Aufgabe 41:

(a) Es sei $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ der Radius in der (x,y)-Ebene. Dann haben wir

$$\varrho(\vec{x}\,) \;=\; q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-a) \;+\; \frac{Q}{2\pi a}\,\delta(\rho-a)\,\delta(z)\,.$$

Denn es ist

$$\int d^3x\;\varrho(\vec{x}\,) \;=\; q + \int_0^\infty d\rho\,\rho\int_0^{2\pi} d\phi\int_{-\infty}^\infty dz\,\frac{Q}{2\pi a}\,\delta(\rho-a)\,\delta(z) \;=\; q+Q\,.$$

(b) Jedes "Ladungselement" ΔQ auf dem Ring (d.h. $\sum\Delta Q = Q$) erhält eine entsprechende Bildladung $-\Delta Q\,R/a$ im Abstand R^2/a vom Mittelpunkt der Kugel. Jedes solcher Paare ΔQ und $-\Delta Q\,R/a$ macht bereits die ganze Kugeloberfläche zur Äquipotentialfläche auf Potential Null, so dass klar ist, dass insgesamt ein "gespiegelter" Ring mit Gesamtladung

$$-\sum\Delta Q\,\frac{R}{a} \;=\; -Q\,\frac{R}{a}$$

entsteht. Für die Punktladung braucht man noch die Spiegelladung $-q\,R/a$ bei R^2/a auf der z-Achse. Die Ladung der Kugel ist damit $-Q\,R/a - q\,R/a = -(Q+q)R/a$.

(c) Wir müssen zunächst das Potential auf der z-Achse bestimmen. Dies können wir entweder anhand der Ladungsdichte aus echten Ladungen und Spiegelladungen tun, oder aber über die Greensche Funktion des Problems. Diese ist bekanntermaßen gegeben durch

$$G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,') \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} - \frac{R/r'}{|\vec{x}-\frac{R^2}{r'^2}\,\vec{x}\,'|}\right)\,.$$

Wir erhalten (V=Außenraum der Kugel)

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}\,) &= \int_V d^3x'\,G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}\,')\,\varrho(\vec{x}\,') \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} - \frac{R/r'}{|\vec{x}-\frac{R^2}{r'^2}\,\vec{x}\,'|}\right]\left(q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z'-a) \;+\; \frac{Q}{2\pi a}\,\delta(\rho'-a)\,\delta(z')\right)\,.
\end{aligned}$$

Auf der z-Achse wird dies

$$\begin{aligned}
\varphi(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[q\left(\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{(z-R^2/a)^2}}\right)\right.\\
&\quad\left. + \;\frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\left(\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi + z^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{\frac{R^4}{a^2}\cos^2\phi + \frac{R^4}{a^2}\sin^2\phi + z^2}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[q\left(\frac{1}{|z-a|} - \frac{R/a}{z-R^2/a}\right) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{\frac{R^4}{a^2}+z^2}}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Für die Kraft auf die Punktladung müssen wir die Beiträge aller anderen Ladungen betrachten, am

Ort der Punktladung. Ihre z-Komponente ist

$$\begin{aligned}
F_z(0,0,z) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[-q\,\frac{R/a}{z-R^2/a}+Q\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}-\frac{R/a}{\sqrt{\frac{R^4}{a^2}+z^2}}\right)\right]\right\}_{z=a} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[q\,\frac{R/a}{(z-R^2/a)^2}-Q\left(\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}-\frac{zR/a}{(\frac{R^4}{a^2}+z^2)^{3/2}}\right)\right]_{z=a} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[q\,\frac{Ra}{(a^2-R^2)^2}-Q\left(\frac{1}{2^{3/2}a^2}-\frac{Ra^3}{(R^4+a^4)^{3/2}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Dies verschwindet für

$$Q = q\,\frac{\frac{Ra}{(a^2-R^2)^2}}{\frac{1}{2^{3/2}a^2}-\frac{Ra^3}{(R^4+a^4)^{3/2}}}\,.$$

Es gibt dann gar keine Kraft auf q, da die anderen Komponenten der Kraft aus Symmetriegründen verschwinden.

Aufgabe 42:

(a) Wir stellen die Euler-Lagrange Gleichungen für ϕ auf:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0\,.$$

Dies wird

$$\partial_\mu\Big((\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*\Big) - \Big((\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*\Big)ieA_\mu + m^2\phi^* = 0\,,$$

und damit

$$\Box\phi^* - ie\partial_\mu\big(A^\mu\phi^*\big) - (\partial^\mu\phi^*)ieA_\mu + m^2\phi^* - e^2A_\mu A^\mu\phi^* = 0\,,$$

oder

$$\Big(\Box + m^2\Big)\phi^* = \Big(2ieA_\mu\partial^\mu + e^2A_\mu A^\mu + ie(\partial_\mu A^\mu)\Big)\phi^*\,.$$

Für ϕ^* haben wir

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0\,,$$

was genauso auf die Bewegungsgleichung

$$\Big(\Box + m^2\Big)\phi = \Big(-2ieA_\mu\partial^\mu + e^2A_\mu A^\mu - ie(\partial_\mu A^\mu)\Big)\phi$$

führt. Dies folgt natürlich auch aus komplexer Konjugation der Bewegungsgleichung für ϕ^*. Man sieht, dass die Bewegungsgleichungen für ϕ^* und ϕ durch $e \to -e$ auseinander hervorgehen. (Wir haben es hier mit einem geladenen Feld zu tun.)

Schließlich haben wir noch die Bewegungsgleichung für A:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0\,.$$

Die Ableitung des Feldes tritt nur im Feldstärketensor auf. Dessen Ableitung kennen wir gut. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\mu_0}\,\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie\phi^*\Big(\big(\partial^\nu + ieA^\nu\big)\phi\Big) - ie\phi\Big(\big(\partial^\nu - ieA^\nu\big)\phi^*\Big) \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\mu_0}\Big(\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)\Big) - 2e^2\phi^*\phi\, A^\nu + ie\Big(\phi^*\partial^\nu\phi - \phi\,\partial^\nu\phi^*\Big) \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

oder

$$
\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \;=\; \mu_0\left[-2e^2\phi^*\phi\, A^\nu + ie\Big(\phi^*\partial^\nu\phi - \phi\,\partial^\nu\phi^*\Big)\right]\,.
$$

(b) Unter der angegebenen Transformation ist der Feldstärketensor invariant, wie wir aus der Vorlesung wissen. Ebenso natürlich der Massenterm. Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
\big(\partial^\mu + ieA^\mu\big)\phi \quad &\to \quad \big(\partial^\mu + ie(A^\mu - \partial^\mu\chi)\big)(\mathrm{e}^{ie\chi}\phi) \\
&= \quad \mathrm{e}^{ie\chi}\partial^\mu\phi + \mathrm{e}^{ie\chi}\phi\, ie\,\partial^\mu\chi + ie(A^\mu - \partial^\mu\chi)(\mathrm{e}^{ie\chi}\phi) \\
&= \quad \mathrm{e}^{ie\chi}\big(\partial^\mu + ieA^\mu\big)\phi\,.
\end{aligned}
$$

Genauso hat man

$$
\big(\partial_\mu - ieA_\mu\big)\phi^* \to \big(\partial^\mu - ie(A^\mu - \partial^\mu\chi)\big)(\mathrm{e}^{-ie\chi}\phi^*) \;=\; \mathrm{e}^{-ie\chi}\big(\partial_\mu - ieA_\mu\big)\phi^*\,.
$$

Im Produkt der beiden Terme heben sich die Phasenfaktoren weg, womit die Behauptung gezeigt ist.

Aufgabe 43:

Wir berechnen zunächst die Impulsdichten:

$$
\pi^\nu \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{em}}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \;\stackrel{\text{Vorlsg. (I.179)}}{=}\; -\frac{1}{\mu_0}F^{0\nu}\,.
$$

Damit wird

$$
\begin{aligned}
(\partial_0 A_\nu)\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{em}}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \quad &= \quad \frac{1}{\mu_0}(\partial_0 A_\nu)F^{\nu 0} = \frac{1}{\mu_0}(\partial_0 A_i)\underbrace{F^{i0}}_{=E^i/c} \\
&= \quad -\frac{1}{\mu_0 c^2}\vec{E}\cdot\underbrace{\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}_{=-\vec{E}-\vec{\nabla}\varphi} \\
&= \quad \epsilon_0\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right).
\end{aligned}
$$

Mit Vorlesung (I.171) erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \;&=\; (\partial_0 A_\nu)\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{em}}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - \mathcal{L} \\
&=\; \epsilon_0\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\,\vec{E}^{\,2} - \frac{\vec{B}^{\,2}}{\mu_0}\right) - \varrho\,\varphi + \vec{j}\cdot\vec{A}\right] \\
&=\; \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\,\vec{E}^{\,2} + \frac{\vec{B}^{\,2}}{\mu_0}\right) + \varrho\,\varphi - \vec{j}\cdot\vec{A} + \epsilon_0\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi\,,
\end{aligned}
$$

und damit

$$H \;=\; \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\,\vec{E}^{\,2} + \frac{\vec{B}^{\,2}}{\mu_0}\right) + \varrho\,\varphi - \vec{j}\cdot\vec{A} + \epsilon_0\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right].$$

Wir müssen also noch zeigen, dass

$$\int d^3x\,\left[\epsilon_0\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi + \varrho\,\varphi\right] \;=\; 0.$$

Integriere ersten Term partiell und nutze Maxwell-Gleichung:

$$\int d^3x \left[-\,\epsilon_0\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{=\varrho/\epsilon_0}\,\varphi + \varrho\,\varphi\right] \;=\; 0.$$