# (3) ZUFALLSWEGE

- Zufallsweg = Zufällige Bewegung eines punktförmigen Wanderers („walker") auf einem diskreten Raum (Gitter, Graph) in diskreter Zeit.
- Statt einem Wanderer mit $n \gg 1$ Zeitschritten auch $m \gg 1$ Wanderer mit ähnlichen (zufälligen) Anfangsbedingungen; (m-fache Wiederholung desselben Zufallsexperimentes)
  → statistische Mittelwerte im Limes $n \to \infty$ äquivalent
- entstehenden Pfade: fraktale Dimension, viele Anwendungen in Mathematik, Physik, Biologie, Ökonomie ... (s.u.)
- entstehender Prozess: (Wiener-Prozess) einfacher Vorläufer des wichtigsten Prozesses der statistischen Physik, dem Markov-Prozess

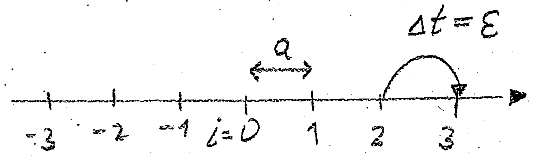
## 3.1. Anwendungen von Zufallswegen

- Ökonomie – Aktienkurse
- Physik
  - Brown'sche Molekularbewegung
  - Diffusion, Transport
  - Quantenmechanik
  - Quantenfeldtheorie
- Mathematik
  - Green'sche Funktionen
  - Kombinatorik
- Chemie – Polymere (Stabilität, therm. ...
- Informatik – Signalausbreitung in Netzen (Größe WWW)
- Medizin
  - Kaskaden von Neuronenimpulsen
  - Materialtransport in Zelle (Osmose
  - Genetik
- Psychologie
  - Entscheidungsfindung
  - Spieltheorie
  - (– WW II Gefangenenflucht)

## 3.2. Zufallswege und Diffusion

[Diffusion: Kollektives „makroskopisches Verhalten", simple [illegible] Dynamik, kann auch komplexe Muster erzeugen, vgl. Batik]

Betrachte einzelnen Wanderer in $d=1$ auf Gitter der Konstante $a$ mit Zeitschritt $\varepsilon$




Aufenthaltswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t = n\cdot\varepsilon$ am Ort $x = i\cdot a$ :

$$\rho(x,t) = \rho(ia, n\varepsilon) = u(i,n)$$

In jedem Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit ½ einen Schritt nach links oder rechts

$$P(i \leftarrow j) = \begin{cases} 1/2 \,, & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 \,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit

$$u(i,n+1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(i \leftarrow j)\, u(j,n) \Rightarrow \boxed{\vec{u}(n+1) = P\,\vec{u}(n)}$$

oder

$$\rho(x, t = n+\varepsilon) = \frac{1}{2}\Big[\rho(x-a, t = n\varepsilon) + \rho(x+a, t = n\varepsilon)\Big] \quad (*)$$

$$\frac{p(x,t+\varepsilon)-p(x,t)}{\varepsilon} = \frac{a^2}{2\varepsilon}\,\frac{p(x-a,t)-2p(x,t)+p(x+a,t)}{a^2}$$

Grenzübergang zum Kontinuum: $\varepsilon \to 0$ und $a \to 0$ mit $D \equiv \frac{a^2}{2\varepsilon} = \text{fix}$. Dann

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$ Diffusionsgleichung

- Instantane Geschwindigkeit $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{2}{a}\frac{a^2}{2\varepsilon} = \frac{2D}{a} \to \infty$ : Im Kontinuumslimes Brown'sche Pfad f.ü. stetig, aber f.ü. nicht diff'bar

- Genauer: Brown'sche Pfade sind Hölder-stetig ( $|u(x)-u(y)| \leq \text{const}\,|x-y|^\alpha$ für alle $x,y \in U$, hier $\alpha = 2$)
  Brown'sche Pfade sind fraktal, i.e. sie haben eine fraktale Dimension $> 1$ obwohl Linien.
  Der genaue Wert der fraktalen Dimension hängt von der Definition ab

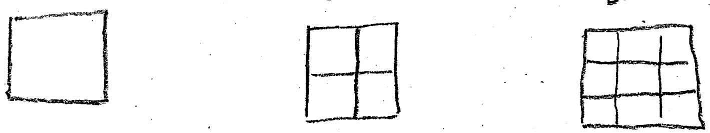
  Satz: Die Trajektorie einer Brown'schen Bewegung (Zufallsweg) hat fast immer (also für alle Zufallswege außer eine Nullmenge im Pfadraum) Hausdorff-Dimension 2 in $d \geq 2$.

Bem: • Hausdorff-Dimension of $S \subseteq X$ ($X$ = Banach)

$C_d(S)$ = infimum aller Zahlen $\delta > 0$, so daß es eine abzählbare Menge von Bällen $\{B_i(x_i, r_i)\}$ gibt, die $S$ überdecken und $r_i > 0$ und $\sum_i r_i^d < \delta$

$\dim(S) = \inf\{d \geq 0 : C_d(S) = 0\}$.

• Rényi-Dimension: Für selbstähnliche Figuren: Teile ein Objekt mit Längenskala 1 (in d Euklidischen Dimensionen) indem die Längenausdehnung in jeder Richtung um einen Faktor $1/\ell$ reduziert wird



| $d=2$ | $d=2$ | $d=2$ |
|---|---|---|
| $\ell=1$, $N=1$ | $\ell=2$, $N=4$ | $\ell=3$, $N=9$ |

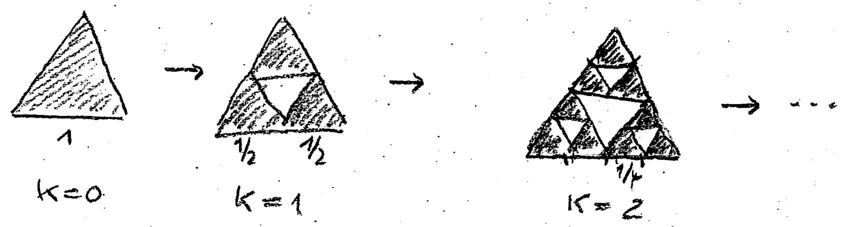
$N(\ell)$ ist die Anzahl der Elemente, die auf Stufe $\ell$ notwendig sind, um die originale Fläche zu (über-)decken. In obigem Beispiel $N = \ell^2 = \ell^d$. Damit ist die Dimension $d = \ln N(\ell) / \ln \ell$. Dies kann auf Fraktale verallgemeinert werden

$N(\varepsilon)$ = # selbst-ähnlicher Elemente mit linearer Ausdehnung $\varepsilon$, die notwendig ist, um die originale Figur zu überdecken. Dann

$$\boxed{D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}}$$

entspricht fast immer der Hausdorff-Dimension.

## Sierpinski-Dreieck




In Stufe $k \geq 0$: $\varepsilon = 2^{-k}$, $N(\varepsilon) = 3^k$

Damit $$D = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(3^k)}{\ln(2^k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln 3}{k \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx \underline{\underline{1.585}}$$

• Lösung der Diffusionsgleichung für Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \delta(x)$ (Start im Ursprung):

$$\boxed{\rho_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \qquad t > 0}$$

• Da keine Richtung ausgezeichnet, $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \rho_0(x,t) \cdot x = 0$. Andererseits entfernt sich der Wanderer immer weiter vom Ursprung

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 \rho_0(x,t) = 2Dt \sim t \qquad \text{(Einstein)}$$

Dies zeigt auch wiederum, daß Brown'sche Pfade nicht differenzierbar sind, weil sonst $\langle x^2 \rangle \sim t^2$.

• In d Raumdimensionen $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \, \Delta \rho(x,t)}$ mit $D \equiv \frac{a^2}{2\varepsilon d} = \text{fix}$.

Die Lösung für $\rho(\vec{x},0) = \delta(\vec{x})$ ist $\rho(\vec{x},t) = (4\pi D t)^{-d/2} \exp\left[-\frac{\vec{x}^2}{4Dt}\right]$. Damit

$$\boxed{\langle x \rangle = 0 \qquad \langle x^2 \rangle = 2d\,Dt \sim t}$$

## Bemerkungen

1) Der Grenzübergang kann auch erst in der Lösung der Differenzengleichung für $u(z;n)$ durchgeführt werden (Grenzwertsatz von de-Moivre-Laplace) ÜA

2) Aus $P^n \cdot P^m = P^{n+m}$ im Kontinuumslimes

$$\boxed{\int d^d z \; \rho(\vec{x}-\vec{z},t)\; \rho(\vec{z}-\vec{y},t) = \rho(\vec{x}-\vec{y}) \qquad t \geq 0}$$

Chapmann–Kolmogoroff

Diese Halbgruppeneigenschaft bedeutet, daß der Zufallswanderer kein Gedächtnis hat

$\Rightarrow$ einfaches Beispiel einer Markov-Kette (s. später)

3) Falls Wahrscheinlichkeit für L/R-Schritte nicht gleich ($p$ für L-Schritt, $q = 1-p$ für R-Schritt)

dann ($a=1$)

$$\rho(x, t+\varepsilon) = p\, \rho(x+a, t) + (1-p)\, \rho(x-a, t)$$

Kontinuumslimit $\varepsilon \to 0$, $a \to 0$ mit $D \equiv \frac{a^2}{2\varepsilon} = \text{fix}$ und $v = \frac{a}{\varepsilon}(p-q) = \text{fix}$. („Drift")

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \left[ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right] \rho(x,t)}$$

Änderung der mikroskop. Regel

$\rightarrow$ andere makroskopische Dynamik

Jetzt $\langle x \rangle = v \cdot t$, d.h. mittlere Driftgeschwindigkeit existiert!

Lösung mit Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \delta(x)$ : $\rho(x,t) = \rho_0(x - vt, t)$

4) Relation zur Quantenmechanik : setze $t \to it$ (imaginäre Zeit) und $D = \frac{\hbar^2}{2m}$. Dann

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | y \rangle \equiv K_0(x-y,t) \overset{!}{=} \rho_0(x-y,t) \quad \text{freier Propagator!}$$

und Diffusionsgleichung $\to$ freie Schrödingergleichung.

Allgemein : setze $\hbar = m = 1$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann

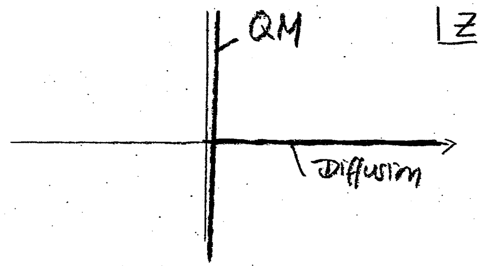
$$K_0(x-y,z) = \langle x | e^{z\Delta/2} | y \rangle = (2\pi z)^{-d/2} \exp\left[-\frac{\tilde{x}^2}{2z}\right]$$

$$\psi(x,z) = \int d^d y \; K_0(x-y,z)\, \psi(y,z) \qquad \text{Propagation, Halbgruppe}$$

$\Rightarrow$ Basis für Pfadintegrale Feynman-Kaĉ

Für $z \in \mathbb{R}_+$ : Brown'sche Molekularbewegung
$\psi(x,z) = \rho(x,z)$ Teilchenverteilung, Chapmann-Kolmogoroff-Halbgruppe

Für $z = \frac{\hbar}{2m} it$ : freies quantenmechanisches Teilchen
$\psi(x,t)$ : Wellenfunktion
Propagation (Zeitentwicklungsgruppe)



## 3.3. Berechnung von Greens-Funktionen durch Zufallswege

- Betrachte die Green'sche Funktion zum Laplace-Kern $G(x,y) = (-\Delta + m^2)^{-1}_{xy} = \langle x | (-\Delta + m^2)^{-1} | y \rangle$.

Diskretisiere Raum mit Gitterkonstanten $a = 1$ (Reskalierung). Dann

$$\boxed{\Delta = \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1} - 2)}$$

wobei $S_i$ = Verschiebungsoperator in Richtung $i$

$$[S_i f](x) = \sum_y (S_i)_{xy} f_y = \sum_y \langle x | S_i | y \rangle f(y) \equiv f(x - e_i)$$

Dann ist nämlich $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \left[ f(x - e_i) + f(x + e_i) - 2 f(x) \right]$ der Gitter-Laplacian mit $a = 1$.

Entwickle

$$\begin{aligned}
\langle x | (-\Delta + m^2)^{-1} | y \rangle &= \langle x | \left\{ m^2 + 2d - \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right\}^{-1} | y \rangle \\
&= \frac{1}{m^2 + 2d} \langle x | \left\{ 1 - \frac{1}{m^2 + 2d} \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right\}^{-1} | y \rangle \\
&= \frac{1}{m^2 + 2d} \langle x | \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + 2d)^{-n} \left[ S_i + S_i^{-1} \right]^n | y \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + 2d)^{-n-1} \langle x | \left[ \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right]^n | y \rangle
\end{aligned}$$

Insgesamt also ist die Greens-Funktion

$$G(x,y) = \langle x | (-\Delta + m^2)^{-1} | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \quad \langle x | \left[ \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right]^n | y \rangle$$

mit $\lambda = (m^2+2d)^{-1}$. Das Matrixelement ist die Anzahl der Gitterpfade der Länge $n$, die von $x \to y$ führen [Beweis s. unten]. Somit

$$\boxed{\langle x | (-\Delta + m^2)^{-1} | y \rangle = \sum_{\omega: x \to y} \lambda^{|\omega|+1}} \qquad (*)$$

Diese Reihe konvergiert, da # Pfade der Länge $n$ von $x \to y$ ist kleiner als # aller Zufallspfade der Länge $n \doteq (2d)^n$.
Damit

$$\left| \sum_{\omega: x \to y} \lambda^{|\omega|+1} \right| \leq \sum_{n=|x-y|}^{\infty} \lambda^{n+1} (2d)^n = \sum_{n=|x-y|}^{\infty} \left( \frac{2d}{m^2+2d} \right)^n \frac{1}{m^2+2d} = \frac{1}{m^2} \left[ 1 + \frac{m^2}{2d} \right]^{-|x-y|}$$

$$= m^{-2} e^{-\mu |\vec{x}-\vec{y}|} \qquad \text{mit } \mu \equiv \ln\left(1 + \frac{m^2}{2d}\right).$$

In QFT: Korrelation (Propagator) zerfällt exponentiell, Vorfaktor im Exponent ist Masse $M$.

Hier also $M \geq \ln\left(1 + \frac{m^2}{2d}\right)$ ... exakt $\sinh M/2 = m/2$

# Beweis aus Matrixelementen

$$\left[ \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right]^n = \sum_{\substack{\text{Möglichkeiten} \\ \text{für } X}} T_1 \dots T_n$$

wobei jedes $T_a \in \{ S_1, .., S_d, S_1^{-1}, .., S_d^{-1} \}$
d.h. jedes $T_a$ ist ein Schritt in eine beliebige (zufällige) Richtung

Somit ist $T_1 \dots T_n$ ein Zufallspfad der Länge $n$. Ausgehend von $y$ möge $T_1 \dots T_m$ für eine Selektion der $T_a$ nach $x'$ führen. Dann

$$\langle x | T_1 \dots T_m | y \rangle = \langle x | x' \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = x' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Matrixelement verschwindet also nur dann nicht, wenn der von $T_1 \dots T_m$ generierte, bei $y$ startende Pfad in $x$ endet (oder umgekehrt). Somit

$$\langle x | \left[ \sum_{i=1}^{d} (S_i + S_i^{-1}) \right]^n | y \rangle = \sum_{\substack{\omega : x \to y \\ |\omega| = n}} 1 = \#\text{ Pfade der Länge } n \text{ von } x \to y. \quad \blacksquare$$

- **Anwendung** Bestimme Greens-Fktionen $G(x,y)$ als gewichtete Summe über alle Pfade von $x \to y$, vgl. (*).

Für eine lineare partielle Dgl. ist die Lösung $u(x) = \sum_y G(x,y) \cdot \rho_0(y)$, wobei Quelle $\rho$ durch Anfangs- Randbedingungen vorgegeben.

- gib Quelle $\rho_0(y)$ vor und Zielpunkt $x$
- Für jeden Quellpunkt $y$
  - berechne $G(x,y)$ als gewichtete Summe aller Pfade von $x \to y$
    beginne mit kürzesten Pfaden und füge längere Pfade sukzessive hinzu
    brich ab, wenn sich $G(x,y)$ nicht mehr ändert
  - akkumuliere $G(x,y)\,\rho_0(y)$

$\Rightarrow$ Lösung $u(x)$

<u>Bsp</u> • Berechnung von Potential in ED
• Berechnung von Schalldruck bei vorgegebener Quelle (Auspuff)

Vorteil gegenüber finite Elemente: universell, Randbedingungen leicht einbaubar (z.B. Absorption / Reflektion an Wand)
funktioniert auch bei Unstetigkeiten (Turbulenzen)

Nachteil: langsame Konvergenz, aber ev. mit Graphikkarten beschleunigbar, vgl $\boxed{\text{Raytracing}}$

- weitere Verallgemeinerungen:
  - selbstvermeidende Zufallswege (nicht Markov, Gedächtnis!) : QFT, $\phi^4$
  - Pfadfinder (Exploration process)
  - Leitungsfindung auf Chips ...

- Zufallswege entstehen bei Prozessen <u>ohne</u> Gedächtnis.
- Verallgemeinerung auf Prozesse mit kurzem Gedächtnis $\rightarrow$ <u>Markov-Prozess</u> (zentraler Algorithmus der Statistischen Physik)

---

# 4. Ergänzung: Random walk in $d$ dimensions

Consider a hypercubic lattice in $d$ dimensions with lattice spacing $a$.
The space variable $\vec{x}$ is discrete $\vec{x} \in (\mathbb{Z} \cdot a)^d$.
Let $e_k$ be the unit vector in direction $k = 1, .., d$, i.e. $e_k^i = \delta_k^i$.

A Brownian particle on the lattice moves in direction $\pm k$ with propability $\frac{1}{d}$ (#axis $= d$) at every time step. If $\rho(x)$ is the probability density of finding the particle at site $x$, we have the density

$$\rho'(x) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} \left[ \rho(x+ae_k) + \rho(x-ae_k) \right]$$

after the next time step [the random walk is not directed, i.e. going to $+k$ and $-k$ are equally possible]. Define an operator $\hat{P}$ by

$$[\hat{P}\rho](x) := \rho'(x) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} \left[ \rho(x+ae_k) + \rho(x-ae_k) \right] \quad [1]$$

Start with an initial probability distribution $\rho(x)$ at $t=0$. After $n$ time steps $t = n \cdot \tau$, we have

$$\rho(n,x) = [\hat{P}^n \rho](x) \equiv \sum_{x'} P(x-x', t=n\tau) \cdot \rho(x') \quad [2]$$

where $P(x-x', n\tau)$ is the transition probability of going from $x'$ to $x$ in a time interval of length $n\tau$ ($n$ time steps). With the definition [2], we also have:

[a] Probability of returning after $n$ time steps:

$$[3] \quad q(n) = P(0, n\tau) \qquad \{ \text{Note: } q(n) = 0 \text{ for } n = \text{odd} \}$$

[b] Probability of returning after $n$ steps:

$$[4] \quad q(n) = Z(n) / N(n) \quad \text{with} \quad \begin{aligned} Z(n) &= \text{\# closed lattice pathes of length } n \\ N(n) &= \text{\# all lattice pathes of length } n \\ N(n) &= (2d)^{2n} \end{aligned}$$

→ can calculate $Z(n)$ from knowledge of $q(n)$!

[c] If a path returns after $2n$ steps, it could also have done it earlier (double loop etc.).
If $Q(2m)$ is the probability of a path of returning <u>for the first time</u> after $2m$ steps, we have

$$q(2n) = \sum_{m=1}^{n} q(2n-2m)\, Q(2m) \quad [5]$$

[d] Probability for a path to return **at all** (i.e. after an arbitrary number of steps).

$$[6] \qquad Q := \sum_{n=2}^{\infty} Q(n) \qquad [\, Q(n) = 0 \text{ for } n = \text{odd} \,]$$

[e] If $Q = 1$, i.e. every path returns to its origin after a sufficient time $t = n\tau$, we can define the average returning time (in units of $\tau$) to be

$$[7] \qquad T = \sum_{n=2}^{\infty} n\, Q(n)$$

---

## Calculation

Consider the operator [1] on a Hilbert space $\mathcal{H} = \{ f(x) \mid \sum_x f(x)^2 < \infty \}$ to get its spectrum. From a Fourier decomposition

$$f(x) = \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ip\cdot x}\, \tilde{f}(p) \quad ; \quad p\cdot x \equiv \sum_{k=1}^{d} p_k x_k$$

$$\tilde{f}(p) = a^d \sum_x e^{ipx} f(x)$$

The integration range for $p$ is (on the lattice) the Brillouin-zone

$$\mathcal{B} = \{ p \in \mathbb{R}^d \mid -\pi/a \le p_i \le \pi/a \,,\; i = 1 \dots d \}$$

Then

$$(\hat{P}f)(x) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} \left[ f(x + e_k a) + f(x - e_k \cdot a) \right]$$

$$= \frac{1}{2d} \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, \tilde{f}(p) \cdot \sum_{k=1}^{d} \left[ e^{-ip_k \cdot a} + e^{+ip_k a} \right]$$

$$= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, \tilde{f}(p) \cdot \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(a \cdot p_k)$$

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{(\hat{P}f)}(p) = \lambda(p) \cdot \tilde{f}(p) \quad \text{with} \quad \lambda(p) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(a \cdot p_k)$$

$\Longrightarrow$ The spectrum of $\hat{P}$ is continuous

$$\operatorname{Spec} \hat{P} = \left\{ \lambda(p) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(a p_k) \;\middle|\; p \in \mathcal{B} \right\} \qquad [8]$$

from [8] and the [illegible]

$$[\hat{P}^n \rho](x) = \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, \widetilde{[\hat{P}^n \rho]}(p)$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, (\lambda(p))^n\, \tilde{\rho}(p)$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, [\lambda(p)]^n\, a^d \sum_{x'} e^{ipx'}\, \rho(x')$$

$$= \sum_{x'} \left\{ a^d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ip(x-x')} \cdot [\lambda(p)]^n \right\} \cdot \rho(x')$$

$$\equiv \sum_{x'} P(x-x', t=n\tau) \cdot \rho(x')$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(y, t=n\tau) &= a^d \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipy}\, [\lambda(p)]^n \\ \text{with} \quad \lambda(p) &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(a p_k) \end{aligned}} \qquad [9]$$

Alternatively: Define generating function

$$\mathcal{P}(x; z) := \sum_{n=0}^{\infty} P(x, t=n\tau)\, \frac{z^n}{n!} \qquad [10]$$

Then

$$\mathcal{P}(x, z) = a^d \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\, [\lambda(p)]^n$$

$$= a^d \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, \exp[\lambda(p) \cdot z]$$

$$= a^d \int_{\mathcal{B}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, e^{-ipx}\, \exp\left[\frac{z}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(a p_k)\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{d} a \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dp_k}{(2\pi)}\, \exp\left[-i p_k x_k + \frac{z}{d} \cos(a p_k)\right] \qquad \text{set} \quad a p_k \equiv \theta_k$$

$$= \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_k \cdot \exp\left[-i\, \theta_k \cdot x_k/a + z/d \cdot \cos\theta_k\right]$$

Use the integral representation of the modified Bessel functions:

$$I_n(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \exp(in\theta + z \cdot \cos\theta)$$

to find

$$\boxed{\mathcal{P}(x,z) = \prod_{k=1}^{d} I_{x_k/a}(z/d)} \quad [11]$$

Expanding [11] in a power series in $z$ (using the known series representations of the modified Bessel functions) yields the $P(x, t=n\tau)$ according to [10]. For $x=0$ (probability of returning after $n$ time steps), one finds

$$P(0,z) = \left[I_0(z/d)\right]^d = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \frac{z^n}{n!}$$ using the definition [2].

The result is

$$\boxed{\begin{aligned} & q(n) = 0 \quad \text{for} \quad n = \text{odd} \quad (\text{as expected}) \\ & q(2n) = \begin{cases} \binom{2n}{n} 2^{-2n} & ; \ d=1 \\ \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} & ; \ d=2 \\ \binom{2n}{n} 6^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{n}{k}^2 & ; \ d=3 \end{cases} \end{aligned}} \quad [12]$$

For $d=2$ it means, that the number of closed lattice paths of length $n$ is given by

$$Z(n) = \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} \cdot 4^{2n} = \binom{2n}{n}^2$$

$$\boxed{Z(n) = \binom{2n}{n}^2 \quad \text{for } d=2} \quad [13]$$

To calculate the probability of returning for the first time after $m$ steps, $Q(m)$, one defines

$$[14] \qquad \begin{aligned} A(z) = A(-z) &:= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{P(0, n\tau)}_{=q(n)} \cdot z^n \qquad (\text{even, because } P(0,n\tau)=0 \text{ if } n \text{ odd}) \\ B(z) = B(-z) &:= \sum_{n=2}^{\infty} Q(n) \cdot z^n \end{aligned}$$

Then, from [5]

$$q(2n) = \sum_{m=1}^{n} q(2n-2m)\, Q(2m) \Rightarrow q(n) = \sum_{m=2}^{n} q(n-m)\, Q(m)$$

$\left.\begin{array}{l} q(n)=0 \\ Q(m)=0 \end{array}\right\}$ if $n$ = odd or $m$ = odd respectively.

Then

$$A(z) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} q(n)\, z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{n} q(n-m)\, Q(m)\, z^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m<n} q(n-m)\, Q(m)\, z^n + \sum_{n=2}^{\infty} q(0)\, Q(n)\, z^n$$

since $q(0) = P(0,0) = 1$ (probability for not moving in the time interval $0, \tau$).

$$A(z) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m<n} q(n-m)\, z^{n-m}\, Q(m)\, z^m + B(z)$$

$$= \left[\sum_{n=2}^{\infty} q(n)\, z^n\right] \cdot \left[\sum_{m=2}^{\infty} Q(m)\, z^m\right] + B(z)$$

$$= (A(z)-1)\, B(z) + B(z) = A(z)\, B(z)$$

$$\boxed{A(z) - 1 = A(z) \cdot B(z)} \quad [15]$$

The probability $Q$ of returning after an arbitrary number of steps is then

$$Q = \sum_{n=2}^{\infty} Q(n) \overset{[14]}{=} B(1) = \frac{A(1)-1}{A(1)}$$

$$\boxed{Q = \frac{A(1)-1}{A(1)}} \quad [16]$$

The remaining calculation is then for $A(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q(n)\, z^n$ ; $q(n) = P(0, n\tau)$

From [3] $q(n) = a^d \int_B \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [\lambda(p)]^n$

$$\Rightarrow A(z) = 1 + a^d \int_B \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} [z \cdot \lambda(p)]^n$$

(start sum at $n=1$, since $q(1) =$

$$= a^d \int_B \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{n=0}^{\infty} [z \cdot \lambda(p)]^n = a^d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - z\lambda(p)}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(1) = a^d \int_B \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{1-\lambda(p)} \; ; \; \lambda(p) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{2d} \cos(a p_k)} \quad [17]$$

For a numerical investigation, it is better to use [11].

$$\mathcal{P}(0,z) = \left[I_0(z/d)\right]^d = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \frac{z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-z}\left[I_0(z/d)\right]^d = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \cdot \frac{e^{-z} \cdot z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty dz\, e^{-z}\left[I_0(z/d)\right]^d = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \underbrace{\int_0^\infty dz\, e^{-z} \cdot \frac{z^n}{n!}}_{=1} = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \overset{[14]}{=} A(1)$$

Therefore

$$\boxed{A(1) = \int_0^\infty dz\, e^{-z}\left[I_0(z/d)\right]^d} \quad [18]$$

From [17], we can extract the infrared divergencies of the p-integral in $d < 3$:

$$\begin{aligned} 1-\lambda(p) &= 1 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos(ap_k) \\ &\approx 1 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left[1 - \frac{1}{2}a^2p_k^2 + \ldots\right] \quad \text{for } p^2 \to 0 \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2d} a^2 \sum_{k=1}^{d} p_k^2 + \ldots \\ &= \frac{a^2}{2d} \cdot p^2 + \ldots \end{aligned}$$

The only divergence in $A(1)$ can come from the pole in the integrand at $p^2 \to 0$. The region around $p^2 = 0$ dominates the integral and we have

$$\begin{aligned} A(1) &= a^d \int_{p^2 \le \varepsilon} \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{1-\lambda(p)} + a^d \int_{\substack{B \\ p^2 > \varepsilon}} \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{1-\lambda(p)} \\ &\simeq 2d\, a^{d-2} \int_{p^2 \le \varepsilon} \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} + \text{finite} \\ &= 2d \cdot a^{d-2} \underbrace{\pi^{d/2} / \Gamma(d/2-1)}_{\text{angle integral}} \int_0^\varepsilon dr\, r^{d-3} + \text{finite} \end{aligned}$$

But $$\int_0^\varepsilon dr\, r^{d-3} = \begin{cases} \infty & ; d = 1,2 \\ \text{finite}, & d \ge 3 \end{cases}$$

Therefore

$$A(1) = \begin{cases} \infty , & d = 1,2 \\ \text{finite} , & d \geq 3 \end{cases}$$

From [16], this means: $\{ Q = 1 - 1/A(1) \}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} d = 1,2 : & Q = 1 : & \text{(recurrence, no possibility of escape)} \\ d \geq 3 : & Q < 1 : & \text{(transience, escape or return with finite probability)} \end{array}}$$ [19]

For $d \geq 3$, we can use [18] to calculate the return probability:

| d \ Q | return prob. |
|---|---|
| 3 | 0.341 |
| 4 | 0.193 |
| 5 | 0.135 |
| 6 | 0.105 |

[20]

The average length of a closed loop (in lattice units a) is

$$L = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot Q(n)$$

From [14]: $B'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot Q(n)\, z^{n-1} \Rightarrow \boxed{L = B'(1)}$ [21]

From [15]: $A' = A'B + AB' \Rightarrow B' = \frac{A'(1-B)}{A} = \frac{1}{A} A' \left(1 - \frac{A-1}{A}\right)$

$B' = \frac{A'}{A} \frac{A-A+1}{A} = \frac{A'}{A^2}$, then

$$\boxed{L = \frac{A'(1)}{A(1)^2}}$$ [22]

Now $$A'(z) = a^d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\lambda}{(1-z\lambda)^2}$$

$$A'(1) = a^d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(p)}{(1-\lambda)^2}$$ for $p^2 \to 0$: $1-\lambda(p) \sim p^2$

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \sim \frac{1}{p^4}$$

Using the same regularisation as above

$$A'(1) \sim \int_0^{\varepsilon} dr\; r^{d-5} = \begin{cases} \infty & ; 1 \le d \le 4 \\ < \infty & ; d \ge 5 \end{cases}$$

or formally, with $0 < \delta < \varepsilon$, $\delta \to 0$

$$A'(1) \sim \int_\delta^{\varepsilon} dr\; r^{d-5} + \text{finite} = \delta^{d-4} + \text{finite} = \frac{1}{\delta^{4-d}} + \text{finite}$$

or $$\underline{A'(1) = C_1 \cdot \frac{1}{\delta^{4-d}} + C_2}$$

in the same way: $A(1) \sim \int_\delta^{\varepsilon} dr\; r^{d-3} + \text{finite}$, i.e.

$$A(1) = C_3 \frac{1}{\delta^{2-d}} + C_4$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{C_1 \frac{1}{\delta^{4-d}} + C_2}{\left[C_3 \frac{1}{\delta^{2-d}} + C_4\right]^2}$$

From this:
- convergence for $d > 4$
- divergence for $d = 3, 4$
- divergence for $d = 1, 2$

$$\boxed{L = \begin{cases} \infty & ; d < 5 \\ < \infty & ; d \ge 5 \end{cases}} \qquad [23]$$