premier ordre. Il est intéressant de vérifier la pertinence de cette approche sur le système nonlinéaire initial.

Vous disposez dans le répertoire **Mfiles** du programme **Ctank.m** qui contient un schéma de Godunov pour la résolution de ces équations aux dérivées partielles. Le paramètre  $Tf$  détermine le temps de simulation, il peut être choisi plus court ou plus long que  $T$ .

Quel est le paramètre qui permet de rendre valide l'approximation linéaire?

En jouant sur le paramètre **openloop**, vous utilisez ou non les formules de génération de trajectoires que nous venons d'élaborer. Comparer les remous créés par les deux méthodes.

## 11 Signification physique de la sortie plate

Vérifier que  $\nu$  n'est autre que

$$\mathcal{V}(t) = D(t) + \frac{l}{2} \frac{M^+ - M^-}{M^+ + M^-} \quad (13)$$

où

$$M^+ = \int_{D(t)}^{D(t)+\frac{l}{2}} h(t, s) ds, \quad M^- = \int_{D(t)-\frac{l}{2}}^{D(t)} h(t, s) ds.$$

Ainsi on peut interpréter  $\mathcal{V}(t)$  comme la coordonnée horizontale d'un point géométrique proche mais légèrement différent du centre de gravité du liquide. Comme on l'a représenté sur la figure 2, ce point est le centre de gravité de deux masses ponctuelles  $M^-$  et  $M^+$ , placées sur les bords du récipient en  $-l/2$  et  $+l/2$ . En particulier  $\mathcal{V}$  coïncide avec le milieu du récipient au début et à la fin du mouvement.

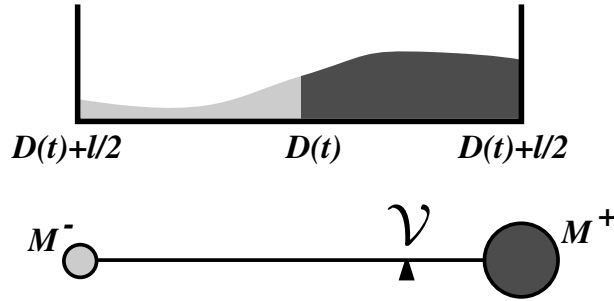


Figure 2: Lieu géométrique de la sortie plate  $\mathcal{V}$ .

## 12 Génération de mouvement en temps réel

Les formules de paramétrisation de trajectoires que nous avons établies sont particulièrement simples à évaluer numériquement. On peut tirer parti de cette propriété en les utilisant en temps réel.

Imaginer une solution, comparer au code `wtmk.m`. Comment a-t-on généré un déplacement de la forme  $D(t) = \frac{1}{2}(\nu(t + \Delta/2) + \nu(t - \Delta/2))$ ? Comment parvient-on à déplacer le récipient vers un point désiré? Comment rendre les mouvements générés plus agressifs?

## 13 Modèle 2D rectangulaire

Ce travail peut s'étendre au cas bi-dimensionnel par superposition des mouvements et décomposition de la condition aux bords du récipient suivant les deux normales aux bords d'un récipient rectangulaire de dimension  $L_x \times L_y$ , voir figure 3.

Notons en effet le modèle simplifié dans le référentiel lié au récipient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gh_0 \Delta h \\ \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} = -\ddot{D} \cdot \frac{\vec{n}}{g} \text{ sur le bord} \end{cases} \quad (14)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal défini partout où c'est possible sur le bord du récipient.

Montrer qu'on peut construire une solution du système précédent en superposant les solutions des deux systèmes suivants (qui sont du type traité ici)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} = -\ddot{D}_x/g \text{ en } x = 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} = \ddot{D}_x/g \text{ en } x = L_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} = -\ddot{D}_y/g \text{ en } y = 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} = \ddot{D}_y/g \text{ en } y = L_y \end{cases}$$

en posant

$$h(t, x, y) = h_1(t, x) + h_2(t, y)$$

$$\vec{D}(t) = D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y.$$

## 14 Génération de mouvements en temps réel 2D

Comment modifier `wtnk.m` pour générer des mouvements 2D? Comparer avec le code `wtnk2.m`.

## 15 Modèle 2D circulaire

Dans le cas d'un récipient cylindrique en translation le modèle simplifié devient

$$\begin{cases} \ddot{H} = g\bar{h}\Delta H \\ g\nabla H \cdot \vec{n} = -u \cdot \vec{n} \quad \text{on } \partial\Omega \\ \ddot{D} = u \end{cases} \quad (15)$$

Où  $\Omega$  est un disque de rayon  $l$  et  $D$  représente la position de son centre. On peut établir les formules suivantes après différentes opérations: passage en coordonnées polaires, transformation de Bessel, etc ...

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux fonctions  $C^3$ . Les fonctions  $D$  et  $H$  suivantes sont solutions des équations de la dynamique

$$\begin{cases} D_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_1 \left( t - \frac{l \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \right) \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ D_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_2 \left( t - \frac{l \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \right) \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ H(r, \theta, t) = \frac{\cos \theta}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{h}}{g}} \int_0^{2\pi} \dot{y}_1 \left( t - \frac{r}{\sqrt{gh}} \cos \varphi \right) \cos \varphi \, d\varphi \\ \quad + \frac{\sin \theta}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{h}}{g}} \int_0^{2\pi} \dot{y}_2 \left( t - \frac{r}{\sqrt{gh}} \cos \varphi \right) \cos \varphi \, d\varphi. \end{cases} \quad (16)$$

Comment calculer des mouvements en temps réel pour ce système? Comparer avec `circ.tank.m`.

Note: On a :  $c = \sqrt{g\bar{h}}$  et  $\Delta = \frac{l}{c}$ . On doit obtenir :

$$(\delta^2 - 1)(\varphi_+ - \varphi_-) = 0.$$

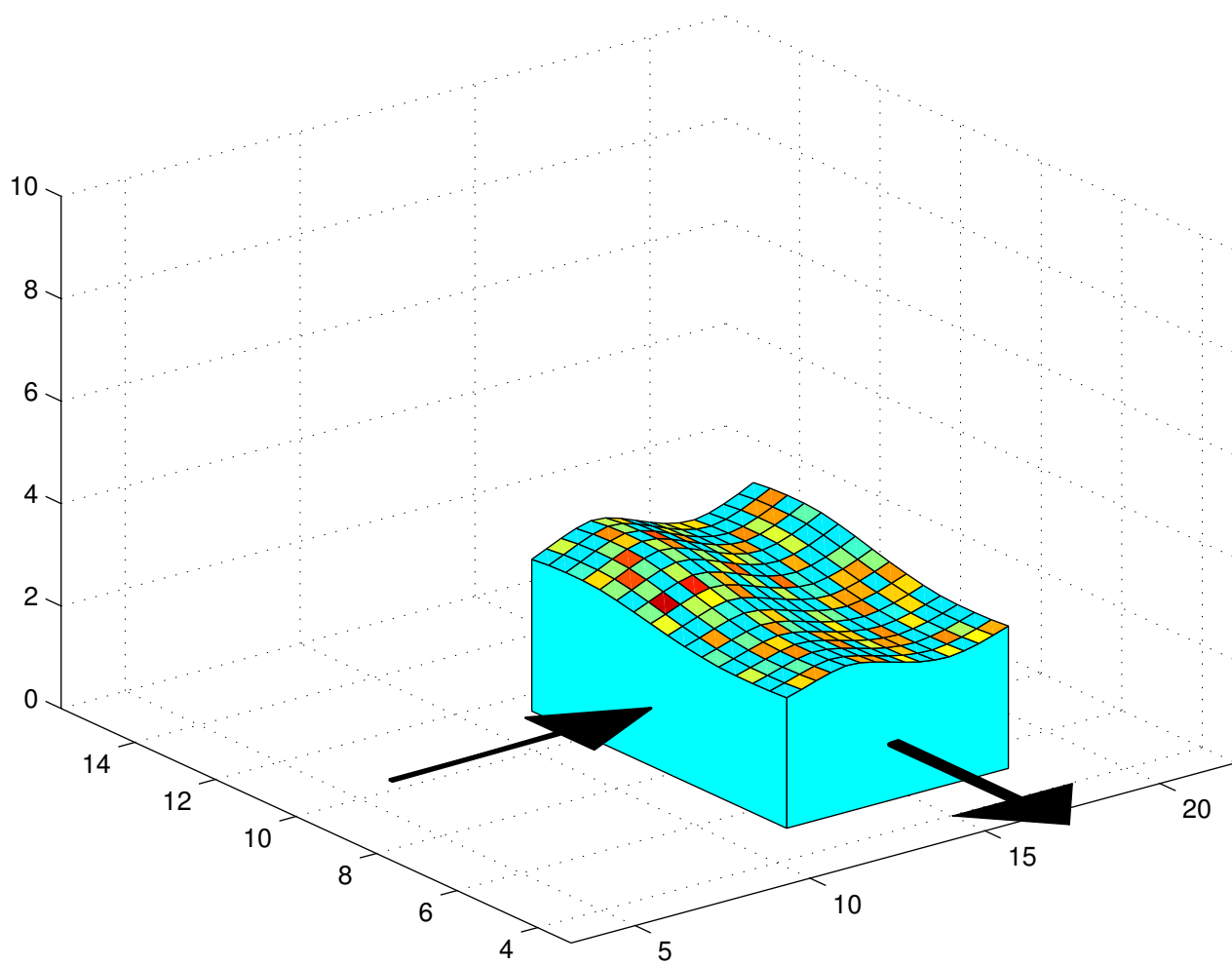


Figure 3: Récipient rectangulaire contenant un fluide. Instantané du mouvement calculé en temps réel par platitude. (Surface colorée aléatoirement pour aider à la visualisation du relief.) Les deux flèches représentent les forces exercées sur le récipient.



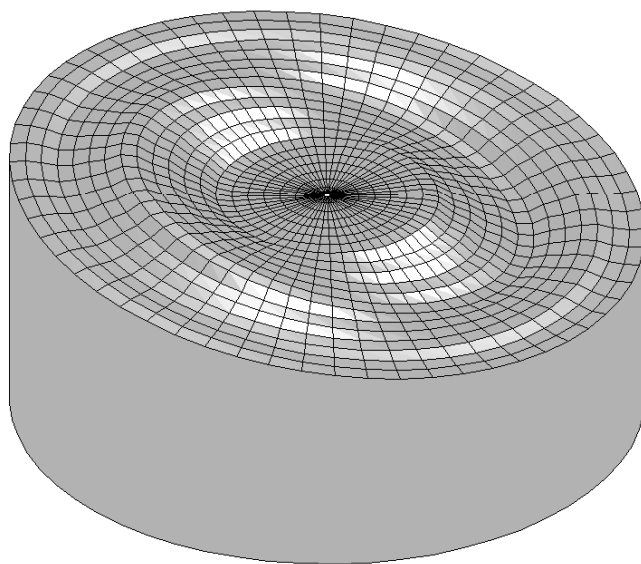


Figure 4: Récipient cylindrique en mouvement `circ_tank.m`