Stocktube

numerische Hydrodynamik

Christian Gommeringer

betreut durch Dr. Christoph Schaefer

Tübingen, den 13. November 2022

1 Einführung

In diesem Versuch befassen wir uns mit einem Problem der numerischen Hydrodynamik. Wir betrachten das eindimensionale Stoßrohr, und möchten hier die Lösung der Euler Gleichung für eine unstetige Anfangsbedingung numerisch approximieren. Zum Lösen dieser partiellen Differentialgleichungen verwenden wir ein festes räumliches wie auch zeitliches Gitter, sowie die Methode des Operator Splittings. Durch die Einführung neuer kombinierter Größen lassen sich die Euler Gleichungen so umformen, dass sie die Form der einfachsten partiellen Differenzialgleichung mit Inhomogenität hat.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{h}$$

Wobei

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho\epsilon)$$

$$\mathbf{f} = (\rho u, \rho u u, \rho\epsilon u)$$

$$\mathbf{h} = \left(0, -\frac{\partial p}{\partial x}, -p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Durch die oben angesprochene ‘Methode des Operator Splitting wird nun zunächst der homogene Teil integriert. Hierbei wird unter anderem ein erweitertes Upwind-Verfahren angewandt. Mit der Lösung des sogenannten ersten Advektionsschritts wird dann noch eine Korrektur durch den inhomogenen Teil der Euler Gleichungen bewirkt. Im gesamten Verfahren wird, wie angesprochen ein festes räumliches Gitter gewählt. Die Geschwindigkeit wird an den Grenzen der Gitterzellen definiert, und die Dichte und Energie werden im Zentrum der Zellen definiert. Zur geschickten Implementierung unseres Algorithmus führen wir zwei Ghost-Zellen am Anfang und am Ende unseres eindimensionalen Gitters ein. Dabei setzen wir die Werte in diesen Ghost-Zellen zur Erfüllung reflektierender Randbedingungen auf folgende Werte fest.

$$\begin{array}{lllllllll}
u_2 & = & 0 & \rho_1 & = & \rho_2 & \epsilon_1 & = & \epsilon_2 \\
u_1 & = & -u_3 & \rho_0 & = & \rho_3 & \epsilon_0 & = & \epsilon_3 \\
u_{N+2} & = & 0 & \rho_{N+2} & = & \rho_{N+1} & \epsilon_{N+2} & = & \epsilon_{N+1} \\
u_{N+3} & = & -u_{N+1} & \rho_{N+3} & = & \rho_N & \epsilon_{N+3} & = & \epsilon_N
\end{array}$$

2 Aufgabe 1

In der ersten Aufgabe sollen wir zum Herantasten an den Algorithmus die skalare eindimensionale Transportgleichung lösen.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + a\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

für die Anfangsbedingung

$$\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$$

Dies wird natürlich folgendermaßen gelöst

$$\psi(x, t) = \psi_0(x - at)$$

Diese Gleichung soll nun numerisch mit Hilfe des oben angedeuteten Verfahrens gelöst werden, für a=0 und einen Rechenbereich [-1,1] mit periodischen Randbedingungen. Als Start ist vorgegeben

$$\psi(x, t = 0) = \{ \begin{array}{l} 1.0 \text{ für } |x| \leqslant \frac{1}{3} \\ 0.0 \text{ für } \frac{1}{3} < |x| \leqslant 1 \end{array}$$