

Das klassische N-Körperproblem

Untersuchung von Zeitintegratoren

Christian Gommeringer

betreut durch Prof. Schäfer

Tübingen, den 10. Mai 2023

Theoretische Einführung

In diesem Versuch befassen wir uns mit numerischen Lösungen von N-Körper Gravitationsgleichungen durch sogenannte Zeitintegratoren. Ziel ist es verschiedene Verfahren zum Lösen von eindimensionalen Differenzialgleichungen kennen zu lernen. Generell haben wir es mit DGLs 1. Ordnung zu tun.

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(y, x) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

Zu deren Lösung liegt das Euler Verfahren nahe. Hier wird der Funktionsverlauf einfach in 1. Ordnung durch die Ableitung bestimmt.

$$y(x + \Delta x) = y'(x) \Delta x$$

Für Gleichungen höherer Ordnung wird bei der höchsten Ordnung begonnen und bis zur gesuchten Funktion fortgefahren, was für das Beispiel 2. Ordnung bedeutet.

$$\begin{aligned}v(t + \Delta t) &= a(t) \Delta t \\ r(t + \Delta t) &= v(t) \Delta t\end{aligned}$$

Für dieses Schema gibt es auch eine Variation namens Euler-Cromer Verfahren. Hier wird zur Berechnung des Ortes nicht die alte Geschwindigkeit sondern die neue verwendet.

$$\begin{aligned}v(t + \Delta t) &= a(t) \Delta t \\ r(t + \Delta t) &= v(t + \Delta t) \Delta t\end{aligned}$$

Im weiteren werde ich kurz die anderen verwendeten Integratoren Schemas aufführen.

Leap-Frog Aus r_0 und v_0 wird zunächst

$$r_{1/2} = r_0 + v_0 \Delta t / 2$$

berechnet. Die Aktualisierung des Ortes folgt dann aus einem Zwischenschritt

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n + a(r_{n+1/2}, (n + \frac{1}{2}) \Delta t) \Delta t \\ r_{n+3/2} &= r_{n+1/2} + v_{n+1} \Delta t\end{aligned}$$

zu

$$r_{n+1} = r_{n+1/2} + v_{n+1} \Delta t / 2$$

Verlet

$$r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} + a_n \Delta t^2$$
$$v_n = \frac{r_{n+1} - r_{n-1}}{2 \Delta t}$$

Der benötigte zweite Startwert des Ortes kann aus einer Taylorapproximation gewonnen werden.

Velocity-Verlet

$$r_{n+1} = r_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n \Delta t^2$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1}) \Delta t$$

Dieser Algorithmus muss mit einem konstanten Zeitschritt betrieben werden. Für die Wahl eines Variablen Zeitschritts bietet sich die kick-drift-kick Variante an.

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{1}{2} a_n \Delta t$$
$$r_{n+1} = r_n + v_{n+1/2} \Delta t$$
$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{1}{2} a_{n+1} \Delta t$$

Hermite Schema Dieses Verfahren besteht aus einem Zwischenschritt mit vorhergesagten (p) Variablen, die im endgültigen Schritt dann korrigiert (c) werden.

$$v_{n+1}^p = v_n + a_n \Delta t + \frac{1}{2} \dot{a}_n \Delta t^2$$
$$r_{n+1}^p = r_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n \Delta t^2 + \frac{1}{2} \dot{a}_n \Delta t^3$$

Daraus wird dann a_{n+1}^p und \dot{a}_{n+1}^p berechnet. Durch Vergleich dieser Werte und einer formalen Taylorreihe von a und \dot{a} lassen sich höhere Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_n^{(2)} &= -3\frac{a_n - a_{n+1}^p}{\Delta t^2} - \frac{2\dot{a}_n + \dot{a}_{n+1}^p}{\Delta t} \\ \frac{1}{6}a_n^{(3)} &= 2\frac{a_n - a_{n+1}^p}{\Delta t^3} + \frac{\dot{a}_n + \dot{a}_{n+1}^p}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

Hieraus werden dann die Korrigierten Schritte bestimmt.

$$\begin{aligned}v_{n+1}^c &= v_{n+1}^p + \frac{1}{6}a_n^{(2)}\Delta t^3 + \frac{1}{24}a_n^{(3)}\Delta t^4 \\ r_{n+1}^c &= r_{n+1}^p + \frac{1}{24}a_n^{(2)}\Delta t^4 + \frac{1}{120}a_n^{(3)}\Delta t^5\end{aligned}$$

von obigen Formeln ausgehend kann das iterierte Hermite Verfahren konstruiert werden. Hierbei aktualisieren sich Ort und Geschwindigkeit gemäß

$$\begin{aligned}v_{n+1}^c &= v_n + \frac{1}{2}(a_{n+1}^p + a_n)\Delta t + \frac{1}{12}(\dot{a}_{n+1}^p - \dot{a}_n)\Delta t^2 \\ r_{n+1}^c &= r_n + \frac{1}{2}(v_{n+1}^c + v_n)\Delta t + \frac{1}{12}(a_{n+1}^p - a_n)\Delta t^2\end{aligned}$$

Hierbei wird das neugewonnene v_{n+1}^c in die Berechnung eingesetzt. Die Iteration besteht darin, dass diese Wert für eine erneute Berechnung der Beschleunigung und ihren Ableitung verwendet werden, und damit dann wieder Ort und Geschwindigkeit aktualisiert werden. Zwei Iterationen reichen meist. Zuletzt stelle ich noch 3 verschiedene Runge-Kutta Verfahren vor. Zum einen das Halbschrittverfahren.

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2\end{aligned}$$

Das Heun Verfahren

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

und das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$\tilde{v}_1 = a_n \Delta t$$

$$\tilde{r}_1 = v_n \Delta t$$

$$\tilde{v}_2 = a(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, r_n + \frac{1}{2}\tilde{r}_1) \Delta t$$

$$\tilde{r}_2 = (v_n + \frac{1}{2}\tilde{v}_1) \Delta t$$

$$\tilde{v}_3 = a(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, r_n + \frac{1}{2}\tilde{r}_2) \Delta t$$

$$\tilde{r}_3 = (v_n + \frac{1}{2}\tilde{v}_2) \Delta t$$

$$\tilde{v}_4 = a(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, r_n + \frac{1}{2}\tilde{r}_3) \Delta t$$

$$\tilde{r}_4 = (v_n + \frac{1}{2}\tilde{v}_3) \Delta t$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}\tilde{v}_1 + \frac{1}{3}\tilde{v}_2 + \frac{1}{3}\tilde{v}_3 + \frac{1}{6}\tilde{v}_4$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{1}{6}\tilde{r}_1 + \frac{1}{3}\tilde{r}_2 + \frac{1}{3}\tilde{r}_3 + \frac{1}{6}\tilde{r}_4$$

Zwei Körper Problem

Zunächst teste ich die oben beschriebenen Zeitintegratoren anhand der Simulation eines Kepler problems zweiter Körper mit gleichen Massen (0.5 kg). Die Anfangsbedingungen lauten.

$$\begin{aligned} r_1(0) &= (1, 0, 0); \quad r_2 = 0 \\ v_1 &= 0 \quad v_2 = (0, -1, 0) \end{aligned}$$

In Unserem Fall setzen wir zur schöneren Anschauung die Gravitationskonstante G auf 0. Außerdem führe ich die weitere Untersuchung im Schwerpunktsystem der beiden Massen durch.

Ich beginne mit dem Euler Schema, wobei ich über ca. 100 Perioden integriere.

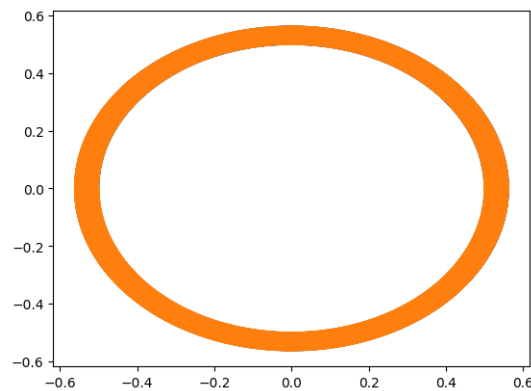
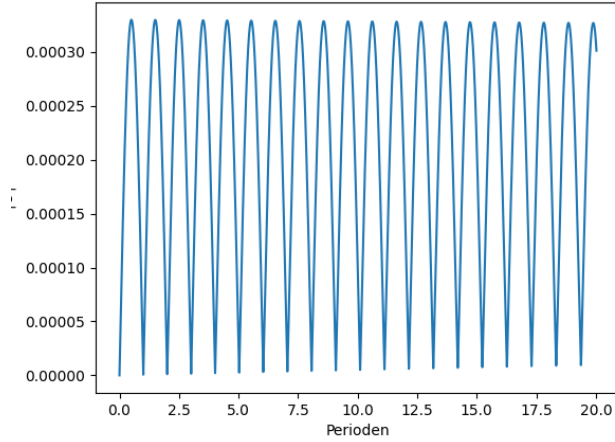
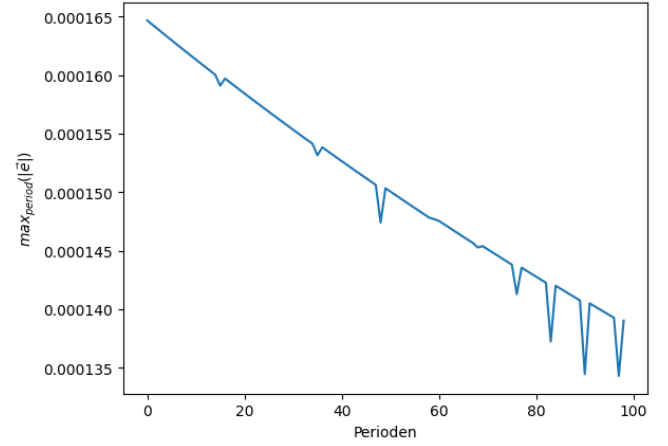


Abbildung 1: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden

Wie zu erkennen ist ist die Bahn deutlich ausgeschmiert. Es werden die Defizite dieses Schemas bei der Integration über einen großen Zeitraum aufgedeckt. Das Euler Schema ist nicht die eigentlich konstante Planetenbahn, als solche abzubilden. Um die Genauigkeit des Integrators besser abschätzen zu können, betrachten wir einige Erhaltungsgrößen dieses Prozesses.

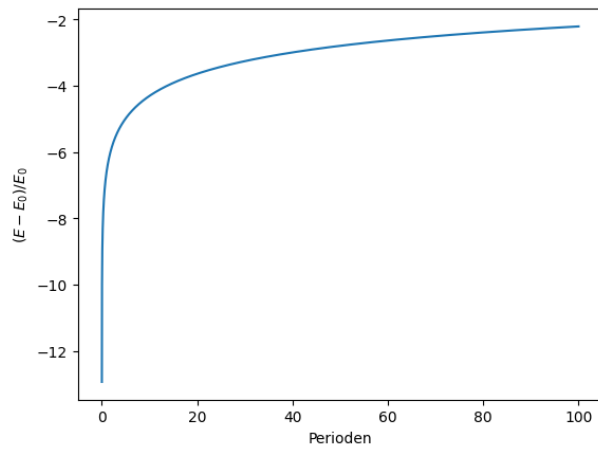


(a) Logarithmus der Abweichung
des Runge-Lenz Vektors

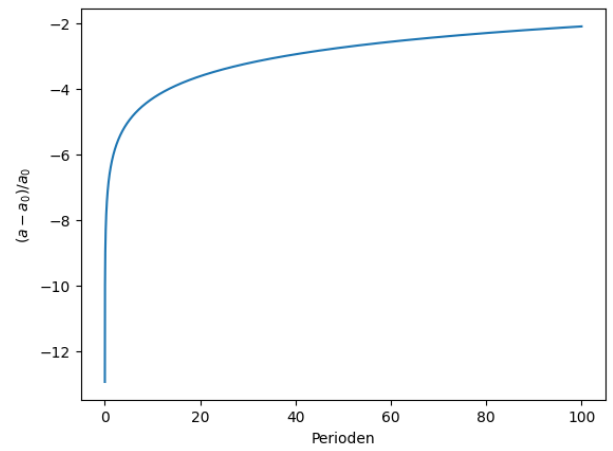


(b) Maxima über eine Periode
von $|\vec{e}|$

Abbildung 2: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgröße Runge-Lenz Vektor \vec{e} für
das Euler Schema



(a) logarithmische Abweichung
der Energie



(b) logarithmische Abweichung
der großen Halbachse

Abbildung 3: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen große Halbachse a und
Energie E für das Euler Schema

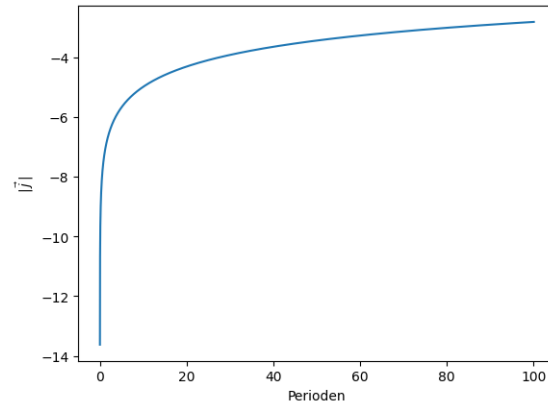


Abbildung 4: logarithmischer Verlauf des spezifischen Drehimpulses j

Es ist zu erkennen, dass der Runge-Lenz Vektor sich periodisch ändert. Da dies auf einer sehr kleinen Skala stattfindet, vermute ich, dass es sich um einen periodischen Fehler des Integrators handelt, da in der Realität der Runge-Lenz Vektor konstant ist. Wenn wir uns die Maxima einer Periode anschauen, sehen wir, dass diese nicht konstant sind, was auch den langfristigen Verfall dieser Erhaltungsgröße zeigt. Dies ist auch bei der Energie und der großen Halbachse der Fall.

Als nächstes untersuchen wir das Euler-Cromer Schema.

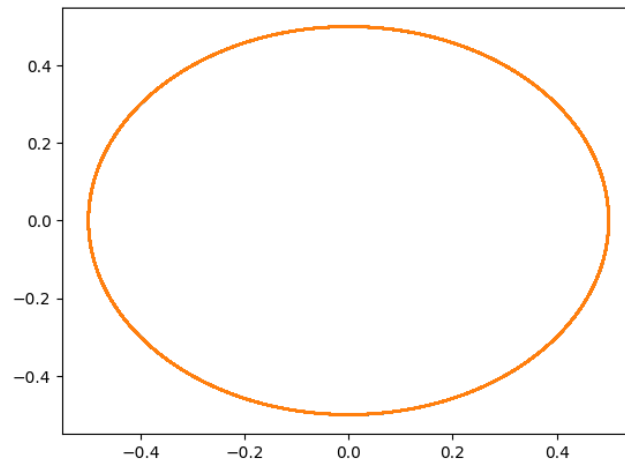
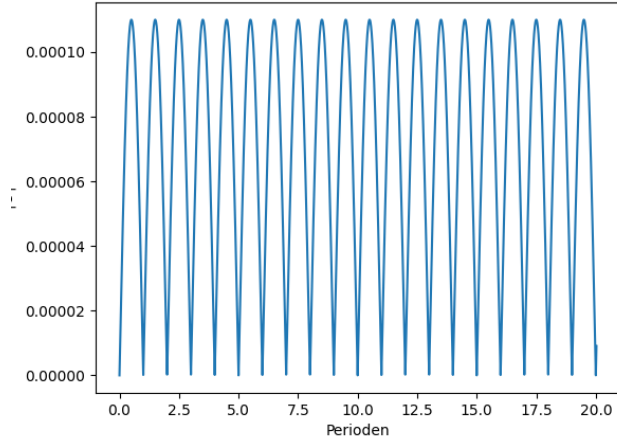
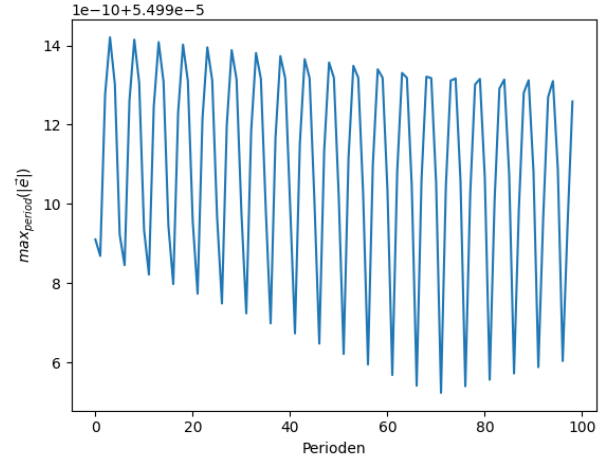


Abbildung 5: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden

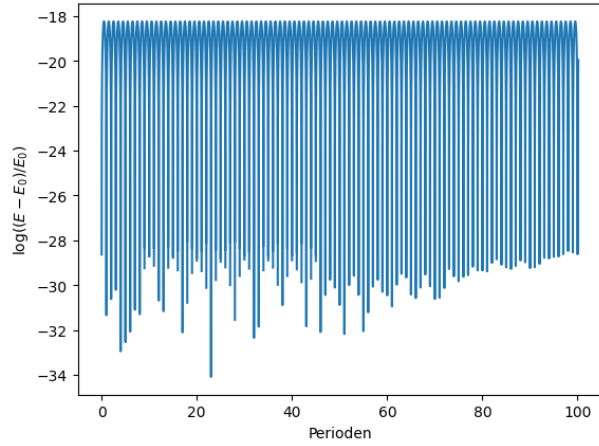
Es fällt sofort auf, dass die Bahn viel akurater bestimmt wurde.



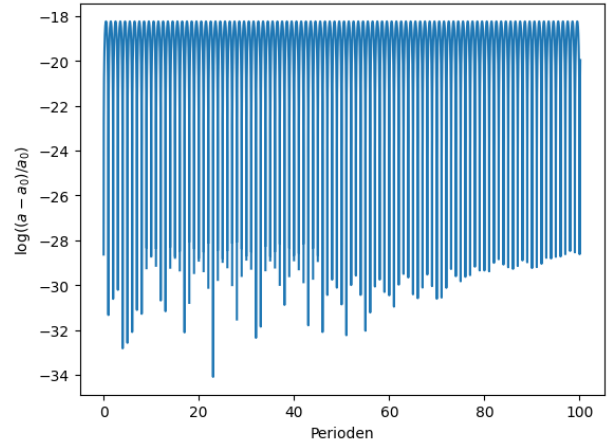
(a) Logarithmus der Abweichung
des Runge-Lenz Vektors



(b) Maxima über eine Periode
von $|\vec{e}|$



(c) logarithmische Abweichung
der Energie



(d) logarithmische Abweichung
der großen Halbachse

Abbildung 6: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen Runge-Lenz Vektor \vec{e} , große Halbachse a und Energie E für das Euler-Cromer Schema

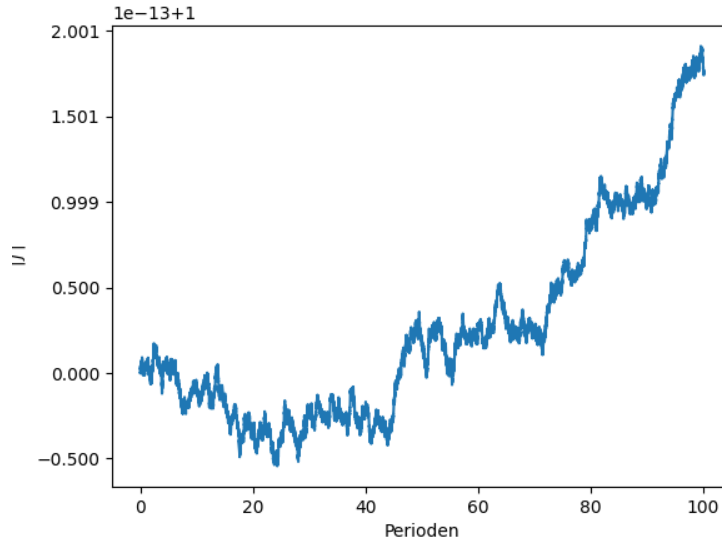


Abbildung 7: Verlauf des spezifischen Drehimpulses j

Beim Euler Cromer Schema ist zu erkennen, dass für den Runge-Lenz Vektor ein ähnlich periodisches Verhalten wie bei Euler zu beobachten ist. Allerdings oszillieren die Maxima der Perioden über einen längeren Zeitraum und fallen weniger ab. Bei der Energie und der großen Halbachse ist dies noch deutlicher zu erkennen. Hier sieht man, dass die Energie sowie die große Halbachse praktisch konstant sind, wodurch sich die Eigenschaft eines symplektischen Integrators ausdrückt. Die Abweichung beträgt nie mehr als $\text{ca. } 10^{-18}$.

Ich fahre mit dem Heun Schema fort.

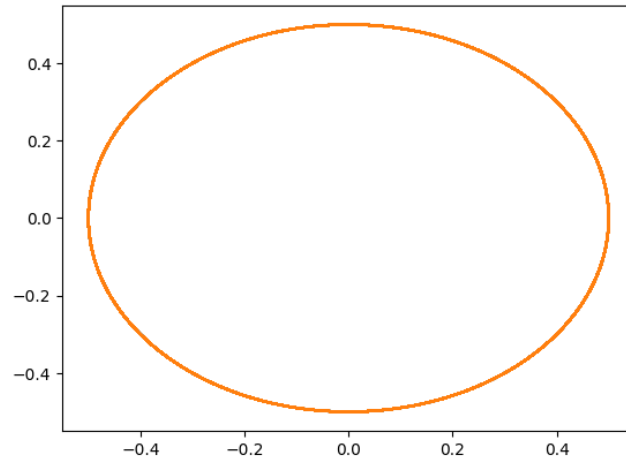
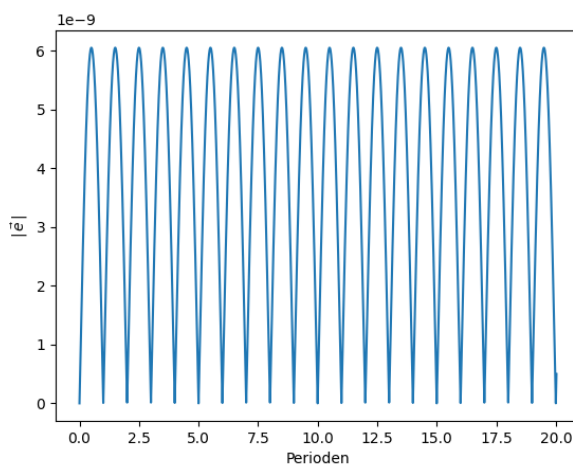
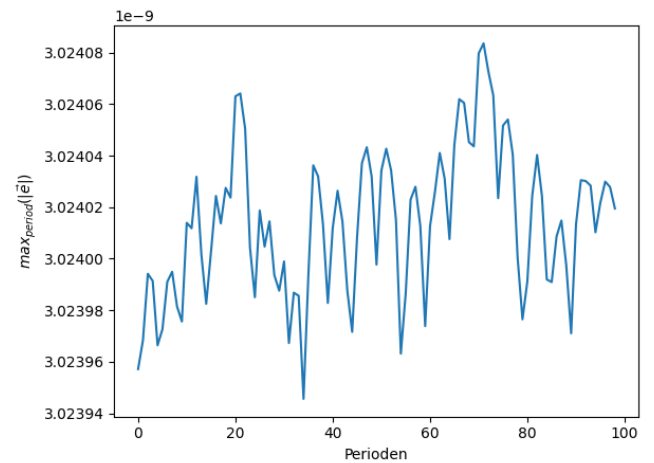


Abbildung 8: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden

Auch hier weist die Bahn keine wirkliche Ausschmierung auf.

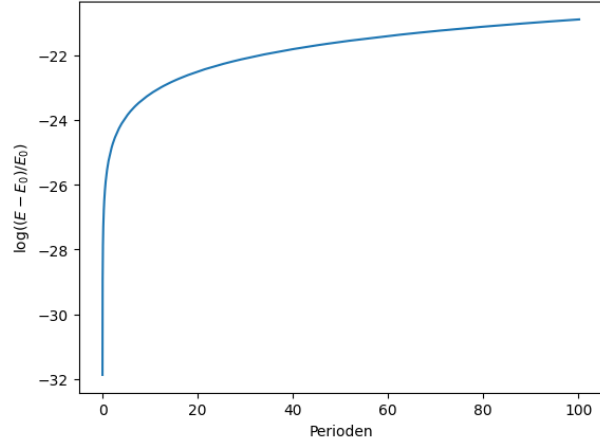


(a) Logarithmus der Abweichung
des Runge-Lenz Vektors

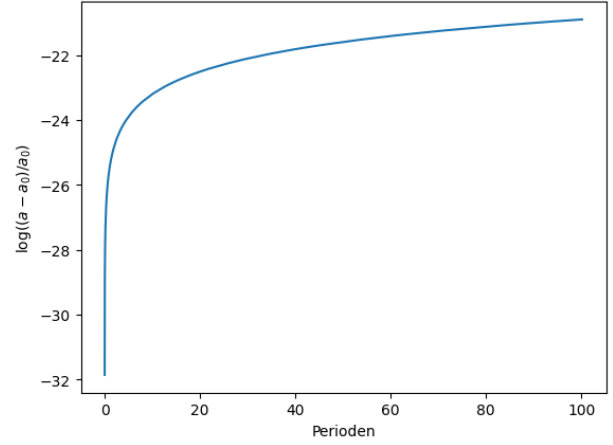


(b) Maxima über eine Periode
von $|\vec{e}|$

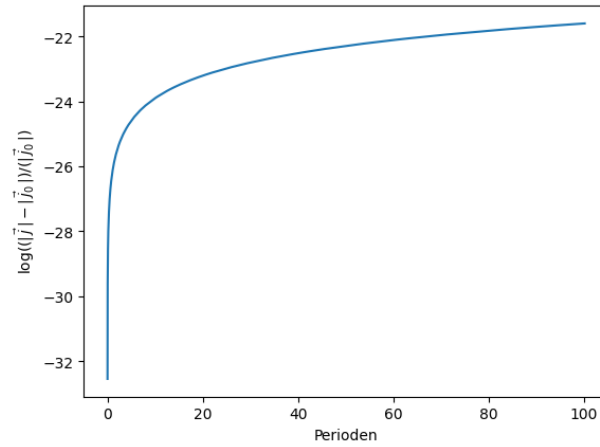
Abbildung 9: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgröße Runge-Lenz Vektor \vec{e} für
das Heun Schema



(a) logarithmische Abweichung der Energie



(b) logarithmische Abweichung der großen Halbachse



(c) logarithmischer Verlauf des spezifischen Drehimpulses

Abbildung 10: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen spezifischer Drehimpuls j , große Halbachse a und Energie E für das Heun Schema

Während der Runge-Lenz Vektor zeitlich im Mittel konstant bleibt, nehmen Energie und große Halbachse zu.

Beim Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung ist die Bahn wieder sehr gut gezeichnet.

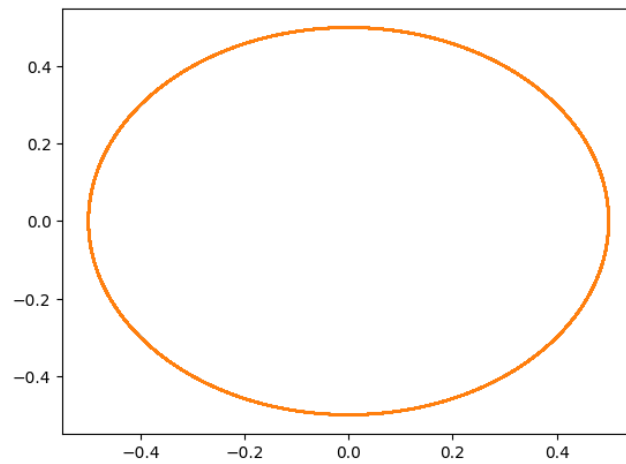
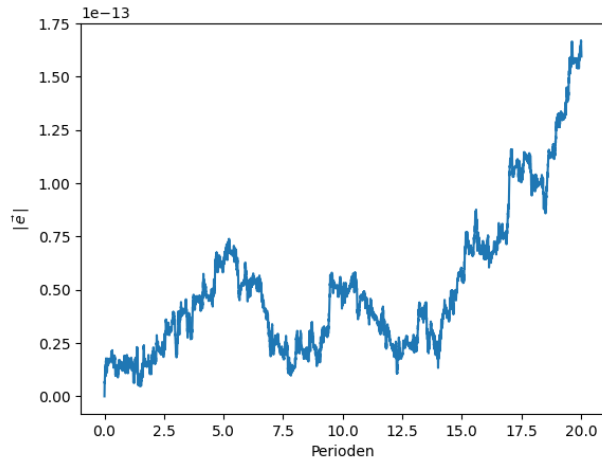
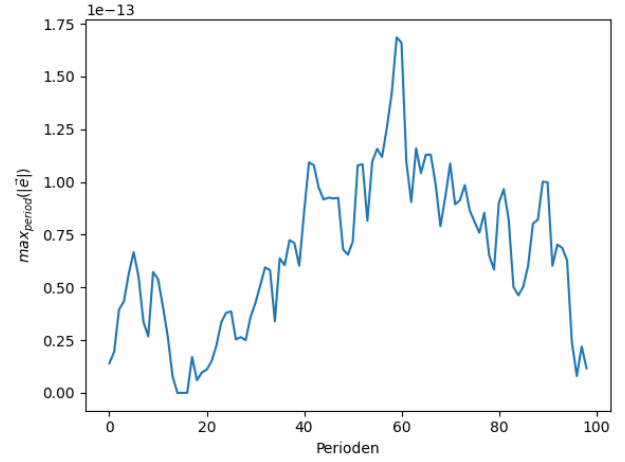


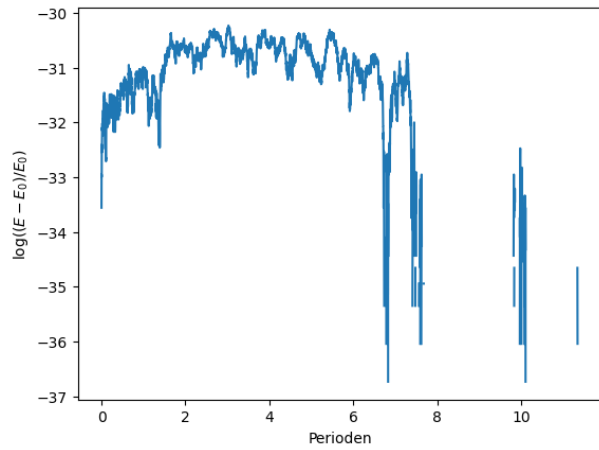
Abbildung 11: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden



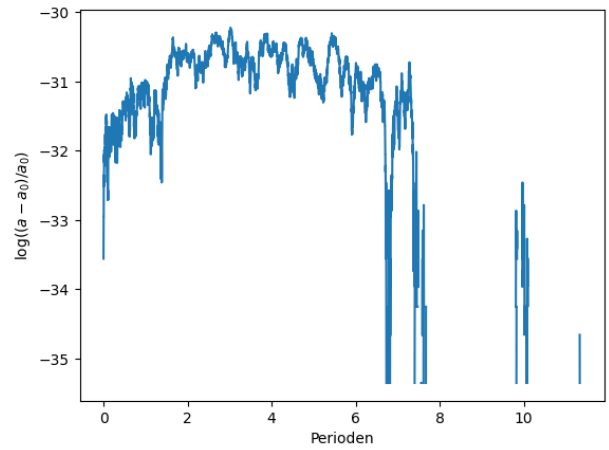
(a) Logarithmus der Abweichung
des Runge-Lenz Vektors



(b) Maxima über eine Periode
von $|\vec{e}|$



(c) logarithmische Abweichung
der Energie



(d) logarithmische Abweichung
der großen Halbachse

Abbildung 12: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen Runge-Lenz Vektor \vec{e} , große Halbachse a und Energie E für das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

Über die 100 integrierten Perioden bleiben Energie und Halbachse, sowie Runge-Lenz Vektor praktisch konstant.

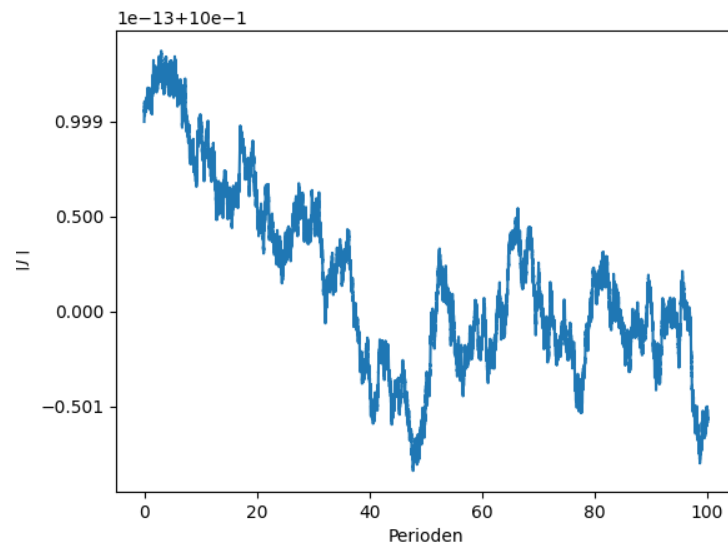


Abbildung 13: Verlauf des spezifischen Drehimpulses j

Das Hermite Schema

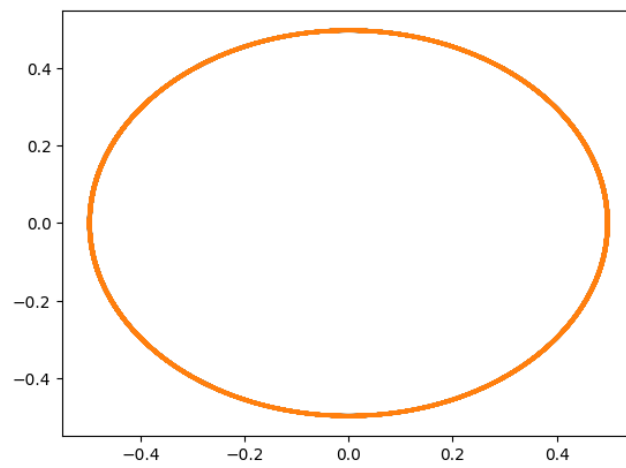
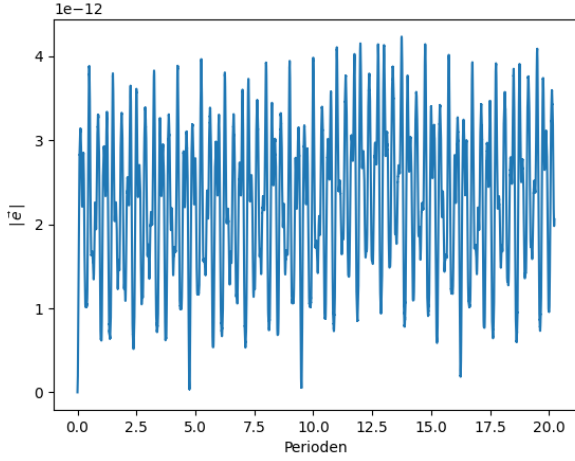
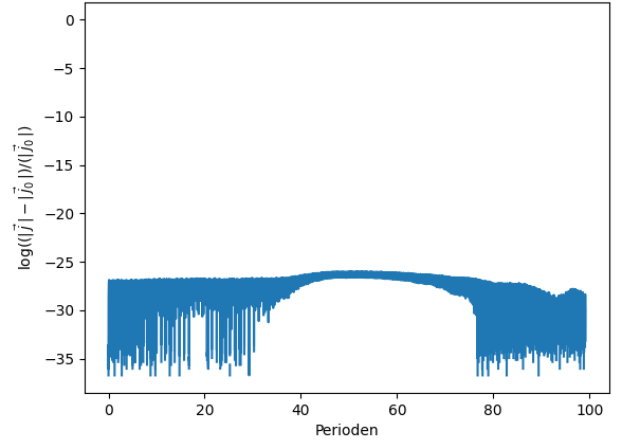


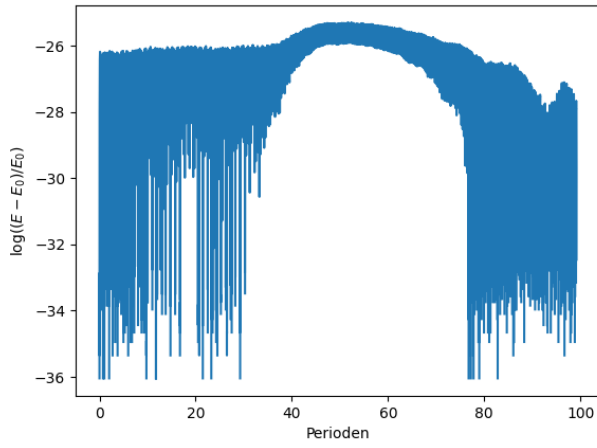
Abbildung 14: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden



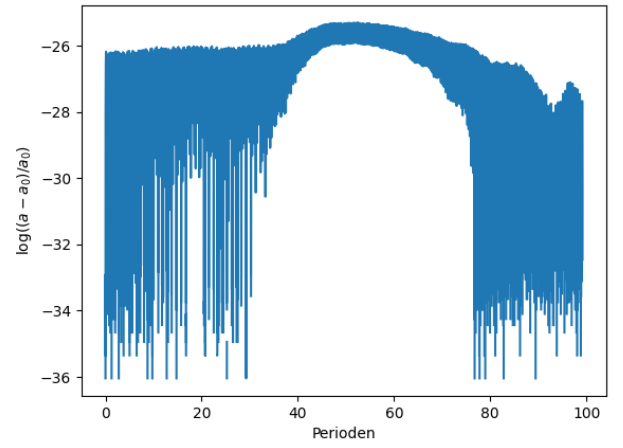
(a) Logarithmus der Abweichung
des Runge-Lenz Vektors



(b) Logarithmische Abweichung
des spezifischen Drehimpuls



(c) logarithmische Abweichung
der Energie



(d) logarithmische Abweichung
der großen Halbachse

Abbildung 15: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen Runge-Lenz Vektor e ,
große Halbachse a und Energie E für das Hermite Schema

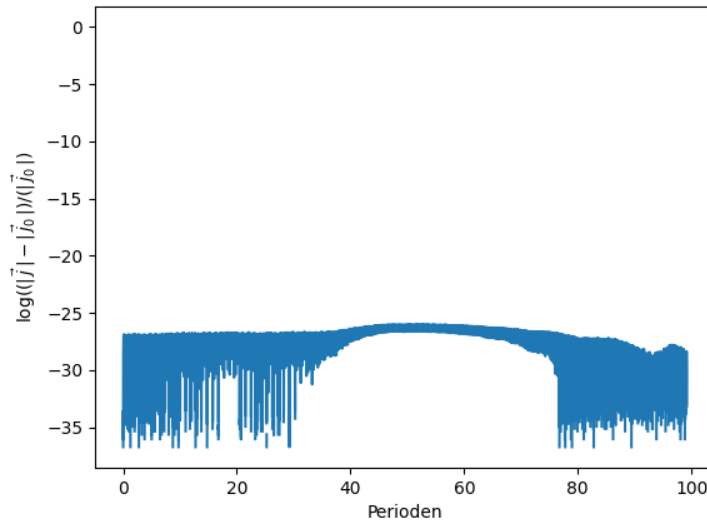


Abbildung 16: logarithmischer Verlauf des spezifischen Drehimpulses j

Auch das Hermite Schema ist genauso wie das nachfolgende iterierte Hermite Schema ein symplektischer Integrator. Die Erhaltungsgrößen sind gut zu erkennen.

Zuletzt untersuche ich noch das iterierte Hermite Verfahren.

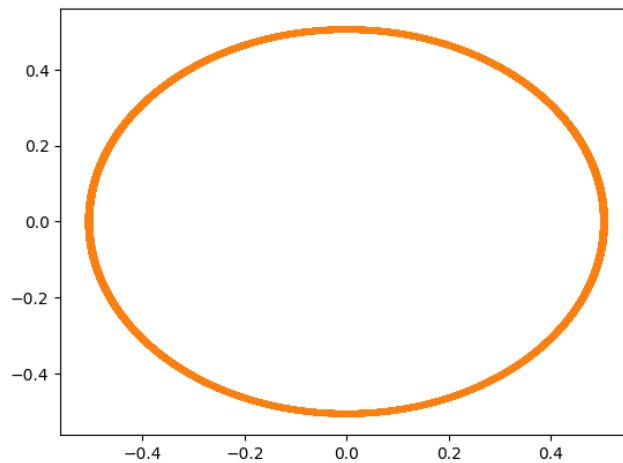
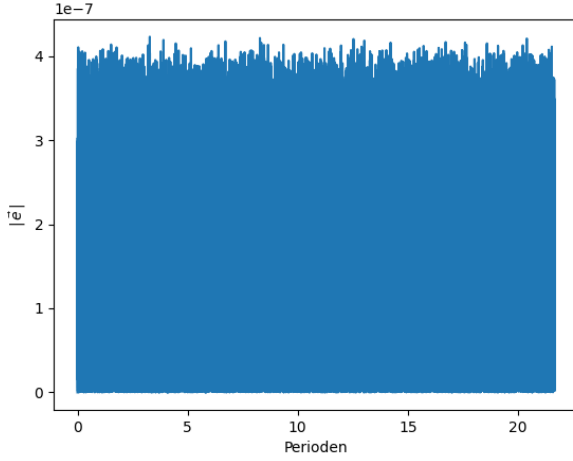
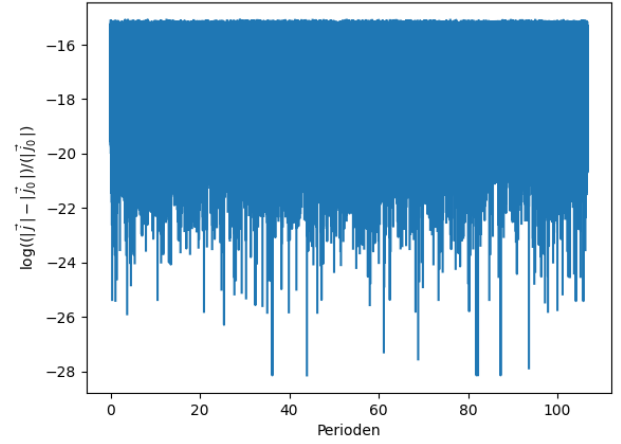


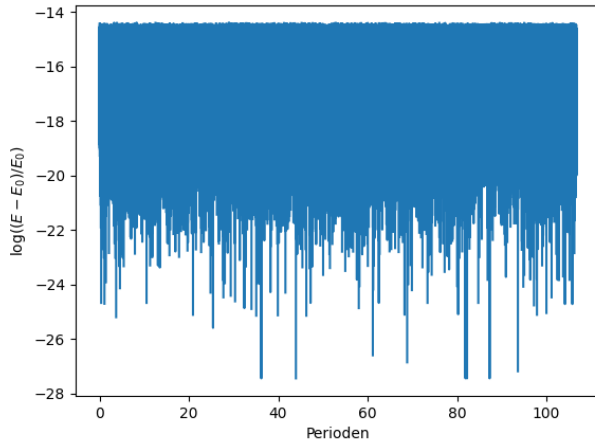
Abbildung 17: Planeten Trajektorie im Schwerpunktsystem über 100 Perioden



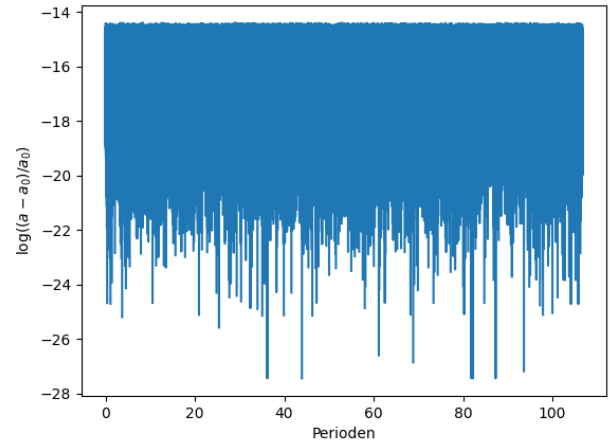
(a) Abweichung des Runge-Lenz Vektors



(b) logarithmische Abweichung des spezifischen Drehimpuls



(c) logarithmische Abweichung der Energie



(d) logarithmische Abweichung der großen Halbachse

Abbildung 18: zeitlicher Verlauf der Erhaltungsgrößen spezifischer Drehimpuls j , Runge-Lenz Vektor e , große Halbachse a und Energie E für das iterierte Hermite Verfahren

Simulation größerer Systeme

Im folgenden wird ein System mit 100 und eines mit 1000 Teilchen integriert. Es handelt sich um das gleiche Gravitationsproblem. Die verschiedenen Integratoren werden durch den Verlauf der eigentlich konstanten Energie miteinander verglichen.

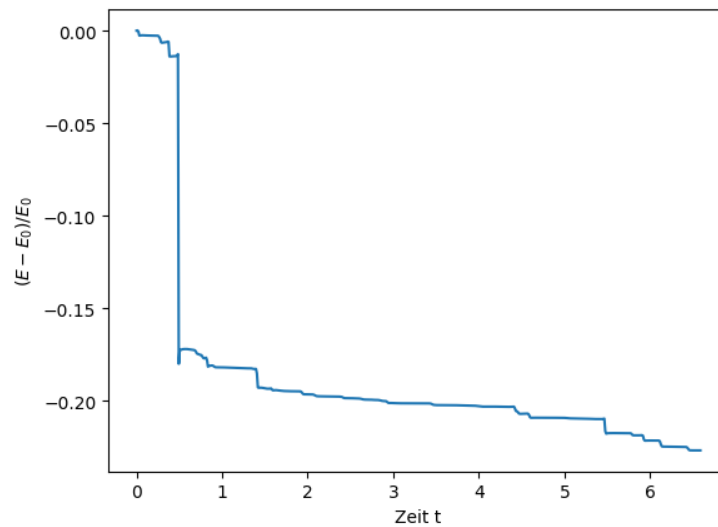


Abbildung 19: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Euler Schema

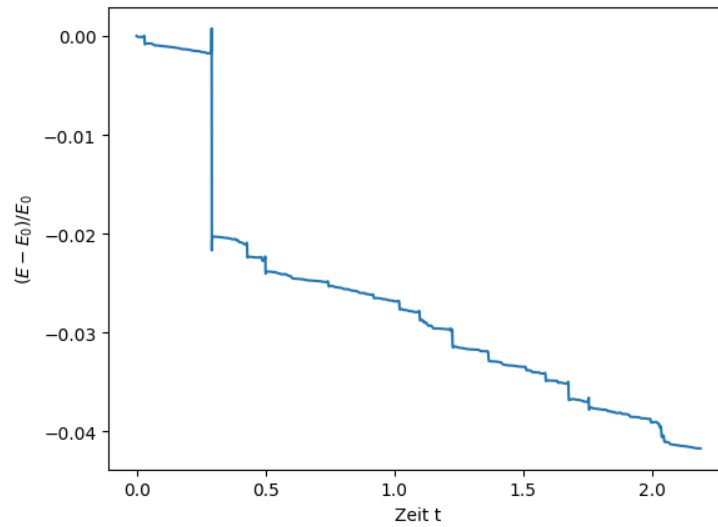


Abbildung 20: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Euler Schema

Während beim Euler Verfahren ein quasi kontinuierlicher Abfall der Energie zu beobachten ist, findet man beim Euler-Cromer Schema längere gerade Passagen, die von Sprüngen in der Energie unterbrochen werden. Diese Sprünge sind darauf zurück zu führen, dass sich Teilchen sehr nahe kommen, und der Algorithmus dann Fehler macht. Das ist schwer zu beheben.

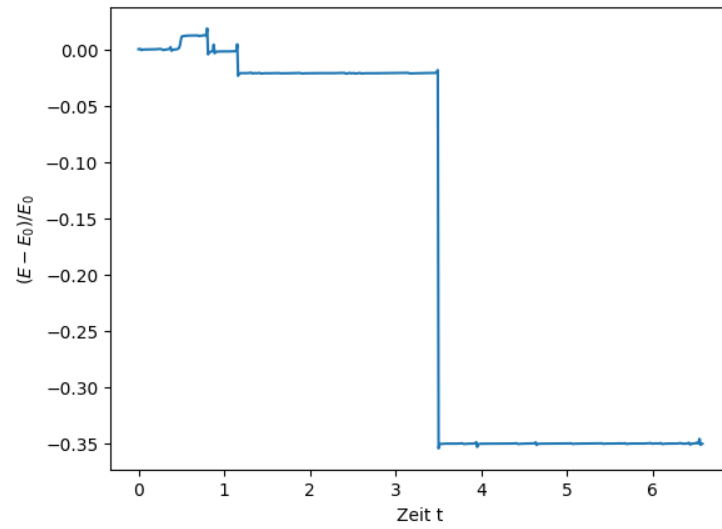


Abbildung 21: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Euler-Cromer Schema

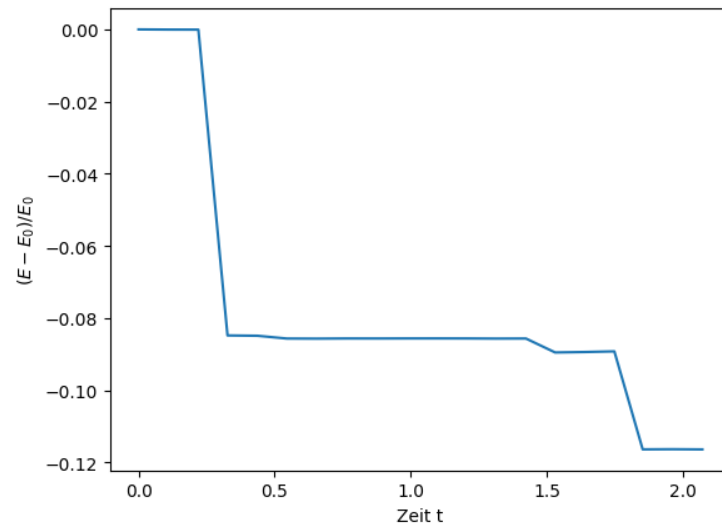


Abbildung 22: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Euler-Cromer Schema

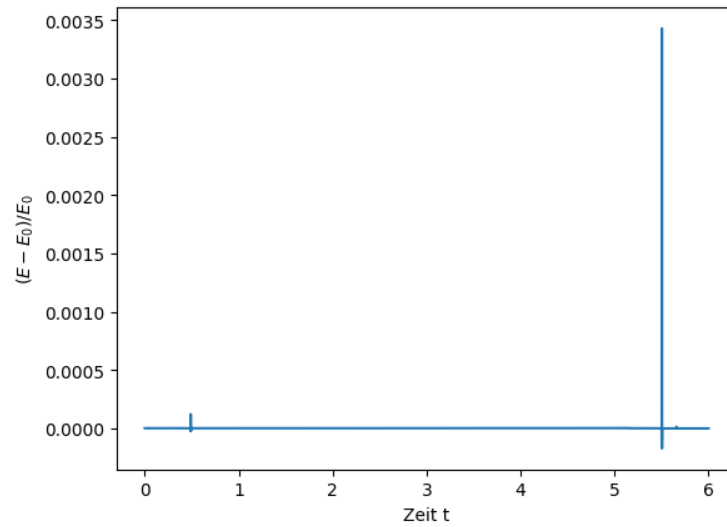


Abbildung 23: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Velocity Verlet Schema

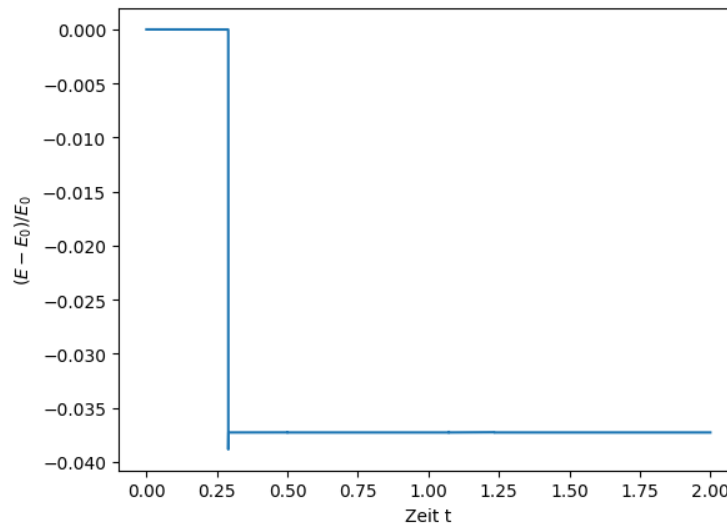


Abbildung 24: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Velocity Verlet Schema

Der Velocity Verlet Algorithmus schneidet hier sehr gut ab.

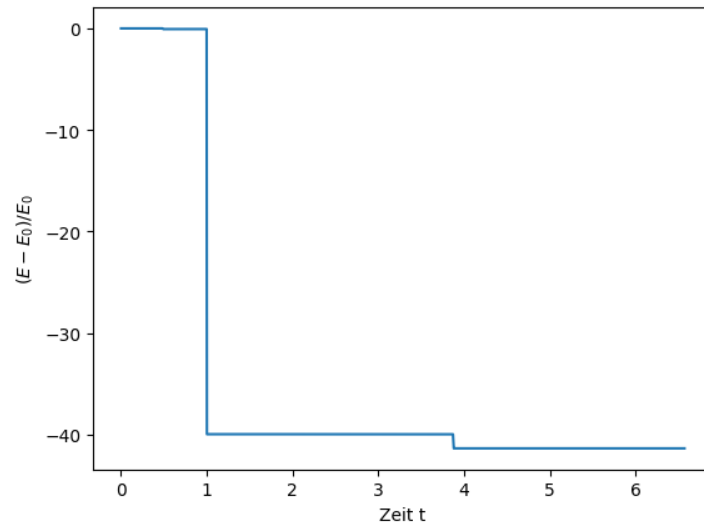


Abbildung 25: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Heun Schema

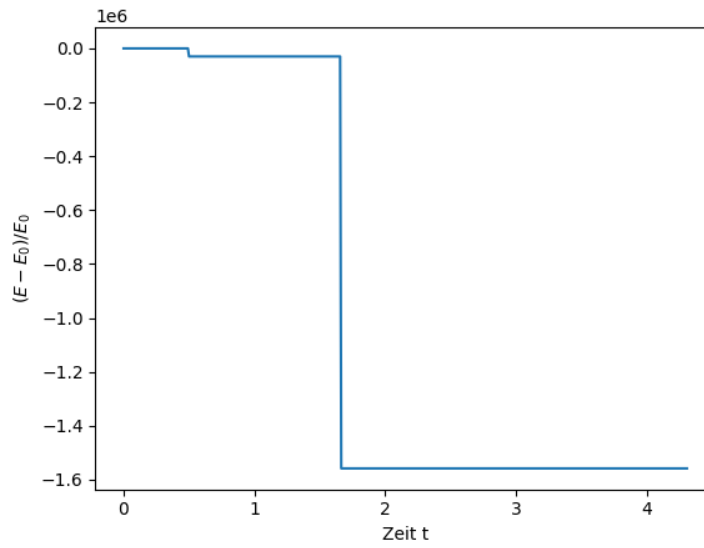


Abbildung 26: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Heun Schema

Beim Heun Verfahren treten extrem große Sprünge auf, während das

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung auf der betrachteten Zeitskala sehr gut abschneidet. Die Integrierte Zeit ist sehr klein, da vor allem bei den Hermite Verfahren, schon diese kurze Zeitspanne Rechenzeiten im Bereich von Stunden benötigte.

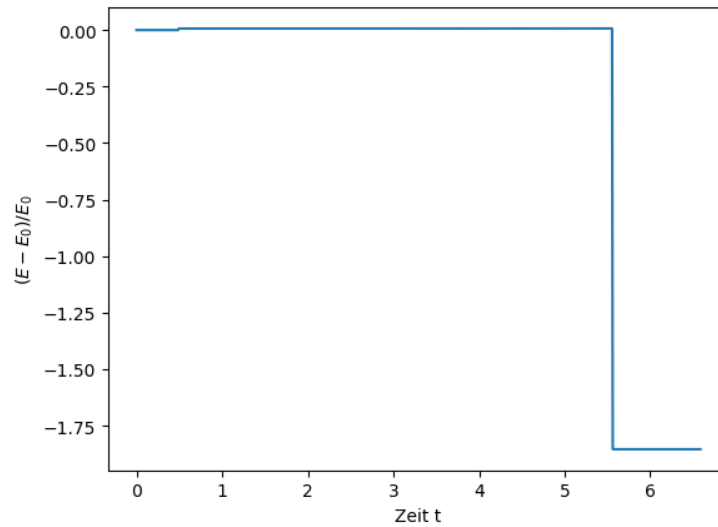


Abbildung 27: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

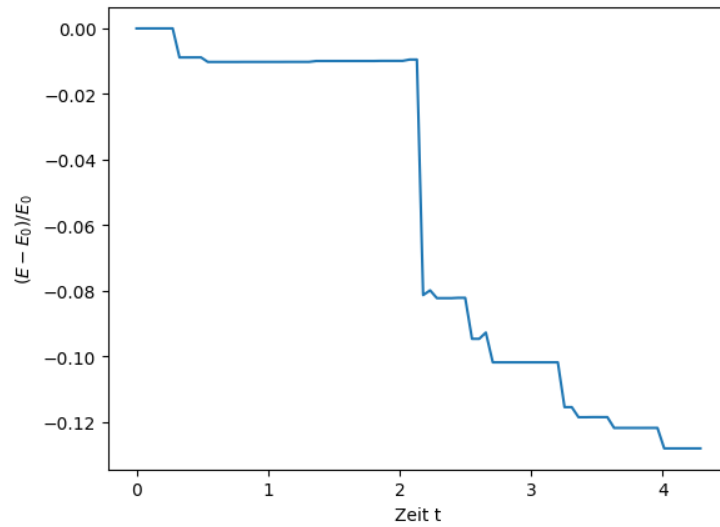


Abbildung 28: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

Für die beiden Hermite Verfahren, konnte ich für 1000 Teilchen nur ein sehr kurzes Zeitintervall wählen, weil schon dafür die Algorithmen mehrere Stunden rechneten. Daher lässt sich aus der Berechnung der Trajektorien von 1000 Teilchen wenig Information gewinnen. Es lässt sich bemerken, dass jedoch das iterierte Hermite Verfahren in Bezug auf Energieerhaltung besser abschneidet.

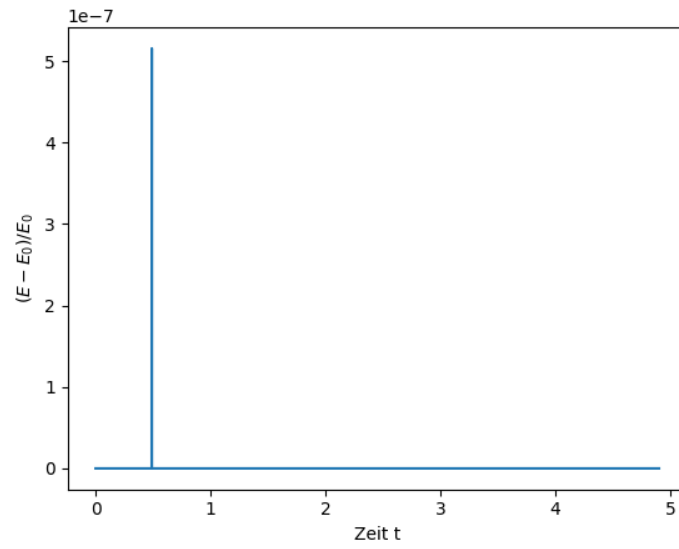


Abbildung 29: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das Hermite Schema

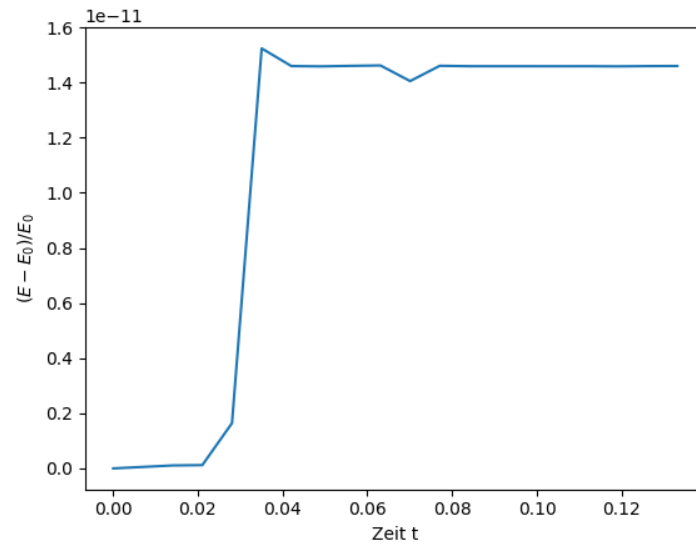


Abbildung 30: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das Hermite Schema

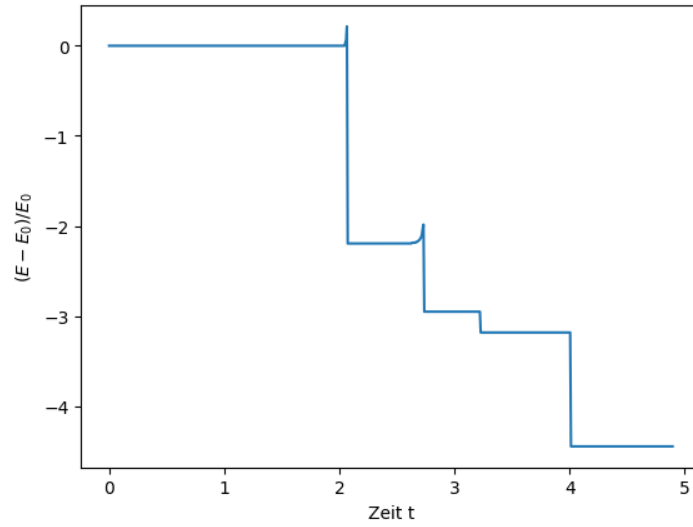


Abbildung 31: Verlauf der Energie für 100 Teilchen ermittelt durch das iterierte Hermite Schema

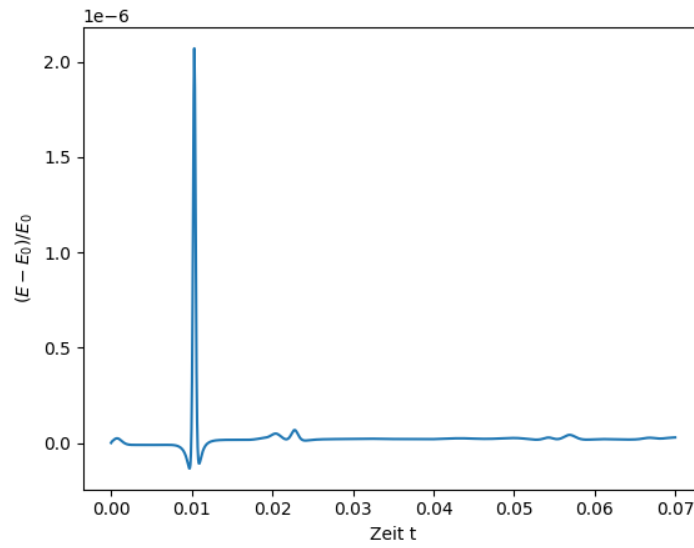


Abbildung 32: Verlauf der Energie für 1000 Teilchen ermittelt durch das iterierte Hermite Schema

Bei den beiden Hermite Integratoren ist ein ähnliches Verhalten wie beim

Euler-Cromer Schema zu beobachten, gerade Passagen unterbrochen von beinahe-Diskontinuitäten. Dies hat, wie gesagt, seine Ursache in der starken Annäherung zwischen den Teilchen.

Fazit

In diesem Versuch konnte festgestellt werden, dass bis auf den Euler Integrator alle anderen Zeitintegratoren die Trajektorien des Zweikörperproblems gut berechnen konnten, während manche Verfahren deutlich mehr Zeit in Anspruch nahmen als andere. Das Euler-Cromer Schema, sowie die beiden Hermite Schemata waren als symplektische Integratoren in der Lage, die Energie gut zu erhalten. Bei der Integration der 100 bzw. 1000 Teilchentrajektorien scheiterten in Bezug auf die Energieerhaltung allerdings alle Zeitintegratoren.