

UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Elektrische Resonanz

BLOCKPRAKTIKUM 2021

Erste Version

Christian Gommeringer Matthias Gatter

unter der Betreuung von Dr. Hehl

31. März 2022

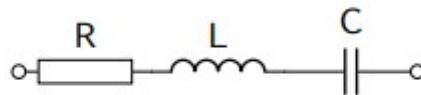
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Durchführung	7

1 Einleitung

Dieser Versuch thematisiert das Resonanzverhalten drei verschiedener Schaltungen: des Schwingkreises, des Parallelkreises 1. Ordnung und des Parallelkreises 2. Ordnung. Die Strom und Spannungsmessung nehmen wir in diesem Experiment durch ein analoges Oszilloskop und das Cassy Messsystem durch.

Zunächst behandeln wir den theoretischen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom in diesen Schaltungen. Als erstes befassen wir uns mit dem Schwingkreis



Serienschwingkreis

Abbildung 1: Schaltungsaufbau eines Schwingkreises

In einer Schaltung wie dieser teilt sich der Spannungsabfall auf die einzelnen Komponenten auf. Es gelten die folgenden Relationen für die einzelnen Komponenten.

$$\begin{aligned}U_R &= I \cdot R \\U_L &= L \cdot \dot{I} \text{ mit der Induktivität } L \\Q &= C \cdot U_C \text{ mit der Kapazität } C \\ \Rightarrow I &= C \dot{U}_C\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass U_L und U_C der externen Spannungsquelle entgegen wirken.

$$\begin{aligned}U_{ex} - U_L - U_C &= U_R \\ \Rightarrow \dot{U}_{ex} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C\end{aligned}$$

Für ein Spannungssignal der Form $U_{ex} = U_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich folgende Differentialgleichung.

$$\omega U_0 \cos \omega t = R \dot{I} + L \ddot{I} + \frac{1}{C} I$$

Diese Gleichung hat folgende Lösung

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} \left(B e^{i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t} + D e^{-i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t} \right) + A \cos(\omega t + \varphi),$$

wobei B und D Konstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Für diese Teil der Lösung interessieren wir uns allerdings nicht, da wir unsere Messung

erst nach einer gewissen Einschwingzeit vornehmen, nach der der erste Term effektiv verschwunden ist. Deshalb bestimme ich diese Konstanten hier auch nicht näher. Die signifikanten Konstanten A und φ müssen folgende Gleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}\omega U_0 &= A e^{i\varphi} \left(i R \omega - L \omega^2 + \frac{1}{C} \right) \\ \Rightarrow A &= \frac{\omega U_0}{\sqrt{R^2 \omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L \omega^2 \right)^2}} \\ \tan \varphi &= - \frac{R \omega}{\frac{1}{C} - L \omega^2}\end{aligned}$$

Nach ausreichend langer Zeit $t \gg 2L/R$ stellt sich dann die Beziehung zwischen Spannung und Strom ein von

$$\begin{aligned}I(t) &= \Im \left[i \frac{\omega U_0}{\sqrt{R^2 \omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L \omega^2 \right)^2}} e^{i(\omega t + \varphi)} \right] \\ &= \Im [Z U_0 e^{i\omega t}] \text{ mit} \\ |Z| &= \frac{U_0}{A} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C \omega} - L \omega \right)^2} \quad \text{und} \\ \arg(Z) &= -\varphi + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Als nächstes untersuchen wir den Parallelkreis erster Ordnung

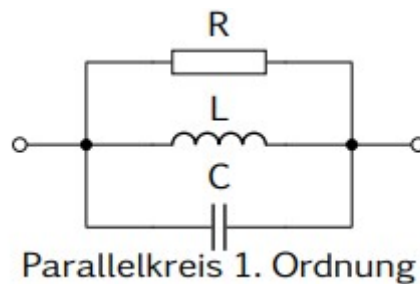


Abbildung 2: Schaltungsaufbau eines Parallelkreises 1. Ordnung

Nach der Maschenregel liegt an jedem Zweig die selbe Spannung an

$$\begin{aligned}U_{ex} &= I_R R \\ U_{ex} &= I_L R_L + U_L = I_L R + L \dot{I} \\ U_{ex} &= I_C R_C + U_C \Rightarrow \dot{U}_{ex} = \dot{I}_C R_C + \frac{1}{C} I_C\end{aligned}$$

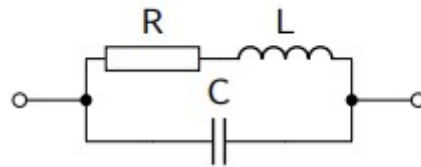
Zur Vereinfachung setzen wir R_L und R_C auf 0. Damit lassen sich die Ströme leicht angeben

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{U_0}{R} \sin \omega t \\ I_L &= -\frac{U_0}{L \omega} \cos \omega t \\ I_C &= U_0 \omega C \cos \omega t \end{aligned}$$

Daraus lässt sich wiederum die Impedanz ableiten

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= \frac{U_0}{R} \sin \omega t - \frac{U_0}{L \omega} \cos \omega t + U_0 \omega C \cos \omega t \\ &= \Im \left[\left(\frac{1}{R} - i \frac{1}{L \omega} + i \omega C \right) U_0 e^{i \omega t} \right] \\ &= \Im \left[\frac{1}{Z} U_0 e^{i \omega t} \right] \quad \text{mit} \\ |Z| &= \frac{R L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (L \omega^2 C - 1)^2}} \quad \text{und} \\ \tan(\arg(Z)) &= R \left(\omega C - \frac{1}{L \omega} \right) \end{aligned}$$

Für den Parallelkreis 2. Ordnung können wir ähnlich vorgehen.



Parallelkreis 2. Ordnung

Abbildung 3: Schaltungsaufbau eines Parallelkreises 2. Ordnung

Über die Zusammenhänge mit der angelegten Spannung

$$\begin{aligned} U_{ex} &= U_R + U_L = (R + R_L) I_L + L \dot{I}_L \\ \dot{U}_{ex} &= \dot{I}_C R_C + \frac{1}{C} I_C, \end{aligned}$$

wobei wir R_L und R_C wieder auf Null setzen, können wir den Strom für die einzelnen Zweige berechnen. Für den Strom am Kondensator gilt wie oben

$$I_C = U_0 \omega C \cos \omega t$$

Für den Strom an Widerstand und Spule ergibt sich

$$I_L(t) = B e^{-\frac{R}{L}t} + A' \sin(\omega t + \varphi')$$

B kann wieder durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für A' und φ' gilt folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} U_0 &= A' e^{i\varphi'} (R + i\omega L) \\ \Rightarrow A' &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ \tan \varphi' &= -\frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich die Impedanz auf folgende Weise

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}}(t) &= U_0 \omega C \cos \omega t + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi') \\ &= \Im \left[\left(i\omega C + \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{i\varphi'} \right) U_0 e^{i\omega t} \right] \\ &= \Im \left[\frac{1}{Z} U_0 e^{i\omega t} \right] \end{aligned}$$

Für die Impedanz Z gilt damit

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 L C - 1)^2}} \\ \tan(\arg(Z)) &= -\frac{\omega}{R} (C(R^2 + \omega^2 L^2) - L) \end{aligned}$$

Wie auch gleich gezeigt wird, haben die Amplituden der abgeleiteten Impedanzen alle eine resonanzfähige Form. Zunächst bestimme ich die Resonanzfrequenz des Schwingkreises $\omega_{S,0}$.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial |Z_S|}{\partial \omega} = \frac{-\frac{1}{C^2 \omega^3} + L^2 \omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\omega^3} (L^2 \omega^4 - \frac{1}{C^2}) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \omega_{S,0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Für die Impedanz des Parallelkreises 1. Ordnung

$$|Z_{P1}| = \frac{RL\omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (L\omega^2 C - 1)^2}}$$

berechnet sich $\omega_{P1,0}$ durch

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial |Z_{P2}|^2}{\partial \omega} = R L \frac{R^2 - R^2 L^2 C^2 \omega^4}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (L \omega^2 C - 1)^2}} \\ \Rightarrow \omega_{P1,0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Für die den Parallelkreis 2. Ordnung gestaltet sich die Bestimmung der Resonanzfrequenz etwas schwieriger, da hier die Nullstellen eines Polynoms 4. Grades ermittelt werden müssen. Die numerische bestimmte Lösung ist

$$\omega_{P2,0} = \sqrt{\frac{\sqrt{L^6 + 2 C L^5 R^2} - C L^2 R^2}{C L^4}} \\ = \sqrt{\frac{\sqrt{L^2 + 2 C L R^2} - C R^2}{C L^2}}$$

Hierbei erkennt man, dass bei der Resonanzfrequenz in diesem Fall noch eine Phasenverschiebung auftritt, während bei den ersten beiden Fällen die Phasenverschiebung in der Resonanz immer 0 war. Im Parallelkreis 2. Ordnung ist die Frequenz für die es keine Phasenverschiebung gibt

$$\omega_{\arg(Z)=0} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \neq \omega_{P2,0}$$

2 Durchführung

Im ersten Teil der Messung vermaßen wir den Schwingkreis erster Ordnung mit Hilfe eines Oszilloskops. Die Daten des Schwingkreises waren $C = 4.99 nF$, $L = 314.8 mH$ und $R = 14.76 \Omega$. Zur Messung schalteten wir den Schwingkreis in Reihe mit einem verstellbaren Widerstand, den wir auf $R_{\text{pot}} = 22 k\Omega$ einstellten, und griffen die Spannung am Potentiometers sowie am Schwingkreis ab, welche wir als Spannung an die y- und x-Ablenkplatten des Oszilloskops legten. Die Trajektorie, die vom Elektronenstrahl abgebildet wurde, beschrieb damit eine Ellipse, deren Form von der Phasenverschiebung zwischen U_x und U_y abhing. Da gilt $U_y = I R_{\text{pot}}$, entspricht diese Phasenverschiebung auch jener zwischen Strom und Spannung am Schwingkreis. Die Skalen der x- und y-Achse stellten wir so ein, dass sowohl $U_{x,\text{max}}$ als auch $U_{y,\text{max}}$ die gleiche Längeneinheit Z_0 einnahm. Über die Verzerrungsfaktoren p_x und p_y lassen sich über $U_{x,\text{max}} = p_x Z_0$ und $U_{y,\text{max}} = p_y Z_0$ wieder die ursprünglichen Werte erhalten. Der Betrag der Impedanz lässt sich daraus direkt bestimmen

$$|Z| = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} = \frac{U_{x,\text{max}}}{U_{y,\text{max}}/R_{\text{pot}}} = \frac{p_x}{R_{\text{pot}} p_y}$$

Für die Phasenverschiebung sind die Überlegungen etwas aufwändiger. Eine Ellipse lässt sich im Allgemeinen durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei a die große und b die kleine Halbachse darstellen. Die Form der Ellipse ändert sich natürlich nicht, wenn wir den Winkel um eine bestimmte Phase verschieben.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi - \alpha_m) \\ b \sin(\varphi - \alpha_m) \end{pmatrix}$$

beschreibt immer noch eine Ellipse der gleichen Form (a, b). Wenn wir diese Verschiebung des Startpunkts als eine Drehung des Koordinatensystems verstehen, das dann mit dem Koordinatensystem auf Oszilloskop übereinstimmen soll, muss gelten

$$\begin{aligned} \vec{r}^2(\varphi = 0) &= Z_0^2 = \vec{r}^2(\varphi = \frac{\pi}{2}) \\ a^2 \cos^2(\alpha_m) + b^2 \sin^2(\alpha_m) &= a^2 \sin^2(\alpha_m) + b^2 \cos^2(\alpha_m) \\ a^2 (\cos^2(\alpha_m) - \sin^2(\alpha_m)) &= b^2 (\cos^2(\alpha_m) - \sin^2(\alpha_m)), \end{aligned}$$

was nur gelten kann ($a \neq b$), wenn

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_m) &= \sin(\alpha_m) \\ \Rightarrow \alpha_m &= \frac{\pi}{4} + n\pi \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit gilt, dass in den Scheitelpunkten der Ellipse $U_x = U_y$. Für Spannungstrajektorien der Form

$$\begin{aligned} U_x &= Z_0 \sin(\varphi) \\ U_y &= Z_0 \sin(\varphi + \theta) \end{aligned}$$

gibt es für diese Bedingungen z.B. die Punkte

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \rightarrow a \\ \varphi_b &= -\frac{\theta}{2} \rightarrow b \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= 2 Z_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \\ a &= \sqrt{2} Z_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ b &= \sqrt{2} Z_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Wir führten die oben beschriebene Messung für verschiedenen Frequenzen der Wechselspannung durch

Frequenz in Hz	500.3	1001	1500	2000.2	2501.7	3000.6	3500.1	4000.2
a	3.1	3.14	3.26	3.35	3.5	3.7	4	4.2
b	2.9	2.83	2.77	2.65	2.4	2.05	1.85	0.05
p_x	0.2	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1
p_y	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	2

Frequenz in Hz	4500.5	5000.1	5500.1	6000	6499.4	6999.9	7500.3	8000.1
a	4.05	3.8	3.7	3.6	3.45	3.5	3.45	3.4
b	1.2	1.75	2.45	2.25	2.35	2.35	2.4	2.45
p_x	1	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
p_y	0.2	0.5	0.5	0.2	0.2	0.5	0.5	0.5

Tabelle 1: Vermessung des Parallelkreises 1. Ordnung mit Oszilloskop