Exercise Sheet 11:

1)

a) $$B_n(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$$

$$= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$$

$$= e^{-t/\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n+k}$$

$$= e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \frac{1}{l!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^l = e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^l$$

$(l = n+k)$

$$= e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^l \left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{t}{\tau}$$

2) wir betrachten eine zeitlich konstante Anreicherungsgleichung

$$D_s \cdot \frac{d^2 n(x)}{dx^2} - \frac{n(x)}{\tau_s} = -\overline{F}$$

a) $n_s = F \cdot \tau_s$ ist eine spezielle Lösung der DGL $\left(\frac{d^2 n_s}{dx^2} = 0\right)$

b) $n(x) = A \sinh\left(\frac{x}{x_s}\right) + B \cosh\left(\frac{x}{x_s}\right)$ mit $x_s = \sqrt{D_s \tau_s}$ ist eine allgemeine Lösung der homogenen DGL

$\frac{d^2}{dx^2} \sinh(x) = \sinh(x)$ gleiches für $\cosh(x)$

c) aus $n(\pm \frac{L}{2}) = n_{eq} = A \sinh\left(\pm \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right) + B \cosh\left(\pm \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right)$

$+ F\tau_s$

$\rightarrow \quad 0 = A \sinh\left(\frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right) \Rightarrow A = 0$

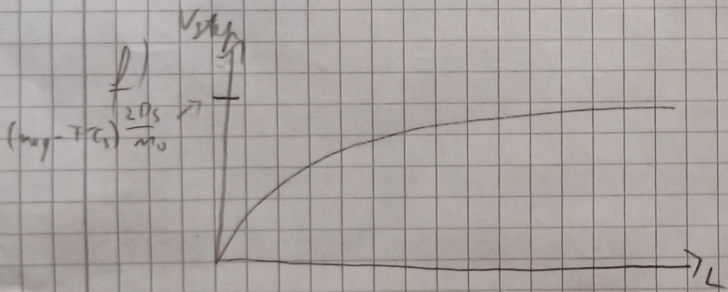
$n_{eq} = B \cosh\left(\frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right) + F\tau_s \quad \Rightarrow B = \dfrac{n_{eq} - F\tau_s}{\cosh\left(\frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right)}$

d) $j_x^+ = -D_s \frac{d}{dx} n(x)\Big|_{x=-\frac{L}{2}} = D_s (n_{eq} - F\tau_s) \tanh\left(\frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{D_s \tau_s}}\right)$

$j_x^- = -j_x^+$

e) $v_{step} = (j_x^- + j_x^+)/n_0 = \frac{2D_s}{n_0} (n_{eq} - F\tau_s) \tanh\left(\frac{L}{2\sqrt{D_s \tau_s}}\right)$

f)



g)

$\tilde{v}_i = \dfrac{v_i}{D_s (n_{eq} - F\tau_s)} = \tanh(\alpha L_i) + \tanh(\alpha L_{i-1})$ mit $\frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{D_s \tau_s}$

$\dfrac{1}{D_s (n_{eq} - F\tau_s)} \dfrac{dL_i}{dt} = \tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_i = \tanh(\alpha L_{i+1}) - \tanh(\alpha L_{i-1})$

$(L_i \rightarrow L + \Delta L)$

wenn L_i um $\Delta L \gtrless 0$ verändert wird auf Kosten von

$L_{i+1} \rightarrow L - a\Delta L \qquad L_{i-1} \rightarrow L - b\Delta L \qquad a + b = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_s(n_{eq} - \bar{F}\tau_s)} \frac{dL_i}{dt} = \frac{1}{D_s(n_{eq} - \bar{F}\tau_s)} \frac{d}{dt} \Delta L$$

$$\approx \left(1 - \tanh^2(\alpha L)\right)(b-a)\,\Delta L$$

Gleichgewicht (Oszillation) nur für $a > b$

im allgemeinen nicht

Eine bildliche Überlegung

Wenn die Stufe rechts breiter als die Stufe links ist, wächst die Stufe in der Mitte. Bei umgekehrten Verhältnissen schrumpft sie.

Rechts der verschmälerten Stufe stellt sich ein Gleichgewicht ein. Die verschmälerte Stufe wächst, die verschmälerte Stufe propagiert nach links.

Die Stufe rechts neben einer schmalen Stufe wird (bei unseren Anfangsbedingungen) wachsen bis sie größer ist als die Stufe links neben der schmalen Stufe. Dann wird die schmale Stufe wieder beginnen zu wachsen. usw.

$\rightarrow$ Gleichgewicht (schmale Stufe propagiert nach links (innerhalb der Stufenordnung))