2. Zelluläre Automaten

[Berechenbarkeit, Komplexitätstheorie]

- Automat = abstrakte Maschine als Modell eines digitalen, zeitdiskreten Rechners
- Endlicher Automat = Zustandsmaschine („finite state machine") [Steuerungstechnik]

  * Zustand : oft diskret, kann „Gedächtnis" haben

  * Übergang : Zustandsänderung, findet nur statt, wenn Bedingungen / Eingaben erfüllt

  * Aktion : „Ausgabe" des Automaten

  - Eingangsaktion: laufen immer ab beim Eintritt eines Zustandes
  - Eingabeaktion: Aktion hängt von aktuellem Zustand + Eingabe ab

- Modelle : Akzeptor

$$\boxed{A = (Z, z_0, \Sigma, F, f)}$$

Z = endliche Zustandsmenge

z_0 = Anfangszustand

Σ = endl. Eingabealphabet

F = Endzustandsmenge, $F \subseteq Z$, stoppt Automaten

$f : \underbrace{Z}_{\text{Zust.}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{Beding.}} \longrightarrow Z$ Übergangsfunktion (nicht-) deterministisch

→ Spracherkennung

Σ = Alphabet

Z = { start, g-gef, u-gef, korrekt, falsch }

F = { korrekt, falsch }

f: (start, 'g') → (g-gef, 'u') → (u-gef, 't') → korrekt ('gut' gefunden)

f: (..., x) → (falsch, x) $x \notin$ {'g', 'u', 't'}

f: (g-gef, 't') → (falsch, 't') etc

- Transduktoren $\boxed{A = (Z, z_0, \Sigma, F, f, \Gamma, \omega)}$

Γ = Ausgabealphabet

$\omega : Z \times \Sigma \rightarrow \Gamma$ Ausgabefunktion (Aktionen)

* Ausgabe hängt nur vom Zustand, nicht Eingabe, ab $\omega : Z \rightarrow \Gamma$ („Moore")

* Ausgabe hängt von Zustand + Eingabe (Bedingungen) ab („Mealy")

$\Longrightarrow$ Steuerungstechnik „Mealy" effizienter, aber auch komplexer

- Turing-Maschine : Leistungsfähiger, ursprünglich Modell für menschliches Denken

Church-Hypothese: Mensch kann mit Papier + Bleistift nur Turing-Berechenbare Probleme lösen.

Band = serielles Schreib-/Leseband

$\boxed{M = (Z, z_0, \Sigma, F, \Gamma, \#, f)}$

Γ = Bandalphabet $\Sigma \subseteq \Gamma$

$\# \in \underbrace{\Gamma \setminus \Sigma}_{\text{Sonderzeichen}}$ leeres Feld („blank"), trennt Abschnitte auf Band

(L, R, N) Steuerung des RW-Kopfes

L: links, R: rechts, N: nicht

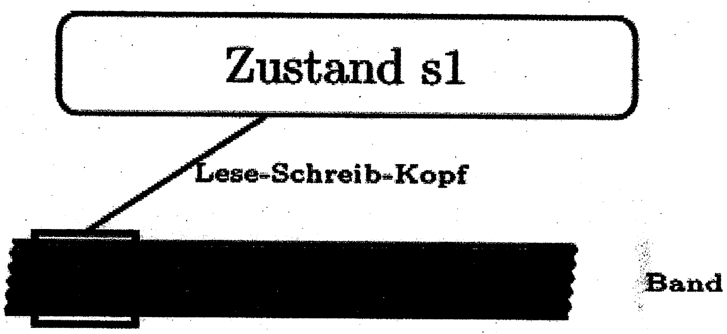
$f : \underbrace{(Z \setminus F)}_{\text{F beendet, kein Übergang}} \times \overset{\text{Band-Input}}{\Gamma} \longrightarrow Z \times \overset{\text{Band output}}{\Gamma} \times \overset{\text{Kopfsteuerung}}{\{L, R, N\}}$

Bsp: s.

aktueller Zustand	geles. Symbol		schr. Symbol	neuer Zustand	Kopf-richtung
s1	1	→	0	s2	R
s1	0	→	0	s6	N
s2	1	→	1	s2	R
s2	0	→	0	s3	R
s3	1	→	1	s3	R
s3	0	→	1	s4	L
s4	1	→	1	s4	L
s4	0	→	0	s5	L
s5	1	→	1	s5	L
s5	0	→	1	s1	R

M durchläuft im oben erwähnten Beispiel, also bei der Eingabe „11“, folgende Zustände, wobei die aktuelle Kopfposition fett gedruckt ist:

Schritt	Zust.	Band
1	s1	11000
2	s2	01000
3	s2	01000
4	s3	01000
5	s4	01010
6	s5	01010
7	s5	01010
8	s1	11010



Die beschriebene Turingmaschine auf die Eingabe „11“ angewandt.

Schritt	Zust.	Band
9	s2	10010
10	s3	10010
11	s3	10010
12	s4	10011
13	s4	10011
14	s5	10011
15	s1	11011
16	s6	-halt-

Die Berechnung beginnt im Anfangszustand $s1$. Hier wird die erste Eins durch ein leeres Feld ersetzt, der Schreib-Lese-Kopf bewegt sich nach rechts und neuer Zustand wird $s2$. Der Kopf wandert nun solange nach rechts, bis ein leeres Feld gelesen wird. Danach gelangt die Turingmaschine in den Zustand $s3$ und überliest alle weiteren Einsen, bis sie erneut ein leeres Feld findet. Dieses wird dann durch eine Eins ersetzt. Im Zustand $s4$ bewegt sich der Kopf zurück, überliest wieder alle Einsen, bis er auf ein leeres Feld trifft,

• Zellulärer Automat

* modelliert räumlich und zeitl. diskrete dynamische Systeme
* viele Zellen, die den physik. Raum aufbauen (→ viele FG)
* Dynamik = Übergangsfunktion Zeitschritt $t \to t+1$
hängt i.a. nur vom Zustand der betreffenden Zelle
und Nachbarschaft ab („Lokalität")

• $\boxed{ZA = \{R, N, Z, \varkappa_0, \delta\}}$

R = physik. Raum (Zellularraum)
in Zellen eingeteilt

N = endliche Nachbarschaft (s.u.)

Z = Zustandsmenge (einer Zelle, oft diskret)

$\varkappa_0$ = Anfangskonfiguration $\in Z^R$ bzw Abbildg $R \to Z$

δ = lokale Übergangsfunktion $Z^N \to Z$

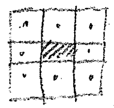
(Zustandsänderung einer Zelle beeinflusst
durch Zustände in Nachbarschaft)

1. <u>Konfiguration</u> = Gesamtzustand des ZA, Abbdg. $R \hookrightarrow Z$

2. <u>Übergänge</u> = erfolgen zu diskreten Zeiten $t \to t+1$ für alle Zellen simultan.

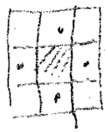
3. <u>Nachbarschaft</u> = welche lokal benachbarten Zellen sind dynamisch gekoppelt?

<u>Bsp</u>: $d=2$ Raumdimensionen



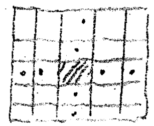
$|N| = 8+1$

<u>Moore</u>



$|N| = 4+1$

<u>von-Neumann</u>



$|N| = 8+1$

übernächste Nachbar-WW!

—— Beispiele ——

① Conway „Game of Life": (1970)

- $\dim R = 2$
- $N = $ Moore, $8+1$
- $Z = \{0, 1\}$ (tot, lebendig)
- $\delta(\{\underset{\text{Zelle}}{z_0}, \underbrace{\ldots, z_8}_{\text{Nachbarn}}\}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } S := \sum_{k \in N} z_k \leq 2 \\ 1, & \text{falls } S = 3 \\ z_0, & \text{falls } S = 4 \\ 0, & \text{falls } S \geq 5 \end{cases}$

1. lebende Zelle mit < 2 lebenden Nachbarn stirbt (Einsamkeit)
2. lebende Zelle mit 2 oder 3 lebenden Nachbarn überlebt
3. tote Zelle mit 3 lebenden Nachbarn wird wiedergeboren
4. lebende Zelle mit 4 oder mehr leb. Nachbarn stirbt („Überbevölkerung")

$\Rightarrow$ Komplexe Strukturen, Populationswachstum

② Konrad Zuse (1969) „Rechnender Raum"

S. Wolfram (1983) Universum = riesiger zellulärer Automat
Dynamik folgt diskreten Regeln ?

3) <u>In einer Dim mit nächster-nachbar Wechselwirkung</u>

- dim $R = 1$
- N =  $|N| = 2+1$
- $Z = \{0, 1\}$
- $\delta : Z^N \to Z$, also $\boxed{z_0 \,|\, z_1 \,|\, z_2} \to z_1'$

Es gibt $2^3 = 8$ mögliche Zustände in Z^N, also $2^8 = 256$ mögliche Übergangsfunktionen (Modelle)

<u>Bsp.</u>

Z^N	(111)	(110)	(101)	(100)	(011)	(010)	(001)	(000)
δ	0	1	1	0	1	1	1	0

$\longrightarrow$ Regel $(01101110)_2 = 110$

Regel 110

- Nur wenige dieser Regeln physik. interessant

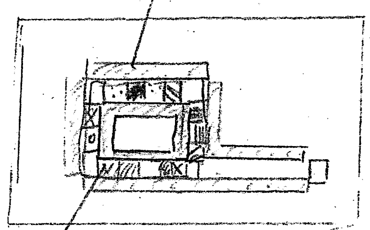
  * Regel 30 : nicht periodisch, chaotisch, mit kleinen lokalen Regelmäßigkeiten (→ Schneckenhaus Webekegels)

  * Regel 184 : Vorläufer des Nagel-Schreckenberg-Modells

4) Langton-Schleifen (1984)

- „Künstliches Leben" = ZA mit Fähigkeit zur Selbstreplikation
- $\dim R = 2$
- N = von-Neumann
- $Z = \{0, 1, \dots, 7\}$
- x_0 = Anfangskonfiguration

Hülle



Hülle auf Zellen mit Zustand 2

Genom-Ring mit kodierten Instruktionen (zirkulieren im Ring)

- δ = mehrere 100 Regeln
- Trifft Genom-Instruktion an „Arm" (Fortpflanzungsorgan), so wird die Gen-Sequenz repliziert und es bilden sich neue Schleifen
- Schleifen können nicht überlappen → Schleifen die vollst. eingeschlossen sind können nicht reproduzieren und sterben ab → inaktiv (Korallenriffe)

5) Das Nagel - Schreckenberg - Modell

- ZA für die Modellierung des Verkehrsflusses auf Fernstraßen
- Vereinfachung: Nur eine Fahrspur, kein überholen
- $\underline{R = \mathbb{Z}}$ bzw. $\mathbb{Z}_n$ mit $n \gg 1$ Zellen + periodische Randbedingungen
- Zellgröße = Fahrzeuglänge + Abstand bei höchster Packungsdichte (Stau) = $\underline{7{,}5\,m}$

  Zeiteinheit = min. Reaktionszeit eines menschl. Fahrers = $\underline{1{,}0\,s}$

- Zustandsmenge $Z = \{\#, 0, 1, \dots, 5\}$ wobei $K \mathrel{\hat{=}}$ Geschwindigkeit des Fahrzeugs in \# Zellen / Zeiteinheit

  $K = \#$ → kein Auto in Zelle

  $K = 0$ → Auto in der Zelle steht.

  diskrete Geschwindigkeit

  in Einheiten von $7{,}5\,m/s = 27\,km/h$

  Höchstgeschwindigkeit $5 \cdot 7{,}5\,m/s = 135\,km/h$

- Nachbarschaft: max. 5 Zellen vor dem jeweiligen Auto

  (hängt vom Zustand ab!)

• <u>Übergangsregeln</u>:

1. Falls Maximalgeschwindigkeit nicht erreicht ($k \neq 5$), erhöhe $k \to k+1$ — Beschleunigen
2. Falls Lücke zum Vordermann < Geschwindigkeit k, reduziere $k \to$ Lücke — Kollisionsfreiheit
3. Geschwindigkeit wird mit Wahrscheinlichkeit p um eins reduziert, $k \to k-1$, falls nicht schon 0 — Trödeln

---

Nach diesen Regeln werden alle Zellen bei $t \to t+1$ aufgefrischt (Regeln 1-3 in Reihe angewandt)

<u>Bem:</u> Trödeln:

* Fahrzeug, das $k \neq max$ und Platz zum beschleunigen hat ($k \to k+1$, nach Regel 1) wird von Regel 3 wieder $k+1 \to k$ korrigiert ⇒ keine Beschleunigung obwohl möglich (<u>Schleichen</u>)
* Auto mit $k = max$ kann zurückfallen (nicht bei <u>Tempomat</u>)
* Auto, das wegen 2. bremsen musste reduziert k noch weiter, obwohl unnötig ⇒ <u>übertriebenes Bremsen</u>

Bsp:

| 3 | | 5 | | | 4 | | | 2 | | | 1 | 2 | | |

① | 4 | | 5 | | | 5 | | | 3 | | | 2 | 3 | | |

② | 1 | | 2 | | | 3 | | | 3 | | | 0 | 3 | | |

③ | 1 | | 2 | | | 2 | | | 3 | | | 0 | 2 | | |

Zug: | | 1 | | | 2 | | | 2 | | | | | 3 | 0 | | | 2 | ...

Ergebnisse

- Typische Minimalgröße $|R| = 1000$, also 7,5 km Straße
  Simulationen mit ~ 10 Mio Fahrzeugen auf Parallelrechnern (schwer)
  Erweiterung auf
  - mehrere Spuren
  - Überholen
  - Abbiegen ...

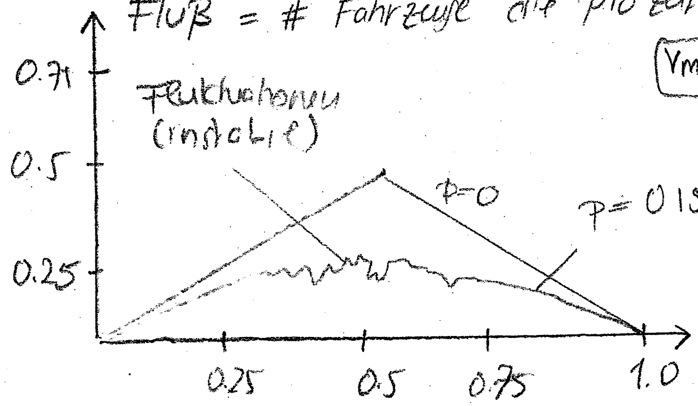
- Spezialfall $v_{max} = 1$ und $p = 0$ $\Longrightarrow$ Zellularautomat 184 („traffic rule")

- $\boxed{\text{ÜA}}$ $R = 1000$ mit 150 ... 300 Fahrzeugen

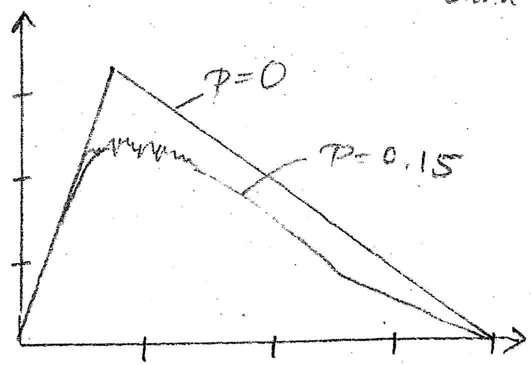
- Fundamentaldiagramm

Fluß = # Fahrzeuge die pro Zeit eine feste Marke passieren (Zeitmittel · 0...1)

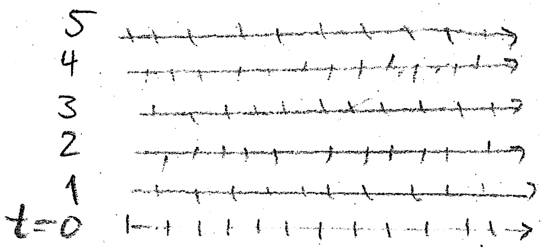
bei $p=0$
max Fluß bei
Dichte $\rho = (1+v_{max})^{-1}$



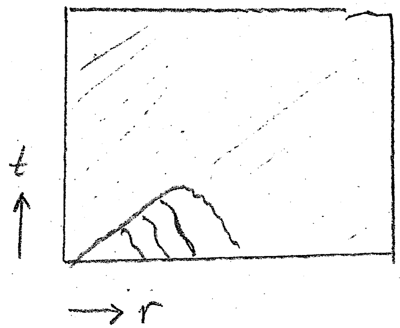
Dichte $= \frac{\#\text{Fahrzeuge}}{\#\text{Zellen}}$



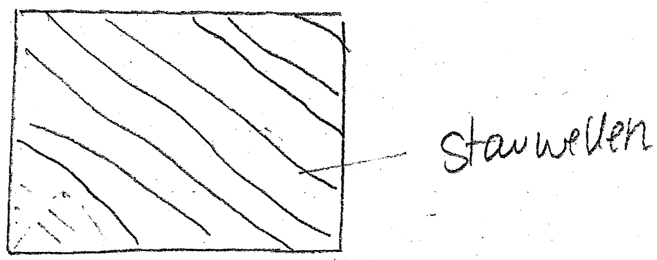
• <u>Visualisierung</u>



p=0 und ρ=0,15



p=0.15 und ρ=0.3



⇒ - Kann das Entstehen von Stauwellen „aus dem nichts" erklären, sofern ρ groß („hohes Verkehrsaufkommen") und $p > 0$.

⇒ Für $p = 0$ keine Stauwellen („<u>Trödeln entscheidend</u>")

⇒ Falls $\rho > \rho^*$ immer Stau mit Stillstand ($p>0$)

⇒ Beim Entstehen von Stau zunächst Fluktuationen → vermeiden Stau durch gleichmäßiges Fahren

⇒ max Fluß bei $\rho = \max$ und $v = v_{max}$ ohne Fluktuationen („Zug")

⑥ <u>Weitere Beispiele</u> $\boxed{\text{ÜA}}$

- sand pile (deterministisch)
- forrest fire (stochastisch)
- Epidemien ?