

UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Doppelbrechung

BLOCKPRAKTIKUM 2021

Korrigierte Version

Christian Gommeringer Matthias Gatter

unter der Betreuung von Gina Grünauer

23. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
3	Versuchsdurchführung	5
4	Auswertung	6
5	Fazit	13

1 Einleitung

In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit doppelbrechenden Materialien und einer ihrer Anwendungen. Zunächst wenden wir ein Verfahren zur Bestimmung der unterschiedlichen Brechungsindizes eines Materials je nach Polarisationsrichtung an. Danach untersuchen wir den Effekt der Polarisationsänderung durch sogenannte $\lambda/4$ Plättchen.

2 Theorie

Die Theorie dieses Experiment ist leicht mit einem Grundlagenwissen in Optik zu verstehen. Es wird das Superpositionsprinzip sowie die Darstellung von ebenen Wellen durch trigonometrische Funktionen benötigt. In manchen Materialien hängt der Brechungsindex von der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichts ab. Dies wird oft durch eine anisotrope Kristallstruktur erzeugt. Der in diesem Zusammenhang wichtige Begriff der "optischen Achse" bezeichnet hier eine Richtung im Medium, für die, wenn sie mit der Ausbreitungsrichtung des Lichts übereinstimmt, die Brechungsindizes unabhängig von der Polarisation sind. Wenn das Licht allerdings senkrecht zur optischen Achse einfällt, erfährt die Komponente des Lichts, die parallel zur optischen Achse polarisiert ist, einen anderen Brechungsindex als jene, die senkrecht zu ihr polarisiert ist. Durch diesen Umstand lassen sich über einen Durchgang durch dieses Medium Phasendifferenzen zwischen den beiden Polarisationsrichtungen des Lichts erzeugen.

Diesen Effekt nutzt der Aufbau unseres ersten Versuchs aus. Über den Durchlauf eines Materials, dessen Dicke nicht konstant ist, sondern in einer Achse durch eine Schräge leicht zunimmt. Dadurch unterscheidet sich die Phasendifferenz der beiden Komponenten des einfallenden Licht kontinuierlich vom Ort, an dem es auf die Platte trifft. Beträgt diese Phasendifferenz gerade 2π , ist das austretende Licht exakt in die selbe Richtung polarisiert, wie das einfallende, ansonsten ändert es seine Polarisationsrichtung. Führt man nun vor und hinter dem Mediumblock zwei Polarisationsfilter in der optischen Bank ein, deren Richtung übereinstimmen, dann kommt um verschiedene Austrittspunkte aus dem Medium herum kein oder nur sehr wenig Licht durch den zweiten Polarisationsfilter. Nämlich gerade dort wo der Phasendifferenz gerade ungefähr 2π ist. Dort ist die Polarisation nämlich nicht verändert worden.

Aus der Dickeänderung des Mediums und dem Abstand der Intensitätsminima lässt sich der Unterschied in der Brechungsindizes berechnen.

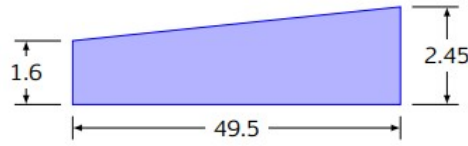


Abbildung 1: Abmessungen des Quarzkeils, entnommen aus der Versuchsanleitung

Es treffen ebene Wellen auf die Oberfläche des Mediums. Die auch nach Wiederaustritt aus dem Medium ihre Form von Ebenen Wellen beibehalten. Deshalb entspricht ein Abstand l zwischen zwei Minima einem Dickenunterschied Δd von

$$\Delta d = \frac{l}{\cos \alpha} c$$

wobei c die Skala der Dickenänderung bezeichnet $c = \frac{2.45-1.6}{49.5} = 0.0172$. α ist der Winkel zwischen in das Medium eintretender und austretender Welle. Da die Dickenänderung allerdings nur sehr gering ist setzen wir $\alpha \approx 0$. Daraus ergibt sich eine Phasendifferenz von

$$\Delta\varphi = \Delta k \Delta d = \Delta n k_0 \delta d = \Delta n \frac{2\pi}{\lambda} c l$$

und da diese Phasendifferenz zwischen zwei Intensitätsminima gerade 2π ist, berechnet sich daraus der Unterschied in den Brechungsindizes als

$$\Delta n = \frac{\lambda}{c l}$$

Im nächsten Versuch wollen wir die Wirkung eines $\lambda/4$ Plättchens auf die Polarisierung behandeln. Dieses erzeugt eine Differenz im optischen Weg der beiden Komponenten des elektromagnetischen Felds der elektromagnetischen Welle parallel und senkrecht zur optischen Achse von eben $\lambda/4$ und damit eine Phasendifferenz von $\pi/2$. Wenn A_1 die Amplitude des E-Felds parallel zur optischen Achse, die wir mit der x-Achse identifizieren, ist und A_2 die senkrechte Komponente dann hat das E-Feld nach Durchgang durch das Plättchen die Gestalt

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(kz - \omega t) \\ A_2 \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

Und wenn das $\lambda/4$ Plättchen nicht perfekt auf die Wellenlänge eingestellt ist, dann stellt sich noch eine zusätzliche Phasendifferenz von $\Delta\phi$ ein, die so klein sein soll, dass man die trigonometrischen Funktionen mit erster Ordnung Taylor Approximation nähern kann. Das E-Feld hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{pmatrix} A_1 \cos(kz - \omega t + \Delta\phi) \\ A_2 \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 (\cos(kz - \omega t) - \sin(kz - \omega t) \Delta\phi) \\ A_2 \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Projektiert auf einen bestimmten Winkel β zur optischen Achse ist der Betrag des elektrischen Felds

$$E(\beta) = \begin{pmatrix} A_1 (\cos(kz - \omega t) - \sin(kz - \omega t) \Delta\phi) \\ A_2 \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$= A_1 \cos \beta (\cos(kz - \omega t) - \sin(kz - \omega t) \Delta\phi) + A_2 \sin \beta \sin(kz - \omega t)$$

Daraus ergibt sich die Intensität unter Fortführung der Kleinwinkelnäherung

$$I(\beta) = c \epsilon_0 E(\beta)^2$$

$$= c \epsilon_0 [A_1^2 \cos^2 \beta (\cos^2(kz - \omega t) - 2 \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \Delta\phi) + A_2^2 \sin^2 \beta \sin^2(kz - \omega t)]$$

$$- c \epsilon_0 A_1 A_2 \sin \beta \cos \beta \sin(kz - \omega t) (\cos(kz - \omega t) - \sin(kz - \omega t) \Delta\phi)$$

Nach zeitlicher Mittelung erhält man

$$\langle I(\beta) \rangle = \frac{1}{2} A_1^2 \cos^2 \beta + \frac{1}{2} A_2^2 \sin^2 \beta - A_1 A_2 \cos \beta \sin \beta \Delta\phi$$

Wenn man nun berücksichtigt, dass das Licht mit einer E-Feld Amplitude von E_0 und einem Winkel zur optischen Achse von α auf das $\lambda/4$ Plättchen trifft, werden die Startamplituden umgeschrieben zu $A_1 = E_0 \cos \alpha$ und $A_2 = E_0 \sin \alpha$. Das endgültige Resultat für die Intensität beträgt damit

$$\langle I(\alpha, \beta) \rangle = c \epsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \Delta\phi \right)$$

3 Versuchsdurchführung

Für den ersten Versuch zur Bestimmung der Differenz der Brechungsindizes verwendeten wir folgenden Aufbau.

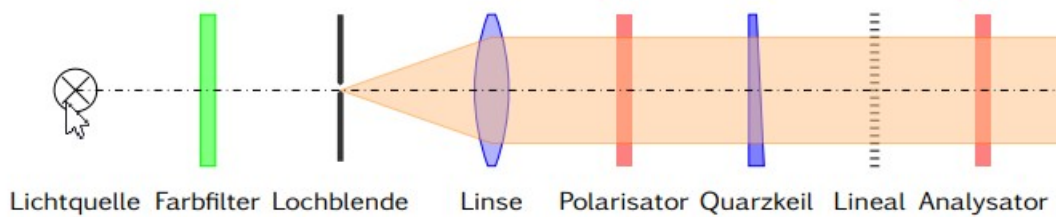


Abbildung 2: Versuchsaufbau zur Messung der Brechungsindizes; entnommen aus der Versuchsanleitung

Wie zu sehen ist, wird das Lichtbündel nach Durchgang durch den Farbfiler so präpariert, dass es in parallelen Strahlen auf die Oberfläche des Mediums trifft. Das Medium besteht hier aus Quarz. Polarisator und Analysator sind wie oben beschrieben auf die

selbe Richtung eingestellt und es werden mit Hilfe des Lineals die Abstände der Minima gemessen. Wir maßen dazu den Abstand von entfernten Intensitätsminima um den Messfehler zu reduzieren. Unsere Messwerte sind in folgender Tabelle dargestellt.

Wellenlänge	435.8 nm (blau)	546.3 nm (grün)	578 nm (gelb)
Abstand	0,25	0,3167	0,37
zwischen zwei	0,2556	0,3375	0,3667
Minima in cm	0,2563	0,3429	0,35

Tabelle 1: Messergebnisse aus Versuch 1

Für den zweiten Teil des Versuchs verwendeten wir folgenden Aufbau

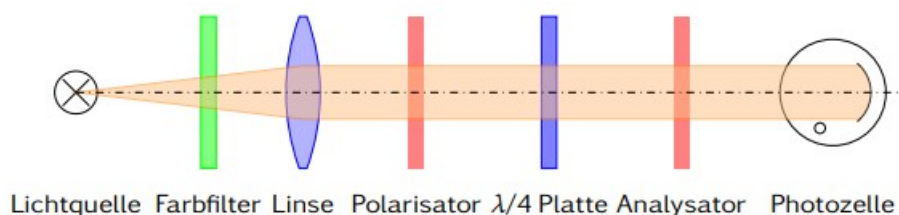


Abbildung 3: Versuchsaufbau zum Experiment mit dem $\lambda/4$ Plättchen, entnommen aus der Versuchsanleitung

Hierbei maßen wir für Polarisatorstellungen von 0° , 15° , 30° und 45° (gemessen jeweils zur Achse senkrecht zum Tisch) die Intensität die in der Fotozelle registriert wurde in Abhängigkeit zur Analysatorstellung, die wir in 15° Schritten veränderten.

4 Auswertung

Aus den Messdaten ließen sich die Differenzen in den Brechungsindizes in Abhängigkeit von der Wellenlänge mit der in der Theorie abgeleiteten Formel berechnen

$$\Delta n_b = 0.01 \pm 2.7 \cdot 10^{-4} \text{ (stat.)} \pm 0.00395 \text{ (sys.)}$$

$$\Delta n_{gr} = 0.00957 \pm 7.97 \cdot 10^{-4} \text{ (stat.)} \pm 0.00289 \text{ (sys.)}$$

$$\Delta n_{gl} = 0.00929 \pm 5.5 \cdot 10^{-4} \text{ (stat.)} \pm 0.00257 \text{ (sys.)}$$

Der statistische Fehler wird im gesamten Protokoll über das Gaußsche Fehlerfort, systematischer Fehler über den Betrag der Komponenten aus 1. Taylor Approximation. Außerdem nahmen wir als systematischen Fehler die Hälfte der kleinsten Ableseeinheit plus 0.5 Promille des Messwertes.

Während der Versuchsdurchführung nahmen wir den Effekt wahr, dass es vier Einstellungen des Polarisators gab, bei dem bei keiner Analysatorstellung ein Streifenmuster zu beobachten war. Dies lässt sich damit erklären, dass diese Stellungen gerade eine Position senkrecht oder parallel zur optischen Achse trafen, und es daher keinen Unterschied

im Brechungsindex zwischen zwei Komponenten des Lichts gab.

Für den zweiten Versuchsteil bestimmten wir die Intensität des Elektrischen Felds des Lichts in Abhängigkeit vom Winkel in der Ebene senkrecht zur Ausbreitung, bei verschiedenen Polarisator Einstellungen. Dazu maßen wir die Spannung, die die Fotozelle ausgab, welche proportional zur gesuchten Intensität ist.

Winkel β in °	Spannung in V		
0	110	125	157
15	420	475	455
30	610	614	614
45	640	635	639
60	650	650	650
75	657	658	658
90	658	659	659
105	654	653	654
120	648	644	645
135	632	626	629
150	596	588	594
165	299	295	294
180	350	97	113

Tabelle 2: Messwerte für den Zyklus Polarisatorstellung 0° , die Stellung des Analysators ist immer auf einen unbekannten Nullpunkt der Winkelskala bezogen, was keine Auswirkung auf die Auswertung der Daten hat.

Winkel β in $^\circ$	Spannung in mV		
0	557	555	565
15	599	598	604
30	622	623	623
45	640	640	639
60	649	649	649
75	654	654	653
90	653	653	654
105	649	650	650
120	642	643	642
135	626	626	628
150	602	610	608
165	548	577	574
180	531	553	542

Tabelle 3: Messwerte für den Zyklus Polarisatorstellung 15° , die Stellung des Analysators ist immer auf einen unbekannten Nullpunkt der Winkelskala bezogen, was keine Auswirkung auf die Auswertung der Daten hat.

Winkel β in $^\circ$	Spannung in mV		
0	621	621	621
15	626	627	626
30	633	634	634
45	639	639	639
60	643	642	643
75	644	644	644
90	642	642	642
105	639	639	639
120	633	633	634
135	627	627	626
150	622	622	621
165	618	618	618
180	620	620	620

Tabelle 4: Messwerte für den Zyklus Polarisatorstellung 30° , die Stellung des Analysators ist immer auf einen unbekannten Nullpunkt der Winkelskala bezogen, was keine Auswirkung auf die Auswertung der Daten hat.

Winkel β in $^\circ$	Spannung in mV		
0	643	643	643
15	643	643	643
30	641	641	641
45	636	637	637
60	630	631	631
75	624	624	624
90	620	621	620
105	619	620	620
120	623	623	623
135	628	629	629
150	635	636	635
165	640	640	640
180	643	643	642

Tabelle 5: Messwerte für den Zyklus Polarisatorstellung 45° , die Stellung des Analysators ist immer auf einen unbekannten Nullpunkt der Winkelskala bezogen, was keine Auswirkung auf die Auswertung der Daten hat.

Wir führten für jedes Winkelpaar drei Messungen durch, um Auswirkungen von Schwankungen in der Lichtquelle zu reduzieren. Zur Auswertung normierten wir die Messwerte auf den maximalen Wert aller Messpunkte. Anschließend können wir unsere Messung in einem Polardiagramm darstellen. Wir spiegelten für eine bessere Anschauung dazu unsere Messwerte am Ursprung.

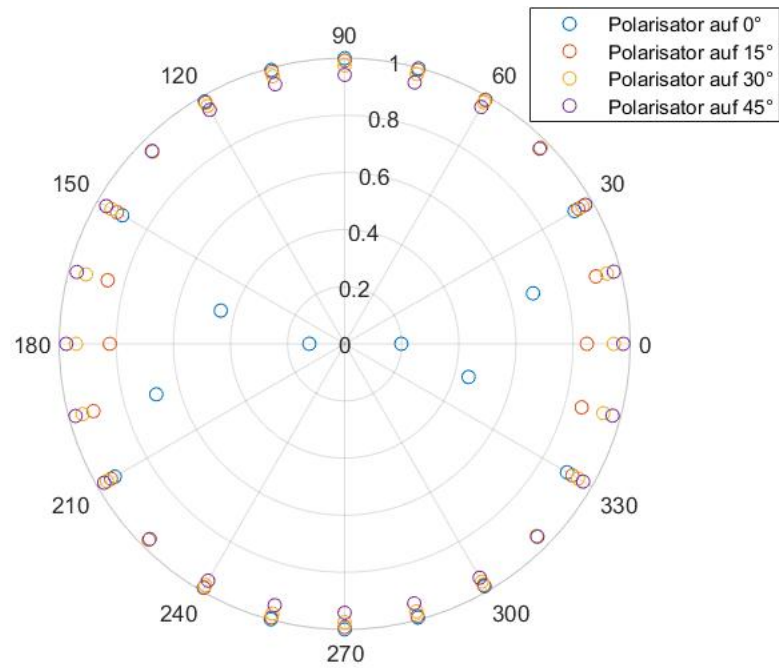
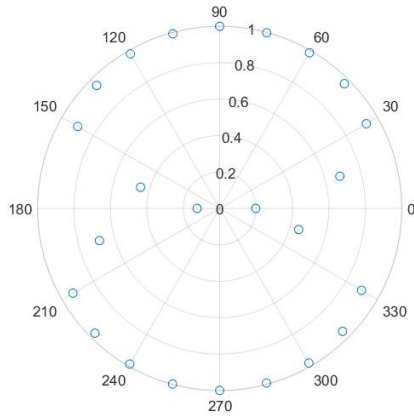
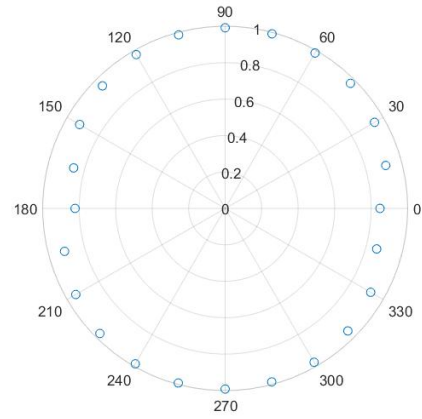


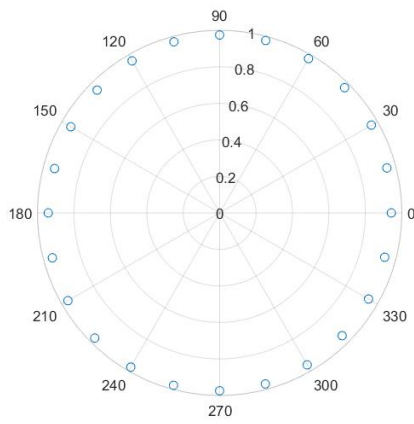
Abbildung 4: Darstellung der Messwerte im Polardiagramm. Es muss beachtet werden, dass die Kurven gegebenenfalls gegen einander gedreht werden müssen, um den Zusammenhang korrekt darzustellen.



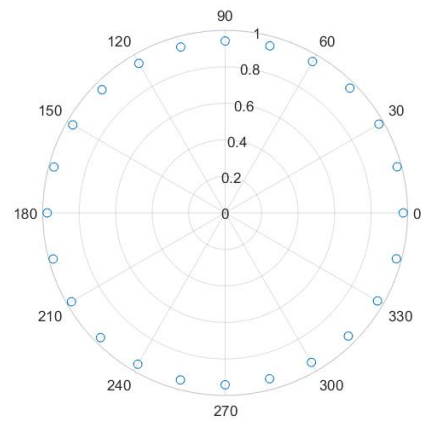
(a) Polarisator 0°



(b) Polarisator 15°



(c) Polarisator 30°



(d) Polarisator 45°

Abbildung 5: nochmalige Gegenüberstellung der Messergebnisse. Als Betrag ist jeweils die auf das globale Maximum normierte Spannung Aufgetragen

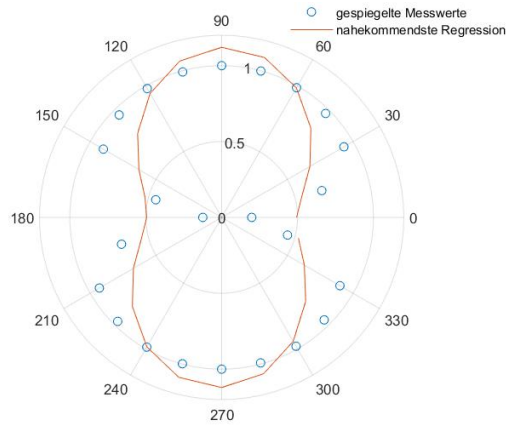
Zum Schluss möchten wir noch untersuchen, wie gut die Messwerte mit unserer Erwartung aus der Theorie übereinstimmen. Dazu passten wir an die Daten eine Funktion der Form

$$f = a_1 (\cos^2(a_2) \cos^2(\beta - a_3) + \sin^2(a_2) \sin^2(\beta - a_3) - 2 \cos(a_2) \sin(a_2) \cos(\beta - a_3) \sin(\beta - a_3) a_4)$$

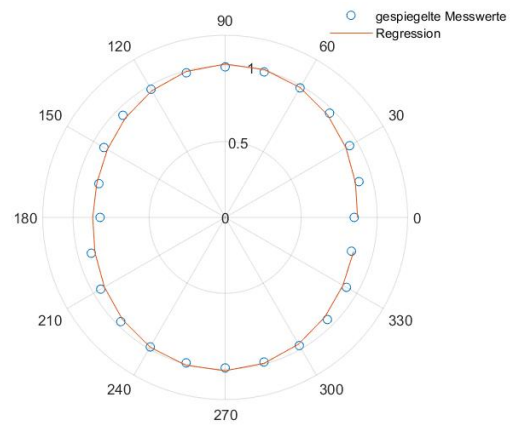
an. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Polarisatoreinstellung	a_1	a_2	a_3	a_4
0°	3.2275	2.1576	-0.0986	-0.0505
15°	3.762	2.3444	0.5335	0.0716
30°	3.8372	2.3556	0.4986	0.02
45°	3.8356	2.3653	0.0424	0.0046

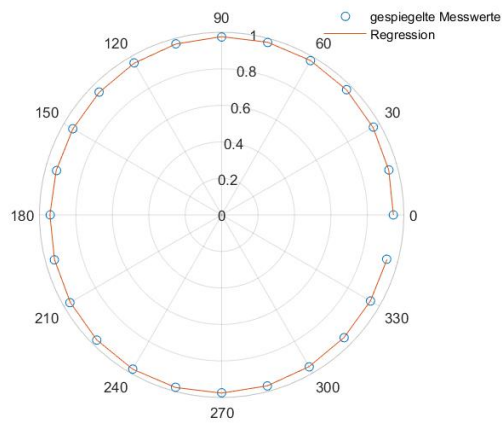
Tabelle 6: Regressionsparameter für die verschiedenen Anpassungen



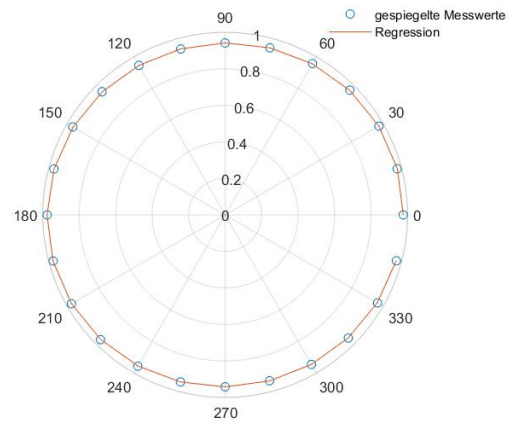
(a) Polarisator 0°



(b) Polarisator 15°



(c) Polarisator 30°



(d) Polarisator 45°

Abbildung 6: gespiegelte Messdaten zusammen mit den Fits

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Regression für den ersten Fall überhaupt nicht passt. Das deutet darauf hin, dass wir in unserem Modell einen Effekt nicht berücksichtigt haben, der in diesem Fall aber von Bedeutung ist. Für die Polarisatorstellung " 0° " gibt es ein ausgeprägtes Minimum, wo die Intensität fast verschwindet. Es ist daher anzunehmen, dass die der Polarisator in der Tat das Licht in eine Richtung polarisiert, die parallel oder senkrecht zur optischen Achse des Mediums liegt. In diesem Fall müsste die Intensität ungefähr der Form $I(\beta) \approx a_1 \sin^2(\beta)$ folgen. Es ist aber erkennbar, dass die gemessene Kurvenform einfach nicht mit diesem Ergebnis übereinstimmt, da sie viel zu abrupt abfällt und davor zu konstant ist. Möglicherweise ist die Messkurve noch durch unerwünschtes gestreutes Licht verfälscht worden.

5 Fazit

Mit unseren Ergebnissen für die Differenz im Brechungsindex von Quarz sind wir zufrieden. Das Lexikon der Physik von spektrum.de gibt die Differenz für Quarz bei Licht der Wellenlänge 589,3 nm zu 0,0091 an. Damit wirken unsere Resultate plausibel. Bis auf die erste Messung konnten auch an die Messdaten des zweiten Versuchs gut die theoretische Erwartung angepasst werden. Die Messwerte der Messungen 2-4 bei Versuch zwei stimmen sehr gut mit der theoretischen Erwartung überein, wie den Schaubildern zu entnehmen ist. Das Scheitern bei der ersten Messung kann wahrscheinlich auch auf Schwächen im Versuchsaufbau, wie Verschmutzung der Messung durch Restlicht im Raum, zurückgeführt werden.