Aufgabe 47:

(a) Es ist nach Aufgabe **(1)**(d),(g)

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\alpha\times\vec{\nabla}\beta\right) \;=\; \vec{\nabla}\beta\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\alpha\right) - \vec{\nabla}\alpha\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\beta\right) \;=\; \vec{0}\,.$$

(b) Es ist nach Aufgabe **(1)**(e),(g)

$$\vec{\nabla}\times\left(\alpha\vec{\nabla}\beta\right) \;=\; (\vec{\nabla}\alpha)\times(\vec{\nabla}\beta) + \alpha\,\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\beta\right) \;=\; (\vec{\nabla}\alpha)\times(\vec{\nabla}\beta) \;=\; \vec{B}\,.$$

Genauso ist

$$\vec{\nabla}\times\left(-\beta\vec{\nabla}\alpha\right) \;=\; -(\vec{\nabla}\beta)\times(\vec{\nabla}\alpha) - \beta\,\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\alpha\right) \;=\; (\vec{\nabla}\alpha)\times(\vec{\nabla}\beta) \;=\; \vec{B}\,.$$

(c) Es ist also (nach Aufgabe **(1)**(a))

$$\vec{\nabla}\chi \;=\; \vec{A}' - \vec{A} \;=\; -\beta\vec{\nabla}\alpha - \alpha\vec{\nabla}\beta \;=\; -\vec{\nabla}(\alpha\beta)\,.$$

Also ist $\chi = -\alpha\beta$ eine explizite Lösung.

Aufgabe 48:

(a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Kante zwischen den Ebenen als z-Achse wählen und das Ganze als ebenes Problem bei $z = 0$ betrachten. Im Fall $\alpha = 90°$ legen wir drei Spiegelladungen, wie im linken Bild in der oberen Reihe von Fig. 1 gezeigt. Dabei spiegeln wir zunächst an einer der beiden Ebenen, dann Ladung und Spiegelladung an der anderen Ebene. Wir erhalten:

$$G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,') \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_2|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_3|}\right)\,,$$

mit $\vec{x}\,' = (x', y', 0)$, $\vec{y}_1 = (-x', y', 0)$, $\vec{y}_2 = (-x', -y', 0)$, $\vec{y}_3 = (x', -y', 0)$. Die Funktion verschwindet auf den beiden Ebenen. Wie immer haben wir:

$$\varphi(\vec{x}\,) \;=\; \int_V d^3x'\, G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,')\,\varrho(\vec{x}\,') - \epsilon_0\oint_{\mathcal{O}(V)} da'\,\varphi(\vec{x}\,')\,\frac{\partial G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,')}{\partial n'}\,.$$

(b) Siehe rechtes Bild in der oberen Reihe von Fig. 1. Wir spiegeln an der ersten Ebene ($\rightarrow$ Ladung 1), dann beide Ladungen an der anderen Ebene ($\rightarrow$ Ladungen 4,5). Danach ist die erste Ebene nicht mehr Äquipotentialfläche, was durch erneute Spiegelung an dieser Ebene korrigiert werden kann ($\rightarrow$ Ladungen 2,3). Wir haben also fünf Spiegelladungen. Damit wird:

$$G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,') \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_2|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_3|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_4|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_5|}\right)\,,$$

mit $\vec{x}\,' = (x', y', 0) = r'(\cos\phi', \sin\phi', 0)$. Für eine Spieglung an einer Ursprungsgeraden, die den Winkel β zur x-Achse hat, hat man allgemein die Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\,.$$

Um die Koordinaten von Ladung “1” zu erhalten, setzen wir $\beta = \alpha = \pi/3$ und erhalten:

$$\vec{y}_1 \;=\; r'\cos(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r'\sin(\phi')\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

(Alternativ können wir einfach $\vec{x}\,'$ um $2(60° - \phi') = \frac{2\pi}{3} - 2\phi'$ weiterdrehen, was auf das äquivalente Ergebnis

$$\vec{y}_1 = r'(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \phi'\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \phi'\right), 0)$$

führt.) Durch Spiegelung an der x-Achse erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\vec{y}_4 &= r'\cos(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r'\sin(\phi')\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_5 &= r'\begin{pmatrix} \cos\phi' \\ -\sin\phi' \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Jetzt spiegeln wir Spiegelladung "4" wieder an der 60°-Achse:

$$\vec{y}_3 = r'\cos(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r'\sin(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Spiegelung an der x-Achse liefert schließlich

$$\vec{y}_2 = r'\cos(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r'\sin(\phi')\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die unteren vier Bilder in Fig. 1 zeigen die Lage der Ladungen genauer in vier verschiedenen Fällen.

(c) Die Methode der Spiegelladungen funktioniert hier genau dann, wenn $\alpha = \pi/n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Man braucht $2n - 1$ Spiegelladungen. Von diesen haben $n - 1$ dieselbe Ladung wie die physikalische Ladung, und n die entgegengesetzte. Damit haben alle Spiegelladungen zusammen die Ladung $-q$. Die Konstruktion erfolgt allgemein in folgender Weise (siehe Fig. 2): Man beschreibt einen Kreis um den Schnittpunkt der Ebenen mit Radius r'. Dann bildet man zusammen mit der physikalischen Ladung ein regelmäßiges n-Eck und setzt Ladungen $+q$ auf die $n - 1$ freien Ecken des n-Ecks. Nun spiegelt man das n-Eck und setzt Ladungen $-q$ auf die n freien Ecken.

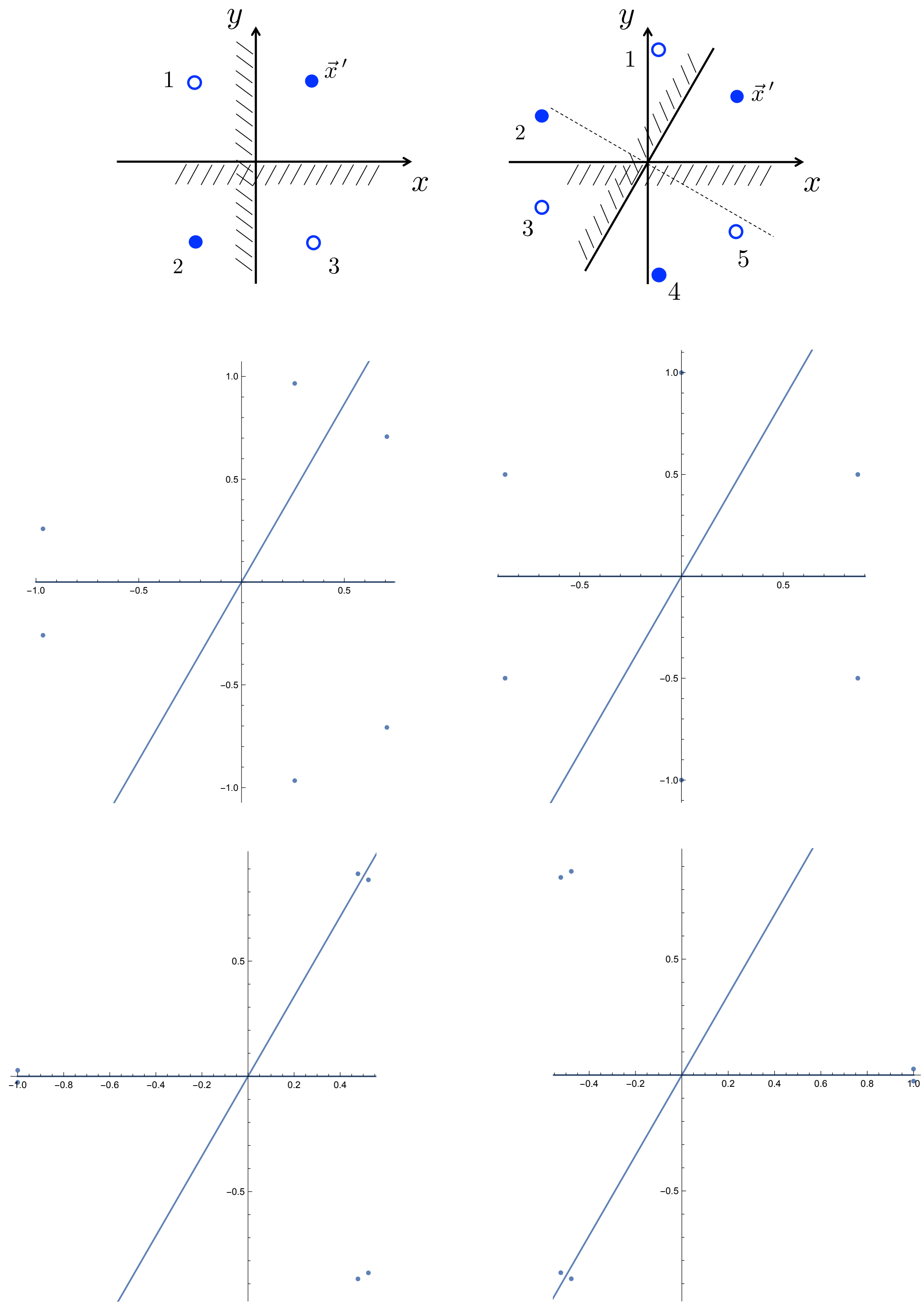

Figure 1: Obere Reihe: $\alpha = 45^\circ$ (links), $\alpha = 60^\circ$ (rechts). Darunter: Ladung und Spiegelladungen bei $\alpha = 60^\circ$ für (von oben links n. unten rechts) $\phi' = \pi/4$, $\phi' = \pi/6$, ϕ' nahe bei $\pi/3 = 60^\circ$, ϕ' nahe bei 0.

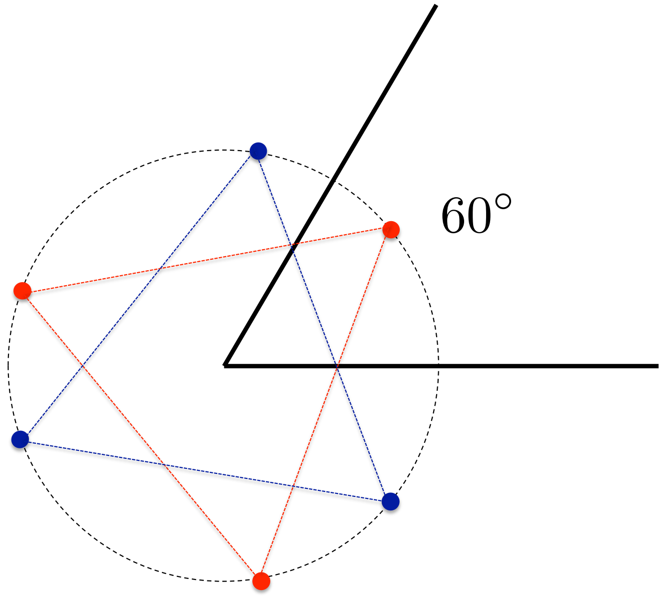

Figure 2: Konstruktion der Spiegelladungen für $\alpha = 60°$.

Aufgabe 49:

(a) Es ist:

$$\varphi(\vec{x},t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\,\frac{\varrho(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\,,$$

sowie

$$\vec{A}(\vec{x},t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{J}\left(\vec{x}\,',t_{\mathrm{R}}=t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\,.$$

Zu beachten ist, dass nur $\vec{A}$ retardiert ist! Denn φ erfüllt eine Poisson-Gleichung (bei festgehaltener Zeit).

(b) Es ist:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}-\frac{1}{\mu_0 c^2}\Delta\frac{\partial}{\partial t}\varphi \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}-\epsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\varrho}{\partial t} \;=\; 0\,.$$

Alternativ: Divergenz auf beiden Seiten der Bewegungsgleichung für $\vec{A}$ nehmen und links $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ verwenden.

(c) Mit der Lösung für φ aus **(a)** wird

$$\vec{J} \;=\; \vec{j}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0\mu_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\int d^3x'\,\frac{\varrho(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \;=\; \vec{j}-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x'\,\frac{\dot{\varrho}(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \;=\; \vec{j}+\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\,.$$

(d) Nach der Helmholtz-Zerlegung für $\vec{j}$ (Gln. (I.320)–(I.324) im Skript) ist:

$$\vec{j}(\vec{x},t) \;=\; -\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}+\vec{\nabla}\times\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{j}(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$$

Randterme können wir weglassen, da unsere Felder im Unendlichen verschwinden sollen. Setzen wir dies in **(c)** rechts ein, so hebt sich der erste Term weg und die Behauptung folgt.

(e) Mit dem Hinweis schreiben wir:

$$\vec{A}(\vec{x},t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\int dt'\,\delta\Big(t'-\Big(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\Big)\Big)\frac{\vec{J}(\vec{x}\,',t')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \int dt'\, \vec{\nabla}\left[\frac{\delta\Big(t'-\Big(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\Big)\Big)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]\cdot\vec{J}\left(\vec{x}\,',t'\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \int dt'\, \vec{\nabla}'\left[\frac{\delta\Big(t'-\Big(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\Big)\Big)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]\cdot\vec{J}\left(\vec{x}\,',t'\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \int dt'\, \left[\frac{\delta\Big(t'-\Big(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\Big)\Big)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}\left(\vec{x}\,',t'\right) \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Hier haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass die Ableitung einer Funktion von $|\vec{x}-\vec{x}\,'|$ nach $\vec{x}$ das Negative von der Ableitung nach $\vec{x}\,'$ ist. Im zweiten Schritt haben wir partiell integriert.

Aufgabe 50:

(a) Die Ladungen befinden sich an den Orten

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{R}{2}+\frac{a}{2}\cos\alpha \\ \frac{a}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{R}{2}-\frac{a}{2}\cos\alpha \\ -\frac{a}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist das Dipolmoment

$$\vec{d} = q\begin{pmatrix} \frac{R}{2}+\frac{a}{2}\cos\alpha \\ \frac{a}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} \frac{R}{2}-\frac{a}{2}\cos\alpha \\ -\frac{a}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = qa\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Im Außenraum ist $\varphi = 0$. Denn die Kugel ist auf Potential Null, und im Unendlichen verschwindet das Potential ebenfalls. Formal können wir auch die bekannte Lösung mittels der Greenschen Funktion verwenden, in der ϱ und das Potential auf der Oberfläche verschwinden.

(c) Wir wissen, dass man für eine Ladung Q im Innenraum eine Spiegelladung im Außenraum benötigt, um das Potential auf der Oberfläche zu Null zu machen. Ist R' der Abstand der Ladung vom Ursprung, so hat die Spiegelladung die Ladung $Q^* = -QR/R'$ und befindet sich im Abstand R^2/R' vom Ursprung (und damit natürlich im Außenraum). In unserem Fall hat die Ladung q den Abstand

$$R_q = \sqrt{\left(\frac{R}{2}+\frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^2\alpha}$$

vom Ursprung, und die Ladung $-q$ den Abstand

$$R_{-q} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}-\frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^2\alpha}\,.$$

Wir brauchen also für die Ladung q eine Spiegelladung

$$q^* = -q\,\frac{R}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}+\frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^2\alpha}}\,, \quad \text{bei} \qquad R^* \equiv \frac{R^2}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}+\frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^2\alpha}}\,,$$

und für die Ladung $-q$ eine Spiegelladung

$$\tilde{q}^* = +q \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{R}{2} - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin^2\alpha}}\,, \quad \text{bei} \qquad \tilde{R}^* \equiv \frac{R^2}{\sqrt{\left(\frac{R}{2} - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin^2\alpha}}\,.$$

Damit die beiden Spiegelladungen wieder einen Dipol bilden, muss gelten $\tilde{q}^* = -q^*$. Wir erhalten also die Bedingung

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2} + \frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{\left(\frac{R}{2} - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin^2\alpha}\,,$$

die auf

$$\cos\alpha = 0$$

führt. Es muss also $\alpha = \pm\pi/2$ gelten. Der Dipol muss parallel oder antiparallel zur y-Achse zeigen.

(d) Für $\alpha = \pi/2$ ist der Dipol senkrecht zur x-Achse. Die Spiegelladungen liegen jeweils auf dem Strahl vom Ursprung durch die Ladungen. Der Winkel dieses Strahls zur x-Achse ist gegeben durch

$$\tan\beta = \frac{a/2}{R/2} = \frac{a}{R}\,.$$

Damit ist der Ortsvektor der Spiegelladung zu $+q$

$$\vec{q}_1^{\,*} = R^* \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Der Ortsvektor der Spiegelladung zu $-q$ ist:

$$\vec{q}_1^{\,*} = R^* \begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Das Potential ist im Innenraum:

$$\varphi(\vec{x}\,) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{q}_1|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{q}_2|} - \frac{2R}{\sqrt{R^2 + a^2}}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{q}_1^{\,*}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{q}_2^{\,*}|}\right)\right]\,.$$