

SKRIPT ZUR VORLESUNG
KLASSISCHE FELDTHEORIE

Prof. Werner Vogelsang
Universität Tübingen

Sommersemester 2022

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte liegen bei Prof. Dr. Werner Vogelsang, Institut für
Theoretische Physik, Universität Tübingen.

Inhaltsverzeichnis

I Struktur der Elektrodynamik als klassische Feldtheorie	5
I.1 Kurzer Rückblick auf die Physik II	5
I.2 Felder in der Lagrange- und Hamiltonmechanik	7
I.3 Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie	13
I.3.1 Lorentz-Transformationen und Minkowski-Raum	13
I.3.2 Relativistische Notation	17
I.3.3 Lorentz-Vektoren und Tensoren	21
I.4 Kovarianter Lagrange-Formalismus	25
I.5 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	28
I.5.1 Der Feldstärketensor	31
I.5.2 Transformationsverhalten von \vec{E} und \vec{B}	32
I.5.3 Der duale Feldstärketensor	34
I.5.4 Lagrange-Dichte und Bewegungsgleichungen	36
I.5.5 Stromerhaltung und Eichinvarianz	40
I.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen	42
I.6.1 Interne Symmetrien und Noether-Theorem	42
I.6.2 Raum-Zeit Symmetrien	45
I.6.3 Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes	49
I.6.4 Energie- und Impulserhaltungssätze	53
I.7 Eindeutigkeit der Elektrodynamik	57
I.7.1 Integralsätze	57
I.7.2 Greensche Theoreme	58
I.7.3 Helmholtzscher Zerlegungssatz	59
II Elektrostatik und Magnetostatik	65
II.1 Poisson-Gleichung und Greensche Funktion	65
II.2 Randwertprobleme	67
II.2.1 Typen von Randbedingungen	68
II.2.2 Greensche Funktionen für Randwertprobleme	72
II.2.3 Methode der Spiegelladungen	74
II.2.4 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	79
II.2.5 Greensche Funktion in Kugelkoordinaten	85
II.3 Multipolentwicklung	87
II.4 Magnetostatik	91
III Zeitabhängige Felder und Strahlungsphänomene	94
III.1 Das elektromagnetische Feld im Vakuum	94
III.1.1 Bewegungsgleichungen	94
III.1.2 Lösungen der Wellengleichung	95
III.1.3 Elektromagnetische ebene Wellen	99
III.2 Lösung der inhomogenen Wellengleichung	103
III.3 Felder bewegter Ladungen	108
III.4 Multipolstrahlung	113

IV Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie	121
IV.1 Einführung	121
IV.2 Das Äquivalenzprinzip	122
IV.3 Bewegung im Gravitationsfeld	125
IV.3.1 Metrischer Tensor	125
IV.3.2 Bewegungsgleichungen	127
IV.3.3 Zusammenhang zwischen $g_{\mu\nu}$ und $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	128
IV.4 Gravitation und Krümmung der Raumzeit	130
IV.5 Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz	134
IV.5.1 Vektoren und Tensoren	135
IV.5.2 Transformation der $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	137
IV.5.3 Kovariante Ableitung	138
IV.6 Die Einsteinschen Feldgleichungen	140
IV.6.1 Der Krümmungstensor	141
IV.6.2 Der Energie-Impuls Tensor	142
IV.6.3 Die Feldgleichungen	144
IV.6.4 Newtonscher Grenzfall	146
IV.7 Lösungen der Feldgleichungen	149
IV.7.1 Linearisierte Gleichungen	149
IV.7.2 Schwarzschild-Lösung	151
A Grundlagen der Vektoranalysis	153
B Integralrechnung in drei und vier Dimensionen	156

I Struktur der Elektrodynamik als klassische Feldtheorie

Unter einem *Feld* verstehen wir ganz allgemein eine Größe, die an jedem Punkt in Raum und Zeit ein Wert zugeordnet ist. Ein Beispiel aus der Alltagswelt ist die Temperaturverteilung in einem Raum. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit *fundamentalen* Feldern. Dies sind (klassische) Felder, die mit Wechselwirkungen zu tun haben, die wir (zumindest zur Zeit) als grundlegende Wechselwirkungen in der Natur betrachten. Wir kennen sie ebenfalls aus der Alltagswelt: Elektromagnetismus und Gravitation. Die zugehörigen Feldtheorien, die Elektrodynamik und die Allgemeine Relativitätstheorie, sind die Stützpfeiler der klassischen Physik. Sie beschreiben

- die “Bewegungsgleichungen” für die elektromagnetischen Felder bzw. Gravitationsfelder, also die Gleichungen, die angeben, wie die Felder aus “Quellen” entstehen;
- die Wechselwirkungen von Materie (Teilchen) mit den Feldern.

Der Begriff des Felds hielt Einzug in die Physik in der Mitte des 19. Jahrhunderts, vornehmlich durch die Arbeiten Faradays und Maxwells. Zuvor waren das Newtonsche Gravitationsgesetz und das Coulomb-Gesetz bekannt. In diesen werden Kräfte als *Fernwirkungen* beschrieben, die instantan über beliebig große Entfernung wirken. Bereits Faraday hatte allerdings die Intuition, dass die fundamentalen Gesetze des Elektromagnetismus am besten durch Felder zu beschreiben seien, die durch geladene Teilchen erzeugt werden und Raum und Zeit füllen. Jedes Teilchen wechselwirkt *lokal*, d.h. an “seinem Raum-Zeit Punkt”, mit den durch andere Teilchen erzeugten Feldern. In der Elektrodynamik wird dieser Sachverhalt mathematisch durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben, zusammen mit der Lorentz-Kraft. Die Lokalität sieht man z.B. an den Maxwell-Gleichungen direkt: Es treten nur Größen (und ihre ersten Ableitungen) am selben Raum-Zeit Punkt auf. Auf diese Weise entsteht der große konzeptionelle Vorteil von Feldtheorien: Sie tragen der Tatsache Rechnung, dass Wirkungen (Änderungen der Felder) eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, im Einklang mit dem fundamentalen Postulat der speziellen Relativitätstheorie. Die Kraft auf ein Teilchen zu einer Zeit t wird nicht durch die Positionen anderer Teilchen zum *selben* Zeitpunkt bestimmt, sondern *kausal* durch ihre Positionen zu entsprechend früheren Zeiten. Anfänglich hielt man Felder lediglich für hilfreiche mathematische “buchhalterische” Größen zur Beschreibung der beobachteten Phänomene. Bald wurde allerdings klar, dass Felder echte physikalische Objekte sind und zum Beispiel Energie und Impuls tragen können.

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns also mit den klassischen Feldtheorien der Elektrodynamik und der Gravitation befassen. Es sei erwähnt, dass die Verbindung von Quantenmechanik und Feldtheorie zu *Quantenfeldtheorien* führt. In ihnen werden die fundamentalen dynamischen Freiheitsgrade als Operatorfunktionen von Ort und Zeit aufgefasst, den sogenannten *Quantenfeldern*. Quantenfeldtheorien sind heute unsere “Sprache” bei der Beschreibung der Natur auf fundamentalem Niveau, d.h. in der Welt der Elementarteilchen.

I.1 Kurzer Rückblick auf die Physik II

Die Elektrodynamik war historisch die erste echte Feldtheorie in der Physik. Sie geht auf die Arbeiten von James Clerk Maxwell 1861-64 zurück. Sie beschreibt alle elektrischen und magnetischen Phänomene und insbesondere auch die elektromagnetischen Wellen und damit das Licht. Zentrale Größen in der Theorie sind die Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$, die elektrische Feldstärke, und $\vec{B}(\vec{x}, t)$, die magnetische Flussdichte. Die Maxwell-Gleichungen sind ein System von linearen

partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die angeben, wie sich die Felder aus gegebenen Ladungs- und Stromverteilungen berechnen lassen. Sie sind relativistisch kovariant und bildeten den wesentlichen Ausgangspunkt für Einsteins spezielle Relativitätstheorie. Wie in der Physik II gezeigt, lauten die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen in SI-Einheiten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{I.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}. \quad (\text{I.4})$$

In diesen Gleichungen ist $\varrho(\vec{x}, t)$ die Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{x}, t)$ die elektrische Stromdichte. Die auftretenden Ausdrücke aus der Vektoranalysis (Divergenz und Rotation) werden in Anhang A wiederholt. ϵ_0 und μ_0 sind die Dielektrizitätskonstante des Vakuums bzw. die magnetische Feldkonstante; sie haben die Werte

$$\epsilon_0 = 8,854 \dots 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (\text{I.5})$$

Sie sind verknüpft über die Lichtgeschwindigkeit:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{I.6})$$

Die Einheiten der verschiedenen Felder sind $[\vec{E}] = \text{V/m}$, $[\vec{B}] = \text{T} = \text{Vs/m}^2$, sowie $[\varrho] = \text{As/m}^3$ und $[\vec{j}] = \text{A/m}^2$.

Die beiden inhomogenen Gleichungen (I.1), (I.4) zeigen, dass Ladungen Quellen für das elektrische Feld sind, und Ströme (inklusive des Maxwellschen “Verschiebungsstroms” $c^{-2} \partial \vec{E} / \partial t$) ein magnetisches Wirbelfeld erzeugen. Nach der homogenen Gleichung (I.2) erzeugt eine zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte ein elektrisches Wirbelfeld. Dies entspricht dem Faradayschen Induktionsgesetz. Gleichung (I.3) schließlich besagt, dass \vec{B} quellenfrei ist: Es gibt keine magnetischen Monopole.

Außer den Maxwell-Gleichungen kennen wir noch die Lorentz-Kraft auf ein geladenes Teilchen, das sich in den Feldern \vec{E}, \vec{B} befindet:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (\text{I.7})$$

mit der Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens.

Die Maxwell-Gleichungen stellen *acht* partielle Differentialgleichungen für die insgesamt *sechs* Komponenten von \vec{E} und \vec{B} dar. Es stellt sich daher sofort die Frage, ob die Maxwell-Gleichungen unter Umständen überbestimmt sein könnten. Wir werden erst später zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Bereits jetzt aber können wir eine erste Einsicht zu dieser Frage gewinnen. Dazu beobachten wir zunächst, dass es sich aufgrund der Relation (A.11) anbietet, \vec{B} als Rotation eines neuen Feldes $\vec{A}(\vec{x}, t)$ zu schreiben, da dann (I.3) identisch erfüllt ist:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{I.8})$$

Die Frage, ob dies stets möglich ist, hängt mit der Frage nach der möglichen Überbestimmtheit der Maxwell-Gleichungen zusammen und wird erst später untersucht werden. Wir setzen (I.8) in (I.2) ein und erhalten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0. \quad (\text{I.9})$$

Anhand (A.9) sieht man nun, dass diese Gleichung automatisch erfüllt ist, wenn man

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (\text{I.10})$$

setzt, mit einer skalaren Funktion $\varphi(\vec{x}, t)$. Das Minuszeichen auf der rechten Seite ist dabei Konvention. Mit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

sind also die homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt. Man bezeichnet φ als *skalares Potential* und \vec{A} als das *Vektorpotential*. Zusammen stellen die Potentiale zunächst vier unabhängige Felder dar. Man sieht aber rasch, dass die Potentiale nicht eindeutig festgelegt sein können. Denn wegen (A.9) bleibt \vec{B} unverändert, wenn wir zum Vektorpotential den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion addieren:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(\vec{x}, t). \quad (\text{I.12})$$

Auch das elektrische Feld in (I.11) bleibt invariant unter dieser Transformation, falls wir gleichzeitig das skalare Potential ändern zu

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (\text{I.13})$$

Man bezeichnet (I.12) und (I.13) als *Eichtransformationen* und spricht von *Eichfreiheit* in den Potentialen. Wenn wir Gl. (I.11) in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (I.1), (I.4) einsetzen, erhalten wir Bestimmungsgleichungen für die Potentiale. Die Eichfreiheit kann je nach Problem genutzt werden, um diese Gleichungen und die Berechnung der Potentiale zu vereinfachen.

Wir haben hiermit einige der zentralen Ergebnisse aus der Physik II wiederholt. Wir werden auf diese im Laufe der Vorlesung zurückkommen. Zunächst aber werden wir einen neuen Formalismus entwickeln, der uns einen völlig anderen und eleganten Zugang zur Elektrodynamik und zu den Maxwell-Gleichungen liefern wird: Den Lagrange-Formalismus für Felder.

I.2 Felder in der Lagrange- und Hamiltonmechanik

Ein typisches Problem aus der klassischen Punktmechanik ist charakterisiert durch n Freiheitsgrade mit n generalisierten Koordinaten q_ℓ und mit einer *Lagrange-Funktion* der Form

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n m_\ell \dot{q}_\ell^2 - V(q_1, \dots, q_n). \quad (\text{I.14})$$

Die zugehörigen *Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen* lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell} = 0. \quad (\text{I.15})$$

Wie in der Physik III diskutiert, erhält man diese aus dem *Prinzip der stationären Wirkung* (oder *Hamilton-Prinzip*). Dieses besagt, dass

$$\delta S = 0, \quad (\text{I.16})$$

wobei das Funktional $S[q]$ die *Wirkung* des Systems zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 ist,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}). \quad (\text{I.17})$$

Die Idee ist dabei, dass man alle denkbaren Bahnen $q_\ell(t)$ zwischen den Punkten $q_\ell(t_1)$ und $q_\ell(t_2)$ untersucht, die festgehalten werden. Die physikalische Bahn – die in der Natur realisiert ist – ist die Bahn, die in ihrer Umgebung die Wirkung stationär unter kleinen Variationen δq macht. In gewissem Sinne wählt die Natur eine “optimale” Bahn für das System.

Um zur *Hamilton-Funktion* eines Problems zu gelangen, definieren wir zunächst die generalisierten (oder kanonischen) Impulse:

$$p_\ell \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}. \quad (\text{I.18})$$

Die Hamilton-Funktion ist dann

$$H \equiv \sum_\ell p_\ell \dot{q}_\ell - L \equiv H(q_\ell, p_\ell), \quad (\text{I.19})$$

wobei die \dot{q}_ℓ durch die p_ℓ und q_ℓ zu ersetzen sind, wie im letzten Schritt angezeigt. Im Beispiel in Gl. (I.14) finden wir $p_\ell = m_\ell \dot{q}_\ell$ und damit

$$H = \sum_{\ell=1}^n \frac{p_\ell^2}{2m_\ell} + V = T + V. \quad (\text{I.20})$$

Die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* sind

$$\dot{q}_\ell = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}, \quad \dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}. \quad (\text{I.21})$$

Sie sind äquivalent zu den Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen (I.15).

Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel, das uns zu einer Feldtheorie führen wird. Das obere Bild in Abb. 1 zeigt eine Kette aus n identischen Oszillatoren der Masse m , die durch Federn mit Federkonstante k gekoppelt sind. Die Kette sei am linken ($x = 0$) und rechten ($x = D$) Rand fest eingespannt. Die Oszillatoren sollen *transversale* harmonische Schwingungen ausführen, also senkrecht zur x -Achse. Jeder Oszillator wird beschrieben durch seine transversale Auslenkung zur Zeit t . Wir nummerieren die Massen mit $\ell = 1, \dots, n$ und bezeichnen die Auslenkungen jeweils als $q_\ell(t)$. Die Lagrange-Funktion des Systems lautet:

$$L = \frac{1}{2} m \sum_{\ell=1}^n \dot{q}_\ell^2 - \frac{1}{2} k \sum_{\ell=0}^n (q_{\ell+1} - q_\ell)^2, \quad (\text{I.22})$$

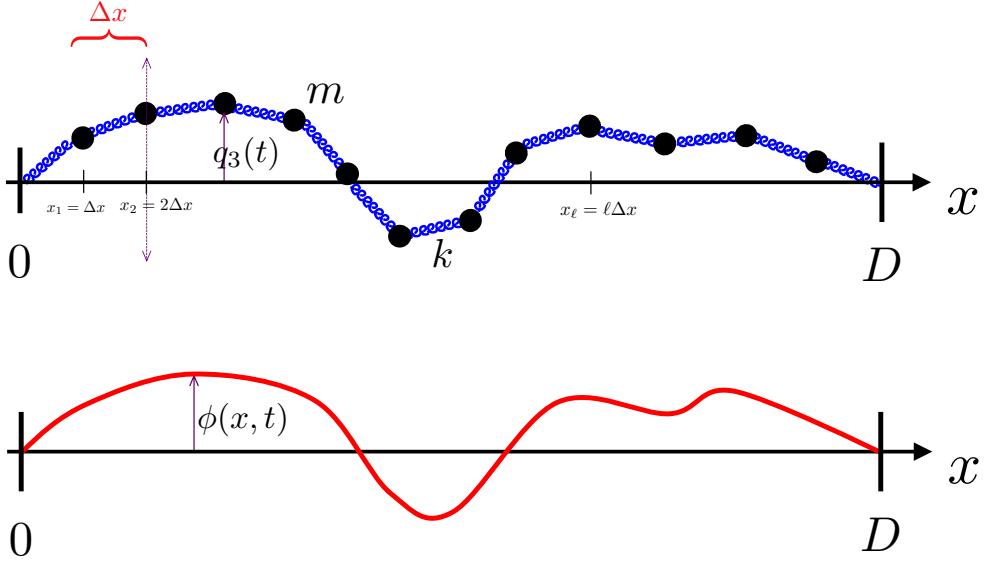


Abb. 1 — Oberes Bild: Kette von gekoppelten Oszillatoren, die transversale Schwingungen ausführen.
Unteres Bild: Schwingende Saite.

wobei wir formal auch Koordinaten für $\ell = 0$ und $\ell = n+1$ eingeführt haben, mit $q_0 = q_{n+1} \equiv 0$. Wir könnten nun leicht die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen (I.15) für das System aufstellen. Statt aber dies zu tun, wollen wir den Kontinuumslimits der Kette untersuchen. Wir wissen, dass uns dies physikalisch zu einer schwingenden Saite führen sollte, die im unteren Bild von Abb. 1 gezeigt wird. Wir stellen uns dazu vor, dass wir immer mehr Oszillatoren zur Kette hinzufügen. Dabei soll die Länge D der Kette konstant bleiben. Dies bedeutet, dass der Abstand Δx zweier Oszillatoren immer geringer werden muss. Da

$$D = (n + 1)\Delta x , \quad (\text{I.23})$$

haben wir also

$$\Delta x = \frac{D}{n + 1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) . \quad (\text{I.24})$$

Die Gesamtmasse der Kette soll ebenfalls fest bleiben. Sie kann geschrieben werden als ϱD , mit der linearen Massendichte (“Masse pro Länge”) ϱ , die damit ebenfalls fest bleibt. Da wir n Massenpunkte haben, ist die Gesamtmasse $n m$, und daher

$$\varrho \equiv \frac{n m}{D} . \quad (\text{I.25})$$

Somit wird

$$m = \frac{\varrho D}{n} \approx \varrho \Delta x \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) . \quad (\text{I.26})$$

Die Massen der Oszillatoren werden also im Kontinuumslimits immer kleiner.

Man kann zeigen, dass die Kette vorgespannt werden muss, damit sie harmonische transversale Schwingungen ausführen kann (siehe Physik 3). Dies bedeutet, dass in der Ruhelage bereits alle Federn gedeckt sind. Die zur Vorspannung notwendige Kraft σ ist gerade $\sigma \equiv k \Delta x$. Im Kontinuumslimits soll σ konstant bleiben. Dies bedeutet, dass die Federkonstante k divergieren muss:

$$k \Delta x \equiv \sigma \stackrel{!}{=} \text{const.} \Rightarrow k = \frac{\sigma}{\Delta x} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) . \quad (\text{I.27})$$

Wir benötigen noch eine letzte ‘‘Zutat’’. Nehmen wir an, wir haben bereits viele Massenpunkte, jeweils im Abstand Δx . Der ℓ -te Massenpunkt befindet sich an der Stelle

$$x = x_\ell = \ell \Delta x . \quad (\text{I.28})$$

Seine Auslenkung wird beschrieben durch die Funktion $q_\ell(t)$. Wir führen eine neue Funktion $\phi(x, t)$ ein, die gerade für jeden Punkt die Auslenkung zur Zeit t angibt. Ist die Zahl der Oszillatoren noch endlich, so haben wir

$$\phi(x_\ell, t) \equiv q_\ell(t) \quad (\ell = 1, \dots, n) . \quad (\text{I.29})$$

Für den Kontinuumslices ist die Einführung von ϕ günstig, da ϕ an jedem Punkt x definiert werden kann, und nicht nur an diskreten Stellen x_ℓ . Man beachte, dass die Position x zu einem Argument von ϕ geworden ist, sodass Ort und Zeit ‘‘gleichberechtigt’’ in ϕ auftreten. Die Funktion $\phi(x, t)$ ist ein Feld.

Wir untersuchen nun den Kontinuumslices der Lagrange-Funktion in Gl. (I.22). Die kinetische Energie schreiben wir mit (I.26) und (I.29) als

$$T = \frac{1}{2} \varrho \Delta x \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial \phi(x_\ell, t)}{\partial t} \right)^2 . \quad (\text{I.30})$$

Im Kontinuumslices $n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0$ wird die rechte Seite gerade die Darstellung eines Integrals über eine Summe von Rechtecksflächen:

$$T \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varrho}{2} \int_0^D dx \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^2 . \quad (\text{I.31})$$

Die Ableitung im Integranden nach der Zeit ist jetzt eine *partielle* Ableitung, da ϕ eine Funktion von zwei Variablen ist. Für die potentielle Energie haben wir mit (I.27) und (I.29):

$$V = \frac{1}{2} \sigma \Delta x \sum_{\ell=0}^n \left(\frac{\phi(x_\ell + \Delta x, t) - \phi(x_\ell, t)}{\Delta x} \right)^2 \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sigma}{2} \int_0^D dx \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right)^2 . \quad (\text{I.32})$$

Insgesamt wird die Lagrange-Funktion also

$$L = T - V = \int_0^D dx \left[\frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] . \quad (\text{I.33})$$

Den Integranden, in (leicht nachlässiger) Kurzform geschrieben als

$$\mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi') \equiv \frac{\varrho}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\sigma}{2} \phi'^2 , \quad (\text{I.34})$$

bezeichnet man als *Lagrange-Dichte* des Systems. Eine Lagrange-Dichte tritt immer auf, wenn wir es mit Feldern zu tun haben. Im Allgemeinen wird die Lagrange-Dichte auch vom Feld ϕ selbst abhängen, so dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')$. Dies wäre zum Beispiel der Fall, wenn wir unsere Kette zusätzlich im Schwerkraftfeld der Erde betrachten würden. Es gibt nun (überabzählbar) unendlich viele Freiheitsgrade, die alle durch das Feld ϕ repräsentiert werden.

Um die Lagrange-Dichte in (I.34) auszunutzen, betrachten wir nun die *Wirkung* S des Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 :

$$\begin{aligned} S[\phi] &\equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^D dx \left[\frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^D dx \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi') , \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

und wenden das Hamilton-Prinzip an. Wir variieren das Feld dazu um die physikalische Lösung:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi + \delta\phi , \\ \dot{\phi} &\rightarrow \dot{\phi} + \delta\dot{\phi} = \dot{\phi} + (\dot{\delta\phi}) , \\ \phi' &\rightarrow \phi' + \delta\phi' = \phi' + (\delta\phi)' . \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

Dabei muss die Variation $\delta\phi$ zu den Zeiten t_1 und t_2 für alle x verschwinden. Ebenso muss sie an den Stellen $x = 0$ und $x = D$ zu allen Zeiten verschwinden, da die Saite fest eingespannt ist. Wir erhalten nun nach dem Hamilton-Prinzip

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^D dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')}{\partial \dot{\phi}} (\delta\dot{\phi}) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')}{\partial \phi'} (\delta\phi)' \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^D dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta\phi - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) \delta\phi \right] \\ &+ \int_0^D dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\phi \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \delta\phi \right) \Big|_0^D . \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Hierbei haben wir den zweiten und dritten Term auf der rechten Seite in der ersten Zeile jeweils partiell integriert (über t bzw. x). Die entstehenden Randterme in der letzten Zeile verschwinden aufgrund der Randbedingungen für $\delta\phi$. Da die Variation $\delta\phi$ ansonsten völlig beliebig ist, folgt, dass der Integrand in (I.37) selbst verschwinden muss, dass also

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 . \quad (\text{I.38})$$

Dies ist die *Euler-Lagrange Gleichung* für unser System, formuliert anhand der Lagrange-Dichte. Für unsere spezielle Dichte in (I.34) erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \varrho \dot{\phi} , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = -\sigma \phi' , \quad (\text{I.39})$$

und damit die Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0 . \quad (\text{I.40})$$

Mit $c^2 \equiv \sigma/\varrho$ wird diese zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} . \quad (\text{I.41})$$

Wie zu erwarten war, ist dies eine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Unser System ist im Kontinuumslimes zu einer schwingenden Saite geworden. Die Lagrange-Dichte enthält offenbar die volle Information über das System.

Unser Beispiel lässt sich leicht auf Schwingungen im zwei- oder dreidimensionalen Fall erweitern. Für Volumenschwingungen (die in alle Richtungen dieselbe ‘‘Federkonstante’’ haben sollen) erhalten wir die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\sigma}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\sigma}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2,\end{aligned}\quad (\text{I.42})$$

mit $\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x, y, z, t)$ (man beachte, dass der letzte Term nicht den Laplace-Operator enthält, sondern das Quadrat des Gradienten). Die Lagrange-Funktion ist hier

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (\text{I.43})$$

Die Euler-Lagrange Gleichung lautet nun:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{I.44})$$

In Kurzform schreibt man dies auch als

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{I.45})$$

Für die Lagrange-Dichte in (I.42) liefert die Euler-Lagrange Gleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \sigma \Delta \phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (\text{I.46})$$

Man den Formalismus leicht auf mehrkomponentige Felder erweitern, zum Beispiel auf ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Die Lagrange-Dichte hängt dann von allen Feldern ab, und man erhält eine separate Bewegungsgleichung für jede Komponente des Feldes.

Wir können auch für Felder zum Hamilton-Formalismus übergehen. In Analogie zu Gln. (I.18), (I.19) definieren wir das *kanonische Impulsfeld*

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}, \quad (\text{I.47})$$

und die *Hamilton-Dichte*

$$\mathcal{H} \equiv \pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (\text{I.48})$$

Diese soll eine Funktion von ϕ , π , und den Ortsableitungen $\vec{\nabla} \phi$ sein, nicht aber von $\partial \phi / \partial t$. Für unser \mathcal{L} in (I.42) erhalten wir

$$\pi = \varrho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (\text{I.49})$$

und

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^2}{2\varrho} + \frac{\sigma}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 . \quad (\text{I.50})$$

Die Hamilton-Funktion, die Energie des Felds, ergibt sich zu

$$H = \int d^3x \mathcal{H} . \quad (\text{I.51})$$

I.3 Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie

26.04.2022

Unser Ziel wird sein, die Gleichungen der Elektrodynamik über den Lagrange-Formalismus herzuleiten. Da die Elektrodynamik eine relativistisch kovariante Theorie ist (sie beschreibt ja unter anderem das Licht!), müssen wir dazu einen kovarianten Lagrange-Formalismus entwickeln. Zuerst wiederholen wir daher einige Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie. Wir beginnen mit Einsteins Postulaten:

- Die Gesetze der Physik haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form. Es sind also keine absoluten Bewegungen experimentell nachweisbar.
- Die Lichtgeschwindigkeit hat in jedem Inertialsystem denselben Wert. Sie ist also eine universelle Konstante, unabhängig vom Bezugssystem.

Das erste Postulat ist an sich nicht neu; es gilt auch in der nichtrelativistischen Mechanik, wo Galilei-Transformationen Inertialsysteme ineinander überführen. Aus dem zweiten Postulat allerdings, zu dem Einstein aus der Annahme fand, dass die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben, folgt unmittelbar, dass die Zeit keinen absoluten Charakter besitzen kann. Stattdessen sind Raum und Zeit verbunden, in dem Sinne, dass sich bei einem Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen sowohl die Zeit als auch die räumlichen Koordinaten über eine gemeinsame lineare Transformation ändern. Dieser Sachverhalt wird mathematisch durch die *Lorentz-Transformationen* ausgedrückt, die zwischen Inertialsystemen vermitteln. Die Unveränderlichkeit der physikalischen Gesetze unter Lorentz-Transformationen ist die zentrale Behauptung der speziellen Relativitätstheorie.

I.3.1 Lorentz-Transformationen und Minkowski-Raum

Ein Punkt in der Raum-Zeit (auch *Ereignis* genannt) ist festgelegt durch seine räumlichen Koordinaten und seine Zeit. In einem gegebenen Inertialsystem IS bezeichnen wir ihn durch den *Vierervektor*

$$(ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z) . \quad (\text{I.52})$$

Um die Notation zu erleichtern, werden wir von nun an die Komponenten des Vierervektors umbenennen in x^μ , mit $\mu = 0, 1, 2, 3$. Wir setzen also

$$(ct, x, y, z) \longrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) . \quad (\text{I.53})$$

Die Position des Index ‘oben’ ist dabei wichtig, wie wir bald sehen werden. Den ganzen Vektor schreiben wir auch als (x^μ) , und häufig auch einfach als¹ x . Es ist also von nun an:

$$x \equiv (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) . \quad (\text{I.54})$$

¹Es sollte keine Verwechslungen der Bezeichnung ‘ x ’ für den Vierervektor mit der Koordinate ‘ x ’ in (I.52) geben, da wir letztere in der Regel nicht mehr verwenden werden.

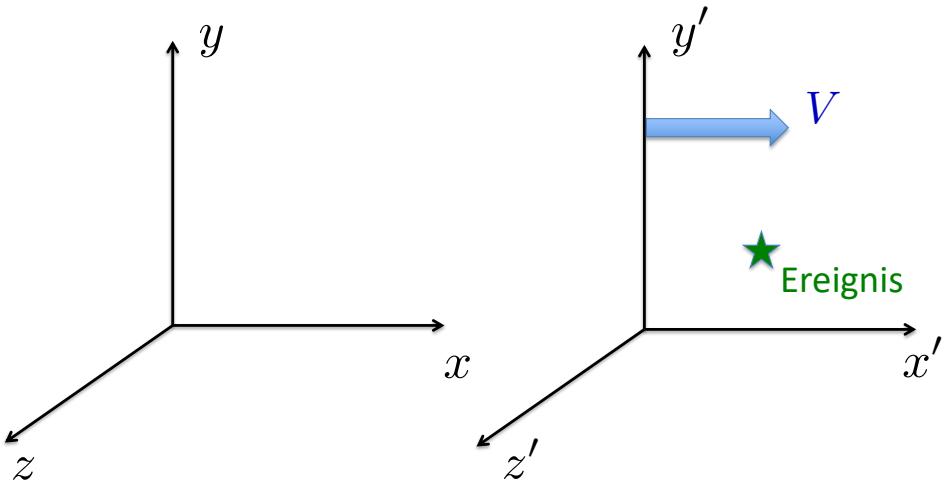


Abb. 2 — Zwei relativ zueinander mit der Geschwindigkeit V bewegte Inertialsysteme (“Lorentz-Boost”), aus denen ein Ereignis beobachtet wird.

Wir betrachten jetzt einen festen Raum-Zeit-Punkt. Haben wir zwei Inertialsysteme IS , IS' , so wird man in beiden jeweils einen Satz von Koordinaten für diesen Punkt angeben, also etwa (x^0, x^1, x^2, x^3) und (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) . Wir nehmen an, dass die beiden Inertialsysteme zu $t = 0$ denselben Ursprung $\vec{x} = 0$ haben, und dass es keine relative Rotation ihrer Koordinatenachsen gibt. Wie nehmen nun weiter an, dass sich IS' aus Sicht von IS mit der (konstanten) Geschwindigkeit V in positiver x^1 -Richtung bewegt (siehe Abb. 2). Der Zusammenhang zwischen den Sätzen von Koordinaten des Ereignisses ist dann gegeben durch den *Lorentz-Boost*

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta \gamma x^1, \\ x'^1 &= -\beta \gamma x^0 + \gamma x^1, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{I.55}$$

mit

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{I.56}$$

Aus der Lorentz-Transformation folgen die in der Physik II diskutierten Phänomene wie Zeitdilatation und Längenkontraktion. Die essentielle Eigenschaft der Lorentz-Transformation sehen wir anhand der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} (x'^0)^2 - (\vec{x}')^2 &= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \\ &= (\gamma x^0 - \beta \gamma x^1)^2 - (-\beta \gamma x^0 + \gamma x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_{=1} ((x^0)^2 - (x^1)^2) - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= (x^0)^2 - \vec{x}^2. \end{aligned} \tag{I.57}$$

Die Tatsache, dass also $(ct)^2 - \vec{x}^2$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist, drückt genau die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit (2. Postulat) aus. Denn ein Lichtblitz, der zu $t = 0$ im

Ursprung $\vec{x} = 0$ emittiert wird und sich nach außen ausbreitet, hat zu späteren Zeiten gerade eine Wellenfront, die durch

$$\frac{\vec{x}^2}{t^2} = c^2 \Leftrightarrow (ct)^2 = \vec{x}^2 \quad (\text{I.58})$$

gegeben ist. Die Invarianz von $(ct)^2 - \vec{x}^2$ bedeutet gerade, dass aus Sicht eines anderen Beobachters die Ausbreitung der Wellenfront ebenfalls mit genau der Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

Man sieht leicht, dass auch für zwei *verschiedene* Raum-Zeit Punkte $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ und $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ die Kombination

$$x \cdot y \equiv x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (\text{I.59})$$

invariant unter Boosts ist. Wir definieren $x \cdot y$ als das *lorentzinvariante Skalarprodukt (Minkowski-Skalarprodukt)* von zwei Vierervektoren. Der Vektorraum der Vierervektoren mit diesem Skalarprodukt wird als *Minkowski-Raum* bezeichnet. Mittels des Skalarprodukts kann man eine Metrik definieren, und damit zwei Raum-Zeit-Punkten einen “Abstand” zuordnen. Analog zur euklidischen Metrik z.B. im \mathbb{R}^3 , bei der man das Abstandsquadrat zweier Punkte als $(\vec{x} - \vec{y})^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$ definiert, verwenden wir hier²

$$(x - y)^2 \equiv (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2. \quad (\text{I.60})$$

Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Metrik kann dieses “pseudo-euklidische Abstandsquadrat” auch negative Werte annehmen. Man bezeichnet den Vektor $x - y$ als

$$\begin{aligned} &\text{zeitartig, falls } (x - y)^2 > 0, \\ &\text{lichtartig, falls } (x - y)^2 = 0, \\ &\text{raumartig, falls } (x - y)^2 < 0. \end{aligned}$$

Man spricht jeweils von zeit-/licht-/raumartigem Abstand von x und y .

Abbildung 3 zeigt einen zweidimensionalen Schnitt durch die Raum-Zeit. Ausgehend von einem Punkt x zeigt der schattierte Bereich die Punkte y , die zeitartigen Abstand zu x haben. Für diese Punkte ist $(x^0 - y^0)^2 > (\vec{x} - \vec{y})^2$; die Punkte sind sich also “räumlich näher als zeitlich”. Dies aber bedeutet, dass es prinzipiell möglich ist, dass ein Signal mit geeigneter Geschwindigkeit $v < c$ den Ort \vec{x} zum Zeitpunkt x^0 verlässt und den Ort \vec{y} zum Zeitpunkt y^0 erreicht. Die Punkte x und y sind also kausal verbunden. Man bezeichnet den oberen schattierten Bereich als *Vorwärtslichtkegel* von x . Punkte, die von x aus in Zukunft erreichbar sind, liegen also im *Vorwärtslichtkegel* (oder auf dessen Rand, s.u.). Punkte aus der Vergangenheit, die kausal mit x verbunden sind, liegen entsprechend im *Rückwärtslichtkegel*. Wichtig ist, dass die Begriffe “Zukunft” und “Vergangenheit” hier eindeutig festgelegt sind, obwohl Lorentz-Transformationen ja Ort und Zeit ändern können. Um dies zu sehen, setzen wir der Einfachheit halber $x = 0$ und wenden beliebige Lorentz-Boosts auf die Raum-Zeit Punkte an. Unter diesen wandert der Punkt y dann längs der oberen gestrichelten Hyperbel in Abb. 3, je nach Wert des Boost-Parameter V . Man sieht, dass es zwar ein System gibt, in dem x und y dieselbe Ortskoordinate haben (nämlich im Scheitel der Kurve), dass aber *stets* die Zeitkoordinate von y größer ist als die von x . y findet also stets später statt, und diese Tatsache kann durch keine Lorentz-Transformation geändert werden.

²Man beachte, dass das so definierte Quadrat des Vierervektors $x - y$ nicht mit der zweiten Komponente des Vektors verwechselt werden darf. Dies aber wird in der Regel aus dem Zusammenhang klar.

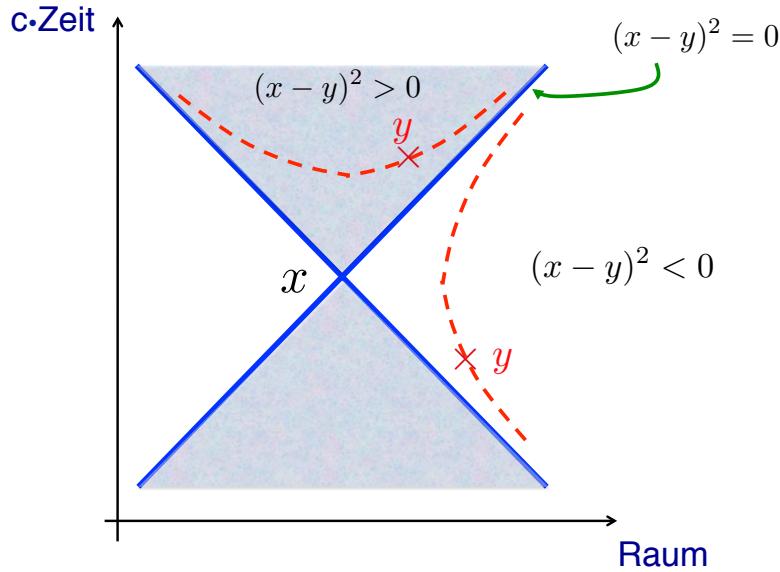


Abb. 3 — Zweidimensionaler Schnitt durch den Minkowski-Raum.

Betrachten wir nun zwei Punkte mit raumartigem Abstand. Hier gibt es kein Signal, dass ausgehend von x den Punkt y erreichen kann, denn dazu wäre eine Geschwindigkeit $v > c$ notwendig. Punkte mit raumartigem Abstand sind also nicht kausal verbunden. Wendet man in diesem Fall Lorentz-Transformationen auf y an, so wandert der Punkt (im Fall $x = 0$) entlang der gestrichelten Linie rechts. Man sieht, dass es hier Inertialsysteme gibt, in denen y später stattfindet, aber auch Systeme, in den y früher geschieht, oder gleichzeitig mit x . Hier gibt es also keine Zeitordnung der Ereignisse. Dies ist aber kein Problem, da die beiden Punkte ohnehin nicht kausal verbunden sind.

Haben schließlich x und y lichtartigen Abstand, so liegt y auf den in der Abbildung gezeigten Diagonalen. Die Punkte sind dann über ein Lichtsignal ($v = c$) kausal miteinander verbunden. Unsere Überlegungen können auf die volle vierdimensionale Raumzeit übertragen werden, auch wenn hier die graphische Darstellung schwierig wird. (Gut vorstellbar ist es noch für zwei Raumdimensionen, wo die Lichtkegel die Form gewöhnlicher Kegel haben. Der Raumbereich für Punkte mit zeitartigem Abstand ist dann relativ zum Bereich der Punkte mit raumartigem Abstand kleiner. Der Punkt y wandert hier unter Lorentz-Transformationen auf (zweischaligen) Hyperboloiden.)

Es gibt weitere Transformationen, die $(ct)^2 - \vec{x}^2$ invariant lassen. Wir haben zunächst die räumlichen *Rotationen*. Es sei zum Beispiel das Inertialsystem IS' um den festen Winkel θ um die x^3 -Achse relativ zu IS gedreht; siehe Abb. 4. Für die jeweiligen Koordinaten eines Ereignisses gilt dann:

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= x^0, \\
 x'^1 &= x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta, \\
 x'^2 &= -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta, \\
 x'^3 &= x^3.
 \end{aligned} \tag{I.61}$$

Für eine allgemeine Rotation hat man eine entsprechende Transformation, bei der sich auch

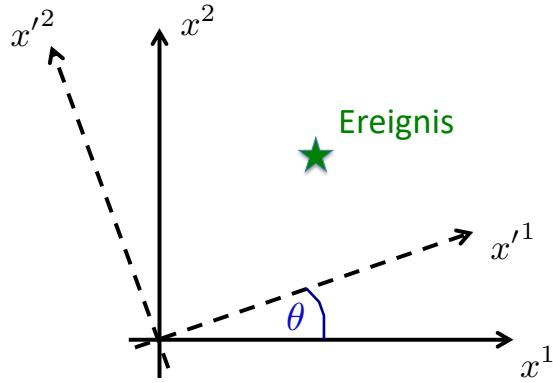


Abb. 4 — Zwei relativ zueinander rotierte Inertialsysteme, aus denen ein Ereignis beobachtet wird. Die x^3 -Achse zeigt aus der Ebene heraus.

die x^3 -Koordinate ändern kann. Die Zeitkoordinate bleibt unter Rotationen natürlich stets unverändert. $(ct)^2 - \vec{x}^2$ ist invariant unter Rotationen, da \vec{x}^2 invariant ist.

Boosts und Rotationen haben die Eigenschaft, dass sie “stetig aus der 1” gewonnen werden können. Dies bedeutet, dass sie im Limes der Boost-Geschwindigkeit $\vec{V} \rightarrow 0$ (bzw. des Drehwinkels $\theta \rightarrow 0$) zur Einheit werden, die die Koordinaten des Punkts unverändert lässt. Man bezeichnet Boosts und Rotationen zusammenfassend als *eigentliche (orthochrone) Lorentz-Transformationen*. Sie bilden eine Gruppe. Jedes Gruppenelement kann durch die Angabe von sechs Parametern angegeben werden, nämlich von drei Boost-Geschwindigkeiten und drei Drehwinkeln. Die Gruppe ist nicht-abelsch, da die Anwendung eines Boosts im Allgemeinen nicht mit der einer Rotation vertauscht. Die Postulate der speziellen Relativitätstheorie beziehen sich auf die eigentlichen Lorentz-Transformationen.

Es gibt weitere, *diskrete*, Transformationen, die ebenfalls $(ct)^2 - \vec{x}^2$ invariant lassen: Die *Raumspiegelung (Parität)*, für die $x'^0 = x^0, \vec{x}' = -\vec{x}$, sowie die *Zeitumkehr* mit $x'^0 = -x^0, \vec{x}' = \vec{x}$. Es hat sich herausgestellt, dass *nicht* alle Naturgesetze unter diesen beiden Transformationen invariant sind. Alle Lorentz-Transformationen zusammen, also die eigentlichen und die diskreten, bilden ebenfalls eine Gruppe, die *Lorentz-Gruppe*. Lässt man zusätzlich noch zu, dass die beiden Inertialsysteme einen verschiedenen Zeitnullpunkt oder Koordinatenursprung besitzen, so gelangt man zu den *inhomogenen Lorentz-Transformationen*, die ebenfalls eine Gruppe bilden, die *Poincaré-Gruppe*. Die Poincaré-Transformationen lassen den “Abstand” $(x - y) \cdot (x - y)$ zweier Vierervektoren invariant, nicht aber das Skalarprodukt $x \cdot y$ selbst.

I.3.2 Relativistische Notation

Wir hatten in (I.54) bereits den Vierervektor

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad (\text{I.62})$$

eingeführt. Wir bezeichnen ihn von nun an als *kontravarianten* Vierervektor und x^μ entsprechend als kontravariante Komponenten. Es stellt sich als sehr nützlich heraus, auch einen sogenannten *kovarianten* Vierervektor einzuführen:

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -\vec{x}) . \quad (\text{I.63})$$

Mit diesem können wir die lorentzinvariante Kombination $x \cdot x = (ct)^2 - \vec{x}^2$ schreiben als

$$(ct)^2 - \vec{x}^2 = \sum_{\mu=0,1,2,3} x^\mu x_\mu \equiv x^\mu x_\mu. \quad (\text{I.64})$$

Treten in einem Ausdruck zwei gleiche Indizes auf, so ist über diese von nun an *immer* zu summieren. Man lässt dann das Summenzeichen in der Regel weg, wie im letzten Schritt in (I.64) geschehen, was als *Einstinsche Summenkonvention* bezeichnet wird. Sinnvolle bzw. nützliche Ausdrücke mit zwei gleichen Indizes haben *immer* einen Index oben und einen unten. So ist $x^\mu x_\mu$ ein vernünftiger Ausdruck, $x^\mu x^\mu$ hingegen hat keine spezielle Bedeutung und sollte in Rechnungen nicht auftreten. Ebenso dürfen *nie* mehr als zwei gleiche Indizes zusammen in einem Produkt auftreten. Man schreibt meistens kurz (siehe Gl. (I.60))

$$x^\mu x_\mu = x^2. \quad (\text{I.65})$$

Werden zwei Indizes in einem Ausdruck summiert, so sagt man auch, dass sie *kontrahiert* werden.

Wir wollen nun die kontravarianten und die kovarianten Komponenten eines Vierervektors direkt miteinander in Verbindung bringen. Dazu schreiben wir:

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{I.66})$$

mit einem zwei-komponentigen Objekt $g_{\mu\nu}$, das man als den *metrischen Tensor* bezeichnet. Dieser „zieht“ also den summierten Index ν von x^ν herunter und wandelt ihn in den anderen auftretenden Index, μ , um. Da sich die kontravarianten von den kovarianten Komponenten nur um ein Vorzeichen bei den räumlichen Komponenten unterscheiden, muss gelten $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Alle anderen Komponenten des metrischen Tensors müssen verschwinden. Für ein Skalarprodukt zweier Vierervektoren haben wir entsprechend

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} x^\nu g_{\nu\mu} y^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = x_\mu y^\mu. \quad (\text{I.67})$$

Hier haben wir in einem Zwischenschritt die Summationsindizes μ und ν ineinander umbenannt, und im nachfolgenden Schritt die Tatsache ausgenutzt, dass $g_{\mu\nu}$ symmetrisch unter Vertauschung seiner Indizes ist. An Gl. (I.67) sehen wir, dass $x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu$, dass es also keine Rolle spielt, wo der Index oben steht, und wo unten. Die Gleichung zeigt auch, dass $g_{\mu\nu}$ das Skalarprodukt zweier Vierervektoren definiert, was den Begriff des *metrischen Tensors* erklärt.

Wir können Gl. (I.66) auch in Matrixform schreiben. Offenbar ist

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.68})$$

Die darin auftretende Matrix bezeichnen wir auch einfach als g :

$$g \equiv (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.69})$$

Wenn wir in (I.66) den Index μ auf beiden Seiten oben schreiben, so erhalten wir

28.04.2022

$$x^\mu = g^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (\text{I.70})$$

Da nun auf beiden Seiten eine kontravariante Komponente steht, muss $g^\mu{}_\nu$ das Kronecker-Symbol sein:

$$g^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu_\nu. \quad (\text{I.71})$$

Man schreibt hier δ^μ_ν statt des gewöhnlichen $\delta_{\mu\nu}$, damit die Indizes ihre Position oben bzw. unten behalten. Als Matrix ist $(g^\mu{}_\nu)$ die 4×4 -Einheitsmatrix.

Weiter muss es auch ein Objekt $g^{\mu\nu}$ mit *oberen* Indizes geben. Wir ändern in (I.70) die Positionen der beiden Indizes ν und erhalten:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (\text{I.72})$$

Hieraus folgt, dass $g^{\mu\nu}$ komponentenweise mit $g_{\mu\nu}$ übereinstimmt. Wir setzen nun $x_\nu = g_{\nu\lambda} x^\lambda$ aus (I.66) ein und erhalten

$$x^\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} x^\lambda, \quad (\text{I.73})$$

woraus

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \quad (\text{I.74})$$

folgt. Da die rechte Seite als Matrix die Einheitsmatrix ist, sieht man an dieser Gleichung, dass $(g^{\mu\nu})$ formal die inverse Matrix zu $(g_{\mu\nu})$ in (I.69) ist. Allerdings gilt ohnehin $g^{-1} = g$ in (I.69).

Wir betrachten nun Lorentz-Transformationen in unserer relativistischen Notation. Wir schreiben die Transformation zwischen den kontravarianten Komponenten in zwei Inertialssystemen als

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{I.75})$$

oder einfach als

$$x' = \Lambda x, \quad (\text{I.76})$$

mit einer Matrix Λ und den Vektoren x, x' . Für den Boost in Gl. (I.55) zum Beispiel lesen wir die Elemente der Matrix ab:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.77})$$

Für eine Rotation um die x^3 -Achse hat man entsprechend nach (I.61)

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.78})$$

Wie wir gesehen hatten, ist es genau die Eigenschaft der Lorentz-Transformationen, dass sie das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen. Was bedeutet dies für die $\Lambda^\mu{}_\nu$? Es ist

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= g_{\alpha\beta} x'^\alpha y'^\beta \\ &\stackrel{(I.75)}{=} g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu x^\mu \Lambda^\beta{}_\nu y^\nu \\ &\stackrel{!}{=} x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \end{aligned} \quad (I.79)$$

Da dies für alle Vierervektoren gelten muss, folgt, dass

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu. \quad (I.80)$$

Dies kann als Matrixgleichung mit den Matrizen aus (I.69) und (I.76) geschrieben werden:

$$g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (I.81)$$

(Um dies zu sehen, erinnere man sich an die Tatsache, dass für die ij -Komponente eines Produkts von drei Matrizen gilt $(ABC)_{ij} = \sum_{mn} A_{im} B_{mn} C_{nj}$. Genau dies tritt in (I.80) auf, abgesehen von der Tatsache, dass wir dort statt A_{im} den Term mit umgedrehten Indizes, $A_{mi} = (A^T)_{im}$, haben, was genau der Grund für das Auftreten der transponierten Matrix Λ^T in (I.81) ist). Im Sinne einer Matrix-Transformation bleibt also die Metrik g unter einer Lorentz-Transformation ungeändert.

Bilden wir nun in (I.81) auf beiden Seiten die Determinante, so finden wir unter Benutzung von $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ und $\det(A^T) = \det(A)$ sofort

$$\det(\Lambda) = \pm 1. \quad (I.82)$$

Die Lorentz-Transformationen sind also invertierbar. Dies ist physikalisch klar, weil man ja zu jedem Boost auch den entgegengesetzten Boost ausführen kann, und ebenso für Rotationen. Die Elemente der *Lorentz-Gruppe* sind genau gegeben durch die Menge von vierdimensionalen regulären Matrizen, die (I.81) erfüllen:

$$\{ \Lambda \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \text{ mit } \Lambda^T g \Lambda = g, \text{ wobei } g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \}. \quad (I.83)$$

In der Mathematik ist diese Gruppe als $O(3, 1)$ bekannt (die Zahlen beziehen sich auf die zeitliche und die drei räumlichen Dimensionen).

Boosts und Rotationen, die eigentlichen Lorentz-Transformationen, haben stets $\det(\Lambda) = +1$. Dies liegt daran, dass man im Limes der Boost-Geschwindigkeit $V \rightarrow 0$ (oder des Drehwinkels $\theta \rightarrow 0$) stetig zur Einheitsmatrix gelangen muss, die aber $\det(\mathbb{1}) = +1$ hat. Für die oben erwähnten diskreten Lorentz-Transformationen der Raumspiegelung und Zeitumkehr ist hingegen $\det(\Lambda) = -1$. Dies folgt unmittelbar aus der Form der entsprechenden Matrizen: Für die Raumspiegelung ist

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (I.84)$$

für die *Zeitumkehr*

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.85})$$

Wir können schließlich noch aus Gl. (I.81) die inverse Lorentz-Transformation berechnen. Multiplizieren wir die Gleichung mit g^{-1} von links, so erhalten wir

$$\mathbb{1} = g^{-1} \Lambda^T g \Lambda. \quad (\text{I.86})$$

Dies aber bedeutet, dass

$$g^{-1} \Lambda^T g = \Lambda^{-1} \quad (\text{I.87})$$

sein muss. Wir schreiben dies wieder komponentenweise mit Indizes, wobei wir die obigen Beobachtungen zur transponierten Matrix beachten:

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = g^{\nu\alpha} \Lambda^\beta{}_\alpha g_{\beta\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu. \quad (\text{I.88})$$

Andererseits erhalten wir aus Gl. (I.75) durch Herunter- bzw. Heraufziehen der Indizes:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu. \quad (\text{I.89})$$

Wir sehen also, dass die kovarianten Komponenten des Vektors nach der inversen Lorentz-Transformation transformieren.

I.3.3 Lorentz-Vektoren und Tensoren

Eine Größe, die in allen Inertialsystemen denselben Wert besitzt (und entsprechend invariant unter allen Lorentz-Transformationen ist), nennt man einen *Lorentz-Skalar*. Das Skalarprodukt $x \cdot y$ in Gl. (I.59) ist ein Beispiel für einen Skalar. Andere Beispiele sind die Ruhemasse eines Teilchens, die elektrische Ladung, und natürlich auch die Lichtgeschwindigkeit.

Es gibt eine Reihe von Größen, die unter Lorentz-Transformationen genau wie der Vierer-Ortsvektor x^μ transformieren, für deren Komponenten also in verschiedenen Inertialsystemen gilt

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (\text{I.90})$$

Wir verallgemeinern daher den Begriff des Vierervektors und bezeichnen von nun an *jede* Größe mit diesem Verhalten als (kontravariante) (Lorentz-)vektor. Dass es solche Größen gibt, ist sehr wichtig, wenn wir physikalische Gesetze korrekt relativistisch formulieren wollen: Physikalische Gesetze enthalten ja nicht nur den Ortsvektor.

Wir geben im Folgenden einige wichtige Beispiele.

(i) *Der Vierer-Gradient*: Wir schreiben mittels (I.88):

$$x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda x'^\lambda = \Lambda_\lambda{}^\nu x'^\lambda. \quad (\text{I.91})$$

Wir leiten nun beide Seiten nach einer beliebigen Komponente x'^μ ab:

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\lambda{}^\nu \underbrace{\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\mu}}_{= \delta_\mu^\lambda} = \Lambda_\mu{}^\nu. \quad (\text{I.92})$$

Dabei haben wir benutzt, dass die Ableitung $\partial x'^\lambda / \partial x'^\mu$ gerade ein Kronecker-Symbol liefert, da sie nur dann nicht verschwindet (und dann Eins ergibt), wenn λ und μ übereinstimmen.

Wir betrachten nun eine Funktion $\varphi(x)$, wobei wir x über (I.91) als Funktion von x' auffassen. Mittels der Kettenregel leiten wir φ nach einer Komponente von x' ab:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \stackrel{(I.92)}{=} \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}. \quad (\text{I.93})$$

Da φ beliebig war, muss allgemein gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (\text{I.94})$$

Nach (I.89) transformiert damit der Vektor $(\partial/\partial x'^\mu)$ (mit Ableitungen nach den *kontravarianten* Komponenten) wie ein *kovarianter Vektor*! Wir definieren also den Vierer-Gradienten durch

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{I.95})$$

Als Vektor ist er nach (I.54)

$$(\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ +\vec{\nabla} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.96})$$

Man beachte, dass er in den räumlichen Komponenten den *positiven* Dreier-Gradienten, $+\vec{\nabla}$ enthält, obwohl wir es hier mit einem kovarianten Vektor zu tun haben. Analog findet man, dass

$$(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad (\text{I.97})$$

wie ein *kontravarianter Vektor* transformiert.

Die Besonderheit bezüglich des Vorzeichens in den räumlichen Komponenten des Gradienten wird zum Beispiel relevant, wenn wir ein Vektorfeld $(A^\mu) = (A^0, \vec{A})$ betrachten und den Ausdruck $\partial_\mu A^\mu$ untersuchen, die *Vierer-Divergenz*. Es ist

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (\text{I.98})$$

Diese Größe ist korrekt lorentzinvariant, also ein Skalar, obwohl ein Pluszeichen zwischen den beiden Termen auf der rechten Seite auftritt, anders als wir es vom Vierer-Skalarprodukt (I.59) gewohnt sind.

Beim Skalarprodukt von ∂^μ mit sich selbst (das ein Differentialoperator ist und auf eine Funktion wirken muss) hat man

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \square, \quad (\text{I.99})$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla}^2$ aus (A.12). Man bezeichnet den Operator \square als *d'Alembert-Operator*. Er ist ein Lorentz-Skalar, da er aus einem Skalarprodukt entstanden ist.

(ii) Die Vierer-Geschwindigkeit: Betrachten wir aus einem Inertialsystem ein Objekt, so werden wir dessen Geschwindigkeitsvektor als $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ angeben, mit dem Ortsintervall $d\vec{x}$, welches das Objekt im Zeitintervall dt zurücklegt, wobei Längen und Zeiten aus unserem System gemessen werden. Man wäre daher versucht,

$$\frac{dx^\mu}{dt}$$

als Vierer-Geschwindigkeitsvektor aufzufassen. Es stellt sich aber heraus, dass dies keine gute Wahl ist in dem Sinne, dass diese Größe ein sehr kompliziertes Verhalten unter Lorentz-Transformationen hat und auch in praktischen Rechnungen nicht auftritt. Der Grund hierfür ist, dass dx^μ/dt kein Vierervektor ist. Denn dx^μ selbst ist bereits ein Vierervektor. Das dt im Nenner ist allerdings keine Invariante, sondern ändert sich unter Lorentz-Boosts (siehe (I.55)). Somit kann dx^μ/dt nicht das Transformationsverhalten eines Vierervektors besitzen.

Dennoch kann man auf konsistente Weise einen Geschwindigkeits-Vierervektor definieren. Dazu erinnern uns zunächst daran, dass die Kombination $c^2 t^2 - \vec{x}^2$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Dies gilt natürlich auch für infinitesimale Orts- und Zeit-Intervalle. Messen wir also in zwei Inertialsystemen IS, IS' die Intervalle $d\vec{x}$ und dt beziehungsweise $d\vec{x}'$ und dt' für die Bewegung eines Teilchens, so ist

$$c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 (dt')^2 - (d\vec{x}')^2. \quad (\text{I.100})$$

Dabei darf sich das Teilchen natürlich durchaus beschleunigt bewegen. Wir bezeichnen das lorentzinvariante infinitesimale Abstandsquadrat mit

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - d\vec{x}^2. \quad (\text{I.101})$$

Wir können hiermit ein invariantes *Zeitintervall* einführen als

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2} = dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}\right), \quad (\text{I.102})$$

mit der im gegebenen System gemessenen Teilchengeschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{x}/dt$. Da diese nie größer als die Lichtgeschwindigkeit werden kann, können wir die Wurzel ziehen. Wir erhalten:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}. \quad (\text{I.103})$$

In einem anderen System hätte man ein anderes dt' sowie ein anderes \vec{v}' , aber dasselbe $d\tau$. Um nun die physikalische Bedeutung des Intervalls $d\tau$ zu erkennen, betrachten wir zu einem gegebenen Zeitpunkt t ein Inertialsystem IS', das relativ zu dem gegebenen System dieselbe Geschwindigkeit $\vec{V} = \vec{v}$ besitzt wie das Teilchen. In diesem Inertialsystem ruht das Teilchen gerade, so dass hier $d\tau = dt'$. Damit ist $d\tau$ gerade das Zeitintervall, dass eine mit dem Teilchen mitbewegte Uhr misst. Man bezeichnet daher die zugehörige Zeit τ als *Eigenzeit*. Man sieht, dass das Eigenzeitintervall immer kleiner ist als das in einem anderen System gemessene Zeitintervall.

Wir definieren nun die *Vierer-Geschwindigkeit* als “zurückgelegte Strecke pro Eigenzeit”:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (\text{I.104})$$

Genau diese Größe stellt sich als die relevante Geschwindigkeit bei der Behandlung mechanischer Probleme in der speziellen Relativitätstheorie heraus. Da im Nenner die Eigenzeit steht, ist u^μ ein

Vierervektor. Ausgedrückt durch die gewöhnliche Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ in einem System haben wir nach (I.103):

$$(u^\mu) = \frac{d(x^\mu)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \equiv \gamma(t) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.105})$$

Wir haben hier den *Lorentz-Faktor* $\gamma(t)$ des Teilchens eingeführt. Er hat dieselbe Formel wie der Parameter γ im Lorentz-Boost in (I.55). Allerdings berechnet er sich dort über die (konstante) Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme, wohingegen er hier die (sich möglicherweise ändernde) Geschwindigkeit des Teilchens enthält. Man kann explizit nachrechnen, dass u^μ wirklich wie ein Vierervektor transformiert. Es sei noch bemerkt, dass

$$u^\mu u_\mu = \frac{1}{1 - \vec{v}^2/c^2} (c^2 - \vec{v}^2) = c^2. \quad (\text{I.106})$$

Der Vektor ist also zeitartig. Für Objekte, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, divergiert der Vorfaktor in (I.105), und die Vierer-Geschwindigkeit kann nicht mehr sinnvoll definiert werden.

(iii) Der Vierer-Impuls: Wir benutzen u^μ , um die Komponenten des *Vierer-Impulses* eines Massenpunkts zu definieren:

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (\text{I.107})$$

mit der Ruhemasse m des Teilchens. Für den Vektor haben wir nach (I.105)

$$(p^\mu) = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.108})$$

Sein lorentzinvariantes Quadrat ist nach (I.106)

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (\text{I.109})$$

Man schreibt den Impulsvektor auch als

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.110})$$

mit der *relativistischen Energie* E . Dass man diese mit der nullten Komponente assoziiert, kann man begründen, indem man die Energie- und Impulserhaltungssätze untersucht. Aus (I.110) haben wir

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^2 \stackrel{(\text{I.109})}{=} m^2 c^2, \quad (\text{I.111})$$

woraus

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (\text{I.112})$$

folgt. Für $|\vec{p}| \ll mc$ wird dieser Ausdruck näherungsweise zu $mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}$, so dass man die gewöhnliche nichtrelativistische Energie erhält, zuzüglich allerdings der *Ruheenergie* mc^2 des Massenpunkts.

Um die Mechanik relativistisch zu formulieren, kann man nun noch weiter gehen und die *Vierer-Beschleunigung* $a^\mu \equiv d^2 x^\mu / d\tau^2$ und die *Vierer-Kraft* $K^\mu = dp^\mu / d\tau$ einführen. Diese werden wir an späterer Stelle betrachten.

03.05.2022

(iv) In der Elektrodynamik treten weitere Vierervektoren auf. Insbesondere bilden das “skalare” Potential φ und das Vektorpotential \vec{A} aus Gln. (I.11) das *Vierer-Potential*:

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.113})$$

Wir kommen hierauf zurück, wenn wir die Lagrange-Dichte für die Elektrodynamik konstruieren.

Das Konzept des Vierervektors kann leicht verallgemeinert werden auf sogenannte *Lorentz-Tensoren*. Auch diese spielen in der Physik und speziell in der Elektrodynamik eine große Rolle. Es sei zum Beispiel $T^{\mu\nu}$ eine Größe, die sich unter einer Lorentz-Transformation wie

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta} \quad (\text{I.114})$$

verhält. Mit anderen Worten, sie transformiert bezüglich *beider* Indizes wie ein Vektor. Dann bezeichnet man $T^{\mu\nu}$ als *Lorentz-Tensor zweiter Stufe*. Ein Lorentz-Vektor ist nach dieser Sprechweise ein Tensor erster Stufe (und ein Lorentz-Skalar, der ja gar nicht transformiert, ein Lorentz-Tensor nullter Stufe). Die Verallgemeinerung zu Tensoren dritter, vierter, usw. Stufe ist klar. Einfache Beispiele für Tensoren zweiter Stufe sind

$$a^\mu b^\nu$$

(wenn a, b beide Vierervektoren sind), oder auch

$$\partial^\mu a^\nu.$$

Aber nicht jeder Tensor muss sich in dieser Weise als Produkt von Vektoren schreiben lassen. Der metrische Tensor selbst ist übrigens wirklich ein Tensor, wie man an (I.80) sieht; er hat in jedem System dieselben Komponenten.

Kontrahiert man einen Index eines Tensors, z.B. in der Form

$$T^{\mu\nu} a_\nu,$$

so entsteht ein Tensor niedrigerer Stufe, hier ein Vektor. $T^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$ und $T^\mu{}_\mu = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ sind entsprechend Skalare.

I.4 Kovarianter Lagrange-Formalismus

Bevor wir daran gehen, die Elektrodynamik über den Lagrange-Formalismus zu gewinnen, müssen wir überlegen, wie wir den Formalismus aus Abschnitt I.2 kovariant schreiben können. Wir müssen uns überhaupt zunächst fragen, was genau unter der Forderung “Die Gesetze der Physik haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form” (Einstiens erstes Postulat) zu verstehen ist. Wir verstehen unter Kovarianz genau die in diesem Postulat geforderte Forminvarianz unter Lorentz-Transformationen: Schreibt ein Beobachter in einem Inertialsystem ein physikalisches Gesetz, so soll eine Beobachterin in einem anderen Inertialsystem das Gesetz in genau *derselben Weise* schreiben können, bezogen auf ihre eigenen gemessenen Koordinaten und physikalischen Größen. Konkret verlangen wir, dass alle physikalischen Gesetze als Gleichungen formuliert sind, in denen *beiden Seiten wie Lorentz-Tensoren derselben Stufe transformieren*.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir zwei Lorentz-Skalare a, b , die also invariant sind. Nehmen wir an, das physikalische Gesetz laute

$$a = b$$

(dies kann durchaus eine komplizierte Gleichung sein; a und b können skalare Felder enthalten, oder auch zum Beispiel den d'Alembert-Operator aus (I.99)). Die Gleichung ist auf jeden Fall kovariant (forminvariant): Trivialerweise gilt sie in einem anderen Bezugssystem ebenfalls, da sich a und b ja unter einer Lorentz-Transformation gar nicht ändern. Interessanter wird es, wenn wir zwei Vierervektoren a, b haben und das physikalische Gesetz

$$a^\mu = b^\mu$$

lautet. Da beide Größen jeweils wie ein Vektor transformieren, gilt in einem anderen System

$$a'^\mu = b'^\mu .$$

Die Gleichung hat damit dieselbe Form wie im ersten System. Genau hierauf kommt es an, wenn wir von relativistischer Kovarianz oder Forminvarianz der Naturgesetze sprechen. Es ist *nicht* etwa gemeint, dass sich Größen generell unter Lorentz-Transformationen nicht ändern dürfen. Wir werden zum Beispiel sehen, dass sich die Felder \vec{E} und \vec{B} der Elektrodynamik unter Lorentz-Transformationen durchaus ändern, dass aber die Maxwell-Gleichungen (aus denen sie hervorgehen) kovariant sind, in dem Sinne, dass jeder Beobachter dieselben Gleichungen lösen würde, in denen dann alle Größen auf sein System bezogen sind. Man kann dann die Resultate für \vec{E}, \vec{B} in den beiden Systemen geeignet ineinander umrechnen.

Um nun relativistisch kovariante Feldtheorien über den Lagrange-Formalismus zu definieren, ist unser Ausgangspunkt die Wirkung S . In Verallgemeinerung von Gl. (I.35) haben wir

$$\begin{aligned} S &= \int dt L = \int dt d^3x \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L} , \end{aligned} \quad (\text{I.115})$$

wieder mit der Lagrange-Dichte \mathcal{L} . Da wir nun drei Raumdimensionen betrachten, haben wir ein vierdimensionales Integral $d^4x = d(ct)d^3x$ über Raum und Zeit. Wir haben keine Integrationsgrenzen geschrieben; in Feldtheorien nimmt man üblicherweise an, dass über die gesamte Raum-Zeit integriert wird. Unsere Annahme ist nun, dass die Wirkung S als grundlegende Größe lorentzinvariant ist. Das ist sicher eine sinnvolle Annahme, wenn die relativistische Kovarianz ein Grundprinzip der Natur ist. Was bedeutet dies für die Lagrange-Dichte? Wir erinnern uns, dass unter einer Lorentz-Transformation $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Das vierdimensionale Volumenelement ändert sich unter der Transformation um die Jacobi-Determinante (man erinnere sich an die Substitutionsregel bei mehrdimensionalen Integralen):

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \xrightarrow{\Lambda} d^4x' = \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x = |\det(\Lambda)| d^4x = d^4x . \quad (\text{I.116})$$

Hier wurde benutzt, dass nach (I.75) gerade $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \Lambda^\mu_\nu$, und nach (I.82) $|\det(\Lambda)| = 1$. Das Integrationsmaß ist also invariant. Damit ist die Annahme, dass S ein Skalar ist, erfüllt, wenn \mathcal{L} selbst ein Skalar ist. Wir betrachten also fortan skalare Lagrange-Dichten. Damit \mathcal{L} stets ein Skalar ist, verlangen wir auch von den Feldern, die in \mathcal{L} auftreten, dass sie ein festes Verhalten unter Lorentz-Transformationen haben. Sie sollen selbst Skalare, Lorentz-Vektoren, oder Lorentz-Tensoren höherer Stufe sein.

Betrachten wir also ein skalares Feld ϕ . Dieses ist also invariant unter Lorentz-Transformationen: Aus zwei Inertialsystemen IS, IS' misst man für das Feld am *selben* Raum-Zeit-Punkt (der in IS die Koordinaten x habe und in IS' die Koordinaten x') denselben Wert:

$$\phi'(x') = \phi(x) . \quad (\text{I.117})$$

Folgende Terme können nun beispielsweise in \mathcal{L} auftreten:

$$\begin{aligned} \phi, \phi^2, \phi^3, \dots \\ (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi), \phi (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi), \dots \end{aligned}$$

Die Terme in der ersten Zeile sind Skalare, da ϕ ein Skalar ist. In der zweiten Zeile haben wir Skalare erzeugt, indem wir jeweils zwei Vektoren miteinander kontrahiert haben. Diese Terme enthalten Produkte von ersten Ableitungen. In Anlehnung an den Lagrange-Formalismus aus der Mechanik, bei dem nur die Koordinaten und ihre ersten Zeitableitungen in der Lagrangefunktion auftreten, werden wir auch hier höhere Ableitungen als die erste in der Regel nicht zulassen.

Es sei nun also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Mit $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ können wir Gl. (I.44) schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0} \right)} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right)} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{I.118})$$

Da nach (I.95) $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$, können wir dies kurz schreiben als

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{I.119})$$

Dies ist die Euler-Lagrange Gleichung für ein skalares Feld. Da \mathcal{L} und ϕ Lorentz-Skalare sind und ∂_μ ein Vektor, ist die Gleichung selbst automatisch relativistisch kovariant.

Wir können dies direkt verallgemeinern auf Felder mit komplizierterem Transformationsverhalten. Betrachten wir zum Beispiel ein Feld A^μ , das ein Vektor ist. Dies bedeutet, dass die Komponenten von A miteinander wie ein Vektor transformieren. Statt (I.117) haben wir also:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x). \quad (\text{I.120})$$

Die Lagrange-Dichte ist eine Funktion von A_μ und $\partial_\mu A_\nu$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$. Mögliche Terme, die in \mathcal{L} auftreten können, sind

$$\begin{aligned} A_\mu A^\mu, (A_\mu A^\mu)^2, \dots \\ \partial_\mu A^\mu, (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu), (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu), \dots \end{aligned}$$

Wir haben nun vier Felder, nämlich die vier Komponenten von A . Für jedes erhalten wir eine Euler-Lagrange Bewegungsgleichung. Wir ersetzen ϕ in (I.119) nacheinander durch jedes der A_ν und erhalten die vier Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{I.121})$$

Die Ausdrücke auf der linken Seite für $\nu = 0, 1, 2, 3$ bilden automatisch die vier Komponenten eines kontravarianten Vierervektors. Damit erhalten wir eine relativistisch kovariante Gleichung für das Feld. Genau auf diese Weise werden wir nun die Elektrodynamik behandeln.

I.5 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wir machen eine Reihe von plausiblen Annahmen, die uns zur korrekten Feldtheorie der Elektrodynamik führen werden:

(i) Die *fundamentalen* Felder der Elektrodynamik sind nicht etwa \vec{E} und \vec{B} , sondern die *Potentiale* φ und \vec{A} , die wir in Abschnitt I.1 eingeführt hatten. Die Lagrange-Dichte ist eine Funktion dieser Potentiale und ihrer ersten Ableitungen.

(ii) φ und \vec{A} bilden zusammen einen Vierervektor, das *Vierer-Potential*:

$$(A^\mu) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.122})$$

Das “skalare Potential” φ ist also in Wirklichkeit gar kein Skalar, sondern transformiert wie die nullte Komponente eines Vierervektors. Unter einer Lorentz-Transformation haben wir

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (\text{I.123})$$

Speziell im Falle eines Boosts in x^1 -Richtung (siehe (I.77)) ist

$$\begin{aligned} \varphi' &= \gamma(\varphi - vA^1), \\ A'^1 &= \gamma\left(A^1 - \frac{v}{c^2}\varphi\right), \\ A'^2 &= A^2, \\ A'^3 &= A^3. \end{aligned} \quad (\text{I.124})$$

Ist zum Beispiel in einem System $\vec{A} = 0$, so gibt es im geboosteten System trotzdem ein nicht-verschwindendes \vec{A}' und damit ein Magnetfeld.

(iii) Die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} folgen aus den Potentialen wie in (I.11):

05.05.2022

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \end{aligned} \quad (\text{I.125})$$

Dies wird sich (wenig überraschend) als die richtige Wahl herausstellen, um am Ende die korrekten Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} zu erhalten. (Sind wir nur an den Bewegungsgleichungen für die Potentiale φ, \vec{A} interessiert, so brauchen wir diese Annahme strenggenommen nicht.)

(iv) Wir verlangen *Eichinvarianz* der Wirkung S . Wir erinnern uns, dass die Potentiale nicht eindeutig festgelegt sind, sondern nach (I.12), (I.13) über eine beliebige skalare Funktion χ abgeändert werden können: Die gemeinsame Transformation

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi - \frac{\partial\chi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{I.126})$$

lässt die Felder \vec{E} und \vec{B} unverändert. Wir können die beiden Transformationen zusammen in kovarianter Weise schreiben. Mit (I.97) und (I.122) lauten sie

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu\chi. \quad (\text{I.127})$$

Dies deutet an, dass die Identifizierung von $\varphi/c, \vec{A}$ als Komponenten eines Vierervektors in der Tat sinnvoll ist. Wir werden sehen, dass die Eichinvarianz von S nicht genau äquivalent ist zur Eichinvarianz von \mathcal{L} . Dennoch wird sie die Zahl und Form der möglichen Terme in \mathcal{L} einschränken.

(v) Wie wir wissen, erzeugen elektrische Ladungen und Ströme die Felder. Wir nehmen an, dass die Ladungsdichte ϱ und die elektrische Stromdichte \vec{j} sich ebenfalls zu einem Vierervektor zusammenfügen, der *Vierer-Stromdichte*:

$$(j^\mu) \equiv \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.128})$$

Um dies plausibel zu machen, gehen wir zunächst von der Tatsache aus, dass die elektrische Ladung Q eines Objekts eine Lorentz-Invariante ist. Denn die gemessene Ladung darf nicht davon abhängen, ob man sich zum Beispiel relativ zu dem Objekt bewegt. Betrachten wir nun einen geladenen Körper, der sich der Einfachheit halber mit konstanter Geschwindigkeit bewegen soll. Wir wählen ein Inertialsystem, in dem der Körper ruht. Seine Ladungsdichte habe hier den Wert ϱ_0 . Nun betrachten wir den Körper aus einem Inertialsystem IS', das sich zum Beispiel mit Geschwindigkeit v in negativer x^1 -Richtung relativ zum Ruhesystem des Körpers bewegen soll. Aus Sicht eines Beobachters in IS' geschehen zwei Dinge:

- Die Ladungsdichte erscheint höher. Dies liegt daran, dass eine Ruhelänge Δx Lorentz-kontrahiert erscheint und als $\Delta x/\gamma$ gemessen wird. Daher wird das Volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$, das der Körper einnimmt, als $\Delta x\Delta y\Delta z/\gamma$ gesehen. Da die Ladungsdichte gerade "Ladung pro Volumen" ist, sieht man aus IS' die Ladungsdichte

$$\varrho = \gamma\varrho_0, \quad (\text{I.129})$$

die größer ist als ϱ_0 .

- Der Körper wird als sich in positive x^1 -Richtung bewegend wahrgenommen. Da er geladen ist, stellt er einen Strom dar, mit Stromdichte

$$\vec{j} = \varrho \vec{v} = \gamma\varrho_0 \vec{v}. \quad (\text{I.130})$$

Insgesamt also haben wir im Ruhesystem die Vierer-Stromdichte

$$(j^\mu) \equiv \begin{pmatrix} c\varrho_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.131})$$

in IS' hingegen

$$(j'^\mu) \equiv \begin{pmatrix} c\gamma\varrho_0 \\ \gamma\varrho_0 v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.132})$$

In der Tat gilt genau (es ist $\beta = v/c$)

$$\begin{pmatrix} c\gamma\varrho_0 \\ \gamma\varrho_0 v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varrho_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.133})$$

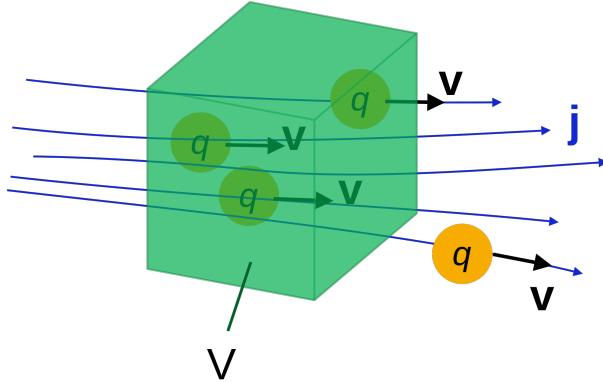


Abb. 5 — Zur Kontinuitätsgleichung (aus: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Continuity_eqn_quantities.svg).

wobei wir in der Boost-Matrix aus (I.77) $v \rightarrow -v$ gesetzt haben, da sich IS' hier ja in negativer x^1 -Richtung bewegt. Die Stromdichte verhält sich also genau, wie man es von einem Vierervektor erwartet. Es ist noch zu erwähnen, dass man den Strom nach (I.132) und (I.105) allgemein schreiben kann als

$$(j^\mu) = \varrho_0 \gamma \left(\begin{array}{c} c \\ \vec{v} \end{array} \right) = \varrho_0 (u^\mu), \quad (\text{I.134})$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit (u^μ) .

Die Vierer-Stromdichte muss die wichtige Relation

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\text{I.135})$$

erfüllen. Dies ist die *Kontinuitätsgleichung* oder auch *Stromerhaltung*. Um ihren physikalischen Inhalt zu verstehen, schreiben wir die Gleichung mittels (I.96) aus:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\varrho) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{I.136})$$

Die Gleichung besagt also, dass eine zeitliche lokale Änderung der Ladungsdichte nur erfolgen kann, wenn es einen Ladungsstrom gibt, der eine Divergenz hat (siehe Abb. 5). Wir integrieren die letzte Gleichung über ein beliebiges Volumen V und erhalten:

$$\int_V d^3x \frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (\text{I.137})$$

Auf der linken Seite ziehen wir das $\partial/\partial t$ aus dem Integral heraus und erhalten die Zeitableitung der gesamten in dem Volumen befindlichen Ladung Q . Auf der rechten Seite wenden wir den Gaußschen Integralsatz an, der besagt, dass das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfelds gleich dem Oberflächenintegral des Vektorfelds selbst über den Rand $\mathcal{O}(V)$ des Volumens ist. Insgesamt haben wir also:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{\mathcal{O}(V)} \vec{j} \cdot d\vec{a}. \quad (\text{I.138})$$

In dieser Form besagt die Kontinuitätsgleichung, dass sich die Gesamtladung in dem Volumen V nur ändern kann, wenn ein ‘Nettostrom’ durch die Oberfläche des Volumens fließt. Die Gleichung drückt damit gerade die lokale Ladungserhaltung aus. Offenbar ist Gl. (I.135) kovariant und gilt in allen Inertialsystemen. Dies ist ein weiteres Argument dafür, j als Vierervektor anzusehen. Wir werden später sehen, dass die Kontinuitätsgleichung eng mit unserer Annahme **(iv)** der Eichinvarianz verbunden ist.

I.5.1 Der Feldstärketensor

Die zentrale Größe, die in der Lagrange-Dichte der Elektrodynamik auftritt, ist der *Feldstärketensor*. Er ist definiert als

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{I.139})$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Er ist ein Lorentz-Tensor zweiter Stufe. Können wir also mit ihm die Elektrodynamik formulieren, so ist diese automatisch eine kovariante Theorie;
- er enthält die erste Ableitung des Vierer-Potentials;
- er ist antisymmetrisch, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$;
- er ist *eichinvariant*. Denn unter der Transformation (I.127) wird

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu\chi) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu\chi) = F^{\mu\nu}. \quad (\text{I.140})$$

Der Feldstärketensor hat damit alle Eigenschaften, die ihn für ein Auftreten in \mathcal{L} qualifizieren. Bevor wir dies weiter verfolgen, wollen wir zunächst untersuchen, wie sich die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ darstellen, wenn wir sie mittels (I.125) durch die Felder \vec{E} und \vec{B} ausdrücken. Diese stehen eigentlich für uns nicht so sehr im Vordergrund, da wir ja die Potentiale als die fundamentalen Größen der Elektrodynamik betrachten wollen. Dennoch werden wir hier einige wichtige Dinge lernen.

Zunächst ist aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ klar, dass alle seine Diagonalelemente verschwinden:

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0. \quad (\text{I.141})$$

Für die Komponenten F^{i0} mit $i = 1, 2, 3$ finden wir mit $A^0 = \varphi/c$:

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &\stackrel{(I.97)}{=} -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{c} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i \\ &\stackrel{(I.125)}{=} \frac{1}{c} E^i. \end{aligned} \quad (\text{I.142})$$

An dieser Stelle sei eine Bemerkung zur Notation gemacht: Wie wir wissen, spielt bei den Komponenten von Vierervektoren die Position des Index eine wichtige Rolle. Bei Größen, die *rein dreidimensional* sind, brauchen wir hingegen keine Unterscheidung zwischen kontravarianten und

kovarianten Komponenten zu treffen. Dies ist speziell der Fall für die Felder \vec{E} und \vec{B} . Wir werden für ihre Komponenten dennoch in der Regel einen oberen Index wählen, da dies konsistent ist mit unserer Notation mit dem positiven Vorzeichen im räumlichen Anteil von kontravarianten Vierervektoren.

Für die rein räumlichen Komponenten F^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) erhalten wir

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i \\ &\stackrel{(I.97)}{=} -\frac{\partial}{\partial x^i} A^j + \frac{\partial}{\partial x^j} A^i \\ &\stackrel{(I.125)}{=} -\varepsilon^{ijk} B^k. \end{aligned} \quad (I.143)$$

Den letzten Schritt sieht man mit $B^k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^k = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} A^j$ (vgl. (A.7)) und der Relation $\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{i'j'k} = \delta^{ii'} \delta^{jj'} - \delta^{ij'} \delta^{ji'}$.

Zusammengenommen können wir die Komponenten des Feldstärketensors wieder in einer 4×4 -Matrix anordnen:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \equiv F. \quad (I.144)$$

Mit $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$ erhalten wir die Matrix für die kovarianten Komponenten:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^x & \frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^z \\ -\frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -\frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -\frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (I.145)$$

Die Terme mit Komponenten des \vec{E} -Felds haben das Vorzeichen gewechselt.

Insgesamt sehen wir also, dass die Felder \vec{E} und \vec{B} nicht etwa jedes für sich die räumlichen Anteile eines Vierervektors sind (was man vielleicht erwartet hätte), sondern *gemeinsam* die Komponenten eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe bilden. Damit ist auch ihr Verhalten unter Lorentz-Transformationen anders als zum Beispiel das des Vektorpotentials \vec{A} . Dies werden wir nun näher untersuchen.

I.5.2 Transformationsverhalten von \vec{E} und \vec{B}

Das Transformationsverhalten des Feldstärketensors ist nach (I.114)

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta. \quad (I.146)$$

Wir können dies als Matrixgleichung schreiben, wenn wir beachten, dass im hinteren Term die Reihenfolge “ $\nu\beta$ ” statt “ $\beta\nu$ ” auftritt, was gerade die transponierte Matrix liefert (vergleiche die Diskussion nach Gl. (I.81)):

$$F' = \Lambda F \Lambda^T, \quad (I.147)$$

wobei F in (I.144) definiert ist, und F' entsprechend. Für einen Boost in x^1 -Richtung haben wir die Matrix Λ aus (I.77) und damit

$$\begin{aligned} F' &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\gamma\left(\frac{1}{c}E^y - \beta B^z\right) & -\gamma\left(\frac{1}{c}E^z + \beta B^y\right) \\ * & 0 & -\gamma\left(B^z - \frac{\beta}{c}E^y\right) & \gamma\left(B^y + \frac{\beta}{c}E^z\right) \\ * & * & 0 & -B^x \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.148})$$

wobei wir die Einträge in der unteren Hälfte der Matrix nicht geschrieben haben; die Matrix ist antisymmetrisch. Im Vergleich mit

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E'^x & -\frac{1}{c}E'^y & -\frac{1}{c}E'^z \\ * & 0 & -B'^z & B'^y \\ * & * & 0 & -B'^x \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.149})$$

können wir nun direkt das Transformationsverhalten der Felder ablesen:

$$\begin{aligned} E'^x &= E^x, & B'^x &= B^x, \\ E'^y &= \gamma(E^y - VB^z), & B'^y &= \gamma\left(B^y + \frac{V}{c^2}E^z\right), \\ E'^z &= \gamma(E^z + VB^y), & B'^z &= \gamma\left(B^z - \frac{V}{c^2}E^y\right), \end{aligned} \quad (\text{I.150})$$

mit der Boost-Geschwindigkeit $V = \beta c$. Wir erkennen zwei wichtige Tatsachen: (1) Die Komponenten der Felder *parallel* zum Boost bleiben invariant, während die zur Boost-Richtung *senkrechten* Komponenten eine Änderung erfahren. Dieses Verhalten steht genau im Gegensatz zu dem eines Vierervektors unter einem Boost, bei dem ja gerade die transversalen Komponenten unverändert bleiben, wie wir zum Beispiel an (I.124) sehen. (2) Außerdem zeigt (I.150), dass die Komponenten der \vec{E} und \vec{B} -Felder unter der Transformation miteinander mischen. Was in einem Inertialsystem als elektrisches Feld erscheint, wird in einem anderen System als Mischung aus elektrischem und magnetischem Feld wahrgenommen. Elektrische und magnetische Felder sind also untrennbar miteinander verbunden und sind verschiedene Manifestationen desselben Phänomens. Genau diese Beobachtung leitete Einstein auf dem Weg von der Elektrodynamik zur Relativitätstheorie.

Wir halten noch fest, dass für einen Boost in eine beliebige Richtung \vec{V} die Felder in folgender Weise transformieren:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) + (1 - \gamma)\frac{\vec{V}}{V} \frac{\vec{V} \cdot \vec{E}}{V}, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c}\right) + (1 - \gamma)\frac{\vec{V}}{V} \frac{\vec{V} \cdot \vec{B}}{V}. \end{aligned} \quad (\text{I.151})$$

Man kann anhand dieser Ausdrücke nachrechnen, dass in der Tat die longitudinalen Komponenten (d.h. die parallel zum Boost) unverändert bleiben.

I.5.3 Der duale Feldstärketensor

10.05.2022

Eine weitere Größe, die für uns interessant sein wird, ist der (ebenfalls eichinvariante) *duale Feldstärketensor*. Er ist definiert als

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (\text{I.152})$$

Dabei ist $F_{\rho\sigma}$ wie zuvor der Feldstärketensor und $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ein Tensor vierter Stufe. Er ist die vierdimensionale Verallgemeinerung des ε -Symbols (oder Levi-Civita-Tensors) aus (A.6):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma = \text{gerade Permutation von } 0123 \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma = \text{ungerade Permutation von } 0123 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{I.153})$$

Es ist also $\varepsilon^{0123} = +1$. Der Tensor ist antisymmetrisch unter Vertauschung zweier beliebiger Indizes. Komponentenweise gilt $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, da beim Herunterziehen der Indizes immer ein Vorzeichen durch die -1 in den räumlichen Komponenten des metrischen Tensors entsteht.

Die Definition in (I.153) wurde unabhängig von der Wahl eines Bezugssystems vorgenommen. Sie kann nur dann nützlich bzw. sinnvoll sein, wenn sie in allen Systemen dieselbe ist, da sonst ein System gegenüber allen anderen ausgezeichnet wäre. Wir untersuchen nun, was dies für das formale Transformationsverhalten des ε -Symbols bedeutet. Dazu betrachten wir

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (\text{I.154})$$

was wir zunächst mit den Komponenten des ε -Symbols in einem anderen System assoziieren würden. Diese Größe ist in der Tat antisymmetrisch unter der Vertauschung von zwei *beliebigen* der Indizes μ, ν, ρ, σ . Zum Beispiel ist

$$\Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} = -\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{I.155})$$

Hier haben wir im ersten Schritt einfach α und β ineinander umbenannt, und im zweiten die Antisymmetrie von $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausgenutzt. Aus der vollständigen Antisymmetrie folgt, dass der Ausdruck in (I.154) selbst wieder proportional zum ε -Tensor sein muss:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{I.156})$$

Um den Koeffizienten a zu bestimmen, setzen wir $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$:

$$a \varepsilon^{0123} = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow a = \det(\Lambda). \quad (\text{I.157})$$

Hier haben wir erkannt, dass die Kombination auf der rechten Seite der ersten Gleichung genau die Determinante der 4×4 Matrix Λ liefert (die 24 nichtverschwindenden Komponenten von $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind jeweils zur Hälfte $+1$ oder -1 , und sie treten genau in der passenden Kombination auf). Da für jede Lorentztransformation $\det(\Lambda) = \pm 1 = \det(\Lambda)^{-1}$, setzen wir

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{I.158})$$

Hiermit ist nach (I.156),(I.157) klar, dass $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in allen Inertialsystemen dieselben Komponenten hat. Für Boosts und Rotationen ist $\det(\Lambda) = 1$, so dass sich $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ für diese wie ein echter Tensor verhält. Für uneigentliche Transformationen (Raumspiegelung und Zeitumkehr) ist $\det(\Lambda) = -1$. Ein Größe dieser Art, die also unter uneigentlichen Transformationen ein zusätzliches Vorzeichen gegenüber dem gewöhnlichen Transformationsverhalten erhält, nennt man *Pseudotensor*.

Das Produkt eines Pseudotensors mit einem Tensor ist notwendigerweise wieder ein Pseudotensor, das Produkt zweier Pseudotensoren ein normaler Tensor. Nach der Definition (I.152) ist der duale Feldstärketensor damit ein Pseudotensor. Da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, kann man $\tilde{F}^{\mu\nu}$ auch schreiben als

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma . \quad (\text{I.159})$$

Anhand dieses Ausdrucks können wir nun leicht die Komponenten von $\tilde{F}^{\mu\nu}$ durch die Feldstärken ausdrücken. Zum Beispiel haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{01} &= \varepsilon^{0123} \partial_2 A_3 + \varepsilon^{0132} \partial_3 A_2 \\ &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = -B^x . \end{aligned} \quad (\text{I.160})$$

Hierbei haben wir beachtet, dass $\varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0123} = -1$ und $A_2 = -A^y$, aber $\partial_2 = +\nabla^y$. Insgesamt erhalten wir als Matrix

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & \frac{1}{c}E^z & -\frac{1}{c}E^y \\ B^y & -\frac{1}{c}E^z & 0 & \frac{1}{c}E^x \\ B^z & \frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^x & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{I.161})$$

Der Vergleich mit dem gewöhnlichen Feldstärketensor (I.144) zeigt, dass man von $F^{\mu\nu}$ zu $\tilde{F}^{\mu\nu}$ gelangt, in dem man einfach die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\vec{E} &\rightarrow \vec{B} , \\ \vec{B} &\rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E} , \end{aligned} \quad (\text{I.162})$$

vornimmt.

Es ist interessant, das Verhalten von $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ unter der Raumspiegelung aus Gl. (I.84) zu untersuchen. Nach (I.147) transformiert der Feldstärketensor nach $F' = \Lambda F \Lambda^T$. Da in diesem speziellen Fall die Matrix Λ identisch ist zur der für den metrischen Tensor in (I.69), muss der transformierte Tensor komponentenweise mit dem Tensor mit kovarianten Komponenten, $F_{\mu\nu}$, übereinstimmen, der in (I.145) zu finden ist:

$$F' = \Lambda F \Lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^x & \frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^z \\ -\frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -\frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -\frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{I.163})$$

Der Vergleich mit dem untransformierten Tensor (I.144) zeigt, dass unter einer Raumspiegelung $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}, \vec{B} \rightarrow \vec{B}$, genau wie es sein sollte, da \vec{E} ein gewöhnlicher Vektor ist, \vec{B} aber durch ein Kreuzprodukt $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ entsteht und daher ein axialer Vektor ist. Wenn wir die Raumspiegelung auf den dualen Feldstärketensor anwenden, so müssen wir beachten, dass dieser ein Pseudotensor ist. Mit $\det(\Lambda) = -1$ haben wir

$$\tilde{F}' = -\Lambda \tilde{F} \Lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & -\frac{1}{c}E^z & \frac{1}{c}E^y \\ B^y & \frac{1}{c}E^z & 0 & -\frac{1}{c}E^x \\ B^z & -\frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.164})$$

Wir erhalten also dasselbe Verhalten der Felder, wie man am Vergleich mit (I.161) sieht. Dies zeigt noch einmal, dass der zusätzliche Faktor $\det(\Lambda)$ für die Transformation von Pseudotensoren wirklich konsistent ist.

I.5.4 Lagrange-Dichte und Bewegungsgleichungen

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes aufzustellen. Welche Terme können auftreten? Ein skalarer Term wäre $F^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$. Allerdings ist

$$F^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = F^\mu_\mu = 0, \quad (\text{I.165})$$

da F als antisymmetrischer Tensor nur verschwindende Diagonalelemente besitzt. Ebenso ist

$$F_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 0, \quad (\text{I.166})$$

als Kombination eines antisymmetrischen mit einem symmetrischen Tensor. Eine skalare und nichtverschwindende Kombination ist

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{I.167})$$

Ebenso ist $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ erlaubt. Es ist allerdings

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta}}_{= -2(g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta} - g_{\rho\beta}g_{\sigma\alpha})} F^{\rho\sigma} F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha} F^{\alpha\beta}) \\ &= -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{I.168})$$

wobei wir im ersten Schritt eine Identität des ε -Tensors benutzt haben (siehe Übungen) und im letzten die Antisymmetrie des Feldstärketensors. Wir sehen also, dass $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ gegenüber $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ keine neue Information enthält. Ein weiterer Term allerdings, der prinzipiell möglich wäre, ist

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (\text{I.169})$$

Auch wenn wir das Vierer-Potential als das fundamentale Feld betrachten, ist es interessant, die beiden Invarianten $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ durch die Felder \vec{E} und \vec{B} auszudrücken. Für die erste Invariante erhalten wir:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}, \quad (\text{I.170})$$

wobei $i, j = 1, 2, 3$ und über doppelt vorkommende Indizes wie immer summiert wird. Nach (I.144), (I.145) und wegen der Antisymmetrie des Tensors ist $F^{i0} = -F^{0i} = -F_{i0} = F_{0i} = E^i/c$, und nach (I.143) haben wir $F^{ij} = F_{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$. Also ist

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{2}{c^2} E^i E^i + \underbrace{\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ij\ell}}_{=2\delta^{k\ell}} B^k B^\ell \\ &= 2 \left(\vec{E}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{B}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{I.171})$$

Die andere invariante Kombination können wir ohne längere Rechnung erhalten. Wir nutzen lediglich aus, das der duale Feldstärketensor aus $F^{\mu\nu}$ durch die Ersetzungen (I.162) hervorgeht. Wir brauchen also nur in der ersten Zeile von (I.171) eins der E^i durch $B^i c$ zu ersetzen und B^ℓ durch $-E^\ell/c$. Dies liefert

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{2}{c} E^i B^i - \frac{2}{c} B^k E^k = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (\text{I.172})$$

Dieser Term ist ein *Pseudoskalar*: Er wechselt unter einer Raumspiegelung sein Vorzeichen, da \vec{E} das Vorzeichen wechselt, \vec{B} jedoch nicht. Dies passt zur selben Eigenschaft der Tensoren $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ in (I.163), (I.164). Es stellt sich heraus, dass es in der Elektrodynamik keine pseudoskalaren Terme gibt – man sagt auch, die Elektrodynamik ist *paritätsinvariant*. (Dies ist im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung, in der die Parität verletzt ist.) Der Term $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ tritt in der Lagrange-Dichte der Elektrodynamik nicht auf.

Am Ende ist die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (\text{I.173})$$

mit der magnetischen Feldkonstanten μ_0 aus Gl. (I.5). \mathcal{L}_{em} ist eine Funktion der Felder und ihrer ersten Ableitungen, also von A_ν und $\partial_\mu A_\nu$. Die Gleichung ist manifest kovariant – folgt aus ihr in der Tat die gesamte Elektrodynamik, so ist die Elektrodynamik eine Lorentz-kovariante Theorie.

Die Kopplung des Vektorpotentials an den Strom erfolgt über den letzten Term. Wenn wir die Vierer-Stromdichte aus (I.128) einsetzen, erhalten wir für ihn:

$$-j^\mu A_\mu = -\varrho \varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (\text{I.174})$$

Der Term $-\varrho \varphi$ trägt zur Lagrange-Funktion als $-\int d^3x \varrho \varphi$ bei. Das Negative dieses Terms ist aus der Elektrostatik als die potentielle Energie einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ in einem externen Potential $\varphi(\vec{x})$. Wir sehen daran, dass $j^\mu A_\mu$ die kovariante Verallgemeinerung des Terms $\varrho \varphi$ ist.

Wir leiten nun die Bewegungsgleichungen aus \mathcal{L}_{em} in Gl. (I.173) her. Wir wenden (I.121) an:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (\text{I.175})$$

Es fällt auf, dass Ableitungsterme ($\partial_\mu A_\nu$) nur im ersten Teil der Lagragedichte in (I.173) auftreten, und Terme ohne Ableitungen (A_ν) nur im zweiten. Wir berechnen zuerst $\partial \mathcal{L}_{\text{em}} / \partial (\partial_\mu A_\nu)$. Damit kein Index mehr als doppelt auftritt, schreiben wir $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ (alle Indizes hier werden ja summiert). Damit wir beim Ableiten keinen Term vergessen, ziehen wir alle Indizes nach unten:

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}. \quad (\text{I.176})$$

Nach der Produktregel haben wir nun:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial(F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \\
 &= \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\gamma\delta} \\
 &= 2 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta}. \tag{I.177}
 \end{aligned}$$

Wegen $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ kann die Ableitung nach der Variablen $\partial_\mu A_\nu$ nur dann einen Beitrag liefern, wenn entweder $\mu = \alpha, \nu = \beta$ oder $\mu = \beta, \nu = \alpha$. Es ist also

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu. \tag{I.178}$$

Damit wird

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = 4F^{\mu\nu}. \tag{I.179}$$

Für die andere benötigte Ableitung haben wir einfach $\partial\mathcal{L}_{\text{em}}/\partial A_\nu = -j^\nu$. Insgesamt liefern die Euler-Lagrange Gleichungen damit

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0, \tag{I.180}$$

also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \tag{I.181}$$

Wir können dies auch als Gleichung für das Vierer-Potential schreiben:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu \tag{I.182}$$

$$\Leftrightarrow \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu, \tag{I.183}$$

mit dem d'Alembert-Operator $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ aus (I.99).

Die Gleichungen (I.181) bzw. (I.182) stellen jeweils vier Bewegungsgleichungen für die vier Komponenten von A dar. Falls wir wirklich einen konsistenten Formalismus für die Elektrodynamik entworfen haben, dann sollten uns diese Gleichungen auf die Maxwell-Gleichungen führen. Wir setzen also in (I.181) die Komponenten des Feldstärketensors ein. Für $\nu = 0$ haben wir

$$\partial_\mu F^{\mu 0} \stackrel{(F^{00}=0)}{=} \partial_i F^{i0} \stackrel{(I.142)}{=} \frac{1}{c} \partial_i E^i = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{!}{=} \mu_0 c \varrho, \tag{I.184}$$

was mit $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ äquivalent ist zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}. \tag{I.185}$$

Dies ist die erste Maxwell-Gleichung (I.1)! Für $\nu = \ell \equiv 1, 2, 3$ finden wir aus (I.181):

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\ell} &= \partial_0 \underbrace{F^{0\ell}}_{= -\frac{1}{c} E^\ell} + \partial_i \underbrace{F^{i\ell}}_{= -\epsilon^{i\ell k} B^k} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^\ell}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^\ell \stackrel{!}{=} \mu_0 j^\ell, \tag{I.186}
 \end{aligned}$$

12.05.2022

wobei wir den Ausdruck (A.7) verwendet haben, um die Rotation von \vec{B} zu schreiben. Das Ergebnis ist äquivalent zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad (\text{I.187})$$

der vierten Maxwell-Gleichung (I.4). Wir erhalten also aus unserem Lagrange-Formalismus über die Bewegungsgleichungen (I.181) direkt die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen.

Dies wirft unmittelbar die Frage auf, wie wir zu den *homogenen* Maxwell-Gleichungen gelangen. Die Antwort ist, dass diese immer schon in unseren Ausdrücken enthalten waren, sobald wir uns entschlossen hatten, alle Gleichungen über das Vierer-Potential zu formulieren. Wir erinnern uns, dass wir in (I.11) gesehen hatten, dass die homogenen Gleichungen *automatisch* erfüllt sind, wenn wir über (I.11) Potentiale einführen. Daher muss dies auch in unserem Formalismus der Fall sein. Der Feldstärketensor erfüllt eine zusätzliche Relation, die die homogenen Maxwell-Gleichungen liefert. Diese Relation ist die *Jacobi-Identität*

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (\text{I.188})$$

Man beweist sie durch einfaches Einsetzen:

$$\partial^\lambda(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu(\partial^\nu A^\lambda - \partial^\lambda A^\nu) + \partial^\nu(\partial^\lambda A^\mu - \partial^\mu A^\lambda) = 0, \quad (\text{I.189})$$

da sich immer Terme paarweise wegheben. Man sieht leicht, dass die Jacobi-Identität (I.188) äquivalent ist zu (siehe Übungen)

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{I.190})$$

mit dem dualen Feldstärketensor aus (I.152). Wir drücken in dieser Relation den dualen Feldstärketensor durch die Komponenten der \vec{E} und \vec{B} -Felder aus. Hierzu ist keine Rechnung notwendig: Nach unserer Ersetzungsregel (I.162) brauchen wir nur in den entsprechenden Ergebnissen für $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ die Ersetzungen $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E}$ vorzunehmen. Zusätzlich müssen wir einfach den Strom j^ν Null setzen, da ja die rechte Seite von (I.190) verschwindet. Mit diesen Überlegungen erhalten wir aus (I.185) sofort

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \rightarrow c\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{I.191})$$

also die dritte Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{I.192})$$

Genauso erhalten wir die letzte noch fehlende Gleichung aus (I.187):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \rightarrow -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.193})$$

Zusammenfassend können wir also alle vier Maxwell-Gleichungen schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.194})$$

Die Tatsache, dass dabei F und \tilde{F} durch die einfache Ersetzung (I.162) verknüpft sind, jedoch nur die erste Gleichung inhomogen ist, deutet darauf hin, dass die Stromdichte j eine Symmetrie der Elektrodynamik bricht. Im Vakuum, wo $(j^\nu) = 0$, manifestiert sich die vollständige Symmetrie:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \end{cases} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.195})$$

I.5.5 Stromerhaltung und Eichinvarianz

Wir hatten in Gl. (I.135) physikalisch argumentiert, dass die Ladungsstromdichte erhalten sein muss, $\partial_\mu j^\mu = 0$. In der Tat respektieren die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Stromerhaltung. Denn multiplizieren wir Gl. (I.181) mit ∂_ν , so finden wir

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu. \quad (\text{I.196})$$

Dabei gilt die erste Gleichheit, da die symmetrische Kombination $\partial_\nu \partial_\mu$ kontrahiert mit dem antisymmetrischen $F^{\mu\nu}$ verschwindet. $F^{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch, damit es eichinvariant ist; der Grund für $\partial_\nu j^\nu = 0$ muss also mit der Eichinvarianz zu tun haben. Allerdings fällt auf, dass die Lagrange-Dichte (I.173) selbst gar nicht eichinvariant ist, da der Term $\sim j^\mu A_\mu$ nicht eichinvariant ist. Wie passt dies zusammen?

Entscheidend ist, dass die *Wirkung* eichinvariant ist, wenn $\partial_\nu j^\nu = 0$, und umgekehrt. Um dies zu sehen, betrachten wir den betreffenden Term $-\frac{1}{c} \int d^4x j^\mu A_\mu$ in der Wirkung. Unter einer Eichtransformation (I.127) haben wir

$$-\frac{1}{c} \int d^4x j^\mu A_\mu \longrightarrow -\frac{1}{c} \int d^4x j^\mu (A_\mu - \partial_\mu \chi). \quad (\text{I.197})$$

Wir untersuchen den letzten Term (multipliziert mit c) näher und schreiben ihn als

$$\int d^4x j^\mu \partial_\mu \chi = \int d^4x \partial_\mu (j^\mu \chi) - \int d^4x (\partial_\mu j^\mu) \chi. \quad (\text{I.198})$$

Hier haben wir einfach die Produktregel “rückwärts” angewendet, summiert über μ . Der erste Term auf der rechten Seite ist ein reiner Randterm und verschwindet, wenn wir annehmen, dass alle Felder und Ströme auf der Oberfläche des Integrationsvolumens verschwinden. (In jedem Fall trägt er nicht zu den Bewegungsgleichungen bei, da beim Prinzip der kleinsten Wirkung die Felder am Rand nicht variiert werden.) Wir erhalten also

$$\int d^4x j^\mu (\partial_\mu \chi) = - \int d^4x (\partial_\mu j^\mu) \chi. \quad (\text{I.199})$$

Dies verschwindet genau dann für alle χ , wenn $\partial_\mu j^\mu = 0$. Wir sehen also, dass die Wirkung genau dann eichinvariant ist, wenn der Strom erhalten ist.

Die Eichfreiheit ist generell sehr wichtig, um die Lösung von Problemen in der Elektrodynamik zu vereinfachen. Wir diskutieren hier zwei wichtige Eichungen:

(i) *Lorenz-Eichung.* Wir fordern die kovariante Eichbedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{I.200})$$

Angewendet auf die Bewegungsgleichung (I.182) für das Viererpotential erhalten wir

$$\square A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad (\text{I.201})$$

also eine inhomogene Wellengleichung für jede Komponente von A . Kann man die Lorenz-Eichung überhaupt wählen? Nehmen wir an, wir haben ein Potential, das die Eichbedingung (I.200) *nicht* erfüllt; $\partial_\mu A^\mu = a(x) \neq 0$. Unter einer Eichtransformation haben wir

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \Rightarrow \partial_\mu \tilde{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu - \square \chi. \quad (\text{I.202})$$

Verlangen wir also $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$, so müssen wir die Gleichung

$$\square \chi = a(x) \quad (\text{I.203})$$

lösen. Dies ist ebenfalls eine inhomogene Wellengleichung, die unter geeigneten Randbedingungen (und entsprechenden Stetigkeitsforderungen an $a(x)$) lösbar ist, wie wir später diskutieren werden. Es ist zu erwähnen, dass die Lösung von (I.203) die Eichung nicht vollständig festlegt: Ist man bereits in der Lorenz-Eichung, so kann man immer noch das Potential um einen Term $\partial^\mu \tilde{\chi}$ ändern, sofern $\tilde{\chi}$ Lösung der Wellengleichung $\square \tilde{\chi} = 0$ ist. Dies nämlich ändert nichts an der Tatsache, dass das Potential die Lorenz-Bedingung (I.200) erfüllt. Man nennt dies *zusätzliche Eichfreiheit*.

(ii) *Coulomb-Eichung.* Auch wenn wir einen manifest kovarianten Formalismus haben, ist es manchmal nützlich, eine *nicht-kovariante* Eichung zu wählen. Die Rechnung wird dann zwischenzeitlich nicht-kovariante Terme aufweisen; das Endergebnis aber muss korrekt kovariant herauskommen. Die wichtigste nicht-kovariante Eichung ist die *Coulomb-Eichung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (\text{I.204})$$

Für die Bewegungsgleichung (I.182) erhalten wir hier

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_0 A^0) = \mu_0 j^\nu. \quad (\text{I.205})$$

Die 0te Komponente φ/c und die Vektorkomponenten \vec{A} erfüllen hier Gleichungen verschiedenen Typs – hierin manifestiert sich die Nicht-Kovarianz. Für $\nu = 0$ heben sich die Terme mit Zeitableitungen in (I.205) gerade heraus, und wir erhalten

$$\Delta \varphi(\vec{x}, t) = -\frac{\varrho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}, \quad (\text{I.206})$$

wobei wir wieder $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ benutzt haben. Dies ist die *Poisson-Gleichung*. Sie ist aus der Elektrostatik bekannt; es ist aber zu betonen, dass die Gleichung in der Coulomb-Eichung allgemein gilt, also auch wenn die Ladungsdichte zeitabhängig ist. Ist man im Vakuum mit $\varrho = 0$, so kann man $\varphi = 0$ wählen. Die Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $\varphi = 0$ heißt auch *Strahlungseichung*, da sie bei der Behandlung von elektromagnetischen Wellen verwendet werden kann. Für die räumlichen Komponenten erhalten wir

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left(\vec{j} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi \right). \end{aligned} \quad (\text{I.207})$$

Dies ist wieder eine inhomogene Wellengleichung. Hat man zunächst φ aus (I.206) bestimmt, kann man es in (I.207) einsetzen und dann \vec{A} berechnen.

Auch hier ist die Frage zu untersuchen, ob man die Coulomb-Eichung überhaupt wählen kann. Nehmen wir an, wir haben ein Vektorpotential, dass die Eichbedingung nicht erfüllt: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = b(x) \neq 0$. Unter einer Eichtransformation haben wir

$$\vec{A} \rightarrow \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{A}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\chi. \quad (\text{I.208})$$

Verlangen wir also $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{A}} = 0$, so müssen wir die Gleichung

$$\Delta\chi = -b(x) \quad (\text{I.209})$$

lösen. Dies ist wieder eine Poisson-Gleichung, die unter geeigneten Randbedingungen gelöst werden kann. Auch hier gibt es eine zusätzliche Eichfreiheit: Innerhalb der Coulomb-Eichung kann man stets \vec{A} um einen Term $\vec{\nabla}\tilde{\chi}$ ändern, solange $\tilde{\chi}$ die *Laplace-Gleichung* $\Delta\tilde{\chi} = 0$ erfüllt.

I.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Symmetrien oder Invarianzen sind in der gesamten Physik wichtig. Wir haben bereits Invarianzen kennen gelernt, z.B. die Lorentz-Invarianz und die Eichinvarianz. Aus der nichtrelativistischen klassischen Mechanik wissen wir, dass Translationsinvarianz in Zeit und Raum (kein ausgezeichneter Zeitnullpunkt bzw. Koordinatenursprung) Energie- und Impulserhaltung liefert. Rotationsinvarianz (keine ausgezeichnete Richtung) liefert die Drehimpulserhaltung, und die Invarianz unter Galilei-Transformationen liefert die Erhaltung der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Invarianzen eines Systems spiegeln sich in Symmetrien seiner Lagrangefunktion wider. In der Physik III wurde diskutiert, wie das *Noether-Theorem* den Zusammenhang zwischen solchen Symmetrien und Erhaltungsgrößen herstellt. Wir werden nun die Konsequenzen von Symmetrien der Lagragedichte untersuchen und sehen, dass das Noether-Theorem auch in der Feldtheorie gilt. Es wird uns unter anderem ermöglichen, Energie, Impuls und Drehimpuls für ein Feld zu definieren.

I.6.1 Interne Symmetrien und Noether-Theorem

Der Einfachheit halber beginnen wir nicht mit der Elektrodynamik, sondern mit einer skalaren Feldtheorie. Wir betrachten zunächst ein Beispiel, das uns zeigen wird, was mit einer Symmetrie der Lagragedichte gemeint ist.

Wir nehmen an, dass wir zwei skalare Felder $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ haben, mit der Lagragedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + (\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]. \quad (\text{I.210})$$

Dabei ist m ein (Massen-)Parameter. Diese Lagragedichte ist analog zu der, die wir in Übungsaufgabe 9 behandelt haben, abgesehen davon, dass wir es nun mit zwei separaten Feldern zu tun haben. Interessanterweise gibt es eine nicht-triviale Transformation, die die Lagragedichte unverändert lässt:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.211})$$

wobei α eine beliebiger fester Winkel ist. Man weist leicht nach, dass \mathcal{L} wirklich invariant ist. (Der Grund ist einfach, dass eine Summe von Quadraten der Felder oder ihrer ersten Ableitungen ist. Damit ist die Invarianz von \mathcal{L} wie die von $x^2 + y^2$ unter einer zweidimensionalen Rotation.) Die Transformation in (I.211) bezeichnet man als eine *Symmetrie* der Lagrangedichte. Sie wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\Delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \partial_\mu \tilde{\phi}_1, \partial_\mu \tilde{\phi}_2) - \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2) = 0. \quad (\text{I.212})$$

Man beachte, dass die Symmetrie *stetig* ist: Wir können den Winkel α beliebig wählen. Wichtig ist, dass ϕ_1 und ϕ_2 durch die Transformation “gekoppelt” werden – man kann nicht das eine Feld ändern ohne auch das andere zu transformieren. Dank der Tatsache, dass die Symmetrie stetig ist, reicht es, ihre Konsequenzen für eine infinitesimale Version der Transformation (I.211) zu untersuchen. Zur ersten Ordnung α haben wir

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + \alpha\phi_2 \\ \phi_2 - \alpha\phi_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.213})$$

Jede endliche Transformation könnte durch sukzessive Anwendung solcher “kleinen” Transformationen generiert werden.

Das Beispiel zeigt, dass die Felder sozusagen den Parameter α tragen, der “unsichtbar” in der Lagrangedichte und damit in ihrer Physik ist. Um die Konsequenz hieraus allgemeiner zu untersuchen, betrachten wir eine beliebige Anzahl von skalaren Feldern, ϕ_ℓ ($\ell = 1, \dots, n$), mit einer Lagrangedichte, die wir kurz als $\mathcal{L}(\phi_\ell, \partial_\mu \phi_\ell)$ schreiben. Wir nehmen an, dass es eine Symmetrie von \mathcal{L} , die durch den stetigen Parameter α parametrisiert wird. Im Sinne der obigen Diskussion betrachten wir die Symmetrie-Transformation in erster Ordnung in α und schreiben

$$\tilde{\phi}_\ell = \phi_\ell + \alpha\Delta\phi_\ell. \quad (\text{I.214})$$

Die Tatsache, dass \mathcal{L} invariant ist, liefert dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(\phi_\ell + \alpha\Delta\phi_\ell, \partial_\mu \phi_\ell + \partial_\mu(\alpha\Delta\phi_\ell)) - \mathcal{L}(\phi_\ell, \partial_\mu \phi_\ell) \\ &= \sum_\ell \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\ell} \alpha\Delta\phi_\ell + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\ell)} \partial_\mu(\alpha\Delta\phi_\ell) \right] \\ &= \sum_\ell \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\ell} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\ell)} \right)}_{=0} \alpha\Delta\phi_\ell + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\ell)} \alpha\Delta\phi_\ell \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{I.215})$$

wobei wir nur Terme erster Ordnung in α behalten haben. Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, wenn das Feld die Euler Lagrange-Gleichungen (I.119) erfüllt. Der zweite Term hat die Form einer Vierer-Divergenz. Da die linke Seite verschwindet, erhalten wir automatisch den erhaltenen Strom

$$J^\mu = \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\ell)} \Delta\phi_\ell \quad (\partial_\mu J^\mu = 0). \quad (\text{I.216})$$

Dies ist das *Noether-Theorem*: Für jede stetige Invarianz (Symmetrie) von \mathcal{L} gibt es einen erhaltenen Strom. Dieser Strom wird *Noether-Strom* für die Symmetrie-Transformation genannt. Man beachte, dass die Herleitung in der Tat benutzt, dass die Symmetrie stetig ist, so dass α beliebig nahe an Null gebracht werden kann, wo die Transformation die Einheitstransformation wird. Für diskrete Symmetrien können wir kein Noether-Theorem herleiten. Man kann die obige Herleitung leicht auf den Fall von mehreren Symmetrien erweitern, die durch Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ spezifiziert sind. Es gibt dann für jede Symmetrie einen erhaltenen Strom.

Wir kehren nun zu unserem obigen Beispiel zurück. Den Noether-Strom für die Symmetrie (I.213) erhalten wir leicht aus Gl. (I.216). Es ist (siehe (I.213))

$$\Delta\phi_1 = \phi_2 \quad \Delta\phi_2 = -\phi_1. \quad (\text{I.217})$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_1)}\phi_2 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_2)}\phi_1 \\ &= (\partial^\mu\phi_1)\phi_2 - (\partial^\mu\phi_2)\phi_1. \end{aligned} \quad (\text{I.218})$$

Mittels der Bewegungsgleichungen $(\square + m^2)\phi_i = 0$ kann man leicht nachweisen, dass in der Tat $\partial_\mu J^\mu = 0$. Wir hätten den Noether-Strom also vermutlich auch durch geschicktes Ausnutzen der Bewegungsgleichungen finden können. Der Weg über das Noether-Theorem ist aber in aller Regel viel schneller. (Es sei nebenbei bemerkt, dass der Strom in (I.218) mit $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$ geschrieben werden kann als

$$J^\mu = i((\partial^\mu\phi^*)\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*). \quad (\text{I.219})$$

In dieser Form ist der Strom aus der relativistischen Quantenmechanik bekannt als der (erhaltene) "Wahrscheinlichkeitsstrom" für die Klein-Gordon-Gleichung. (In der Quantenfeldtheorie beschreibt ein komplexes Klein-Gordon-Feld geladene skalare Teilchen, und der Strom wird als Ladungsstrom interpretiert.)

Wie wir aus (I.135)–(I.138) wissen, hat man zu einem erhaltenen Strom immer auch eine Aussage über eine Ladungserhaltung. Diese ist gegeben durch

$$Q \equiv \frac{1}{c} \int_V d^3x J^0, \quad (\text{I.220})$$

wobei V ein Volumen ist. Um die Erhaltung zu sehen, schreiben wir $\frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ und damit

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{c} \int_V d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\mathcal{O}(V)} \vec{J} \cdot d\vec{a}, \quad (\text{I.221})$$

wobei wir im letzten Schritt wieder den Gaußschen Integralsatz benutzt haben, der uns den Fluss des Stroms \vec{J} durch die Oberfläche $\mathcal{O}(V)$ des Volumens liefert. Gibt es keinen Zufluss in das Volumen, oder Abfluss daraus, so ist $\dot{Q} = 0$ und die Ladung in dem Volumen zeitlich konstant. Man beachte, dass wir es hier mit einem *lokalen* Erhaltungsgesetz zu tun haben. Q ist ein Lorentz-Skalar, was man mittels des Gaußschen Integralsatzes in vier Dimensionen beweisen kann.

17.05.2022

Die hier betrachteten Symmetrien betrafen direkt die Felder in \mathcal{L} und ließen die Lagrange-Dichte invariant. Wir sprechen hier von *internen Symmetrien*. Solche internen Symmetrien spielen eine wichtige Rolle in der Quantenfeldtheorie und der Teilchenphysik. Wir kennen eine weitere interne Symmetrie, die Eichinvarianz der Elektrodynamik. Die Eichsymmetrie ist allerdings von etwas anderer Qualität als die Symmetrie unter (I.214): Dort ist die Funktion $\Delta\phi(x)$ fest und die Symmetrie wird durch einen einzigen Parameter α beschrieben (oder, allgemeiner, durch mehrere, aber endliche viele Parameter). Im Fall der Eichtransformationen $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$ haben wir (überabzählbar) unendlich viele Transformationen, unter denen die Lagrange-Dichte invariant ist. Dies entspricht einer Redundanz bei der Wahl des Potentials. Es gibt ein zweites Noether-Theorem, das sich mit solchen Fällen befasst. Man findet, dass es auch im Fall der Eichinvarianz erhaltenene Ströme gibt, allerdings nur vier (und nicht etwa unendliche viele), passend zu den vier unabhängigen Komponenten von $\partial^\mu \chi$. Wie wir gesehen haben, ist die Wirkung für die Lagragedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ eichinvariant vorausgesetzt, dass $\partial_\mu j^\mu = 0$. Man kann zeigen, dass der Noether-Strom hier

$$J^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \mu_0 j^\nu. \quad (\text{I.222})$$

wird. Seine Erhaltung, $\partial_\nu J^\nu = 0$, führt sofort auf $\partial_\nu j^\nu = 0$. Da wir diese Relation von Anfang an auferlegt haben, liefert das Noether-Theorem also hier nichts Neues.

I.6.2 Raum-Zeit Symmetrien

Es gibt eine weitere, sehr wichtige, Klasse von Symmetrien, die mit Transformationen der Raum-Zeit Koordinaten zusammenhängen. Diese Transformationen sind die Translationen in Raum und Zeit und die homogenen Lorentz-Transformationen. Diese sind von offensichtlicher Relevanz in einer relativistisch kovarianten Feldtheorie. Man bezeichnet die Symmetrien unter diesen Transformationen meistens als *externe Symmetrien*. Auch bei ihnen findet das Noether-Theorem Anwendung und führt zum Beispiel auf die Energie- und Impulserhaltung, wie wir nun sehen werden.

Wir erinnern uns an das Verhalten eines skalaren Felds unter einer Lorentz-Transformation:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x). \quad (\text{I.223})$$

(Um in der Notation dieses Abschnitts zu bleiben, haben wir $\tilde{\phi}(\tilde{x})$ statt wie zuvor $\phi'(x')$ geschrieben.) Wir hatten in den Abschnitten I.3.1 und I.3.2 die homogenen Lorentz-Transformationen diskutiert, bei denen die Inertialsysteme einen gemeinsamen Zeitnullpunkt und Koordinatenursprung besitzen. Wir hatten auch bereits die Poincaré-Transformationen erwähnt, bei denen man eine zusätzliche Translation in Raum und/oder Zeit zulässt. Sie sind gegeben durch

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (\text{I.224})$$

mit einem Vierer-Translationsvektor a . Wir verlangen nun allgemeiner die Invarianz der Naturgesetze (und damit der Lagrange-Dichte und des Felds ϕ) unter Poincaré-Transformationen der Raum-Zeit Vektoren, also auch unter Translationen. Dies drückt die Forderung aus, dass die Wahl des Koordinatenursprungs oder des Zeit-Nullpunkts keine Rolle spielen darf. Wie zuvor reicht es aus, infinitesimale Transformationen zu betrachten mit $\Lambda \approx \mathbb{1}$ und $a \approx 0$. Aus diesen folgen bereits die erhaltenen Ströme, und jede endliche Transformation kann aus vielen hintereinander geschalteten infinitesimalen Transformationen erreicht werden. Als infinitesimale Version von Gl. (I.224) schreiben wir

$$\tilde{x}^\mu = (g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) x^\nu + \alpha^\mu, \quad (\text{I.225})$$

wobei ω durch kleine Boosts oder Rotationen entsteht und der Vektor α die vier ebenfalls kleinen Translationen in Raum und Zeit enthält. Im Limes $\omega \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ entsteht korrekterweise $\tilde{x} = x$, da man ja dann gar keine Transformation vornimmt. Die Lorentz-Transformationen müssen die Relation (I.80) erfüllen. Diese liefert Bedingungen an die $\omega^\mu{}_\nu$. Es ist

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \\ &= (g^\alpha{}_\mu + \omega^\alpha{}_\mu) g_{\alpha\beta} (g^\beta{}_\nu + \omega^\beta{}_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} + \omega^\alpha{}_\mu g_{\alpha\nu} + g_{\beta\mu} \omega^\beta{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= g_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned} \quad (\text{I.226})$$

Hieraus folgt, dass für infinitesimale Lorentz-Transformationen

$$\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}. \quad (\text{I.227})$$

Man sieht hier noch einmal, dass die drei Boosts und drei Rotationen auf sechs Parameter führen: Eine antisymmetrische reelle 4×4 -Matrix hat genau sechs unabhängige Komponenten. Die Boosts werden durch die Komponenten $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ beschrieben, und die Rotationen durch die $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$.

Um die Notation zu erleichtern, schreiben wir Gl. (I.225) als

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu. \quad (\text{I.228})$$

Dies setzen wir in $\tilde{\phi}(\tilde{x})$ ein und entwickeln zur ersten Ordnung in δx :

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{\phi}(x + \delta x) \approx \tilde{\phi}(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \tilde{\phi}(x). \quad (\text{I.229})$$

Wir stellen um nach $\tilde{\phi}(x)$. Dabei können wir im hinteren Term auf der rechten Seite $\tilde{\phi}$ durch ϕ ersetzen, da der Unterschied zwischen den beiden Feldern ja von der Ordnung δx ist, was nur Terme höherer Ordnung liefert. Also ist

$$\tilde{\phi}(x) \approx \phi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \phi(x) \equiv \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (\text{I.230})$$

Nun nutzen wir die Tatsache aus, dass die Lagrange-Dichte ein Lorentz-Skalar ist, also

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{x}) = \mathcal{L}(x). \quad (\text{I.231})$$

Wir entwickeln die linke Seite so, dass die Koordinatenwerte x statt \tilde{x} auftreten. In erster Ordnung ist

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{x}) \approx \tilde{\mathcal{L}}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \tilde{\mathcal{L}}(x). \quad (\text{I.232})$$

Wie wir wissen, hängt \mathcal{L} von x über die Felder ab. Wir nehmen an, dass es tatsächlich *keine andere* Abhängigkeit von x gibt als die, die durch ϕ und seine Ableitung entsteht. Dies bedeutet auch, dass $\tilde{\mathcal{L}}$ dieselbe Funktion seiner Argumente ist wie \mathcal{L} . In komplett ausgeschriebener Form ist Gl. (I.232) dann

$$\mathcal{L}(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \tilde{\partial}_\nu \tilde{\phi}(\tilde{x})) \approx \mathcal{L}(\tilde{\phi}(x), \partial_\nu \tilde{\phi}(x)) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)). \quad (\text{I.233})$$

Wir setzen dies nun in (I.231) ein und entwickeln mittels (I.230):

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \partial_\nu \tilde{\phi}(\tilde{x})) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)) \\
&\approx \mathcal{L}(\tilde{\phi}(x), \partial_\nu \tilde{\phi}(x)) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)) \\
&\approx \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta \phi + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} - \mathcal{L} \\
&= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) - \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (\text{I.234})
\end{aligned}$$

Hier trägt \mathcal{L} stets das Argument $(\phi(x), \partial_\nu \phi(x))$. In der letzten Zeile haben wir die Produktregel ‘‘rückwärts’’ angewendet. Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet für das physikalische Feld aufgrund der Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen. Der letzte Term verschwindet ebenfalls. Denn es ist

$$\partial_\mu \delta x^\mu \stackrel{(\text{I.228})}{=} \partial_\mu (\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu) = \omega^\mu{}_\nu \partial_\mu x^\nu = \omega^\mu{}_\nu \delta_\mu^\nu = \omega^\mu{}_\mu = 0, \quad (\text{I.235})$$

da ω nach (I.227) antisymmetrisch ist.

Damit verbleiben wir aus Gl. (I.234) mit

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (-\delta x^\nu \partial_\nu \phi) + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu \right] = 0, \quad (\text{I.236})
\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt $\delta \phi$ aus (I.230) eingesetzt haben und im zweiten δx^ν herausgezogen und den Index nach unten gezogen haben. Die letzte Gleichung hat offenbar die Form einer Stromerhaltung. Wir setzen noch δx_ν aus Gl. (I.228) ein und erhalten schließlich

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \text{mit} \quad J^\mu \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) (\omega_{\nu\rho} x^\rho + \alpha_\nu). \quad (\text{I.237})$$

Die zehn Koeffizienten $\omega_{\nu\rho}$ und α_ν sind beliebig. Die Gleichung liefert uns also in Wirklichkeit *zehn* erhaltene Ströme! Dies ist genau, was wir erwarten, da es zehn Poincaré-Transformationen gibt, unter denen die Lagrange-Dichte invariant ist, nämlich sechs Boosts und Rotationen und vier Translationen. Wir untersuchen nun die verschiedenen Fälle:

(i) Reine Translationen. Hier ist $\omega_{\nu\rho} = 0$. Es gibt für jedes der α_ν einen erhaltenen Strom:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{I.238})$$

Wir definieren den *Energie-Impuls Tensor* des Feldes:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{I.239})$$

der symmetrisch ist. Mit ihm schreibt sich (I.238) als

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{I.240})$$

Die Bezeichnung für den Tensor verstehen wir, wenn wir die zugehörigen zeitlich erhaltenen Ladungen betrachten, vgl. (I.220). Wir setzen $\mu = 0$ und definieren:

$$\begin{aligned} P^\nu &\equiv \frac{1}{c} \int d^3x T^{0\nu} = \frac{1}{c} \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial^\nu \phi - g^{0\nu} \mathcal{L} \right) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x (c\pi \partial^\nu \phi - g^{0\nu} \mathcal{L}) , \end{aligned} \quad (\text{I.241})$$

mit dem Impulsfeld $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}$ aus (I.47). Die Komponente P^0 dieses Vierervektors hängt zusammen mit der Invarianz unter einer Translation in der Zeit. Wie in der gewöhnlichen Mechanik erwarten wir daher, dass sie die erhaltene Gesamtenergie des Feldes liefert. In der Tat ist

$$P^0 = \frac{1}{c} \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} \right) \stackrel{(\text{I.48})}{=} \frac{1}{c} \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{c} H = \frac{1}{c} E , \quad (\text{I.242})$$

wobei H die Hamilton-Funktion ist, die gleich der Gesamtenergie E des Feldes ist. Äquivalent dazu ist

$$\int d^3x T^{00} = E . \quad (\text{I.243})$$

Damit besitzt T^{00} die Rolle der *Energiedichte* des Feldes, mit Einheit J/m^3 .

Die räumlichen Komponenten von P müssen den (Dreier-)Vektor des Gesamtimpulses des Feldes ergeben, der aufgrund der Invarianz unter räumlichen Translationen erhalten ist. Wir finden

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i} = \frac{1}{c} \int d^3x c\pi \partial^i \phi , \quad (\text{I.244})$$

und damit

$$\vec{P} = - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi . \quad (\text{I.245})$$

T^{0i}/c hat damit die Bedeutung einer *Impulsdichte*, mit Einheit $(\text{kg m/s})/\text{m}^3$. Insgesamt ist $P = (E/c, \vec{P})$ der Gesamt-Viererimpuls des Feldes, dessen Erhaltung aus der Translationsinvarianz in Raum und Zeit folgt.

(ii) *Boosts und Rotationen*: Hier ist $\alpha_\nu = 0$ in (I.237). Wir sehen, dass auch hier der Energie-Impuls Tensor auftritt. Gleichung (I.237) liefert

$$\partial_\mu [T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho] = 0 . \quad (\text{I.246})$$

Da die $\omega_{\nu\rho}$ antisymmetrisch sind, können wir dies auch schreiben als

$$\partial_\mu [\omega_{\nu\rho} (T^{\mu\rho} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\rho)] = 0 . \quad (\text{I.247})$$

Wir definieren nun den *Drehimpulstensor* des Feldes:

$$M^{\mu\nu\rho} \equiv x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} . \quad (\text{I.248})$$

Er ist für jedes ν und ρ erhalten; wegen der Antisymmetrie liefert dies sechs Ströme, deren Erhaltung durch

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (\text{I.249})$$

ausgedrückt ist. Setzt man hier (I.248) ein, so findet man

$$0 = \partial_\mu (x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}) = T^{\nu\rho} + x^\nu \partial_\mu T^{\mu\rho} - T^{\rho\nu} - x^\rho \partial_\mu T^{\mu\nu} = T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} , \quad (\text{I.250})$$

wobei wir im zweiten Schritt (I.240) benutzt haben. $T^{\nu\rho}$ muss also symmetrisch sein, was in der Tat der Fall ist. Die nullten Komponenten der sechs Noether-Ströme liefern wieder zeitlich erhaltene Ladungen:

$$Q^{\nu\rho} \equiv \frac{1}{c} \int d^3x M^{0\nu\rho} = \frac{1}{c} \int d^3x (x^\nu T^{0\rho} - x^\rho T^{0\nu}) . \quad (\text{I.251})$$

Wir betrachten speziell eine Rotation um die x^3 -Achse, die durch (I.78) gegeben ist. Für eine infinitesimale Rotation um den Winkel θ wird

$$(\Lambda^\nu{}_\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{I.252})$$

Hieran erkennen wir, dass $\omega_2^1 = \theta$, also $\omega_{12} = -\theta$. Der relevante erhaltene Strom ist damit $M^{\mu 12}$, mit der Ladung

$$Q^{12} = \frac{1}{c} \int d^3x M^{012} = \frac{1}{c} \int d^3x (x^1 T^{02} - x^2 T^{01}) . \quad (\text{I.253})$$

Da die Komponenten T^{0i} nach (I.244) mit der Impulskomponente P^i zusammenhängen, erkennt man in (I.253) unschwer die dritte Komponente des Bahndrehimpulses. Wir sehen also, wie man einem Feld einen Drehimpuls zuordnen kann, und wie die Erhaltung des Drehimpulses aus der Rotationsinvarianz folgt, genau, wie wir dies aus der gewöhnlichen Mechanik kennen. In den Übungen werden die Ladungen Q^{0i} untersucht. Man findet, dass sie die Erhaltung der Schwerpunktsgeschwindigkeit ausdrücken.

I.6.3 Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

Wir wenden nun unsere Ergebnisse auf die Elektrodynamik an. Dabei treten einige zusätzliche Komplikationen auf. Wir werden die wesentlichen Ergebnisse diskutieren, aber nicht immer alle detaillierten Herleitungen angeben. Es ist hier hilfreich, die Translationen und homogenen Lorentz-Transformationen getrennt voneinander zu behandeln.

Wir betrachten das freie elektromagnetische Feld (also $j = 0$), dessen Lagragedichte nach Gl. (I.173) gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{Feld}} \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} . \quad (\text{I.254})$$

Wir beginnen mit den Translationen. Das Vierer-Potential verhält sich unter reinen Translationen wie ein skalares Feld (siehe (I.223)):

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) . \quad (\text{I.255})$$

Denn x und \tilde{x} bezeichnen immer noch *denselben* Raum-Zeit Punkt, nur eben beschrieben in den Koordinaten zweier Systeme, deren Ursprünge eine Translation um einen festen Vektor haben. Die Eigenschaft (I.255) bedeutet, dass die Analyse der Translationsinvarianz identisch zu der beim skalaren Feld durchgeht. Speziell finden wir wie in (I.239) den erhaltenen Energie-Impuls Tensor, indem wir dort einfach ϕ durch A_ρ ersetzen:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Feld}}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{Feld}} . \quad (\text{I.256})$$

Man beachte, dass über ρ summiert wird, so dass alle Komponenten von A zum Tensor beitragen. Man nennt den Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ genauer den *kanonischen Energie-Impuls Tensor*. Da er noch nicht der endgültige Tensor ist, den wir benutzen werden, haben wir ihn nicht mit $T^{\mu\nu}$ bezeichnet.

Aus (I.179) erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Feld}}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho}, \quad (\text{I.257})$$

und damit

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} \underbrace{\partial^\nu A_\rho}_{= -F_\rho^\nu + \partial_\rho A^\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu. \end{aligned} \quad (\text{I.258})$$

Hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile die Definition (I.139) des Feldstärketensors eingesetzt. Wir untersuchen nun den letzten Term in (I.258). Zunächst ist er nach der “umgekehrten” Produktregel

$$F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) - \underbrace{(\partial_\rho F^{\mu\rho}) A^\nu}_{=0}. \quad (\text{I.259})$$

Der letzte Term verschwindet, da für das freie Feld die Bewegungsgleichung $\partial_\rho F^{\mu\rho} = 0$ gilt (siehe (I.181)). Der erste Term auf der rechten Seite ist für sich selbst ein erhaltener Strom, denn aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\mu\rho}$ ist $\partial_\mu \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = 0$. Er liefert allerdings keinen Beitrag zu den Ladungen, denn es ist wegen $F^{00} = 0$

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial_\rho (F^{0\rho} A^\nu) &= \int d^3x \partial_i (F^{0i} A^\nu) \\ &= \int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (F^{01} A^\nu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (F^{02} A^\nu) + \frac{\partial}{\partial x^3} (F^{03} A^\nu) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.260})$$

Jeder Term auf der rechten Seite in der mittleren Zeile verschwindet, da aufgrund der Ableitung im Integranden die betreffende Integration trivial ausgeführt werden kann und den Integranden auf der Oberfläche des Volumens ergibt. Wir können oft annehmen, dass dort alle Felder verschwinden; typischerweise nehmen wir als das Volumen den kompletten \mathbb{R}^3 .

Der letzte Term auf der rechten Seite in (I.258) ist also bedeutungslos, was die Noether-Ladungen anbelangt. Im Gegensatz zum ersten Term ist er nicht symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν und auch nicht eichinvariant, da sich das Vierer-Potential A unter einer Eichtransformation ändert. Wir subtrahieren daher den Term und definieren den Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (\text{I.261})$$

den wir von nun an als den *Energie-Impuls Tensor* des elektromagnetischen Feldes betrachten werden. Diese Definition geht auf F. Belinfante (1939) zurück. Es gibt also in der Feldtheorie eine gewisse Freiheit in der Definition des Energie-Impuls Tensors – die Ladungen sind physikalisch relevanter. $T^{\mu\nu}$ hat folgende Eigenschaften:

- er ist symmetrisch unter Vertauschung $\mu \leftrightarrow \nu$. Da $g^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, müssen wir nur den ersten Term untersuchen. Es ist

$$F^{\nu\rho} F_{\rho}^{\mu} = F^{\nu}_{\rho} F^{\rho\mu} = (-F_{\rho}^{\nu})(-F^{\mu\rho}) = F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu}. \quad (\text{I.262})$$

- er ist eichinvariant, da der Feldstärketensor eichinvariant ist.

- er ist spurlos:

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} F_{\rho\mu} + \frac{g^{\mu}_{\mu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = \frac{1}{\mu_0} (-F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} + F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = 0. \quad (\text{I.263})$$

Es stellt sich heraus, dass der symmetrische Tensor (I.261) auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie relevant ist.

Wir untersuchen nun die expliziten Komponenten von $T^{\mu\nu}$. Mit (I.171) und $F^{i0} = E^i/c$ finden wir:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{0i} F_i^0 + \frac{1}{2} \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) \\ &\equiv w. \end{aligned} \quad (\text{I.264})$$

Dies ist die Energiedichte des Feldes, die man häufig mit w bezeichnet. Integration über das ganze Volumen liefert die Gesamtenergie³

$$E = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right). \quad (\text{I.265})$$

Weiter ist mit $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$

$$\begin{aligned} T^{i0} = T^{0i} &= \frac{1}{\mu_0} (F^{0j} F_j^i + 0) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{E^j}{c} \right) \varepsilon^{jik} B^k = \frac{1}{\mu_0 c} \varepsilon^{ijk} E^j B^k \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times \vec{B})^i \\ &\equiv \frac{1}{c} S^i, \end{aligned} \quad (\text{I.266})$$

mit dem *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (\text{I.267})$$

³Nicht zu verwechseln mit den Komponenten E^i des elektrischen Felds! Wir werden ohnehin meistens nur w benötigen.

Da T^{i0} die Einheit einer Energiedichte (J/m^3) besitzt, trägt der Poynting-Vektor die Einheit $\text{J/(s m}^2)$. Damit beschreibt er eine *Energiestromdichte*, passend zu der Tatsache, dass die Stromerhaltung $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ gerade T^{00} und die T^{i0} enthält. Gleichzeitig aber tritt $T^{0i} = T^{i0}$ (und damit der Poynting-Vektor) auch in der Stromerhaltung $\partial_\mu T^{\mu i} = 0$ auf. Wie beim skalaren Feld (siehe Gl. (I.244)) definieren wir den (Dreier-)Impulsvektor des elektromagnetischen Feldes durch

$$P^i \equiv \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}, \quad (\text{I.268})$$

oder

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \int d^3x \vec{S} = \frac{1}{c^2 \mu_0} \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (\text{I.269})$$

Damit spielt \vec{S}/c^2 die Rolle einer *Impulsdichte*, mit Einheit $(\text{kg m/s})/\text{m}^3$. Die rein räumlichen Komponenten des Energie-Impulstensors ergeben sich nach kurzer Rechnung zu

$$T^{ij} = - \left(\epsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j \right) + \delta^{ij} w. \quad (\text{I.270})$$

Sie entsprechen einer *Impulsstromdichte*. Man nennt T^{ij} den *Spannungstensor*. Insgesamt können wir $T^{\mu\nu}$ als 4×4 -Matrix darstellen:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c} \vec{S}^T \\ \frac{1}{c} \vec{S} & (T^{ij}) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.271})$$

wobei die untere rechte Ecke eine 3×3 -Matrix ist.

Nachdem wir Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes eingeführt haben, diskutieren wir nun noch kurz den Drehimpuls. Dies ist etwas komplizierter als im skalaren Fall, da für das Vierer-Potential unter homogenen Lorentz-Transformationen nicht (I.223) gilt, sondern

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \stackrel{(\text{I.225})}{\approx} A^\mu(x) + \omega^\mu{}_\nu A^\nu(x), \quad (\text{I.272})$$

wobei wir wieder die infinitesimale Version geschrieben haben. Anstatt (I.230) finden wir hier

$$\tilde{A}^\mu(x) \approx A^\mu(x) + \omega^\mu{}_\nu A^\nu(x) - \delta x^\nu \partial_\nu A^\mu(x). \quad (\text{I.273})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite, der im Vergleich zu (I.230) neu ist, ist unabhängig von δx^ν und entspricht daher einer *internen* Symmetrie, wie wir sie in Gl. (I.214) untersucht hatten. Nach kurzer Rechnung findet man den *kanonischen Drehimpulstensor*

$$M_\Theta^{\mu\nu\rho} = x^\nu \Theta^{\mu\rho} - x^\rho \Theta^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu\rho}, \quad (\text{I.274})$$

mit

$$\Sigma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\nu} A^\rho - F^{\mu\rho} A^\nu). \quad (\text{I.275})$$

Verglichen mit dem Drehimpulstensor (I.248) im skalaren Fall enthält $M_\Theta^{\mu\nu\rho}$ also den neuen Beitrag $\Sigma^{\mu\nu\rho}$. Da die ersten beiden Terme in (I.274) an einen Bahndrehimpuls erinnern, bezeichnet man $\Sigma^{\mu\nu\rho}$ auch als *intrinsischen Drehimpuls* des Feldes, oder als *Spin-Strom*. Allerdings tritt in (I.274) noch der kanonische Energie-Impuls Tensor (I.256) auf, der weder symmetrisch noch

24.05.2022

eichinvariant ist. Man kann zeigen, dass mit dem “echten” Energie-Impuls Tensor $T^{\mu\nu}$ aus (I.261) ein Drehimpulstensor konstruiert werden kann, der die gewohnte Form (I.248) besitzt:

$$M^{\mu\nu\rho} \equiv x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}, \quad (\text{I.276})$$

und der dieselben erhaltenen Ladungen besitzt wie $M_\Theta^{\mu\nu\rho}$. Dieser Tensor wird in der Regel benutzt. Für eine Rotation um die x^3 -Achse liefert er zum Beispiel die erhaltene Ladung (vgl. (I.253))

$$\begin{aligned} Q^{12} &= \frac{1}{c} \int d^3x (x^1 T^{02} - x^2 T^{01}) \\ &\stackrel{(\text{I.266})}{=} \frac{1}{c^2} \int d^3x (x^1 S^2 - x^2 S^1) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^3x (\vec{x} \times \vec{S})^3 \\ &\stackrel{(\text{I.267})}{=} \epsilon_0 \int d^3x (\vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}))^3. \end{aligned} \quad (\text{I.277})$$

I.6.4 Energie- und Impulserhaltungssätze

Wir lassen nun äußere Ladungen und Ströme zu und untersuchen die Frage, was dann aus den Erhaltungsgleichungen $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ und den zugehörigen Ladungen wird. Dabei behalten wir die Definition (I.261) des Energie-Impuls Tensors. Wir bezeichnen ihn von nun an mit $T_{\text{Feld}}^{\mu\nu}$, um kenntlich zu machen, dass er sich allein aus dem “freien” Anteil $\mathcal{L}_{\text{Feld}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ der Lagragedichte berechnet. Mit den Bewegungsgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ und der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \left[F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[(\partial_\mu F^{\mu\rho}) F_\rho^\nu + F^{\mu\rho} (\partial_\mu F_\rho^\nu) + \frac{1}{4} \underbrace{\partial^\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma})}_{=(\partial^\nu F_{\rho\sigma}) F^{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} (\partial^\nu F^{\rho\sigma})} \right] \\ &= j^\rho F_\rho^\nu + \frac{1}{\mu_0} \left[F_{\mu\rho} \partial^\mu F^{\rho\nu} + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} \right] \\ &= -F^{\nu\rho} j_\rho + \frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} \left[\partial^\mu F^{\rho\nu} + \frac{1}{2} \partial^\nu F^{\mu\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.278})$$

Dabei haben wir in den beiden letzten Schritten einige Indizes nach oben bzw. nach unten gezogen, und im hinteren Term die Umbenennungen $\rho \rightarrow \mu, \sigma \rightarrow \rho$ vorgenommen. Den Term $F_{\mu\rho} \partial^\mu F^{\rho\nu}$ schreiben wir nun mit der weiteren Umbenennung $\mu \leftrightarrow \rho$ als $\frac{1}{2} F_{\mu\rho} [\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu}]$, so dass

$$\partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} = -F^{\nu\rho} j_\rho + \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\rho} \underbrace{[\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\rho}]}_{=0}. \quad (\text{I.279})$$

Dabei verschwindet die Klammer aufgrund der Jacobi-Identität (I.188). Somit haben wir schließlich:

$$\partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} = -F^{\nu\rho} j_\rho. \quad (\text{I.280})$$

Um diese Gleichung zu verstehen, untersuchen wir sie für die verschiedenen Werte von ν . Für $\nu = 0$ haben wir

$$\partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu 0} = \partial_0 T_{\text{Feld}}^{00} + \partial_i T_{\text{Feld}}^{i0} \stackrel{(I.264)}{=} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) \stackrel{(I.266)}{=} -F^{0i} j_i = -\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (\text{I.281})$$

also

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (\text{I.282})$$

Diese wichtige Gleichung ist als *Poyntingsches Theorem* bekannt. Für $\nu = 1, 2, 3 \equiv i$ liefert (I.280)

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu i} &= \partial_0 T_{\text{Feld}}^{0i} + \partial_j T_{\text{Feld}}^{ji} \\ &\stackrel{(I.266)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial S^i}{\partial t} + \partial_j T_{\text{Feld}}^{ji} \\ &\stackrel{!}{=} -F^{i\rho} j_\rho = -F^{i0} \underbrace{j_0}_{=c\rho} - F^{i\ell} j_\ell = -E^i \varrho - \varepsilon^{i\ell k} j^\ell B^k \\ &= -(\varrho E^i + (\vec{j} \times \vec{B})^i), \end{aligned} \quad (\text{I.283})$$

also

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{G} = -(\varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}), \quad (\text{I.284})$$

wobei die i te Komponente von \vec{G} durch $\partial_j T_{\text{Feld}}^{ji}$ definiert ist und ein komplizierter Ausdruck ist.

Gleichungen (I.282) und (I.284) drücken die Energie- und Impulsbilanzen in der Elektrodynamik aus. Setzen wir zunächst die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte \vec{j} noch einmal Null. Dann besagt

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \quad (\text{I.285})$$

dass sich die Energiedichte w des Feldes zeitlich dadurch ändern kann, dass es eine Stromdichte \vec{S} gibt, die eine Divergenz besitzt. Dies ist natürlich genau die physikalische Bedeutung der Stromerhaltung (siehe Diskussion der Kontinuitätsgleichung (I.135)) und rechtfertigt den Begriff *Energiestromdichte* für \vec{S} . Gleichung (I.284) wird

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{G} = 0 \quad (\text{I.286})$$

und besagt, dass sich die Impulsdichte zeitlich ändern kann, wenn \vec{G} ungleich Null ist. Dabei ist *jede Komponente* von \vec{G} eine Divergenz eines Vektors (nämlich einer Spalte der Matrix (T_{Feld}^{ji}) : $G^i = \partial_j T_{\text{Feld}}^{ji}$); daher beinhaltet diese Gleichung drei Kontinuitätsgleichungen. Man sieht an (I.285) und (I.286), wie der Poynting-Vektor gleichzeitig als Energiestromdichte und als Impulsdichte $\times c^2$ auftritt.

Wir betrachten nun wieder Gln. (I.282) und (I.284). Die Terme auf den rechten Seiten zeigen an, dass das elektromagnetische Feld Energie und Impuls *verliert*, wenn Ladungen und Ströme vorhanden sind. Dies muss auch so sein, da das Feld Arbeit an den Ladungen verrichtet bzw. Kräfte auf diese ausübt. Wir identifizieren also $+\vec{j} \cdot \vec{E}$ mit der zeitlichen Änderung

der Energiedichte der Ladungen, die durch das Feld bewirkt wird. Der Ausdruck hat die Einheit $J/(sm^3) = W/m^3$. Der Term $+(\varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ muss entsprechend die zeitliche Änderung der Impulsdichte der Ladungen beschreiben und ist damit eine *Kraftdichte*. In der Tat hat er die Einheit $(kg\ m/s)/(sm^3) = N/m^3$.

Betrachten wir dies etwas systematischer. Wir definieren die Vierer-Kraftdichte

$$f^\nu \equiv +F^{\nu\rho} j_\rho , \quad (I.287)$$

so dass Gl. (I.280) geschrieben werden kann als

$$\partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} + f^\nu = 0 . \quad (I.288)$$

In Komponenten ausgeschrieben haben wir nach den obigen Berechnungen

$$(f^\nu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \end{pmatrix} . \quad (I.289)$$

Wir integrieren nun (I.288) über ein Volumen V :

$$\int d^3x (\partial_\mu T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} + f^\nu) = 0 . \quad (I.290)$$

Wir nehmen weiter an, dass unser System abgeschlossen ist, in dem Sinne, dass netto keine Energie und kein Impuls in das Volumen hinein oder aus dem Volumen heraus strömt (alternativ können wir auch einfach den ganzen \mathbb{R}^3 als Volumen nehmen). Die Terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ und \vec{G} in (I.282), (I.284) liefern dann keinen Beitrag zum Integral (vgl. (I.221)), und wir erhalten

$$\int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} w \\ \frac{1}{c^2} \vec{S} \end{pmatrix} + (f^\nu) \right] = 0 . \quad (I.291)$$

Die Gesamtenergie E_{Feld} des Feldes ist gegeben durch das Integral über die Energiedichte w , und analog der Impuls \vec{P}_{Feld} durch das Integral über die Impulsdichte \vec{S}/c^2 . Außerdem sollte das Integral über die Kraftdichte f^ν die zeitliche Änderung des Gesamtmpulses der Ladungen liefern:

$$\int d^3x f^\nu = \frac{dP_{\text{Lad.}}^\nu}{dt} . \quad (I.292)$$

(Man beachte, dass f^ν ein Vierer-Vektor ist, aber $\int d^3x f^\nu$ nicht. Die rechte Seite der Gleichung ist aber auch kein Vierer-Vektor, da dt nicht invariant ist.) Damit erhalten wir aus (I.291)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{Feld}} \\ \vec{P}_{\text{Feld}} \end{pmatrix} + \frac{(dP_{\text{Lad.}}^\nu)}{dt} = 0 , \quad (I.293)$$

oder

$$\frac{d}{dt} (P_{\text{Feld}}^\nu + P_{\text{Lad.}}^\nu) = 0 . \quad (I.294)$$

Die Theoreme (I.282), (I.284) liefern also die Erhaltung von Energie und Impuls, *im gemeinsamen System aus Feld und Ladungen*.

Wir müssen allerdings noch nachweisen, dass (I.292) wirklich konsistent ist. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, dass die Vierer-Stromdichte gegeben ist durch (siehe (I.129),(I.134))

$$(j^\mu) = \varrho \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.295})$$

Eingesetzt in (I.289) erhalten wir

$$(f^\nu) = \varrho \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.296})$$

Es sei nun die Ladungsdichte ϱ sehr stark um den aktuellen Ort $\vec{X}(t)$ der Ladung lokalisiert. Speziell denken wir dabei an die Trajektorie einer Punktladung q , so dass $\varrho(\vec{x}) = q \delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t))$. Dann ist $\int d^3x \varrho = q$, und wir erhalten

$$\int d^3x (f^\nu) = q \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.297})$$

Wenn dies wirklich gleich $dP_{\text{Lad.}}^\nu / dt$ ist, dann muss gelten

$$\frac{d(P_{\text{Lad.}}^\nu)}{d\tau} = q\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.298})$$

wobei $d\tau = dt/\gamma$ die Eigenzeit bezeichnet (siehe (I.101),(I.102)). Diese Größe aber ist genau die Viererkraft K^ν , die in den Übungen diskutiert wurde. Sie hat im Formalismus der speziellen Relativitätstheorie *stets* die Form

$$(K^\mu) = \left(\frac{dP^\mu}{d\tau} \right) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.299})$$

Der Vergleich mit (I.298) zeigt, dass dies konsistent ist, wenn

$$\vec{F} = q \begin{pmatrix} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix} \quad (\text{I.300})$$

(beachte: $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$). Dies ist die wohlbekannte Lorentz-Kraft auf ein Teilchen! Damit ist gezeigt, dass f^ν in der Tat die Rolle einer Kraftdichte spielt und die Interpretation von Energie- und Impulserhaltung in (I.294) korrekt ist. Darüberhinaus haben wir gesehen, dass uns der kovariante Formalismus der Elektrodynamik am Ende auch die Lorentz-Kraft liefert. Man kann die Konsistenz der Gleichungen auch dadurch zeigen, dass man zur Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes noch eine Lagrangefunktion für ein Teilchen hinzufügt und die Bewegungsgleichung des Teilchens aufstellt. Auch dies führt auf die Kraftdichte f^ν . Ebenso kann man einen Energie-Impuls Tensor $T_{\text{Teilchen}}^{\mu\nu}$ für das Teilchen definieren. Man findet dann

$$\partial_\mu (T_{\text{Teilchen}}^{\mu\nu} + T_{\text{Feld}}^{\mu\nu}) = 0, \quad (\text{I.301})$$

was die Erhaltung von Energie und Impuls des abgeschlossenen Gesamtsystems aus Teilchen und Feld ausdrückt. Dies wird in den Übungen untersucht.

31.05.2022

I.7 Eindeutigkeit der Elektrodynamik

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir noch einige offene Fragen zur Struktur der Elektrodynamik untersuchen. Speziell hatten wir schon in Abschnitt I.1 die Frage aufgeworfen, ob die Maxwell-Gleichungen eventuell überbestimmt sein könnten angesichts der Tatsache, dass sie acht Gleichungen für sechs Komponenten der Felder beinhalten. Außerdem hatten wir ebenfalls bereits in I.1 gesehen, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen durch die Einführung von Potentialen gelöst werden, z.B. in der Form $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Hier stellt sich die Frage, in wie weit dies allgemein möglich ist. Wir werden in diesem Zusammenhang auch einige mathematische Kenntnisse erwerben, die später wichtig sein werden.

I.7.1 Integralsätze

Anhang B wiederholt die wichtigsten Grundlagen der Integralrechnung im \mathbb{R}^3 . Mit ihnen formulieren wir (ohne Beweis, der in der Physik 2 gezeigt wurde) die folgenden Integralsätze:

(1) *Satz von Gauß*: $\vec{F}(\vec{x})$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}), \quad (\text{I.302})$$

wobei V ein Volumen bezeichnet und $\mathcal{O}(V)$ dessen Oberfläche. Diese ist offenbar eine geschlossene Fläche; der Satz gilt, wenn der für das Flächenelement benutzte Normalenvektor (siehe Anhang B) stets nach *außen* zeigt. Wir haben den Gaußschen Integralsatz bereits bei der Diskussion der Kontinuitätsgleichung (I.135) verwendet. Er besagt anschaulich, dass ein Feld, das in einem Volumen Quellen hat und damit eine Divergenz, auch einen “Netto”-Fluss durch die Oberfläche des Volumens liefern muss. Für die magnetische Flussdichte gilt zum Beispiel stets $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, woraus wir schließen, dass es nie einen Gesamtfluss von \vec{B} durch eine geschlossene Oberfläche geben kann.

Es gibt zwei weniger bekannte Erweiterungen des Gaußschen Integralsatzes:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \times \vec{F}(\vec{x}), \quad (\text{I.303})$$

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \varphi(\vec{x}). \quad (\text{I.304})$$

Dabei ist $\varphi(\vec{x})$ eine skalare Funktion. Die auftretenden Integrationen auf der rechten Seite sind ebenfalls mittels des Vektors $d\vec{a}$ in (B.12) definiert.

(2) *Satz von Stokes*: Wieder sei $\vec{F}(\vec{x})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_S d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})) = \oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{x}). \quad (\text{I.305})$$

Dabei ist S eine Fläche, die von der (geschlossenen) Kurve $\mathcal{C}(S)$ berandet ist. Die Integration muss so ausgeführt werden, dass die Fläche immer links von der Kurve liegt. Mit anderen Worten, der Normalenvektor auf die Fläche und die Kurve sollen immer eine Rechtsschraube definieren. Der Satz von Stokes besagt, dass das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes nur von dessen Werten auf dem Rand der Fläche bestimmt wird. Ist die Fläche geschlossen, so gibt es keinen Rand, und $\int_S d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ muss stets verschwinden. Ist ein Feld rotationsfrei, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$,

so ist das Kurvenintegral des Feldes über jeden geschlossenen Weg Null. Physikalisch gesprochen leistet das Feld entlang eines geschlossenen Weges keine Arbeit, was ein alternatives Kriterium für ein konservatives Feld ist.

Auch beim Satz von Stokes gibt es zwei Erweiterungen:

$$\int_S (d\vec{a} \times \vec{\nabla}) \times \vec{F}(\vec{x}) = \oint_{C(S)} d\vec{s} \times \vec{F}(\vec{x}), \quad (I.306)$$

$$\int_S d\vec{a} \times \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) = \oint_{C(S)} d\vec{s} \varphi(\vec{x}). \quad (I.307)$$

Mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes lassen sich die Maxwell-Gleichungen in eine integrale Form bringen. So wird zum Beispiel aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ die Gleichung $\oint \vec{E} d\vec{a} = Q/\epsilon_0$, mit der im Integrationsvolumen befindlichen Ladung Q . Die integrale Form der Maxwell-Gleichungen wurde in der Physik 2 ausführlich diskutiert.

Mit den Techniken aus Anhang B kann man die Integralsätze auch im vierdimensionalen Raum formulieren. So hat man für den Satz von Gauß:

$$\int_V d^4x \partial_\mu F^\mu(x) = \oint_{\mathcal{O}(V)} dS_\mu F^\mu(x), \quad (I.308)$$

wobei V ein vierdimensionales Volumen bezeichnet und $\mathcal{O}(V)$ dessen Oberfläche, die eine dreidimensionale Hyperfläche ist. Der Vektor dS_μ ist in Gl. (B.21) definiert. Der Satz von Stokes wird

$$\frac{1}{2} \int_S d\tilde{a}^{\mu\nu} (\partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu) = \oint_{C(S)} dx^\mu F_\mu(x) \quad (I.309)$$

mit $d\tilde{a}^{\mu\nu}$ aus (B.16) und dem Kurvenintegral $\oint_{C(S)} dx^\mu F_\mu$ aus (B.14).

I.7.2 Greensche Theoreme

Die beiden *Greenschen Theoreme* sind direkte Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz. Wir setzen zunächst $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ in (I.302), mit einer zweimal stetig differenzierbaren skalaren Funktion φ . Dann gilt:

$$\int_V d^3x \Delta\varphi = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi. \quad (I.310)$$

Wir erinnern uns (siehe Anhang B), dass der Vektor $d\vec{a}$ lokal senkrecht auf der Fläche steht. Wir definieren mittels (B.12) den *Normalen-Einheitsvektor*

$$\vec{n} \equiv \frac{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|}, \quad (I.311)$$

so dass $d\vec{a} = \vec{n} da$. Wir definieren weiter die *Normalableitung* einer Funktion φ in einem Punkt als

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \equiv (\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{n} = n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (I.312)$$

Hiermit können wir (I.310) auch schreiben als

$$\int_V d^3x \Delta\varphi = \oint_{\mathcal{O}(V)} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (I.313)$$

Zum ersten Greenschen Theorem gelangen wir, indem wir dies verallgemeinern und $\vec{F} = \psi \vec{\nabla} \varphi$ setzen, mit einer weiteren zweimal stetig differenzierbaren skalaren Funktion ψ . Es ist nach der Produktregel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \psi \Delta \varphi + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi). \quad (\text{I.314})$$

Einsetzen in (I.302) liefert das erste Theorem:

$$\int_V d^3x (\psi \Delta \varphi + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi)) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \psi = \oint_{\mathcal{O}(V)} da \frac{\partial \varphi}{\partial n} \psi. \quad (\text{I.315})$$

Schließlich schreiben wir diese Gleichung noch einmal nach der Vertauschung $\psi \leftrightarrow \varphi$:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi)) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \varphi = \oint_{\mathcal{O}(V)} da \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi. \quad (\text{I.316})$$

Wir subtrahieren diese Gleichung von (I.315) und erhalten das zweite Theorem:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) &= \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a} \cdot [(\vec{\nabla} \varphi) \psi - (\vec{\nabla} \psi) \varphi] \\ &= \oint_{\mathcal{O}(V)} da \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.317})$$

I.7.3 Helmholtzscher Zerlegungssatz

Dieser Satz wird uns zeigen, wie ein Vektorfeld in ein Wirbelfeld und ein Gradientenfeld zerlegt werden kann. Zunächst beweisen wir eine wichtige Identität: Es gilt

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta^3(\vec{x}). \quad (\text{I.318})$$

Um dies zu beweisen, müssen wir zunächst zeigen, dass $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|}$ für alle $\vec{x} \neq 0$ verschwindet. Dies tun wir am besten in Kugelkoordinaten, wo $|\vec{x}| = r$. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (\text{I.319})$$

In unserem Fall ist $f(r) = 1/r$, so dass es keine Winkelabhängigkeiten gibt. Die beiden hinteren Terme tragen also nicht bei. Mit $\partial f / \partial r = -1/r^2$ folgt sofort wie gewünscht

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} \equiv 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0. \quad (\text{I.320})$$

Wir müssen nun noch nachweisen, dass

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi. \quad (\text{I.321})$$

Dabei muss das Volumen den Ursprung $\vec{x} = 0$ enthalten (tut es dies nicht, so verschwindet das Integral wegen (I.320)). Das Volumen kann beliebig gewählt werden; wegen (I.320) reicht es, eine Kugel mit Radius R um den Ursprung zu betrachten. Mit (I.310) finden wir

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = \oint_{\mathcal{O}(V)} \underbrace{d\vec{a}}_{=da \vec{e}_r} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right)}_{= -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \stackrel{r=R}{=} -\frac{1}{R^2} \underbrace{\oint_{\mathcal{O}(V)} da}_{=4\pi R^2} = -4\pi. \quad (\text{I.322})$$

Dabei haben wir im ersten Schritt benutzt, dass für eine Kugeloberfläche der Normalenvektor immer radial ($\sim \vec{e}_r$) zeigt, und dass $\vec{\nabla}f(r) = \vec{e}_r(\partial f/\partial r)$. Da keine Winkelabhängigkeiten auftreten, wird das verbleibende Oberflächenintegral trivial und liefert einfach die Oberfläche der Kugel, $4\pi R^2$. Damit ist (I.321) gezeigt. Allerdings ist zu beachten, dass wir streng genommen in (I.322) nicht die Voraussetzungen für (I.310) erfüllt haben, da $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|}$ nicht im ganzen Volumen zweimal stetig differenzierbar ist. Dennoch ist das Ergebnis korrekt. Dies weist man auf saubere Weise nach, indem man die Singularität bei $|\vec{x}| = 0$ zunächst eliminiert, zum Beispiel durch $r \rightarrow \sqrt{r^2 + a^2}$, mit einem kleinen Parameter a . Man findet dann, dass (I.322) am Ende für $a \rightarrow 0$ korrekt reproduziert wird (der Ausdruck $\Delta \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$ ist dann für $a \rightarrow 0$ eine Darstellung der δ -Funktion).

Wir können nun den *Zerlegungssatz* formulieren:

Es sei \vec{F} ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld in einem Volumen V . Dann lässt sich \vec{F} zerlegen in ein Gradientenfeld und ein Wirbelfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}_L(\vec{x}) + \vec{F}_T(\vec{x}), \quad (\text{I.323})$$

mit

$$\vec{F}_L = -\vec{\nabla}\phi, \quad (\text{I.324})$$

$$\vec{F}_T = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}. \quad (\text{I.325})$$

Die Potentiale ϕ und $\vec{\mathcal{A}}$ ergeben sich direkt aus \vec{F} :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{I.326})$$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{I.327})$$

(Der Operator $\vec{\nabla}'$ im Integranden leitet dabei nach den Komponenten von \vec{x}' ab.) Die Zerlegung (I.323) nennt man auch *Helmholtz-Zerlegung* oder *Helmholtz-Darstellung*.

Zum Beweis des Zerlegungssatzes wenden wir zunächst die Identität (I.318) an:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= \int_V d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \Delta \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \int_V d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (\text{I.328})$$

Dabei konnten wir den Laplace-Operator aus dem Integral herausziehen, da er nur auf \vec{x} wirkt, nicht aber auf \vec{x}' . Das Volumen V ist beliebig, solange es den Punkt \vec{x} enthält. Mit der Identität (A.14), $\Delta \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$, können wir weiter schreiben:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int_V d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \int_V d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right). \quad (\text{I.329})$$

Wir betrachten die beiden Terme auf der rechten Seite separat. Wir beginnen mit dem Divergenzausdruck im hinteren Term:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \int_V d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \int_V d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = - \int_V d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= - \int_V d^3x' \left[\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{x}') \right].\end{aligned}\quad (\text{I.330})$$

Hier haben wir im ersten Schritt benutzt, dass $\vec{\nabla}$ nur auf die Abhängigkeit von \vec{x} wirkt. In der zweiten Zeile haben wir einen Trick angewendet: Die Ableitung des Terms $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ nach den Komponenten des Vektors \vec{x} ist gerade das Negative der Ableitung nach den Komponenten von \vec{x}' . Dies ist trivial, da der abzuleitende Ausdruck nur $\vec{x} - \vec{x}'$ enthält. Wir haben durch den Strich am Operator $\vec{\nabla}'$ im Integranden kenntlich gemacht, dass dieser nur nach den Komponenten von \vec{x}' ableitet. In der letzten Zeile von (I.330) haben wir schließlich eine Produktregel (umgekehrt) aus Übungsaufgabe 1(c) verwendet, $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

Nun wenden wir den Gaußschen Integralsatz (I.302) auf den ersten Term auf der rechten Seite von (I.330) an:

$$\int_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{I.331})$$

Wir definieren jetzt:

$$\phi(\vec{x}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{I.332})$$

mit dem Integral $\oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}'$ über die Oberfläche des Volumens. $\phi(\vec{x})$ ist bereits das gesuchte skalare Potential in Gl. (I.324), wie man durch Vergleich mit (I.326), (I.329) sieht.

Nun betrachten wir den Rotationsterm in (I.329). Dabei wiederholen wir einige Schritte aus der bisherigen Rechnung:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \int_V d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \int_V d^3x' \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{= -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)} \times \vec{F}(\vec{x}') \\ &= - \int_V d^3x' \left[\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} (\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{x}')) \right].\end{aligned}\quad (\text{I.333})$$

Dabei haben wir die Produktregel (umgekehrt) aus Übungsaufgabe 1(e) verwendet, also die Identität $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}$. Im ersten Term auf der rechten Seite von (I.333) wenden wir wieder den Satz von Gauß an, diesmal in der Form (I.303):

$$\int_V d^3x' \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{I.334})$$

Das gesuchte Vektorpotential kann nun ebenfalls definiert werden:

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{O}(V)} d\vec{a}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{I.335})$$

in Übereinstimmung mit (I.327). Damit ist der Zerlegungssatz bewiesen.

Wir halten die folgenden Merkmale des Satzes fest:

(i) Für das Gradientenfeld \vec{F}_L und das Wirbelfeld \vec{F}_T gelten wegen (A.9) und (A.11)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_L = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_T = 0. \quad (\text{I.336})$$

In diesem Sinne stehen die Operatoren $\vec{\nabla} \cdot$ und $\vec{\nabla} \times$ "senkrecht zueinander". \vec{F}_L ist "parallel" zu $\vec{\nabla}$ und wird daher als *longitudinale* Komponente von \vec{F} bezeichnet. \vec{F}_T ist im selben Sinne *transversal*. Dies erklärt die Indizes "L" und "T".

(ii) Ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv 0$, und verschwindet der Oberflächenterm, so folgt nach (I.326) $\phi = 0$ und damit $\vec{F}_L = 0$. Damit ist dann $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ein reines Wirbelfeld.

(iii) Ist andererseits $\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv 0$, und verschwindet wieder der Oberflächenterm, so folgt nach (I.327) $\vec{A} = 0$ und damit $\vec{F}_T = 0$. Dann ist $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ ein reines Gradientenfeld.

(iv) Besonders wichtig ist, dass \vec{F} also ganz allgemein durch seine Rotation und seine Divergenz im Volumen festgelegt ist, sowie durch seine Werte auf der Oberfläche des Volumens. In der Elektrodynamik betrachtet man typischerweise als Volumen den ganzen \mathbb{R}^3 und verlangt, dass die Felder zu $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ verschwinden. Fällt $\vec{F}(\vec{x})$ schneller ab als $1/|\vec{x}|$, so verschwinden die Oberflächenterme in Gln. (I.326), (I.327), und Rotation und Divergenz von \vec{F} legen \vec{F} überall fest. Wir wollen für diesen Fall nachweisen, dass die Lösung \vec{F} wirklich eindeutig ist. Nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Felder $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$ mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2, \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_2. \quad (\text{I.337})$$

Dann gilt für die Differenz $\vec{G} \equiv \vec{F}_1 - \vec{F}_2$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = 0, \quad (\text{I.338})$$

und \vec{G} verschwindet überall auf dem Rand im Unendlichen. Aus dem Zerlegungssatz folgt, dass wegen der Rotationsfreiheit \vec{G} von der Form $\vec{G} = \vec{\nabla}\psi$ ist, mit einem skalaren Feld ψ . Die Divergenzfreiheit liefert dann sofort

$$\Delta\psi = 0. \quad (\text{I.339})$$

Wir betrachten nun das erste Greensche Theorem (I.315) für den Spezialfall $\varphi = \psi$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\underbrace{\psi \Delta\psi}_{=0} + (\vec{\nabla}\psi)^2 \right) = \oint_{\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)} d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla}\psi) \psi = 0, \quad (\text{I.340})$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\vec{\nabla}\psi = \vec{G} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ auf dem Rand verschwindet. Also haben wir die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\vec{\nabla}\psi)^2 = 0, \quad (\text{I.341})$$

was nur gelöst wird durch $\vec{\nabla}\psi \equiv 0$, also $\vec{G} \equiv 0$. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$. Damit legen auch die Maxwell-Gleichungen die Felder \vec{E} und \vec{B} eindeutig fest!

Wir wollen nun noch die Bedeutung des Zerlegungssatzes für die Maxwell-Gleichungen etwas genauer untersuchen. Zuerst erinnern wir daran, dass diese gerade als Gleichungen für Divergenz

02.06.2022

und Rotation formuliert sind, was nach dem Zerlegungssatz genau die relevanten Größen sind. Wir betrachten nun zunächst den *statischen Fall*, in dem die Ladungsdichte und die Stromdichte zeitlich konstant sind: $\dot{\varrho} = 0, \dot{\vec{j}} = 0$. Damit fallen alle zeitabhängigen Terme in den Maxwell-Gleichungen weg, und wir erhalten aus (I.1)–(I.4):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\varrho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}.\end{aligned}\tag{I.342}$$

Wir sehen, dass die Gleichungen für die Felder \vec{E} und \vec{B} entkoppeln. Für beide Felder sind Divergenz und Rotation festgelegt, so dass sie nach dem Eindeutigkeitssatz eindeutig bestimmt sind. Zudem kennen wir aus (I.324)–(I.327) die Lösungen für die Felder in Abhängigkeit von ϱ bzw. \vec{j} . Allerdings ist ein Punkt zu beachten: Die letzte Gleichung, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, verlangt zwingend, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ gilt. Dies sieht man unmittelbar, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die Divergenz nimmt. Gilt die Konsistenzbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ nicht, so ist die Gleichung nicht erfüllbar. Wir wissen aber bereits, dass es hier kein Problem gibt: Aus der Kontinuitätsgleichung (I.136) folgt für $\dot{\varrho} = 0$ in der Tat $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Wir sehen also die zentrale Rolle der Ladungserhaltung für die Maxwell-Gleichungen. Für die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ spielen diese Überlegungen keine Rolle, da die rechte Seite ohnehin verschwindet.

Wir kehren nun zurück zu den vollen Maxwell-Gleichungen (I.1)–(I.4). Auch hier liefert die Kontinuitätsgleichung (I.136) die Konsistenz der Gleichungen. Wir bilden auf beiden Seiten von (I.4) die Divergenz:

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.\tag{I.343}$$

Mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho/\epsilon_0$ und mit $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ führt dies sofort wieder auf die Kontinuitätsgleichung $\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Diese Überlegungen bilden den Hintergrund zum *Maxwellschen Verschiebungsstrom*, der historisch genau eingeführt wurde, um die Konsistenz der Gleichungen herzustellen. Wir betrachten noch $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Wenn wir hier auf beiden Seiten die Divergenz nehmen, erhalten wir $0 = \partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})/\partial t$, was aufgrund von (I.3) erfüllt ist.

Um nun die vollen Maxwell-Gleichungen, die ja \vec{E} und \vec{B} koppeln, im Rahmen des Zerlegungssatzes zu betrachten, schreiben wir gemäß Gl. (I.323)

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_T, \quad \vec{B} = \vec{B}_L + \vec{B}_T.\tag{I.344}$$

Unter Benutzung von (I.336) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L = \frac{\varrho}{\epsilon_0},\tag{I.345}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_L = 0,\tag{I.346}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_T = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}_L + \vec{B}_T),\tag{I.347}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_T = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_L + \vec{E}_T).\tag{I.348}$$

Die Divergenz der unteren beiden Gleichungen liefert die neuen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_L) = 0, \quad (\text{I.349})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L) = -c^2 \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varrho}{\epsilon_0} \right), \quad (\text{I.350})$$

wobei wir wieder die Kontinuitätsgleichung benutzt haben. Gleichungen (I.349), (I.350) ähneln sehr stark Gln. (I.345), (I.346), und man könnte versucht sein, (I.345) und (I.346) als redundant anzusehen. Wäre diese Überlegung korrekt, dann wären die Maxwell-Gleichungen (I.2),(I.4) ausreichend zur Beschreibung aller elektrodynamischen Phänomene! Man sieht aber sofort ein, dass dies nicht stimmt. Wenn wir (I.349),(I.350) über t aufintegrieren, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_L(\vec{x}, t) = f(\vec{x}), \quad (\text{I.351})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L(\vec{x}, t) = \frac{\varrho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0} + g(\vec{x}), \quad (\text{I.352})$$

mit zwei beliebigen *zeitunabhängigen* Funktionen f , g , die einfach die Integrationskonstanten bezüglich der Integration über t sind. Der entscheidende Punkt ist nun, dass wir *ohne* Gln. (I.345),(I.346) niemals wissen könnten, dass f und g identisch verschwinden. In diesem Sinne sind also (I.345) und (I.346) stärker und keineswegs redundant. Wir sehen nun aber auch, dass die Maxwell-Gleichungen *nicht überbestimmt* sind: Sind (I.345),(I.346) erfüllt, so auch (I.349),(I.350), und von den acht Maxwell-Gleichungen sind nur sechs wirklich unabhängig, genau so viele, wie für die Bestimmung der sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} benötigt werden.

II Elektrostatik und Magnetostatik

Nachdem wir im ersten Kapitel den kompletten Formalismus der Elektrodynamik entwickelt haben, wollen wir nun daran gehen, konkret Lösungen der Maxwellschen Gleichungen zu untersuchen. Wir betrachten zunächst den statischen Fall, und hier in erster Linie die Elektrostatik.

II.1 Poisson-Gleichung und Greensche Funktion

Wie wir in (I.342) bereits gesehen hatten, entkoppeln die Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} im statischen Fall. Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ können wir \vec{E} in der Form

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (\text{II.1})$$

schreiben. Eingesetzt in (I.342) liefert dies die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = -\frac{\varrho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.2})$$

Diese Gleichung ist die fundamentale Gleichung der Elektrostatik. Eine Lösung der Gleichung können wir unmittelbar aus (I.326) erhalten. Wir wollen hier aber einen etwas anderen Lösungsweg einschlagen, der uns später eine allgemeinere Untersuchung der Poisson-Gleichung und ihrer Lösungen erlauben wird. Dazu lösen wir statt (II.2) zunächst die Gleichung

$$\Delta G(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}). \quad (\text{II.3})$$

Diese ist offenbar die Poisson-Gleichung für eine Ladungsdichte $\varrho(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$, die eine Punktladung mit ‘Einheitsladung’ $q = 1$ beschreibt. Gelingt es uns, Gl. (II.3) lösen, so haben wir auch (II.2) gelöst. Denn für einen Punkt \vec{x} im betrachteten Volumen V ist

$$\int_V d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}') \varrho(\vec{x}') \quad (\text{II.4})$$

eine Lösung von (II.2), wie man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} \Delta \int_V d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}') \varrho(\vec{x}') &= \int_V d^3x' \Delta G(\vec{x} - \vec{x}') \varrho(\vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varrho(\vec{x}') \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Hier haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass der Laplace-Operator auf \vec{x} wirkt (und nicht auf die Integrationsvariable \vec{x}'). Man nennt die Funktion G , die (II.3) erfüllt, eine *Greensche Funktion* des Problems. Greensche Funktionen sind generell sehr nützlich bei der Behandlung von inhomogenen Differentialgleichungen. Wir erkennen am Ausdruck (II.4) unmittelbar den Vorteil der Greenschen Funktion: Die Funktion wird für eine gegebene Differentialgleichung bestimmt, ist aber *unabhängig* von der Inhomogenität ϱ auf der rechten Seite der Gleichung. Mit anderen Worten, kennt man einmal G , so erhält man für jedes beliebig vorgegebene ϱ jeweils eine Lösung in der Form (II.4), ohne dass man jedes Mal eine neue Differentialgleichung lösen muss.

In unserem speziellen Fall kennen wir eine Lösung von (II.3):

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|}. \quad (\text{II.6})$$

Diese folgt direkt aus der Identität (I.318). Eingesetzt in (II.4) erhalten wir damit für vorgegebenes ϱ die Lösung

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{II.7})$$

der Poisson-Gleichung. Diese Lösung stimmt mit der in (I.326) überein, wenn wir dort $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho/\epsilon_0$ einsetzen und den Randterm ignorieren. Sie verschwindet für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, wie man am Nenner $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ sieht, unter der Annahme, dass nur in einem begrenzten Bereich $\varrho \neq 0$ gilt.

Gleichung (II.7) hat eine einfache physikalische Interpretation: Zu integrieren ist über alle Punkte \vec{x}' , an denen die Ladungsdichte nicht verschwindet. Die Greensche Funktion beschreibt das Potential, das eine Punktladung, die in \vec{x}' sitzt, am Ort \vec{x} erzeugt. Das Integral sammelt also die Beiträge aller lokalen Ladungen zum Gesamtpotential. Allgemeiner zeigt (II.4), dass die Greensche Funktion in gewissem Sinne die Wirkung einer Quelle am Punkt \vec{x}' zum Ort \vec{x} „transportiert“, an dem man die Lösung $\varphi(\vec{x})$ der Differentialgleichung betrachtet.

Es bleiben allerdings zwei offene Punkte:

(i) In unserem speziellen Fall konnten wir G direkt an (I.318) ablesen. Es stellt sich aber die Frage, wie wir generell eine Greensche Funktion für eine Differentialgleichung bestimmen können, wenn wir das Ergebnis nicht bereits vorab kennen. Eine Technik dazu wird durch die Fourier-Transformation geliefert. Wir wollen diese Technik hier anwenden, um (II.6) zu reproduzieren. Wir schreiben dazu G als seine eigene Fourier-Inverse:

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{G}(\vec{k}), \quad (\text{II.8})$$

wobei $\tilde{G}(\vec{k})$ die Fourier-Transformierte von G ist. Wir setzen den Ausdruck in (II.3) ein. Die einzige Abhängigkeit von \vec{x} steckt im Exponenten, und die Anwendung des Laplace-Operators auf die Exponentialfunktion ergibt

$$\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (-\vec{k}^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{II.9})$$

da $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ und jedes $\vec{\nabla}$ eine innere Ableitung $i\vec{k}$ nach unten holt. Wir erhalten also aus (II.3)

$$\Delta G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} (-\vec{k}^2) \tilde{G}(\vec{k}) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{II.10})$$

Dabei haben wir auf der rechten Seite die δ -Funktion als Fourier-Transformierte „der Eins“ geschrieben. Wir vergleichen die Integranden im \vec{k} -Raum, die für alle \vec{x} übereinstimmen müssen, und finden

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\vec{k}^2}. \quad (\text{II.11})$$

Wir kennen also die Greensche Funktion im \vec{k} -Raum. Um $G(\vec{x})$ zu berechnen, müssen wir nur noch in (II.8) einsetzen und die d^3k -Integration ausführen. Dazu benutzen wir Kugelkoordinaten

mit dem Radius $k = |\vec{k}|$ und dem Winkel θ zwischen \vec{x} und \vec{k} :

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{k^2 dk d\cos\theta d\phi} \underbrace{d^3 k}_{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}} \frac{1}{\vec{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ik|\vec{x}|\cos\theta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty dk \frac{e^{ik|\vec{x}|} - e^{-ik|\vec{x}|}}{ik|\vec{x}|} \stackrel{y \equiv k|\vec{x}|}{=} \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x}| \epsilon_0} \int_0^\infty dy \frac{\sin y}{y} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|}, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

in Übereinstimmung mit (II.6). Der Weg über die Fourier-Transformierte ist häufig ein gutes Mittel zur Berechnung einer Greenschen Funktion für eine Differentialgleichung.

(ii) Offenbar kann aber (II.7) nicht einfach “die eindeutige” Lösung der Poisson-Gleichung sein. Denn man könnte stets zu φ noch eine Lösung der homogenen Gleichung, der sogenannten *Laplace-Gleichung*

$$\Delta\psi(\vec{x}) = 0, \quad (\text{II.13})$$

addieren. Dasselbe gilt für die Greensche Funktion. Um eine Lösung zu fixieren, brauchen wir *Randbedingungen*. Konkret werden wir die Lösung in einem Volumen suchen, wenn Eigenschaften der Lösung auf der *Oberfläche* des Volumens vorgeben sind. (Wie wir sehen werden, ist (II.7) die eindeutige Lösung, wenn wir als Randbedingung verlangen, dass φ im Unendlichen verschwindet.) Dies wird in den folgenden Abschnitten näher untersucht.

II.2 Randwertprobleme

Um Randbedingungen zu berücksichtigen, verallgemeinern wir die Greensche Funktion und schreiben

$$G(\vec{x}, \vec{x}') \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (\text{II.14})$$

mit einer Funktion F , die

$$\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad (\text{II.15})$$

erfüllt. Dabei ist \vec{x} der Punkt, an dem man das Potential anschaut, und \vec{x}' ein Punkt im Integrationsvolumen V , an dem die Ladungsdichte nicht verschwindet und daher zum Potential beiträgt. Die Abhängigkeit der Funktion F von \vec{x} und \vec{x}' muss nicht notwendigerweise von der Form $|\vec{x} - \vec{x}'|$ sein, aber wir wollen zumindest annehmen, dass F symmetrisch ist:

$$F(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}', \vec{x}). \quad (\text{II.16})$$

Dies ist in fast allen Anwendungen erfüllt. Es folgt, dass auch

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x}). \quad (\text{II.17})$$

Die Greensche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ in (II.14) löst

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{II.18})$$

wobei der Laplace-Operator nach \vec{x} ableitet. Gleichung (II.18) ist von nun an unsere definierende Gleichung für die Greensche Funktion. Mit ihr erhält man die Lösung

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') \quad (\text{II.19})$$

der Poisson-Gleichung.

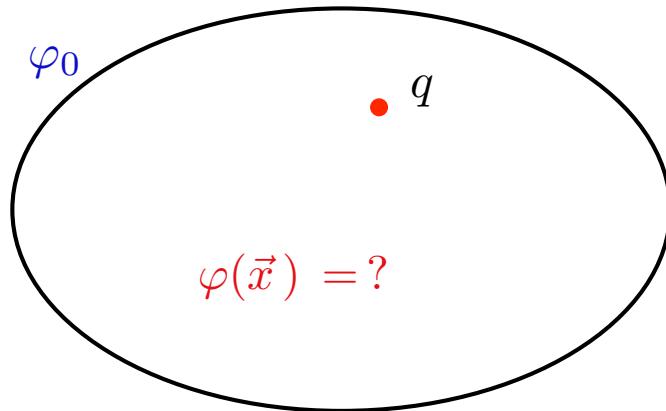


Abb. 6 — Punktladung an einem festen Ort in einer Kavität, deren Oberfläche auf konstantem Potential φ_0 liegen soll.

II.2.1 Typen von Randbedingungen

Viele praktische Probleme in der Elektrostatik sind nicht dadurch charakterisiert, dass man das Potential im ganzen \mathbb{R}^3 kennen will, mit $\varphi(\vec{x}) \rightarrow 0$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, sondern dadurch, dass man ein Volumen hat, in dem sich Ladungen befinden und auf dessen Oberfläche φ gewisse Randbedingungen erfüllen muss. Ein Beispiel ist in Abb. 6 gezeigt: Eine Punktladung befindet sich in einer Kavität, deren Oberfläche auf konstantem Potential φ_0 liegen soll. Gesucht ist das Potential $\varphi(\vec{x})$ in der gesamten Kavität. Es ist klar, dass das Potential $q/(4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|)$ einer Punktladung alleine nicht die Lösung des Problems darstellen kann, da dieses Potential sphärisch symmetrisch um die Punktladung ist und sicherlich nicht einen konstanten Wert auf der (elliptisch geformten) Oberfläche der Kavität hat. Wir werden Techniken entwerfen, mit denen wir Randwertprobleme dieser Art lösen können. Physikalisch erwarten wir, dass es eine Lösung gibt; wir werden sehen, dass diese eindeutig ist.

Allgemein sind für uns zwei Typen von Randbedingungen relevant:

- (i) *Dirichletsche Randbedingungen*. Hier ist das Potential φ auf der Oberfläche des Volumens vorgegeben. Es muss dort nicht unbedingt konstant sein wie im obigen Beispiel.
- (ii) *Neumannsche Randbedingungen*. Hier ist die Normalableitung des Potentials, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, auf der Oberfläche des Volumens vorgegeben. Diese ist nach Gl. (I.312) gegeben durch $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{n} = -\vec{n} \cdot \vec{E}$. Bei den Neumannschen Randbedingungen ist also die Komponente des elektrischen Feldes senkrecht zur Oberfläche des Volumens vorgegeben.

Darüberhinaus gibt es auch gemischte Randwertprobleme, bei denen auf Teilen der Oberfläche Dirichletsche und auf anderen Teilen Neumannsche Randbedingungen vorliegen.

Wir wollen zunächst untersuchen, was die physikalische Bedeutung dieser beiden Typen von Randbedingungen ist, bzw. wann diese physikalisch realisiert sein können. Dazu betrachten wir das linke Bild in Abb. 7, in der eine Grenzfläche zwischen zwei Medien gezeigt ist. Diese kann Ladungen tragen; die Flächenladungsdichte (Einheit C/m^2) sei mit σ bezeichnet. Wir legen nun wie gezeigt einen Kasten durch die Fläche. Dieser soll die Höhe Δx und die Deckelfläche ΔA

14.06.2022

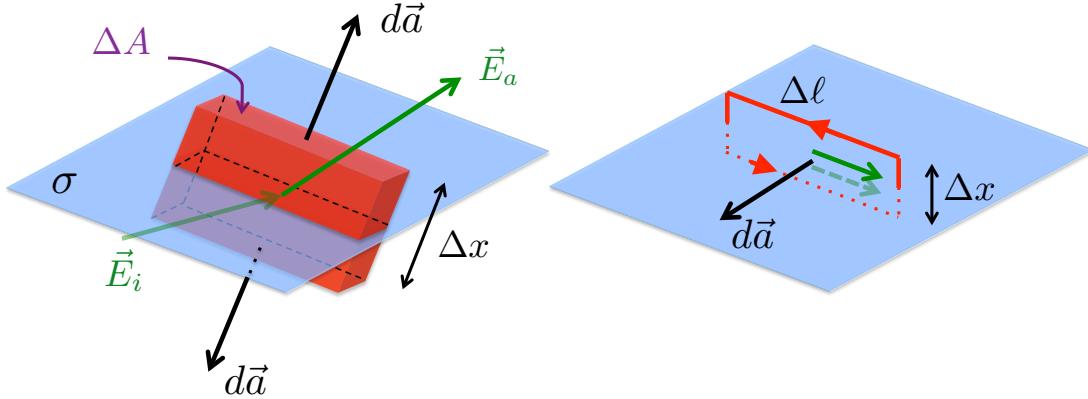


Abb. 7 — Links: “Gaußscher Kasten” auf Grenzfläche. Rechts: “Stokesche Fläche”.

haben. Wir sind interessiert am Limes $\Delta x \rightarrow 0$, der uns zeigen wird, wie sich das elektrische Feld genau an der Grenzfläche verhält. (Wir vernachlässigen Polarisationseffekte in den Medien, so dass wir die gewöhnlichen mikroskopischen Maxwell-Gleichungen benutzen können.) Nach dem Satz von Gauß haben wir

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E}, \quad (\text{II.20})$$

wobei das Integral rechts über alle Flächen des Kastens läuft. Im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ tragen nur die Flächen oben und unten bei, und das Integral wird

$$\oint_{\partial(V)} d\vec{a} \cdot \vec{E} = \Delta A \vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i), \quad (\text{II.21})$$

mit dem Normaleneinheitsvektor \vec{n} nach oben und den elektrischen Feldern \vec{E}_i, \vec{E}_a auf der “Innenseite” bzw. “Außenseite” der Fläche. Das relative Vorzeichen zwischen den beiden Feldern resultiert daher, dass die Normalenvektoren auf der Innenseite und der Außenseite entgegengesetzte Richtung haben. Die linke Seite von (II.20) werten wir unter Benutzung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ aus:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_V d^3x \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Delta A} \Delta A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta A, \quad (\text{II.22})$$

mit der Flächenladungsdichte σ . Aus den obigen Gleichungen erhalten wir also insgesamt

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.23})$$

Wir sehen, dass bei vorhandener Flächenladungsdichte $\sigma \neq 0$ die Komponente von \vec{E} senkrecht zur Grenzfläche einen endlichen Sprung macht, also eine Unstetigkeit hat. Da $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, bleibt das Potential dabei stetig.

Um die Komponente von \vec{E} parallel zur Grenzfläche zu untersuchen, betrachten wir die im rechten Bild in Abb. 7 gezeigte Fläche, die wir senkrecht zur Grenzfläche legen. Wir halten die eine Kantenlänge $\Delta\ell$ fest, schicken aber wieder $\Delta x \rightarrow 0$. Da $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, liefert der Satz von Stokes:

$$0 = \int_S d\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \oint_{\partial(S)} d\vec{s} \cdot \vec{E} \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} \Delta\ell (E_i^{\text{par}} - E_a^{\text{par}}), \quad (\text{II.24})$$

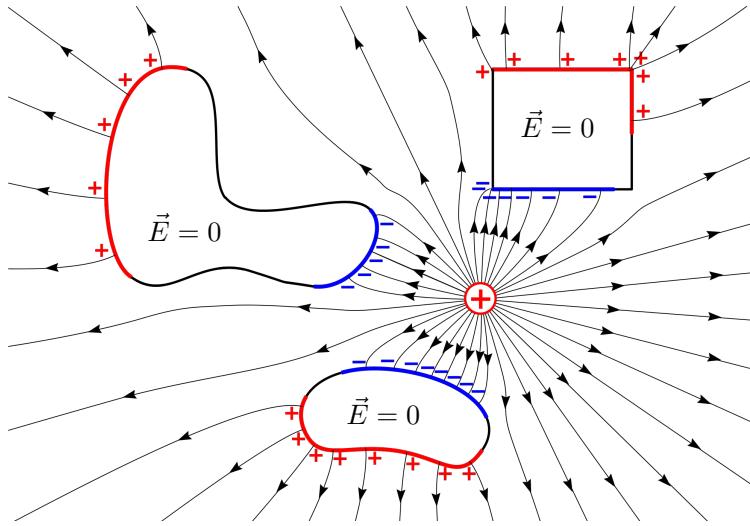


Abb. 8 — Punktladung und Feldlinien in Anwesenheit von Leitern. Aus: <http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics>.

wobei die Vorzeichen durch die Richtung von $d\vec{s}$ bestimmt sind. Diese Gleichung besagt, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche stetig ist, unabhängig von einer möglichen Flächenladung.

Wir wenden diese Überlegungen auf einen Leiter an. In einem Leiter gibt es frei bewegliche Ladungsträger. Dies führt dazu, dass das Innere eines Leiters stets feldfrei ist. Bringt man einen Leiter zum Beispiel in ein elektrisches Feld, so verschieben sich die Ladungen so lange, bis das resultierende Feld im Inneren verschwindet. Denn wäre $\vec{E} \neq 0$ im Inneren, so würden sich die freien Ladungen unter der daraus resultierenden Kraft bewegen. Aus dem Verschwinden des elektrischen Feldes folgt mit $\nabla \cdot \vec{E} = \varrho/\epsilon_0$ unmittelbar, dass auch die Ladungsdichte im Inneren des Leiters Null ist. Dies bedeutet, dass sich jegliche Netto-Ladung eines Leiters stets auf seiner Oberfläche befinden muss. Bringt man einen neutralen Leiter in die Nähe einer z.B. positiven Ladung, so wird auf seiner Oberfläche eine Ladung *influenziert*. Auf der der Ladung zugewandten Seite des Leiters sammelt sich negative Ladung, auf der abgewandten Seite positive. Auf diese Weise hat die Oberfläche des Leiters dann eine lokal von Null verschiedene Ladungsdichte, auch wenn die Gesamtladung des Leiters verschwindet.

Wenden wir diese Überlegungen auf (II.23) an, so erhalten wir wegen $\vec{E}_i = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_a = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (\text{II.25})$$

mit der lokalen Flächenladungsdichte, die wie beschrieben auch influenziert sein kann. Da auch die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes im Inneren des Leiters verschwindet, folgt nach (II.24), dass auch $E_a^{\text{par}} = 0$. Dies ist unmittelbar einsichtig: Gäbe es ein elektrisches Feld längs der Oberfläche des Leiters, so würden die Elektronen sofort darauf reagieren und sich so lange bewegen, bis am Ende kein Feld mehr vorhanden wäre. Senkrecht zum Leiter können sich die Elektronen natürlich nicht bewegen, da sie den Leiter im Allgemeinen nicht verlassen

können. Auf diese Weise gelangen wir zu dem Schluss, dass das elektrische Feld stets *senkrecht* auf der Oberfläche eines Leiters steht, wie in Abb. 8 illustriert.

Hieraus folgt weiter, dass die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche ist. Dazu betrachten wir zwei beliebige Punkte \vec{x}_a, \vec{x}_b auf der Oberfläche, sowie eine parametrisierte Kurve $\vec{x}(t)$, die die beiden Punkte verbindet. Dann ist (siehe Anhang B)

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{E}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = - \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \\ &= - \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\varphi(\vec{x}(t))}{dt} = \varphi(\vec{x}_a) - \varphi(\vec{x}_b). \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Die linke Seite der Gleichung verschwindet aber, da $d\vec{s}$ in der Fläche liegt, auf die aber \vec{E} stets senkrecht steht. Also ist $\varphi(\vec{x}_a) = \varphi(\vec{x}_b)$.

Anhand dieser Überlegungen sehen wir, dass die Dirichletsche Randbedingung gut anwendbar auf Leiter ist, da diese eine Oberfläche auf einem festen Potential haben. Auch die Neumannsche Randbedingung passt hier: Geben wir zum Beispiel eine Ladungsdichte auf der Oberfläche des Leiters vor, so entspricht diese nach (II.25) einer vorgegebenen Normalkomponente des elektrischen Felds, was genau eine Neumannsche Randbedingung ist (man kann sogar zeigen (sog. zweiter Eindeutigkeitssatz), dass bei einem System aus Leitern die Angabe der *Gesamtladung* eines jeden Leiters ausreicht, um das elektrische Feld eindeutig festzulegen). Auch für Isolatoren, die eine Ladung auf Ihrer Oberfläche tragen, findet die Neumannsche Randbedingung Anwendung.

Bevor wir Lösungen der Poisson-Gleichung mit Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen erarbeiten, zeigen wir zunächst, dass solche Lösungen eindeutig sind. Dies ist der *erste Eindeutigkeitssatz*. Der Beweis ist sehr ähnlich zu dem des Eindeutigkeitssatzes in Abschnitt I.7.3. Wir nehmen an, dass wir zwei Lösungen $\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x})$ haben, die die Poisson-Gleichung im betrachteten Volumen V erfüllen, und für die entweder $\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x})$ oder aber $\frac{\partial \varphi_1(\vec{x})}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2(\vec{x})}{\partial n}$ auf der Oberfläche des Volumens gilt. Wir definieren nun $\psi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$. ψ erfüllt die Laplace-Gleichung,

$$\Delta \psi(\vec{x}) = 0, \quad (\text{II.27})$$

mit den Randbedingungen

$$\psi(\vec{x}) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} = 0, \quad (\text{II.28})$$

für $\vec{x} \in \mathcal{O}(V)$. Wir benutzen nun wieder das erste Greensche Theorem (I.315) und setzen dort $\varphi = \psi$:

$$\int_V d^3x \left(\psi \underbrace{\Delta \psi}_{=0} + (\vec{\nabla} \psi)^2 \right) = \oint_{\mathcal{O}(V)} da \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi = 0. \quad (\text{II.29})$$

Die rechte Seite verschwindet nach (II.28) für beide Typen von Randbedingungen. Damit muss also gelten

$$\int_V d^3x (\vec{\nabla} \psi)^2 = 0. \quad (\text{II.30})$$

Dies kann nur erfüllt werden durch $\vec{\nabla} \psi = 0$, also $\psi = \text{const}$, also $\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x}) + \text{const}$ in ganz V . Für Dirichletsche Randbedingungen ist $\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x})$ auf der Oberfläche des Volumens. Da das Potential stetig ist, muss damit die Konstante verschwinden, und die Eindeutigkeit der

Lösung ist gezeigt. Für Neumannsche Randbedingungen können wir diesen Schluss nicht ziehen, da die Randbedingung über die Ableitung des Potentials definiert ist, zu der die Konstante nicht beiträgt. Das Potentialproblem mit Neumannschen Randbedingungen ist daher nur bis auf eine Konstante eindeutig zu lösen. Diese Konstante hat allerdings für physikalisch wirkliche relevante Größen wie das elektrische Feld keine Bedeutung.

Wir können also durch Angabe von Dirichletschen *oder* Neumannschen Randbedingungen eine (praktisch) eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung erhalten. Hieraus folgt unmittelbar, dass man im Allgemeinen nicht gleichzeitig *beide* Typen von Randbedingungen vorgeben kann, da das Problem dann in der Regel überbestimmt ist. Es sei noch bemerkt, dass die Lösung (II.7) die Randbedingung $\varphi = 0$ für $|\vec{x}| = \infty$ erfüllt. Diese Randbedingung ist vom Dirichlet-Typ, wobei das Volumen der ganze \mathbb{R}^3 ist. Die Lösung ist damit für diese Randbedingung eindeutig, wie bereits früher erwähnt.

II.2.2 Greensche Funktionen für Randwertprobleme

Wir haben die Greensche Funktion bereits als Hilfsmittel zur Lösung der Poisson-Gleichung kennengelernt. Wir werden sie nun benutzen, um Randwertprobleme zu lösen. Wie in Gl. (II.18) gesehen, ist $G(\vec{x}, \vec{x}')$ Lösung von

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (\text{II.31})$$

Für die Poisson-Gleichung ist G von der Form

$$G(\vec{x}, \vec{x}') \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (\text{II.32})$$

wobei F die Laplace-Gleichung $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ löst und genutzt wird, um die Randbedingungen zu erfüllen. Die Greensche Funktion soll eine symmetrische Funktion ihrer Argumente sein, also $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$. Zusammen mit (II.31) folgt hieraus

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (\text{II.33})$$

wobei der Laplace-Operator Δ' nach \vec{x}' ableitet. Denn es ist

$$\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = \Delta' G(\vec{x}', \vec{x}) = [\Delta G(\vec{x}, \vec{x}')]_{\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'} \stackrel{(\text{II.31})}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) = \Delta G(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (\text{II.34})$$

Um nun allgemeine Lösungen für Dirichletsche oder Neumannsche Randwertprobleme zu konstruieren, benutzen wir das zweite Greensche Theorem (I.317), bei dem wir $\psi \equiv G(\vec{x}, \vec{x}')$ setzen und φ als das gesuchte Potential ansetzen. Dabei schreiben wir überall \vec{x}' als Integrationsvariable, da \vec{x} reserviert ist als "externe" Variable, an der wir das Potential berechnen möchten (entsprechend schreiben wir auch das Flächenintegral als $\oint da'$ und die Normalableitung als $\partial/\partial n' = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}'$). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_V d^3x' \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\Delta' \varphi(\vec{x}')}_{\stackrel{(\text{II.2})}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{x}')} - \varphi(\vec{x}') \underbrace{\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{\stackrel{(\text{II.33})}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')} \right] \\ &= \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \left[\frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Der zweite Term auf der linken Seite kann mittels der δ -Funktion leicht ausgewertet werden und liefert einfach $\varphi(\vec{x})/\epsilon_0$. Wir bringen alle anderen Terme auf die rechte Seite und multiplizieren die Gleichung mit ϵ_0 . Dies führt auf

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') + \epsilon_0 \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \left[\frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right]. \quad (\text{II.36})$$

Dies ist bereits die formale Lösung der Randwertprobleme! Wir sehen, dass der erste Term von der bekannten Form (II.19) ist. Der zweite Term ist ein Integral über die Oberfläche des Volumens. In ihm tritt das Potential bzw. seine Normalableitung auf der Oberfläche auf – genau die Größen, die in den Dirichletschen bzw. Neumannschen Randbedingungen vorgegeben sind. Wir können also diese Randbedingungen jetzt relativ leicht einarbeiten. Wie wir bereits wissen, erhalten wir in beiden Fällen eine eindeutige Lösung (im Neumann-Fall bis auf eine Konstante).

(i) Dirichletsche (D) Randbedingungen. Hier ist $\varphi(\vec{x})$ auf der Oberfläche vorgegeben. Wir möchten daher gerne den zweiten Term im Oberflächenintegral in (II.36) behalten und den ersten eliminieren. Dies geschieht durch die Wahl

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') \equiv 0 \quad \forall \vec{x}' \in \mathcal{O}(V) \quad (\text{II.37})$$

für die Greensche Funktion. Damit wird das Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') - \epsilon_0 \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}. \quad (\text{II.38})$$

Wir benutzen hier also die Freiheit, die die Funktion F in (II.32) bietet, um die Greensche Funktion auf der Oberfläche verschwinden zu lassen. Innerhalb des Volumens muss sie natürlich nach wie vor die definierende Gleichung (II.31) erfüllen. Hat die Greensche Funktion diese beiden Eigenschaften, so ist (II.38) die eindeutige Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Man beachte, dass alle Größen auf der rechten Seite von (II.38) vorgegeben sind bzw. bekannt sind, wenn G_D bekannt ist.

(ii) Neumannsche (N) Randbedingungen. Hier ist $\partial\varphi/\partial n$ auf der Oberfläche des Volumens vorgegeben. Nach den Erfahrungen im Dirichlet-Fall möchten wir hier gerne den ersten Term im Oberflächenintegral in (II.36) behalten und den zweiten eliminieren. Letzteres ließe sich erreichen durch die Wahl

$$\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \equiv 0 \quad \forall \vec{x}' \in \mathcal{O}(V). \quad (\text{II.39})$$

Diese Wahl ist allerdings nicht möglich; sie führt zu einem Widerspruch. Dazu betrachten wir

$$\int_V d^3x' \Delta' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \stackrel{(\text{II.31})}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.40})$$

Andererseits können wir die linke Seite mit (I.313) auswerten:

$$\int_V d^3x' \Delta' G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \stackrel{(\text{II.39})}{=} 0. \quad (\text{II.41})$$

Um diese Inkonsistenz loszuwerden, treffen wir statt (II.39) folgende Wahl:

$$\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \equiv -\frac{1}{\epsilon_0 A} \quad \forall \vec{x}' \in \mathcal{O}(V), \quad (\text{II.42})$$

wobei A den Flächeninhalt der Oberfläche des Volumens bezeichnet. Mit dieser Wahl wird (II.41) zu

$$\int_V d^3x' \Delta' G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 A} \oint da' = -\frac{1}{\epsilon_0} , \quad (\text{II.43})$$

was nun konsistent ist mit (II.40). Die Wahl (II.42) bedeutet, dass der zweite Term im Oberflächenintegral in (II.36) nicht verschwindet. Allerdings ist er konstant:

$$-\epsilon_0 \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = \frac{1}{A} \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \varphi(\vec{x}') \equiv \varphi_0 . \quad (\text{II.44})$$

Dabei ist φ_0 gewissermaßen der Mittelwert des Potentials über $\mathcal{O}(V)$. Dieser ist eine Konstante; wir erhalten also aus (II.36):

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi_0 = \int_V d^3x' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') + \epsilon_0 \oint_{\mathcal{O}(V)} da' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} \quad (\text{II.45})$$

als Lösung des Neumannschen Randwertproblems. Die Tatsache, dass dabei eine zusätzliche Konstante auftritt, stört uns nicht weiter – wir wissen ja, dass das Neumannsche Randwertproblem nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Die Greensche Funktion G_N muss hier also (II.31) und (II.42) erfüllen; ist sie bekannt, so sind alle Größen auf der rechten Seite von (II.45) vorgegeben bzw. bekannt, und wir haben die Lösung $\varphi(\vec{x})$ des Problems, die die Poisson-Gleichung in V und alle Randbedingungen auf $\mathcal{O}(V)$ korrekt erfüllt.

Wir erkennen insgesamt die physikalische Interpretation der Greenschen Funktion in (II.32): Innerhalb von V löst sie die Poisson-Gleichung für eine Punktladung mit Ladung $q = 1$. Zusammen mit der Ladungsdichte ϱ führt dies zu einem Beitrag zum Potential. Die zusätzliche Funktion $F(\vec{x}, \vec{x}')$ erfüllt *innerhalb* des Volumens die Laplace-Gleichung, also die Poisson-Gleichung mit Ladungsdichte $\varrho = 0$. Wir können uns F daher vorstellen als Potential von Punktladungen, die sich *außerhalb* des betrachteten Volumens befinden. Zusammen mit der Einheitsladung im Volumen sorgt F dann dafür, dass die Randbedingungen für G erfüllt werden. Dies muss gehen, da wir aus physikalischer Sicht wissen, dass es eine Lösung des Problems mit Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen geben muss. Die Greensche Funktion ist bestimmt durch die *Geometrie* des Problems, aber sie ist unabhängig von der vorgegebenen Ladungsdichte und den Randbedingungen an das Potential. Genau dieses soeben beschriebene physikalische Bild machen wir uns im nächsten Abschnitt zunutze, in dem wir Beispiele zur Berechnung von Greenschen Funktionen untersuchen.

II.2.3 Methode der Spiegelladungen

21.06.2022

Wir betrachten das linke Bild in Abb. 9. Dort ist eine leitende Kugel mit Radius R gezeigt, deren Oberfläche auf dem konstanten Potential φ_0 gehalten wird. Das Potential soll ferner im Unendlichen verschwinden. Gesucht ist das Potential $\varphi(\vec{x})$ im gesamten Außenraum der Kugel. Wir betrachten nun das rechte Bild, in dem eine Punktladung zu sehen ist. Sie erzeugt das Potential

$$\varphi_{\text{Lad.}}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|} . \quad (\text{II.46})$$

Im Abstand R von der Punktladung hat dieses den Wert

$$\varphi_{\text{Lad.}}(\vec{x})|_{|\vec{x}|=R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} . \quad (\text{II.47})$$

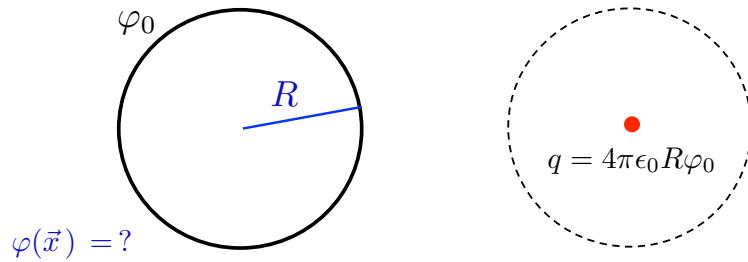


Abb. 9 — Links: Leitende Kugel auf festem Potential φ_0 . Wir suchen das Potential im gesamten Außenraum der Kugel. Rechts: Punktladung mit $q = 4\pi\epsilon_0 R \varphi_0$, die bei $|\vec{x}| = R$ dasselbe Potential φ_0 hat wie die Kugel.

Nehmen wir an, q habe den Wert $q = 4\pi\epsilon_0 R \varphi_0$. Dann ist das Potential

$$\varphi_{\text{Lad.}}(\vec{x}) = \varphi_0 \frac{R}{|\vec{x}|}. \quad (\text{II.48})$$

Dieses Potential hat den korrekten Wert φ_0 bei $|\vec{x}| = R$, und es verschwindet für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Damit erfüllt es die Randbedingungen für das Problem mit der leitenden Kugel. Da die Lösung eines Dirichletschen Randwertproblems – und ein solches haben wir hier offenbar – eindeutig ist, muss $\varphi_{\text{Lad.}}$ aus (II.48) auch das korrekte Ergebnis für das Potential im Außenraum der Kugel sein! Anders gesagt, wir konnten das gesuchte Potential mit Randbedingungen erhalten, in dem wir eine Ladung in einem Bereich platzierten, der *außerhalb* des uns interessierenden Volumens liegt. Diese Ladung sorgt dann dafür, dass die gewünschten Randbedingungen des eigentlichen Problems respektiert werden. Man nennt eine solche “fiktive” Ladung *Ersatzladung* oder auch *Spiegelladung* (aus Gründen, die im nächsten Beispiel klar werden), oder häufig auch *Bildladung*. Die Eindeutigkeit der Lösungen der Randwertprobleme ist hier essentiell: Gelingt es uns, eine passende Lösung anhand z.B. von Symmetrien eines Problems zu erraten oder zu konstruieren, so ist dies automatisch auch *die* Lösung des Problems. Man beachte, dass der Ausdruck (II.48) das Potential der Kugel natürlich nur in deren Außenraum korrekt liefert (im Innenraum ist das Potential konstant).

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel. Das linke Bild in Abb. 10 zeigt eine Punktladung vor einer leitenden Ebene, die geerdet sein soll, so dass sie auf Potential Null liegt. Wir legen die Ebene in die (x, y) -Ebene. Wir verlangen, dass das Potential auch im Unendlichen verschwinden soll, so dass die Randbedingung insgesamt stetig ist. Wir haben also die Bedingungen

$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad \varphi(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad (|\vec{x}| \rightarrow \infty). \quad (\text{II.49})$$

Gesucht ist das Potential im ganzen Halbraum $z \geq 0$. Der Ortsvektor der Punktladung sei

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (\text{II.50})$$

Es ist aus Symmetriegründen unmittelbar klar, dass wir das Potential auf der Ebene zum Ver-

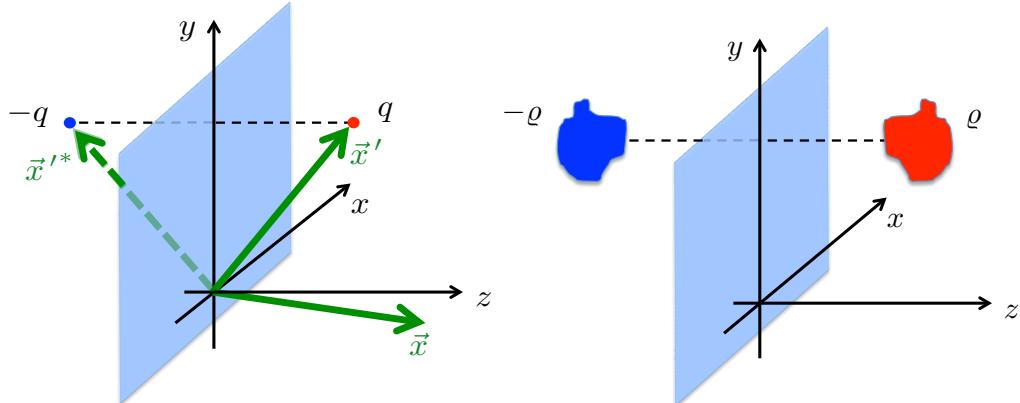


Abb. 10 — Links: Punktladung vor leitender geerdeter Ebene. Rechts: Ladungswolke vor Ebene.

schwinden bringen können, wenn wir eine *Spiegelladung* $-q$ in den Punkt

$$\vec{x}'^* = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

(siehe Bild) legen, der außerhalb des von uns betrachteten Volumens liegt. Denn nun haben alle Punkte auf der Ebene denselben Abstand zu beiden Ladungen, und da die Ladungen entgegengesetztes Vorzeichen haben, löschen sich ihre Potentiale auf der Ebene aus. Mit der Spiegelladung haben wir insgesamt

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'^*|} \right). \quad (\text{II.52})$$

Man sieht leicht, dass bei $z = 0$ wirklich $|\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x} - \vec{x}'^*|$ und damit $\varphi = 0$. Ebenso verschwindet das Potential wie gewünscht bei $|\vec{x}| = \infty$. Damit ist φ die eindeutige Lösung dieses Dirichletschen Randwertproblems im relevanten Volumen $z \geq 0$. Da wir Punktladungen betrachtet haben, können wir auch sofort die Greensche Funktion des Problems angeben, indem wir einfach $q = 1$ setzen:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'^*|} \right), \quad (\text{II.53})$$

wobei \vec{x}'^* wieder durch Spiegelung des Vektors \vec{x}' an der Ebene entsteht. Die Greensche Funktion verschwindet, wenn \vec{x}' in der Ebene liegt. Sie erfüllt

$$\begin{aligned} \Delta G_D(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{\epsilon_0} [\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'^*)] \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Denn da \vec{x}'^* nicht im betrachteten Volumen $z > 0$ liegt, trägt die zweite δ -Funktion nie bei. Damit erfüllt G_D die definierende Gleichung (II.18). Anders gesagt, entspricht der zweite Term in (II.53) genau der Funktion $F(\vec{x}, \vec{x}')$ aus (II.14), die $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ im Volumen erfüllt.

Der große Vorteil der Greenschen Funktion ist, dass wir mit ihr jedes weitere Dirichlet-Problem an der Ebene lösen können. Nur die Geometrie des Systems geht in G_D ein; die Ladungsdichte und die Randbedingungen können beliebig vorgegeben werden. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollen jetzt eine ganze Ladungs“wolke“, beschrieben durch eine Ladungsdichte ϱ , vor die Ebene legen (siehe rechtes Bild in Abb. 10). Dann brauchen wir nur zu (II.38) zurückzugehen, um die korrekte Lösung des Problems zu erhalten. Wenn die Ebene weiterhin auf Potential Null ist, erhalten wir

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}'). \quad (\text{II.55})$$

Auch Lösungen mit einem anderen Wert des Potentials auf der Ebene folgen sofort aus Gl. (II.38).

Es sei noch bemerkt, dass man anhand der Lösung $\varphi(\vec{x})$ das elektrische Feld berechnen kann. Man findet, dass es an jedem Punkt der Ebene senkrecht zur Ebene steht, genau, wie wir dies in Abschnitt II.2.1 diskutiert hatten. Nach Gl. (II.25) folgt aus der Normalkomponente des elektrischen Feldes eine Flächenladungsdichte σ , die wir aus dem Potential berechnen können. Da der Normalenvektor auf die Ebene in die z -Richtung zeigt, erhalten wir:

$$\sigma = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{z=0}. \quad (\text{II.56})$$

Die Flächenladungsdichte σ wird durch die Anwesenheit der Punktladung q *influiert*. Für das Potential in (II.52) wird nach kurzer Rechnung

$$\sigma(x, y) = -\frac{q z'}{2\pi ((x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (\text{II.57})$$

Hiermit können wir die gesamte Ladung q' berechnen, die auf der Ebene influenziert wird:

$$\begin{aligned} q' &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(x, y) = -\frac{q z'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= -q. \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Wir sehen also, dass obschon die Spiegelladung selbst “fiktiv” ist und nicht wirklich eine physikalische Ladung am Ort $(x', y', -z')$ darstellt, ihr Effekt der Influenzierung einer Ladung auf der leitenden Ebene sehr wohl physikalisch ist! (Ebenso trägt die Kugel im Beispiel in Abb. 9 (links) wirklich die Ladung q auf ihrer Oberfläche.)

Zum Abschluss betrachten wir noch ein Beispiel mit einer etwas komplizierteren Geometrie. Abbildung 11 zeigt wieder eine leitende Kugel, in deren Außenraum sich eine Punktladung q befindet. Das Potential auf der Kugel soll verschwinden, und ebenso für $|\vec{x}| = \infty$. Wir suchen das Potential im gesamten Außenraum der Kugel. Die Punktladung liegt im Punkt

$$\vec{x}' = |\vec{x}'| \vec{n} \equiv r' \vec{n}, \quad (\text{II.59})$$

wobei \vec{n} ein Einheitsvektor in Richtung der Punktladung ist. Wir wollen auch hier die Spiegelladungsmethode anwenden. Wenn das Problem mit einer einzigen Spiegelladung q^* lösbar ist, dann muss diese aus Symmetriegründen auf der durch \vec{n} gegebenen Achse platziert werden. Wir setzen also an:

$$\vec{x}'^* = r'^* \vec{n}. \quad (\text{II.60})$$

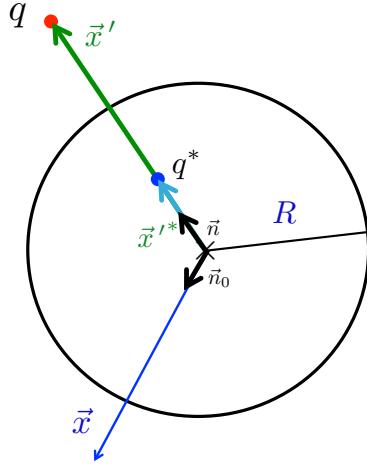


Abb. 11 — Punktladung vor leitender Kugel.

Die beiden Ladungen liefern zusammen das Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{q^*}{|\vec{x} - \vec{x}'^*|} \right). \quad (\text{II.61})$$

Das Potential soll auf $|\vec{x}| = R$ verschwinden. Wir schreiben einen Vektor mit $|\vec{x}| = R$ als

$$\vec{x} = R \vec{n}_0, \quad (\text{II.62})$$

mit einem Einheitsvektor \vec{n}_0 . Das Potential bei $|\vec{x}| = R$ wird damit

$$\begin{aligned} \varphi(R \vec{n}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|R \vec{n}_0 - r' \vec{n}|} + \frac{q^*}{|R \vec{n}_0 - r'^* \vec{n}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q/R}{|\vec{n}_0 - \frac{r'}{R} \vec{n}|} + \frac{q^*/r'^*}{|\vec{n} - \frac{R}{r'^*} \vec{n}_0|} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Da für zwei Einheitsvektoren \vec{n}, \vec{n}_0 stets $|\vec{n}_0 - \alpha \vec{n}| = |\vec{n} - \alpha \vec{n}_0|$ gilt (für beliebiges α), verschwindet der Ausdruck in der zweiten Zeile, wenn

$$\frac{r'}{R} = \frac{R}{r'^*}, \quad \text{und zugleich} \quad \frac{q}{R} = -\frac{q^*}{r'^*}. \quad (\text{II.64})$$

Denn dann sind die Nenner in (II.63) identisch und die Zähler haben entgegengesetztes Vorzeichen, aber gleichen Betrag. Wir haben also

$$r'^* = \frac{R^2}{r'}, \quad q^* = -q \frac{R}{r'}. \quad (\text{II.65})$$

Damit wird das Potential für beliebiges \vec{x} im Außenraum der Kugel:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/r'}{|\vec{x} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{x}'|} \right). \quad (\text{II.66})$$

Man kann auch in diesem Beispiel zeigen, dass auf der Kugeloberfläche genau die Gesamtladung $q^* = -q R/r'$ influenziert wird. (Ein ähnliches Beispiel wird in den Übungen behandelt.)

Wir erhalten auch sofort wieder die Greensche Funktion des Problems:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/r'}{|\vec{x} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{x}'|} \right), \quad (\text{II.67})$$

wieder mit $r' = |\vec{x}'|$. Sie ist symmetrisch unter $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$, erfüllt $\Delta G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ im Außenraum der Kugel, sowie $G_D = 0$ für \vec{x}' auf der Oberfläche der Kugel. Sie liefert die komplette Lösung des Problems: Für beliebige Ladungsdichte im Außenraum, sowie beliebig vorgegebenes Potential auf der Oberfläche ist nach (II.38)

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') - \epsilon_0 \oint_{\mathcal{O}(V)} da' \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} . \quad (\text{II.68})$$

Setzen wir z.B. $\varrho = 0$ und verlangen $\varphi(\vec{x}') = \varphi_0$ auf der Oberfläche, so gelangen wir zurück zum Potential (II.48) des Problems, das wir zu Beginn dieses Abschnitts betrachtet haben (um dies explizit zu sehen, muss man allerdings das Oberflächenintegral in (II.68) berechnen). Schließlich kann man auch den Fall behandeln, dass sich die Punktladung q im *Inneren* der Kugel befindet. Die Rechnung verläuft nahezu identisch. Dies wird ebenfalls in den Übungen behandelt.

II.2.4 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

23.06.2022

Die Methode der Spiegelladungen ist insgesamt recht anschaulich; allerdings funktioniert sie in der Regel nur für Probleme mit sehr einfachen Geometrien. Wir wollen nun eine systematischere Methode diskutieren, die viel allgemeinere Anwendung besitzt. Die Idee ist hier, die Greensche Funktion (oder das Potential selbst) nach geeigneten Basisfunktionen zu entwickeln, so dass man die Randbedingungen des Problems über die Entwicklungskoeffizienten einarbeiten kann. Es gibt viele verschiedene Sätze von Basisfunktionen. Welche man wählt, hängt von der Geometrie des Problems ab. Bei einer geschickten Wahl sind unter Umständen nur einige wenige der Entwicklungskoeffizienten wichtig, was die Lösung des Problems erleichtert.

Wir werden hier einen besonders wichtigen Satz von Basisfunktionen diskutieren, der speziell bei (nahezu) sphärisch-symmetrischen Problemen angewendet wird. Wir betrachten dazu die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ in Kugelkoordinaten. Die Laplace-Gleichung ist für uns ja von zentraler Bedeutung: Können wir diese Gleichung für ein Problem lösen, so kennen wir (siehe (II.14)) auch die Greensche Funktion des Problems und damit das Potential für gegebene Randbedingungen. Aus (I.319) kennen wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten. Nach Multiplikation mit r^2 wird die Laplace-Gleichung für $f(r, \theta, \phi)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (\text{II.69})$$

Wir sehen, dass die Ableitungen nach r, θ, ϕ additiv auftreten und nicht gemischt. Wann immer dies bei partiellen Differentialgleichungen der Fall ist, bietet sich ein *Separationsansatz* an. Wir trennen die r -Abhängigkeit von den Winkelabhängigkeiten und setzen:

$$f(r, \theta, \phi) \equiv R(r) Y(\theta, \phi) . \quad (\text{II.70})$$

Dies setzen wir in die Laplace-Gleichung ein und dividieren durch $R(r)Y(\theta, \phi)$. Wir erhalten

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) = 0 . \quad (\text{II.71})$$

Dabei konnten wir für den Radialanteil die gewöhnliche Ableitung schreiben, da R nur von einer Variablen abhängt. Man sieht, dass die linke Seite von (II.71) die Summe von zwei Termen ist, von denen der erste *nur* von r und der zweite nur von θ, ϕ abhängt. Die Summe muss aber für alle r, θ, ϕ verschwinden. Dies geht nur, wenn beide Terme separat (und entgegengesetzt) konstant sind, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) &= \text{const} \equiv \ell(\ell+1), \\ \frac{1}{Y} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) &= -\text{const} \equiv -\ell(\ell+1), \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

wobei wir die Konstante auf etwas ungewöhnliche Weise als $\ell(\ell+1)$ geschrieben haben, aus gutem Grund, wie wir gleich sehen werden. Die erste Gleichung in (II.72) ist rasch gelöst. Mit der Identität $\frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = r \frac{d^2 R}{dr^2} (rR)$, die man einfach nachrechnet, schreiben wir sie um zu

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (rR). \quad (\text{II.73})$$

Gesucht ist also eine Funktion, deren zweite Ableitung $\sim 1/r^2$ mal der Funktion ist. Dieses Verhalten ist typisch für eine Potenzfunktion der Form $R \sim r^\alpha$. Wir setzen diesen Ansatz ein und erhalten sofort $\alpha = \ell$ oder $\alpha = -\ell - 1$. Da die Differentialgleichung linear ist, ist damit die allgemeine Lösung

$$R(r) = a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}. \quad (\text{II.74})$$

Man sieht, dass die beiden Terme verschiedenes Verhalten für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ haben.

Der Grund für die gewählte Form der Konstanten in Gl. (II.72) ist natürlich, dass wir aus der Quantenmechanik wissen, dass die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ genau die Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (\text{II.75})$$

lösen, als Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators \hat{L}^2 im Ortsraum (der seinerseits gerade proportional zum Winkelanteil des Laplace-Operators ist). Wie wir sehen, tritt in den $Y_{\ell m}$ zusätzlich zum Parameter ℓ , der ja direkt in der Differentialgleichung (II.75) steht, noch ein Parameter m auf. (Er ist die neue Konstante, die man in einem weiteren Separationsansatz $Y(\theta, \phi) = T(\theta)P(\phi)$ brauchen würde.) ℓ und m nehmen dabei nur bestimmte Werte an. Sie sind ganzzahlig, und es gilt (vgl. die quantisierten Drehimpulse in der Quantenmechanik!)

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, 2, 3, \dots, \\ -\ell &\leq m \leq \ell. \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

Damit gibt es für gegebenes ℓ genau $2\ell + 1$ mögliche Werte von m . Explizit ist

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\text{II.77})$$

mit den *zugeordneten Legendre-Polynomen*

$$P_\ell^m(y) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-y^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dy^{\ell+m}} (y^2 - 1)^\ell = (-1)^m (1-y^2)^{m/2} \frac{d^m}{dy^m} P_\ell(y). \quad (\text{II.78})$$

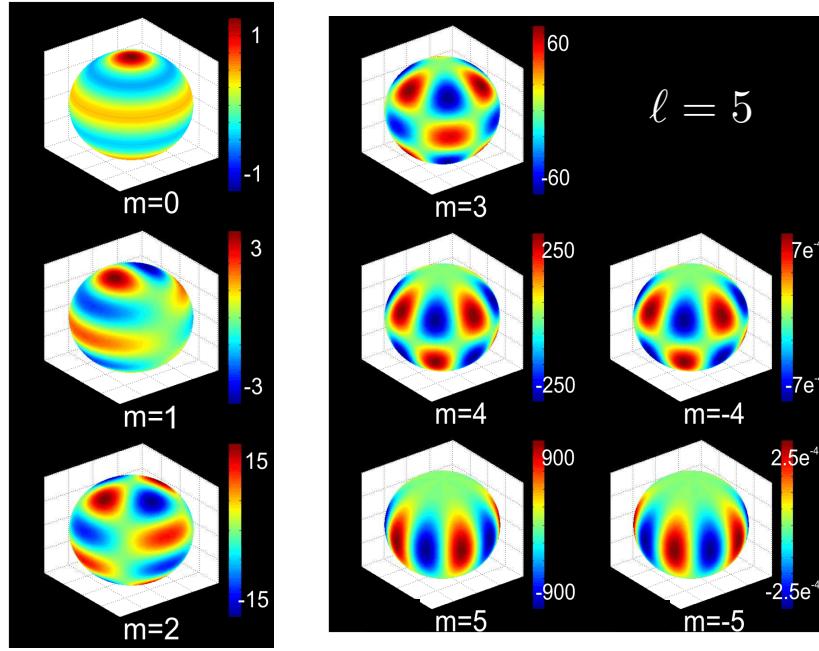


Abb. 12 — Kugelflächenfunktionen. Gezeigt ist der Realteil von $Y_{\ell=5,m}$. Für rot gezeigte Bereiche ist die Funktion positiv, für blaue negativ. (Aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen>)

Die P_ℓ sind die *gewöhnlichen Legendre-Polynome*, deren Definition man am Vergleich der beiden rechten Seiten abliest. Anhand von (II.77),(II.78) finden wir zum Beispiel

$$\begin{aligned}
 Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_{11}(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 Y_{22}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad Y_{21}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \\
 Y_{20}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \tag{II.79}
 \end{aligned}$$

Abbildung 12 zeigt acht der elf Kugelflächenfunktionen für den Fall $\ell = 5$. Man stellt sie naheilgenderweise auf einer Einheitskugel dar. Wie man sieht, ist die Zahl der Nullstellen der Funktion in polarer (Nord-Süd) Richtung am größten für $m = 0$, da dann das zugeordnete Legendre-Polynom in (II.78) den höchsten Grad hat. Die Zahl der Nullstellen in azimutaler (West-Ost) Richtung hingegen wächst mit m .

Die Kugelflächenfunktionen haben eine Reihe von wichtigen Eigenschaften:

(i) Es gilt

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, -m}^*(\theta, \phi). \tag{II.80}$$

(ii) Die Kugelflächenfunktionen bilden ein *vollständiges Orthonormalsystem* des Raums der Funktionen $F(\theta, \phi)$. Auch diese Eigenschaft ist aus der Quantenmechanik geläufig. Konkret sind die verschiedenen $Y_{\ell m}$ zunächst orthonormal zueinander im Sinne des durch Integration über den Raumwinkel definierten Skalarprodukts:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi)}_{= \int d\Omega} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} . \quad (\text{II.81})$$

Die Tatsache, dass für zwei gleiche Funktionen auf der rechten Seite eine Eins steht, wird gerade durch den Normierungsfaktor in (II.77) gewährleistet. Die Vollständigkeit bedeutet, dass jede Funktion $F(\theta, \phi)$ nach den $Y_{\ell m}$ entwickelt werden kann:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} F_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) . \quad (\text{II.82})$$

Diese Gleichung findet viele Anwendungen in der Physik, zum Beispiel in der Geophysik, wo man das lokale Gravitationspotential der Erde nach Kugelflächenfunktionen entwickelt, oder in der Kosmologie, wo man dies für die Verteilung der kosmischen Hintergrundstrahlung tut. Gleichung (II.82) bedeutet für uns, dass wir auch den Winkelanteil der Lösungen der Laplace-Gleichung (und damit die Lösungen unserer Randwertprobleme) als Überlagerung von Kugelflächenfunktionen schreiben können. Bevor wir dies tun, halten wir zunächst fest, dass die Entwicklungskoeffizienten $F_{\ell m}$ aufgrund der Orthonormalitätsrelation (II.81) direkt berechnet werden können als

$$F_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) F(\theta, \phi) , \quad (\text{II.83})$$

was man einfach durch Einsetzen von $F(\theta, \phi)$ aus (II.82) verifiziert. Die Koeffizienten werden besonders einfach, wenn F keine Abhängigkeit von ϕ besitzt, also $F = F(\theta)$. Denn dann kommt die einzige ϕ -Abhängigkeit im Integranden auf der rechten Seite von (II.83) von $Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sim e^{-im\phi}$. Bei Integration über ϕ liefert dies nur für $m = 0$ einen nichtverschwindenden Beitrag. Wir haben dann also

$$F_{\ell m} = F_{\ell m} \delta_{m0} \quad (\text{II.84})$$

und können überall $m = 0$ setzen.

(iii) Eine weitere wichtige Relation erhalten wir, wenn wir die Entwicklungskoeffizienten $F_{\ell m}$ aus (II.83) in (II.82) einsetzen (wir benutzen θ', ϕ' für die Integration, um von θ, ϕ zu unterscheiden):

$$F(\theta, \phi) = \int d\Omega' F(\theta', \phi') \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) . \quad (\text{II.85})$$

Dies muss für jedes F gelten, was nur geht, wenn

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') . \quad (\text{II.86})$$

Dies ist die *Vollständigkeitsrelation* für die Kugelflächenfunktionen.

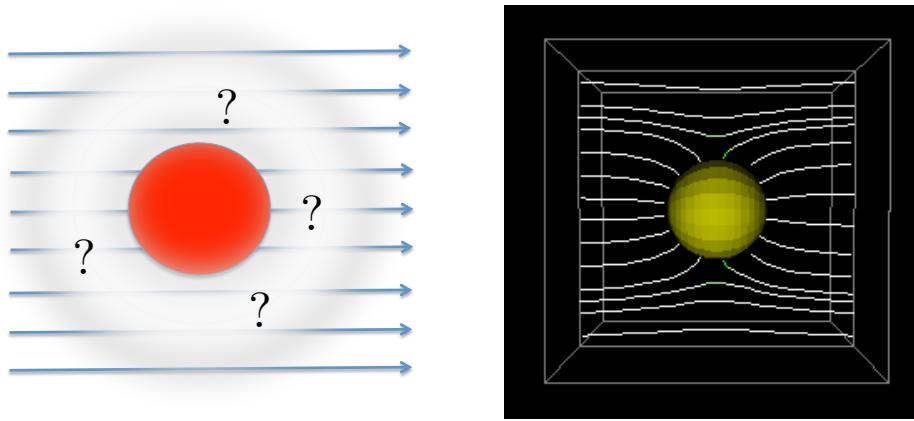


Abb. 13 — Links: Ungeladene geerdete Kugel im homogenen elektrischen Feld. Ist die Kugel leitend, so werden die Feldlinien beeinflusst, besonders in der Nähe der Kugel. Rechts: Ergebnis der Rechnung (aus: <http://www.falstad.com/vector3de/index.html>).

(iv) Schließlich gibt es noch ein sogenanntes *Additionstheorem*: Es ist

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_\ell(\cos \alpha). \quad (\text{II.87})$$

Dabei ist α der Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren $(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ und $(\cos \phi' \sin \theta', \sin \phi' \sin \theta', \cos \theta')$, also $\cos \alpha = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'$.

Insgesamt können wir nach (II.74) und (II.82) jede Lösung f der Laplace-Gleichung in der allgemeinen Form

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (a_{\ell m} r^\ell + b_{\ell m} r^{-(\ell+1)}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (\text{II.88})$$

entwickeln. Gelingt es uns nun, die Entwicklungskoeffizienten $a_{\ell m}$, $b_{\ell m}$ aus den Randbedingungen für ein gegebenes Problem zu bestimmen, so haben wir die Lösung des Problems. Dies kann zum Beispiel für die Funktion F in der Greenschen Funktion (II.14) geschehen, oder direkt für die Lösung φ eines Potentialproblems. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Abbildung 13 zeigt eine leitende und geerdete (also $\varphi = 0$) Kugel, die in ein homogenes elektrisches Feld

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z \quad (\text{II.89})$$

gebracht wird. Da die Kugel ein Leiter ist, ist ihre Oberfläche eine Äquipotentialfläche, auf der die elektrischen Feldlinien senkrecht stehen müssen. Damit ist klar, dass sich \vec{E} in Anwesenheit der Kugel ändern muss. Wir wollen hier das Potential $\varphi(\vec{x})$ des Systems berechnen.

Das Potential zu \vec{E}_0 kann als

$$\varphi_0(\vec{x}) = -E_0 z \quad (\text{II.90})$$

geschrieben werden. Es ist anzunehmen, dass das Feld durch die Kugel im Wesentlichen nur in der Nachbarschaft der Kugel beeinflusst wird, nicht aber weit weg von der Kugel. Daher haben

wir also die erste Randbedingung

$$\varphi(\vec{x})|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta, \quad (\text{II.91})$$

wobei wir Kugelkoordinaten mit $r \equiv |\vec{x}|$ eingeführt haben. Die zweite Randbedingung entsteht dadurch, dass die Kugeloberfläche eine Äquipotentialfläche mit $\varphi = 0$ sein muss:

$$\varphi(\vec{x})|_{r=R} = 0. \quad (\text{II.92})$$

Da es in diesem Problem keine Ladungsdichte gibt, müssen wir nur die Laplace-Gleichung lösen. Wir können also die allgemeine Lösung (II.88) verwenden. Da es keine ϕ -Abhängigkeit gibt (das Problem ist symmetrisch unter Rotation um die z -Achse), macht nach (II.84) nur $m = 0$ einen Beitrag. Die Lösung (II.88) vereinfacht sich daher zu

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell 0} r^{\ell} + b_{\ell 0} r^{-(\ell+1)} \right) Y_{\ell 0}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell 0} r^{\ell} + b_{\ell 0} r^{-(\ell+1)} \right) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

wobei wir die Kugelflächenfunktionen für $m = 0$ mittels (II.77) und (II.78) durch die gewöhnlichen Legendre-Polynome ausgedrückt haben. Wir müssen nun die Randbedingungen einarbeiten. Für $r \rightarrow \infty$ tragen nur die Terme $\sim a_{\ell 0}$ bei. Wir haben

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} a_{00} \underbrace{P_0(\cos \theta)}_{=1} + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a_{10} r \underbrace{P_1(\cos \theta)}_{=\cos \theta} + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} a_{20} r^2 P_2(\cos \theta) + \dots \\ &\stackrel{!}{=} -E_0 r \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{II.94})$$

Da also nur ein linearer Term in r auftreten darf, folgt $a_{00} = 0$, $a_{\ell>1,0} = 0$, aber

$$a_{10} = -E_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}. \quad (\text{II.95})$$

Für die Randbedingung bei $r = R$ verfahren wir ähnlich. Da von den $a_{\ell m}$ nur der Koeffizient a_{10} beiträgt, haben wir

$$\begin{aligned} \varphi(r=R, \theta) &= \underbrace{\sqrt{\frac{3}{4\pi}} a_{10} R \cos \theta}_{=-E_0 R \cos \theta} + \frac{b_{00}}{R} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} + \frac{b_{10}}{R^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta + \frac{b_{20}}{R^3} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos \theta) + \dots \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

Da die höheren Legendre-Polynome mit $\ell > 1$ immer höhere Potenzen von $\cos \theta$ liefern, müssen ihre Koeffizienten auch hier verschwinden. (Alternativ kann man dies anhand der Tatsache sehen, dass die Kugelflächenfunktionen eine Basis liefern, also linear unabhängig sind.) Ebenso ist $b_{00} = 0$, da es keinen konstanten Term gibt. Wir erhalten:

$$b_{10} = E_0 R^3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}. \quad (\text{II.97})$$

Wir setzen a_{10} und b_{10} in (II.93) ein und erhalten schließlich:

$$\varphi(\vec{x}) = E_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \theta . \quad (\text{II.98})$$

Dies ist die Lösung des Problems! Wir haben sie erhalten, indem wir die allgemeine Entwicklung der Lösung der Laplace-Gleichung nach Kugelflächenfunktionen benutzt haben und ihre Koeffizienten an die Randbedingungen angepasst haben. Die Lösung erfüllt natürlich $\Delta\varphi = 0$, wie man leicht verifiziert. Sie geht gegen $\varphi_0(\vec{x})$ in (II.90) für $r \rightarrow \infty$, und sie verschwindet korrekt bei $r = R$. Man kann schließlich noch das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ berechnen; das Ergebnis ist im rechten Bild in Abb. 13 gezeigt. Wie erwartet, stehen die Feldlinien senkrecht auf der Kugeloberfläche. Man sieht in (II.98), dass zum Beitrag $-E_0 r \cos \theta$ des ursprünglichen Feldes ein neuer Beitrag $\frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta$ kommt. Physikalisch entsteht dieser dadurch, dass auf der Oberfläche der Kugel eine lokal nichtverschwindende Ladungsdichte influenziert wird, die das Feld in der Umgebung der Kugel verzerrt.

II.2.5 Greensche Funktion in Kugelkoordinaten

28.06.2022

Wir erinnern uns an das Beispiel einer Punktladung vor einer leitenden Kugel aus Abschnitt II.2.3. Wir hatten dort (siehe Gl. (II.67)) die Greensche Funktion für dieses Dirichletsche Randwertproblem berechnet, die im Unendlichen und auf der Oberfläche der Kugel verschwindet:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/r'}{|\vec{x} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{x}'|} \right) , \quad (\text{II.99})$$

wobei $r = |\vec{x}|$ und $r' = |\vec{x}'|$. Wir wollen nun dieses Ergebnis im Rahmen unseres neuen Formalismus herleiten, ohne von der Methode der Spiegelladungen Gebrauch machen zu müssen. Dazu gehen wir vom allgemeinen Ausdruck (II.14) für eine Greensche Funktion aus:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') , \quad (\text{II.100})$$

mit $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$. Wir betrachten beide Terme auf der rechten Seite separat. Zuerst haben wir

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} , \quad (\text{II.101})$$

wobei α der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{x}' ist. Es sei nun

$$r_0 \equiv \min(r, r') , \quad r_1 \equiv \max(r, r') . \quad (\text{II.102})$$

Wir ziehen r_1 aus der Wurzel heraus und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} &= \frac{1}{r_1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r_1} \cos \alpha + \frac{r_0^2}{r_1^2}}} \\ &= \frac{1}{r_1} \left[1 + \frac{r_0}{r_1} \cos \alpha + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \alpha - 1) \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 + \dots \right] , \quad (\text{II.103}) \end{aligned}$$

wobei wir die Taylor-Reihe für kleine (r_0/r_1) geschrieben haben. Als Vorfaktoren der Terme $(r_0/r_1)^\ell$ ergeben sich genau die Legendre-Polynome $P_\ell(\cos \alpha)$. Allgemein kann man zeigen, dass

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^\ell P_\ell(\cos \alpha). \quad (\text{II.104})$$

Wir wenden nun das Additionstheorem (II.87) an und erhalten die wichtige Relation

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_0^\ell}{r_1^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (\text{II.105})$$

Hier sind θ, ϕ bzw. θ', ϕ' wie zuvor die Polar- und Azimutalwinkel von \vec{x} bzw. \vec{x}' .

Wir betrachten nun den Term $F(\vec{x}, \vec{x}')$ in (II.100). Da er eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ ist, besitzt er eine Entwicklung der Form (II.88). Dabei tritt \vec{x}' als Parameter auf, so dass die Entwicklungskoeffizienten $a_{\ell m}, b_{\ell m}$ Funktionen von \vec{x}' , also von r', θ', ϕ' sind:

$$F(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(a_{\ell m}(r', \theta', \phi') r^\ell + b_{\ell m}(r', \theta', \phi') r^{-(\ell+1)} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (\text{II.106})$$

Diese Entwicklung gilt ganz allgemein; zusammen mit (II.105) kann sie genutzt werden, um Randbedingungen je nach Geometrie des Problems einzubauen. Wir wollen dies hier am genannten konkreten Beispiel der Kugel illustrieren. Die erste Randbedingung ist dabei, dass die Greensche Funktion für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ verschwinden soll. Der Term $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ tut dies natürlich, und wir müssen die Randbedingung also nur noch für $F(\vec{x}, \vec{x}')$ berücksichtigen. Die Terme $\sim r^\ell$ in (II.106) fallen in diesem Limes nicht ab. Damit müssen ihre Koeffizienten $a_{\ell m}$ allesamt verschwinden. Wir erhalten also die vereinfachte Entwicklung

$$F(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} b_{\ell m}(r', \theta', \phi') r^{-(\ell+1)} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (\text{II.107})$$

Die zweite Randbedingung ist, dass die Greensche Funktion bei $|\vec{x}| = r = R$ verschwindet.⁴ Wir setzen die Entwicklungen (II.105) und (II.107) in (II.100) ein und erhalten bei $r = R$:

$$G_D|_{r=R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(b_{\ell m} R^{-(\ell+1)} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{2\ell+1} \frac{R^\ell}{(r')^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{II.108})$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen $r = R$ stets $r' > r$ gilt, da wir nur an der Greenschen Funktion im Außenraum der Kugel interessiert sind (siehe Abb. 11). Damit ist $r_1 = r'$ und $r_0 = R$ in (II.102). Die rechte Seite von (II.108) kann für beliebige θ, ϕ nur verschwinden, wenn alle Koeffizienten von $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ verschwinden, und wir haben

$$b_{\ell m}(r', \theta', \phi') = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{2\ell+1} \frac{R^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi'). \quad (\text{II.109})$$

⁴Eigentlich ist die Bedingung, dass sie bei $|\vec{x}'| = R$ verschwindet, was aber äquivalent ist, da die Greensche Funktion symmetrisch in ihren Argumenten ist.

Wir setzen die Koeffizienten in (II.107) ein und erhalten zusammen mit (II.100),(II.105) schließlich

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{r_0^\ell}{r_1^{\ell+1}} - \frac{R^{2\ell+1}}{(rr')^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (\text{II.110})$$

Der erste Term in Klammern auf der rechten Seite liefert natürlich den ersten Term in (II.99). Der zweite Term entspricht genau dem zweiten Term in (II.99). Um dies zu sehen, schreiben wir

$$\frac{R/r'}{|\vec{x} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{x}'|} = \frac{1}{|\frac{r'}{R} \vec{x} - \frac{R}{r'} \vec{x}'|} \equiv \frac{1}{|\vec{y} - \vec{y}'|}, \quad (\text{II.111})$$

und wenden die Entwicklung (II.105) auf die rechte Seite an:

$$\frac{1}{|\vec{y} - \vec{y}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{y_0^\ell}{y_1^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (\text{II.112})$$

mit $y_0 = \min(|\vec{y}|, |\vec{y}'|)$ und $y_1 = \max(|\vec{y}|, |\vec{y}'|)$. Da $|\vec{y}| = rr'/R$ und $|\vec{y}'| = R$, und da r und r' beide größer als R sind, wird $y_0 = R$ und $y_1 = rr'/R$. Also haben wir

$$\frac{R/r'}{|\vec{x} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{R^{2\ell+1}}{(rr')^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (\text{II.113})$$

genau passend zum zweiten Term in (II.110). Wir sehen also, dass unser allgemeiner Formalismus der Entwicklung der Greenschen Funktion nach orthonormalen Basisfunktionen dieselben Ergebnisse liefert wie die Methode der Spiegelladungen. Auch wenn der Formalismus in diesem speziellen Fall deutlich aufwendiger ist, ist er doch viel systematischer als die Methode der Spiegelladungen und besitzt ein viel breiteres Anwendungsspektrum. Zumal, wie bereits früher erwähnt, je nach Geometrie des Problems auch andere Basisfunktionen zur Entwicklung gewählt werden können.

II.3 Multipolentwicklung

Die oben entwickelten Techniken finden auch eine wichtige Anwendung im Fall einer *räumlich begrenzten* Ladungsverteilung, deren Potential wir von (weit) außerhalb des Verteilung betrachten wollen, siehe Abb. 14. Wir betrachten als Volumen den ganzen \mathbb{R}^3 und fordern als einzige Randbedingung, dass das Potential im Unendlichen verschwinden soll. Wir kennen dann aus (II.7) bereits den korrekten Ausdruck für das Potential:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{II.114})$$

Die Idee ist nun, den Nennerterm im Integranden durch (II.105) zu ersetzen. Dabei ist stets $r_0 = |\vec{x}'| = r'$ und $r_1 = |\vec{x}| = r$, da wir nur an Orten außerhalb der Ladungsverteilung interessiert sind. Wir setzen in (II.114) ein und sortieren die Terme etwas:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') (r')^\ell Y_{\ell m}^*(\theta', \phi'). \quad (\text{II.115})$$

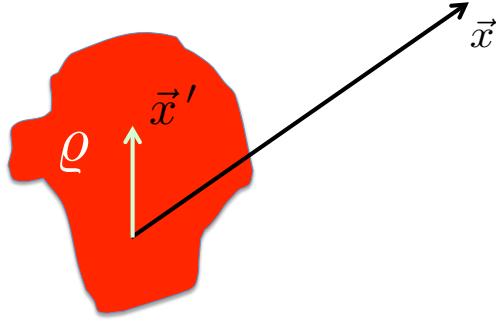


Abb. 14 — Räumlich begrenzte Ladungsverteilung, die aus weitem Abstand ($|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$) betrachtet wird.

Dies ist die *sphärische Multipolentwicklung* des Potentials. Die darin auftretenden Terme

$$q_{\ell m} \equiv \int d^3x' \varrho(\vec{x}') (r')^\ell Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') \quad (\text{II.116})$$

sind die *sphärischen Multipolmomente* der Ladungsverteilung.

Aufgrund des Faktors $1/r^{\ell+1}$ in (II.115) werden mit wachsendem ℓ die Beiträge der $q_{\ell m}$ bei großen r immer stärker unterdrückt. Der wichtigste Beitrag entsteht für $\ell = 0$. Hier ist auch $m = 0$, und wir haben

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \equiv \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \quad (\text{II.117})$$

mit der Gesamtladung Q der Ladungsverteilung. Wir haben dabei die Kugelflächenfunktion $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ aus (II.79) benutzt. q_{00} ist das *Monopolmoment* der Ladungsverteilung. Wir setzen es in (II.115) ein und erhalten

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (\text{II.118})$$

Dieses Ergebnis besagt, dass die Ladungsverteilung aus sehr weiter Entfernung wie eine Punktladung Q erscheint, so dass ihr Potential auch das einer Punktladung ist, bis auf Korrekturen, die mit einer zusätzlichen Potenz von $1/r$ unterdrückt sind. Diese Korrekturen untersuchen wir nun näher. Dazu betrachten wir die Terme mit $\ell = 1$ in (II.115), für die $m = 0, \pm 1$ ist. Mit den Kugelflächenfunktionen aus (II.79) finden wir:

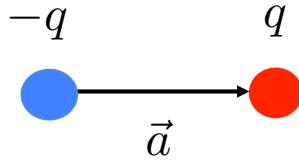
$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \underbrace{r' \cos\theta'}_{=z'} \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z. \quad (\text{II.119})$$

Dabei haben wir den Vektor

$$\vec{d} \equiv \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \vec{x}' \quad (\text{II.120})$$

definiert, dessen z -Komponente gerade in (II.119) auftritt. \vec{d} ist das *kartesische Dipolmoment* der Ladungsverteilung (bekannt aus der kartesischen Multipolentwicklung in der Physik II). Es

30.06.2022

**Abb. 15** — Dipol.

liefert eine ausgezeichnete Richtung im Raum. Weiter haben wir

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \underbrace{r' \sin \theta' e^{-i\phi'}}_{=x'-iy'} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x - id_y) . \quad (\text{II.121})$$

Ebenso ist

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x + id_y) . \quad (\text{II.122})$$

Wir berechnen nun wieder mit (II.115) das Potential:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &+ \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{3}{4\pi} \cos \theta d_z + \frac{3}{8\pi} \sin \theta e^{i\phi} (d_x - id_y) + \frac{3}{8\pi} \sin \theta e^{-i\phi} (d_x + id_y) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) . \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

Dabei haben wir wieder die Kugelflächenfunktionen aus (II.79) eingesetzt. Ihre Vorfaktoren kombinieren sich mit denen in den $q_{\ell m}$ gerade so, dass es keine Wurzeln mehr gibt. Mit $\cos \theta = z/r$ und $\sin \theta e^{i\phi} = (x + iy)/r$ erhalten wir nach kurzer Rechnung:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) , \quad (\text{II.124})$$

mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_r = \vec{x}/r$. Man nennt den zweiten Term den *Dipolterm*. Der Dipolterm ist also die erste Korrektur zum Monopolterm. Ist die Gesamtladung der Verteilung Null, so verschwindet der Monopolterm, und der Dipolterm liefert den führenden Term (sofern er nicht selbst verschwindet).

Ein Dipol kann realisiert werden durch zwei entgegengesetzte gleiche Ladungen, siehe Abb. 15. Die Gesamtladung der Anordnung ist Null, so dass es keinen Monopolterm gibt. Das Dipolmoment ist (wir setzen z.B. die Ladung $-q$ in den Ursprung):

$$\vec{d} = q \int d^3x' (-\delta^3(\vec{x}') + \delta^3(\vec{x}' - \vec{a})) \vec{x}' = q\vec{a} . \quad (\text{II.125})$$

Allerdings besitzt die gezeigte Ladungsverteilung auch höhere Multipolmomente; sie ist also kein reiner Dipol. Wenn man den Abstand a der Ladungen immer kleiner macht, werden die höheren Momente immer unwichtiger. Denn da deren Beiträge zum Potential mit einer höheren Potenz

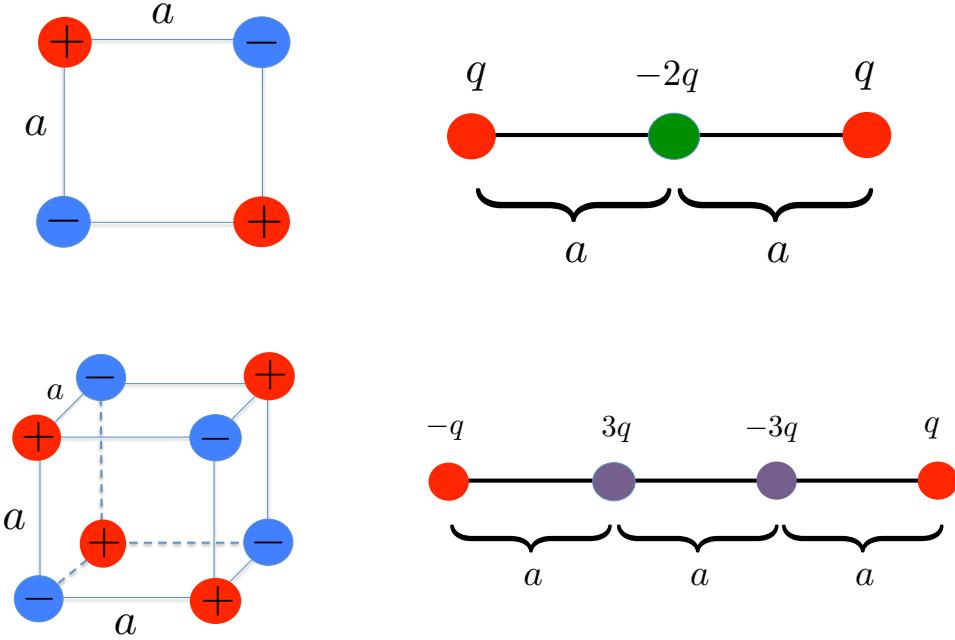


Abb. 16 — Obere Reihe: Quadrupolanordnungen. Untere Reihe: Oktupole.

von $1/r$ abfallen, müssen sie aus Dimensionsgründen auch eine höhere Potenz von a besitzen. Allerdings verschwindet im Limes $a \rightarrow 0$ natürlich der Dipol selbst. Einen reinen Dipol erhält man, wenn man im Limes $a \rightarrow 0$ gleichzeitig die Ladung $q \rightarrow \infty$ schickt und dabei $d = qa$ festhält. Das resultierende Potential hat dann exakt die Form

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}_r}{r^2}. \quad (\text{II.126})$$

Dieser Limes ist natürlich nicht wirklich realisierbar.

In den Übungen wird die nächste Korrektur zum Potential untersucht, der *Quadrupolterm* mit $\ell = 2$. Man findet für das Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \right), \quad (\text{II.127})$$

mit den *kartesischen Quadrupolmomenten*

$$Q_{ij} \equiv \int d^3 x' \varrho(\vec{x}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}), \quad (\text{II.128})$$

die einen Tensor zweiter Stufe unter Rotationen bilden. Man kann Ladungsanordnungen konstruieren, für die das Monopol- und das Dipolmoment verschwinden, so dass der Quadrupolterm der führende Term ist. Die einfachsten Quadrupolanordnungen werden in der oberen Reihe von Abb. 16 gezeigt. Die Bilder in der unteren Reihe zeigen zwei Oktupolanordnungen.

Schließlich können wir noch das elektrische Feld einer statischen Ladungsanordnung berechnen. Ganz allgemein erhalten wir es aus (II.114) als

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (\text{II.129})$$

Im Rahmen der Multipolentwicklung berechnen wir \vec{E} für jeden Multipol im Potential separat. Für den Monopol- und den Dipolterm in (II.124) erhalten wir mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^2} \vec{e}_r + \frac{3}{r^4} \vec{e}_r (\vec{d} \cdot \vec{x}) - \frac{1}{r^3} \vec{d} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^2} \vec{e}_r + \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{d}}{r^3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.130})$$

Der erste Term ist das bekannte Feld einer Punktladung Q , der zweite das *Dipolfeld*.

II.4 Magnetostatik

Wir betrachten nun noch kurz statische magnetische Felder. Wir erinnern uns (siehe Gln. (I.342)), dass die Maxwell-Gleichungen im statischen Fall entkoppeln. Für die magnetische Flussdichte haben wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (\text{II.131})$$

zusammen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Wegen der Divergenzfreiheit von \vec{B} kann man $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ setzen, was $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ automatisch löst. Eingesetzt in die andere Maxwell-Gleichung erhalten wir mit der Identität (A.14)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (\text{II.132})$$

Wie wir in (I.125),(I.126) gesehen hatten, haben wir die Freiheit, die Potentiale umzueichen, ohne dass sich die Felder \vec{E} , \vec{B} ändern. Im statischen Fall muss dabei die Eichfunktion χ zeitunabhängig sein, da sonst φ im Allgemeinen zeitabhängig werden könnte. Damit haben wir für das *elektrostatische* Potential keine echte Eichfreiheit. Das Vektorpotential hingegen kann aber offenbar auch im statischen Fall geändert werden, und zwar um $\vec{\nabla}\chi$, mit einer zeitunabhängigen Funktion χ . Wir nutzen diese Freiheit aus, um die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu wählen (dies ist nach der Diskussion in Abschnitt I.5.5 immer möglich). In dieser Eichung wird (II.132) zu

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (\text{II.133})$$

Wir erhalten also einfach eine separate Poisson-Gleichung für jede Komponente von \vec{A} . Da wir die Lösung der Poisson-Gleichung (und ihre Greensche Funktion) kennen, kennen wir auch die Lösung von (II.133). Wenn wir als Randbedingung nur vorgeben, dass \vec{A} für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ verschwinden soll, haben wir analog zu (II.2),(II.7)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{II.134})$$

Man kann nachrechnen, dass diese Lösung auch wirklich die Coulomb-Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt. Auch hier könnten wir ein breites Spektrum von Randwertproblemen analysieren, was aber hier nicht geschehen soll.

Aus der Lösung (II.134) folgt sofort die magnetische Flussdichte:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{II.135})$$

Wir benutzen die “vektorielle” Produktregel (siehe (A.8))

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a}f) = (\vec{\nabla} \times \vec{a})f - \vec{a} \times (\vec{\nabla} f), \quad (\text{II.136})$$

wobei \vec{a} ein Vektorfeld ist und f eine skalare Funktion. In unserem Fall trägt der erste Term nicht bei, da wir nach \vec{x} ableiten, \vec{j} aber eine Funktion von \vec{x}' ist. Daher erhalten wir

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (\text{II.137})$$

Dieses Ergebnis ist als *Biot-Savart-Gesetz* bekannt.

Auch in der Magnetostatik können wir die Felder systematisch nach Multipolen entwickeln. Dazu betrachten wir eine lokalisierte Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{x})$. Wir setzen wieder die Entwicklung (II.105) (mit $r_0 = r'$ und $r_1 = r$) in (II.134) ein:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') (r')^\ell Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \vec{x} \cdot \vec{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.138})$$

Hier haben wir genau wie im elektrostatischen Fall (siehe Gln. (II.117)–(II.124)) die expliziten Kugelflächenfunktionen zu $\ell = 0$ und $\ell = 1$ eingesetzt und alle Terme zusammengefasst. Dabei treten das Monopol- und das Dipolmoment der Stromdichte \vec{j} auf. Wir zeigen nun, dass das Monopolmoment stets verschwindet. Dazu betrachten wir eine Komponente, zum Beispiel die z -Komponente und schreiben zunächst

$$\int d^3x' j^z(\vec{x}') = \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' z'. \quad (\text{II.139})$$

Dieser Trick geht, da $\vec{\nabla}' z'$ einfach der Einheitsvektor $(0, 0, 1)$ ist, so dass im Integranden korrekt die dritte Komponente von \vec{j} herauskommt. Wir wenden nun wieder die Produktregel an und schreiben

$$\begin{aligned} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' z' &= \int d^3x' \left[\vec{\nabla}' \cdot (\vec{j}(\vec{x}') z') - z' (\underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')}_{=0}) \right] \\ &= \oint d\vec{a}' \cdot \vec{j}(\vec{x}') z' \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.140})$$

Denn ist die Stromdichte lokalisiert, dann verschwindet das Integral für jedes Volumen, das die Stromdichte komplett einschließt. Wir wiederholen die Rechnung für die anderen beiden Komponenten, womit gezeigt ist, dass der Monopolterm verschwindet. Die Divergenzfreiheit der Stromdichte ging hier entscheidend ein. Für den Dipolterm beweist man die Relation

$$\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \vec{x} \cdot \vec{x}' = -\frac{1}{2} \vec{x} \times \int d^3x' [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')]. \quad (\text{II.141})$$

Hieraus folgt dann unmittelbar mit (II.138), dass

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (\text{II.142})$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int d^3x' \left[\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \right]. \quad (\text{II.143})$$

Dieses ist das Analogon zum Dipolmoment \vec{d} der Elektrostatik, vergleiche Gl. (II.120). Es wird durch einen Kreisstrom realisiert.

Schließlich kann man noch die magnetische Flussdichte aus \vec{A} in (II.142) berechnen. Nach längerer Rechnung findet man

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (\text{II.144})$$

Der Ausdruck hat dieselbe Form wie der für das elektrische Dipolfeld in Gl. (II.130), mit den Ersetzungen $\mu_0 \leftrightarrow 1/\epsilon_0$ und $\vec{m} \leftrightarrow \vec{d}$, so dass auch die zugehörigen Feldlinien gleich aussehen.

III Zeitabhängige Felder und Strahlungsphänomene

Nachdem wir die statischen Lösungen der Maxwell-Gleichungen untersucht haben, kommen wir nun zur vollen Elektrodynamik.

III.1 Das elektromagnetische Feld im Vakuum

Wir beginnen mit den Maxwell-Gleichungen im Vakuum, wo $\varrho \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv 0$. Es war eine der großen Erkenntnisse der Physik des späten 19. Jahrhunderts, dass die Maxwell-Gleichungen auch im Vakuum nichttriviale Lösungen besitzen, insbesondere Wellenlösungen. Die Existenz von elektromagnetischen Wellen, zu denen auch das Licht gehört, wurde 1886 durch Heinrich Hertz nachgewiesen.

III.1.1 Bewegungsgleichungen

Im Vakuum haben wir aus (I.1)–(I.4) die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{III.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{III.2})$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c . Man sieht leicht, dass die Gleichungen entkoppelt werden können. Dazu bilden wir die doppelte Rotation von \vec{E} :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{(\text{A.14})}{=} \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \quad (\text{III.3})$$

Andererseits haben wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{(\text{III.1})}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(\text{III.2})}{=} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}. \quad (\text{III.4})$$

Also erfüllt \vec{E} die (*homogene*) *Wellengleichung*

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad (\text{III.5})$$

oder kurz

$$\square \vec{E} = 0, \quad (\text{III.6})$$

mit dem uns bereits bekannten d'Alembert-Operator. Dies gilt auch für \vec{B} : Wieder ist

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}, \quad (\text{III.7})$$

und

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(\text{III.2})}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{(\text{III.1})}{=} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}. \quad (\text{III.8})$$

Also gilt auch hier

$$\square \vec{B} = 0. \quad (\text{III.9})$$

Wir sehen, dass sogar alle Komponenten von \vec{E} und \vec{B} voneinander entkoppeln, da wir Wellengleichungen separat für jede Komponente erhalten haben. Allerdings ist zu beachten, dass die Lösungen der verschiedenen Wellengleichungen am Ende doch nicht völlig unabhängig voneinander sein können, da die Kopplung von \vec{E} und \vec{B} ja ursprünglich in (III.1),(III.2) vorhanden war. Der Weg über die Wellengleichung ist aber bei der Lösung der Gleichungen geschickt.

Bevor wir die Wellengleichungen näher untersuchen, halten wir noch fest, dass auch die Potentiale Wellengleichungen erfüllen, zumindest in bestimmten Eichungen. So folgt aus (I.201), dass im Vakuum ($j^\nu = 0$) alle Komponenten des Vierer-Potentials in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ die Wellengleichung

$$\square A^\nu = 0 \quad (\text{III.10})$$

erfüllen. In der Coulomb-Eichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, hat man nach (I.207) eine Wellengleichung für alle *räumlichen* Komponenten des Potentials (das skalare Potential φ kann hier im Vakuum wegen (I.206) als Null gewählt werden).

In jedem Fall also führt uns die Suche nach Vakuumlösungen der Maxwell-Gleichungen auf die Wellengleichung.

III.1.2 Lösungen der Wellengleichung

05.07.2022

Wir betrachten die generische Wellengleichung

$$\square \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (\text{III.11})$$

in der ψ zum Beispiel für eine Komponente von \vec{E} oder \vec{B} steht. *Jede* beliebige zweimal differenzierbare Funktion $f(\xi)$ einer einfachen Variablen ξ liefert eine Lösung der Wellengleichung in der Form

$$\psi(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t), \quad (\text{III.12})$$

wobei $\omega \equiv c|\vec{k}|$. Denn dann ist

$$\Delta f(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t) = \vec{k}^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t}, \quad (\text{III.13})$$

und

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t}. \quad (\text{III.14})$$

Beide Argumente $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ und $\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t$ sind erlaubt und dürfen sogar in verschiedenen Funktionen auftreten, da die Wellengleichung homogen und linear ist und man daher Lösungen superponieren kann. So ist

$$f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + g(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t) \quad (\text{III.15})$$

Lösung. Ebenso ist zum Beispiel auch

$$f(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t) + g(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} + \omega_2 t) \quad (\text{III.16})$$

(mit $\omega_1 = c|\vec{k}_1|$, $\omega_2 = c|\vec{k}_2|$) eine Lösung, und jede andere gewünschte Kombination. Man nennt Lösungen der Form (III.12) *d'Alembert-Lösungen*. Sie zeigen den physikalischen Inhalt der Wellengleichung. Dazu schreiben wir

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = |\vec{k}|(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct), \quad (\text{III.17})$$

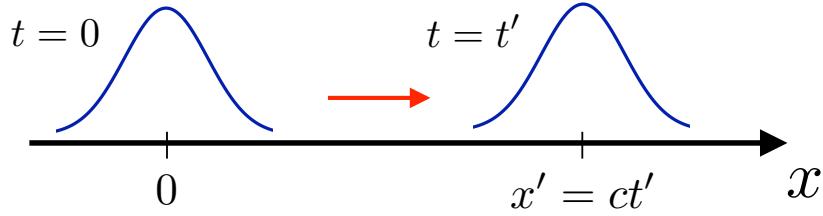


Abb. 17 — Wellenberg zum Zeitpunkt $t = 0$ und zu einem späteren Zeitpunkt $t = t'$.

mit $\vec{n} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$. Es sei der Einfachheit halber zunächst $\vec{n} = (1, 0, 0)$, so dass nur die x -Koordinate relevant ist. Hat man zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auslenkung um $x = 0$, so wird sich diese zum Zeitpunkt $t = t'$ um den Ort $x = x' = ct'$ befinden, sonst aber unverändert bleiben, da das Argument der Funktion f ja unverändert bleibt (siehe Abb. 17). Die Auslenkung schreitet also mit der Lichtgeschwindigkeit c fort. Lösungen der Form $f(x - ct)$ beschreiben nach rechts fortschreitende Wellen, Lösungen der Form $f(x + ct)$ Wellen, die sich nach links bewegen.

Diese Überlegung lässt sich auch leicht auf den dreidimensionalen Fall ausdehnen. Nehmen wir an, wir suchen zu einem festen Zeitpunkt $t = 0$ alle Punkte \vec{x} , an denen die Lösung $f(\vec{n} \cdot \vec{x})$ ganz sicher denselben Wert hat (den Faktor $|\vec{k}|$ in (III.17) haben wir in f “absorbiert”). Diese Punkte erfüllen offenbar die Gleichung

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const}, \quad (\text{III.18})$$

die genau eine Ebenengleichung darstellt, in der \vec{n} der Normalenvektor auf der Ebene ist. Zu einem späteren Zeitpunkt $t = t'$ erfüllen diese Punkte

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const} + ct', \quad (\text{III.19})$$

was eine zur ersten Ebene parallele Ebene darstellt, die um ct' in Richtung von \vec{n} verschoben ist. Wir erhalten also bei den d’Alembert-Lösungen $f(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)$ Ebenen als Wellenfronten, die sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung von \vec{n} ausbreiten (siehe Abb. 18). Für die Lösungen $f(\vec{n} \cdot \vec{x} + ct)$ ist die Ausbreitung gerade entgegengesetzt und findet mit der Geschwindigkeit c in Richtung $-\vec{n}$ statt.

Besonders wichtige Lösungen der Form (III.12) sind die (*harmonischen*) *ebenen Wellen*

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t)} \quad (\omega = +c|\vec{k}|). \quad (\text{III.20})$$

Sie sind bei festgehaltener Zeit räumlich periodisch mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$, und an festem Ort zeitlich periodisch mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$. Sie sind offenbar komplexwertig. Obwohl letzten Endes nur reelle Größen physikalisch sein können, ist die komplexe Schreibweise sehr nützlich und effizient. Man muss dann an der geeigneten Stelle den Realteil bilden. Die ebenen Wellen sind nicht wirklich physikalisch, da sie an allen Orten und zu allen Zeiten definiert sind und zum Beispiel im Unendlichen nicht abfallen. Ihre Wichtigkeit liegt darin begründet, dass jede Lösung der Wellengleichung aus ihnen konstruiert werden kann, und zwar in der Form einer Fourier-Transformation. Wir überlagern dazu die ebenen Wellen in (III.20)

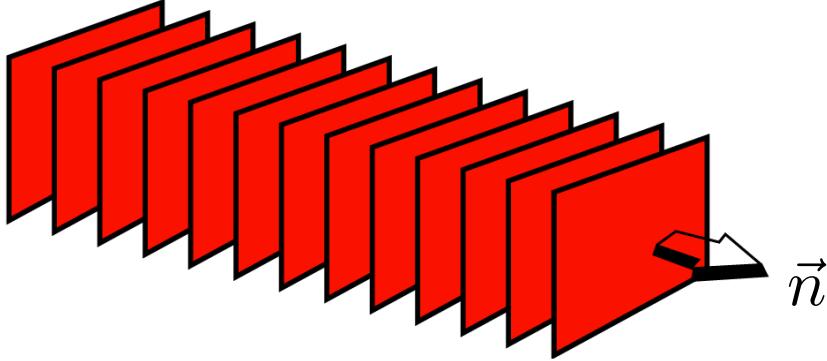


Abb. 18 — Fortschreitende Ebenen als Wellenfronten der d'Alembert-Lösungen. Aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_Welle.

und erhalten

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_+(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_-(\vec{k}) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right]. \quad (\text{III.21})$$

Dies löst natürlich ebenfalls die Wellengleichung, denn es ist

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_+(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_-(\vec{k}) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right] \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0. \quad (\text{III.22})$$

$\psi(\vec{x}, t)$ in (III.21) ist sogar die *allgemeine* Lösung der Wellengleichung. Sie ist eine Fourier-Überlagerung von (im Allgemeinen) unendlich vielen ebenen Wellen, die sich in beliebige Richtungen ausbreiten und jeweils Anteile mit Ausbreitung in Richtung $+\vec{k}$ und $-\vec{k}$ besitzen können. Die Koeffizienten $a_{\pm}(\vec{k})$ geben dabei an, „wie stark“ eine betreffende ebene Welle in der Lösung vorkommt. (Der Normierungsfaktor $1/(2\pi)^{3/2}$ in (III.21) ist Konvention.) Man bezeichnet die Überlagerung (III.21) wie in der Quantenmechanik auch als *Wellenpaket*.

Um die in $\psi(\vec{x}, t)$ auftretenden Koeffizienten a_{\pm} in einem konkreten Fall zu bestimmen, müssen wir die Anfangsbedingungen in die Lösung einarbeiten. Da die Wellengleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist, erwarten wir, dass als mögliche Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t=0) &\equiv u(\vec{x}), \\ \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &\equiv v(\vec{x}), \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

dienen können. Wir schreiben sie anhand von (III.21) explizit aus:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ v(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (-i\omega) \left[a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Wir sehen, dass die a_{\pm} also durch eine einfache (dreidimensionale) Fourier-Transformation mit u und v verknüpft sind. Mittels der inversen Fourier-Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{x}), \\ (-i\omega) [a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k})] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} v(\vec{x}), \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

und damit

$$a_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[u(\vec{x}) \pm \frac{i}{\omega} v(\vec{x}) \right]. \quad (\text{III.26})$$

Hierdurch wird unsere Lösung (III.21) für konkret vorgegebene $\psi(\vec{x}, t = 0)$, $(\partial\psi(\vec{x}, t)/\partial t)_{t=0}$ eindeutig festgelegt.

Es ist instruktiv, das Ergebnis (III.26) in (III.21) einzusetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3x' e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left[u(\vec{x}') (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \frac{iv(\vec{x}')}{\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] \\ &\equiv \int d^3x' \left[\frac{\partial\psi(\vec{x}', 0)}{\partial t} D(\vec{x} - \vec{x}', t) + \psi(\vec{x}', 0) \frac{\partial D(\vec{x} - \vec{x}', t)}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Randfunktionen u und v aus (III.23) eingesetzt und die Funktion

$$D(\vec{y}, t) \equiv -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} \quad (\text{III.28})$$

eingeführt. Man rechnet leicht nach, dass D genau in der in (III.27) angegebenen Form in der Lösung auftritt. Da $\omega = c|\vec{k}|$ durch \vec{k} festgelegt ist, kann das Integral in (III.28) explizit berechnet werden, was in den Übungen geschieht. Man findet

$$D(\vec{y}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \begin{cases} \delta(r - ct) & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -\delta(r + ct) & t < 0, \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

wobei $r \equiv |\vec{y}|$. Der Wert für $t = 0$ folgt dabei unmittelbar aus der Definition von D in (III.28). Die Lösung (III.27) erhält durch (III.29) eine anschauliche Struktur: Betrachten wir zum Beispiel den ersten Term $\sim v(\vec{x}')$. In gewissem Sinne “transportiert” D die Werte der Anfangsbedingung bei Punkten \vec{x}' zu dem Punkt \vec{x} , an dem wir die Lösung betrachten. Dabei stellt der Faktor $\delta(|\vec{x} - \vec{x}'| - ct)$ in D sicher, dass zur Zeit $t > 0$ genau die Punkte \vec{x}' zu $\psi(\vec{x}, t)$ beitragen, deren Abstand von \vec{x} gerade ct beträgt, entsprechend der Strecke, die ein Lichtsignal in der Zeit t zurücklegt. Diese Punkte \vec{x}' bilden eine Kugelschale, deren Radius sich mit wachsender Zeit linear vergrößert (siehe Abb. 19). D drückt damit gerade die Kausalität der Wellenausbreitung aus. Bis zu einem gegebenen Zeitpunkt t hat insgesamt nur die Region $|\vec{x} - \vec{x}'| < ct$ jemals zur Lösung beigetragen, niemals aber Punkte mit $|\vec{x} - \vec{x}'| > ct$. Man bezeichnet die Kugelschale mit $|\vec{x} - \vec{x}'| = ct$ daher auch als *Kausalitäts horizont*. Der zweite Beitrag in (III.27) erhält eine analoge Interpretation (da hier die Zeitableitung von D auftritt, benutzt man zunächst $\partial\delta(r - ct)/\partial t = c\partial\delta(r - ct)/\partial r$ und integriert dann partiell). Wir werden die Funktion D an späterer Stelle als Greensche Funktion der inhomogenen Wellengleichung wiederfinden.

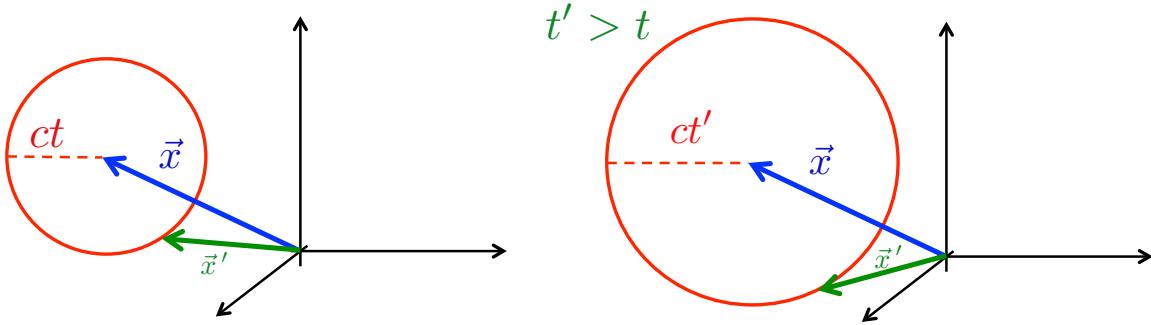


Abb. 19 — Punkte im Abstand ct bzw. ct' ($t' > t$) von \vec{x} .

III.1.3 Elektromagnetische ebene Wellen

Nachdem wir die Wellengleichung allgemein gelöst haben, kehren wir nun zur Elektrodynamik zurück. Wir wissen, dass jede Komponente von \vec{E} und \vec{B} eine Wellengleichung erfüllt und damit von der Form (III.21) ist. Allerdings sind die Felder über die Maxwell-Gleichungen (III.1), (III.2) gekoppelt. Daher können die Lösungen nicht völlig unabhängig voneinander sein.

Wir betrachten ebene Wellen. Das elektrische Feld sei

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (\text{III.30})$$

mit festem \vec{k} und $\omega = c|\vec{k}|$. Wie bereits bemerkt, ist dieser Ausdruck komplexwertig; physikalisch relevant ist am Ende nur der Realteil des Feldes. Die magnetische Flussdichte schreiben wir als

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x})}, \quad (\text{III.31})$$

mit zunächst möglicherweise anderen \vec{k}', ω' . Wir setzen in die zweite Gleichung in (III.1) ein und erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = i\omega' \vec{B}_0 e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x})}. \quad (\text{III.32})$$

Die Gleichung muss für alle \vec{x}, t gelten, was nur der Fall sein kann, wenn $\vec{k}' = \vec{k}$ und damit auch $\omega' = \omega$. Dann können wir die Exponentialfunktion herauskürzen, und wir erhalten

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0, \quad (\text{III.33})$$

oder, mit $\omega = c|\vec{k}|$ und dem Einheitsvektor $\vec{n} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$,

$$\vec{n} \times \vec{E}_0 = c \vec{B}_0. \quad (\text{III.34})$$

Die Maxwell-Gleichung (III.2), $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, liefert auf identische Weise

$$\vec{n} \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c} \vec{E}_0. \quad (\text{III.35})$$

Schließlich müssen wir noch die Divergenzfreiheit von \vec{E} und \vec{B} berücksichtigen. Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ folgt mit (III.30)

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad (\text{III.36})$$

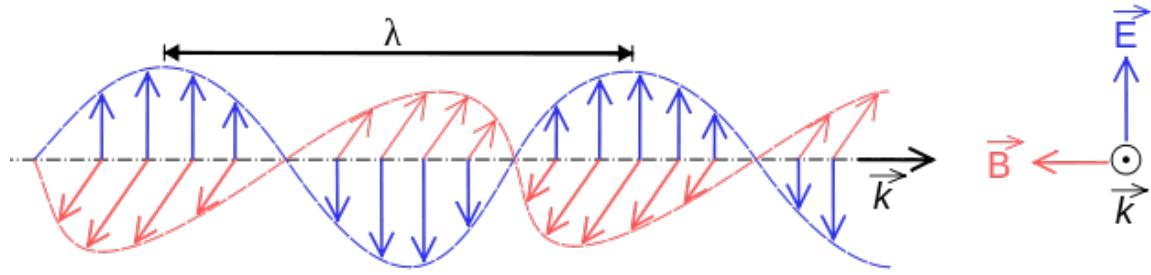


Abb. 20 — Elektromagnetische ebene Welle. Aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle.

und aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ebenso

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (\text{III.37})$$

Da \vec{E}_0 und \vec{B}_0 also senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung \vec{n} stehen, sagt man, dass elektromagnetische ebene Wellen *transversal* sind. Wenn wir (III.34) skalar mit \vec{E}_0 durchmultiplizieren, dann sehen wir, dass auch $\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$. Zusammengenommen zeigen Gln. (III.34)–(III.37) damit, dass die Vektoren $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{n}$ ein orthogonales Dreibein bilden, und zwar genau in dieser Reihenfolge als “ x, y, z -Achsen”. Weiter folgt aus (III.34), dass $|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|$. Ist also zum Beispiel $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \vec{e}_x e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (\text{III.38})$$

so ist

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (\text{III.39})$$

Die Felder schwingen offenbar in Phase (siehe Abb. 20).

Wir untersuchen nun die möglichen Schwingungsrichtungen der Felder etwas detaillierter. Dabei brauchen wir nur das elektrische Feld zu betrachten, da ja \vec{B} durch \vec{E} stets festgelegt ist. Es sei wie zuvor $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= E^x(\vec{x}, t) \vec{e}_x + E^y(\vec{x}, t) \vec{e}_y \\ &= (E_0^x \vec{e}_x + E_0^y \vec{e}_y) e^{-i(\omega t - kz)}. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Das Verhalten des physikalisch relevanten Realteils des Feldes hängt nun von der Form der (im Allgemeinen auch komplexen) Amplituden E_0^x, E_0^y ab. Um den Realteil zu extrahieren, setzen wir

$$\begin{aligned} E_0^x &= |E_0^x| e^{i\phi}, \\ E_0^y &= |E_0^y| e^{i(\phi+\delta)}. \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Die gemeinsame Phase ϕ ist irrelevant; wir setzen sie der Einfachheit halber Null. Die relative Phase δ spielt hingegen eine entscheidende Rolle. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(E^x(\vec{x}, t)) &= |E_0^x| \cos(kz - \omega t), \\ \operatorname{Re}(E^y(\vec{x}, t)) &= |E_0^y| \cos(kz - \omega t + \delta). \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

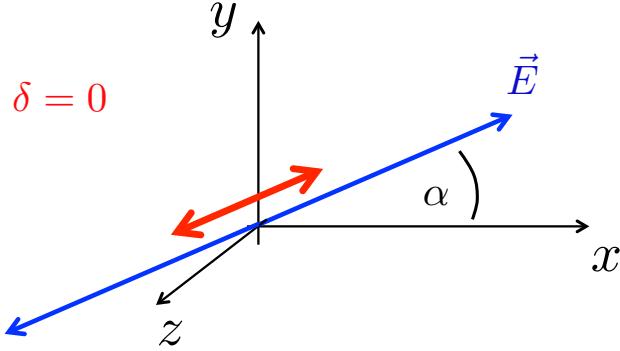


Abb. 21 — Lineare Polarisation im Fall $\delta = 0$. Das elektrische Feld schwingt in der gezeigten festen Richtung ‘hin und her’. Im Fall $\delta = \pm\pi$ ist der Winkel zur x -Achse gerade $-\alpha$.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

(i) $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$: Wegen $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$ haben wir aus (III.42)

$$\operatorname{Re}(\vec{E}(\vec{x}, t)) = (|E_0^x| \vec{e}_x \pm |E_0^y| \vec{e}_y) \cos(kz - \omega t), \quad (\text{III.43})$$

wobei das obere Vorzeichen für den Fall $\delta = 0$ gilt und das untere für $\delta = \pm\pi$. Der Vektor $(|E_0^x| \vec{e}_x \pm |E_0^y| \vec{e}_y)$ in diesem Ausdruck ist einfach ein konstanter Vektor in der x - y Ebene. Seine Richtung dort hängt ab von der relativen Größe von $|E_0^x|$ und $|E_0^y|$: Sein Winkel α relativ zur x -Achse ist gegeben durch $\tan \alpha = \pm |E_0^y| / |E_0^x|$, siehe Abb. 21. Da das Feld stets in einer festen Richtung schwingt, sprechen wir hier von *linearer Polarisation*.

(ii) $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ und gleichzeitig $|E_0^x| = |E_0^y| \equiv E_0$: Hier benutzen wir die Identität $\cos(x \pm \pi/2) = \mp \sin x$ in (III.42) und erhalten:

$$\operatorname{Re}(\vec{E}(\vec{x}, t)) = E_0 \left(\cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y \right) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \mp \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.44})$$

wobei das obere (untere) Vorzeichen für den Fall $\delta = +\pi/2$ ($\delta = -\pi/2$) gilt. Für ein festes z liefern die beiden oberen Komponenten als Funktion von t die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius E_0 . Bei $z = 0$ zum Beispiel dreht sich $\operatorname{Re}(\vec{E})$ im *Gegenuhzeigersinn* in der (x, y) -Ebene, wenn wir ‘von oben’ (d.h. von der positiven z -Achse) auf die Ebene schauen und die Zeit laufen lassen. Nimmt man die z -Abhängigkeit hinzu, so beschreibt $\operatorname{Re}(\vec{E})$ dann eine Schraube, die mit der *rechten* Hand dargestellt werden kann, wenn der Daumen in z -Richtung (also in die Ausbreitungsrichtung der Welle) zeigt und die anderen Finger den Umlaufsinn angeben (siehe Abb. 22). Wir sprechen daher von einer *rechts-zirkulären Polarisation* der Welle. Im Fall $\delta = -\pi/2$ erhalten wir entsprechend eine Linksschraube, also *links-zirkuläre Polarisation*.

(iii) Im Fall $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ aber $|E_0^x| \neq |E_0^y|$ folgt aus (III.42)

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(E^x(\vec{x}, t))}{|E_0^x|} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Re}(E^y(\vec{x}, t))}{|E_0^y|} \right)^2 = 1. \quad (\text{III.45})$$

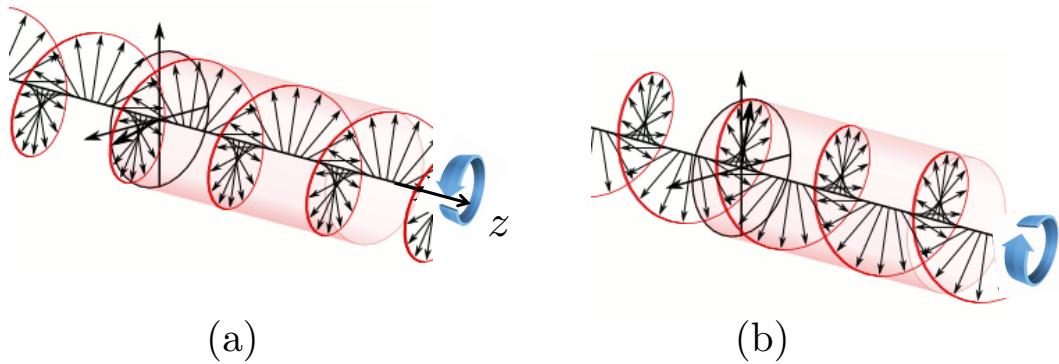


Abb. 22 — (a) Rechts-zirkulare, (b) links-zirkulare Polarisation. Aus: http://en.wikipedia.org/wiki/Circular_polarization.

Dies ist eine Ellipsengleichung. Die Halbachsen der Ellipse sind parallel zur x - bzw. y -Achse. Das elektrische Feld dreht sich auch hier im Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn um die Ausbreitungsrichtung, aber es ändert dabei periodisch seinen Betrag. Man spricht von *elliptischer Polarisation*. Ist schließlich im allgemeinsten Fall auch noch $\delta \neq \pm\pi/2$, so hat man immer noch elliptische Polarisation; die Ellipse ist dann noch gedreht relativ zu den Koordinatenachsen.

Überlagert man zwei linear polarisierte Wellen aus (III.43) in geeigneter Weise, so kann man jede beliebige andere Polarisation erzeugen, zum Beispiel auch zirkular polarisierte Wellen. Dies sieht man unmittelbar daran, dass man mit zwei linear polarisierten Wellen ja zwei unabhängige Richtungen in der (x, y) -Ebene erhält, die eine Basis bilden. Ebenso kann man auch zwei zirkular polarisierte Wellen zu einer linearen Polarisation überlagern.

Wir betrachten nun noch kurz Energie und Impuls von elektromagnetischen ebenen Wellen. Hier müssen wir beachten, dass Energiedichte w und Energiestromdichte \vec{S} *quadratische* Ausdrücke in den Feldern sind (siehe Gln. (I.264), (I.267)). Da $\text{Re}(ab) \neq \text{Re}(a)\text{Re}(b)$, ist es also wichtig, dass wir den Realteil der Felder nehmen, *bevor* wir w und \vec{S} berechnen. Es seien also

$$\vec{E} = \text{Re} [\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}] , \quad \vec{B} = \text{Re} [\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}] . \quad (\text{III.46})$$

Man findet (siehe Übungen)

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}_0|^2 , \\ \overline{\vec{S}} &= c \overline{w} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} . \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Dabei zeigt der Balken über den Größen an, dass wir eine zeitliche Mittelung über eine (oder beliebig viele) Schwingungsperioden der Felder vorgenommen haben, in der Form

$$\overline{f} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) . \quad (\text{III.48})$$

Dies ist sicherlich sinnvoll, da man im Allgemeinen z.B. nicht die Energiedichte einer Welle als Funktion der Zeit messen wird, sondern sie über einen gewissen Zeitraum beobachten wird.

07.07.2022

In jedem Fall ist der entscheidende Punkt, dass elektromagnetische ebene Wellen Energie und Impuls tragen. Diese Erkenntnis war historisch von großer Bedeutung für die Maxwell-Theorie.

Wir machen noch eine abschließende Bemerkung: Wie in Abschnitt I.6.3 diskutiert, hat \vec{S}/c^2 die Rolle einer Impulsdichte. Wenn wir daher die zweite Gleichung in (III.47) schreiben als $\bar{w} = |\vec{S}|/c$, so können wir sie interpretieren als $E = pc$, was wir als relativistische Energie-Impuls-Beziehung für ein masseloses Teilchen kennen. Dies spiegelt gerade die Tatsache wider, dass das elektromagnetische Feld in der Quantenfeldtheorie die *masselosen Photonen* als Teilchenanregungen hat.

III.2 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

In Anwesenheit von Ladungen und Strömen werden die Bewegungsgleichungen für die Felder inhomogen. Es stellt sich als geschickter heraus, in diesem Fall die Potentiale φ, \vec{A} zu betrachten. Nach (I.201) haben wir in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ die *inhomogene Wellengleichung*

$$\square A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad (\text{III.49})$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} \square \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{\varrho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}, \\ \square \vec{A}(\vec{x}, t) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Wir betrachten also fortan allgemein die Gleichung

$$\square \psi(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t), \quad (\text{III.51})$$

mit einer vorgegebenen Inhomogenität f . Da wir die homogene Wellengleichung allgemein gelöst haben, benötigen wir nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir benutzen dazu wieder die Methode der Greenschen Funktion; siehe Abschnitt II.1. Wir lösen also zunächst die Gleichung

$$\square G(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \delta^3(\vec{x}) \delta(t), \quad (\text{III.52})$$

die die Greensche Funktion des Problems definiert. Der Normierungsfaktor $1/c$ auf der rechten Seite ist willkürlich; er ist so gewählt, dass die Gleichung eine besonders einfache kovariante Form erhält: Mit $\delta(t)/c = \delta(ct)$ kann man sie schreiben als

$$\square G(x) = \delta^4(x), \quad (\text{III.53})$$

wobei wir das Argument (\vec{x}, t) einfach durch den Vierervektor x ersetzt haben (im Folgenden wechseln wir beliebig zwischen diesen beiden Notationen für das Argument). Haben wir (III.53) gelöst, so ist

$$\psi(\vec{x}, t) = c \int dt' \int d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f(\vec{x}', t') \quad (\text{III.54})$$

Lösung von (III.51). Auch diesen Ausdruck schreiben wir in kovarianter Form:

$$\psi(x) = \int d^4x' G(x - x') f(x'). \quad (\text{III.55})$$

Dass er Lösung ist, sieht man leicht:

$$\square\psi(x) = \int d^4x' f(x') \square G(x - x') = \int d^4x' f(x') \delta^4(x - x') = f(x). \quad (\text{III.56})$$

Um die Greensche Funktion zu finden, gehen wir wieder den Weg über die Fourier-Transformation. Analog zu (II.8) schreiben wir $G(x)$ als

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \tilde{G}(k), \quad (\text{III.57})$$

mit dem Vierervektor $k \equiv (k^0, \vec{k})$. Damit wird $k \cdot x = ck^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$. Wir setzen den Ausdruck für $G(x)$ in (III.53) ein und benutzen $\square e^{-ik \cdot x} = -k^2 e^{-ik \cdot x}$:

$$\square G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \tilde{G}(k) (-k^2) e^{-ik \cdot x} \stackrel{!}{=} \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{III.58})$$

Da die beiden Integralausdrücke für jedes beliebige \vec{x}, t übereinstimmen sollen, muss gelten

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{k^2}. \quad (\text{III.59})$$

Wir kennen also die Greensche Funktion im Fourier-Raum. Um die Rücktransformation zu berechnen, schreiben wir zunächst mit $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(k^0)^2 - \vec{k}^2} = -\frac{1}{8\pi^2 |\vec{k}|} \left(\frac{1}{k^0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k^0 + |\vec{k}|} \right). \quad (\text{III.60})$$

Wir müssen also nach (III.55),(III.57) das Integral

$$\begin{aligned} G(x - x') &\equiv G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int \frac{d^3k}{|\vec{k}|} e^{-i[ck^0(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] } \left(\frac{1}{k^0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k^0 + |\vec{k}|} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

berechnen. Dabei fällt auf, dass der k^0 -Integrand zwei Pole hat, die bei $\pm|\vec{k}|$ liegen, so dass das Integral nicht wohldefiniert ist. Dies bedeutet nicht etwa, dass es keine Greensche Funktion für dieses Problem gibt, sondern nur, dass es keine eindeutige Lösung gibt. (Der Operator \square besitzt keine Inverse, da die Gleichung $\square\psi(x) = 0$ nichttriviale Lösungen hat.) Die Ambiguität des Integrals können wir mittels eines physikalischen Arguments beseitigen und dem Integral trotz der Pole bei $k^0 = \pm|\vec{k}|$ einen physikalisch sinnvollen Wert zuordnen. Dazu betrachten wir noch einmal Gl. (III.54). Die Greensche Funktion “transportiert” (man sagt auch *propagiert*) den Wert der Quelle $f(\vec{x}', t')$ zum Ort \vec{x} , wo wir zur Zeit t die Lösung betrachten. Wir fordern, dass die “Ursache” zeitlich vor der “Wirkung” liegen muss, dass also $t > t'$. Die Greensche Funktion soll für $t < t'$ keine Propagation erlauben und daher einfach verschwinden. Wir nennen die Funktion mit dieser Eigenschaft die *retardierte* Greensche Funktion und bezeichnen sie mit G_R .

Wir zeigen nun, dass wir die retardierte Greensche Funktion erhalten, wenn wir die k^0 -Integration in die komplexe Ebene verlagern und die beiden Pole umgehen. Dies soll geschehen wie durch die durchgezogene Linie in Abb. 23 gezeigt, d.h., wir umschiffen die Pole so, dass

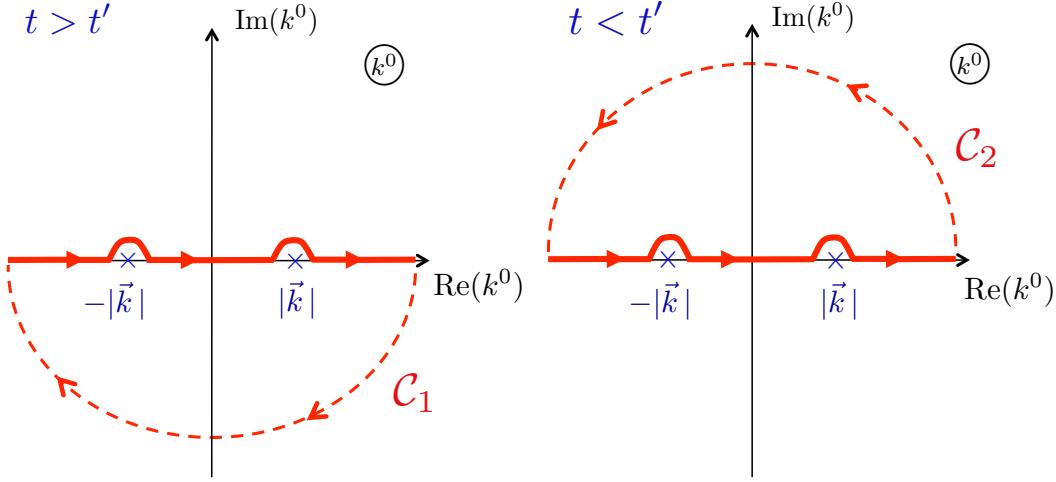


Abb. 23 — Wahl der Kontur in der komplexen k^0 -Ebene. Die durchgezogene Linie zeigt die Wahl des Integrationswegs an. Wir schließen die Kontur für $t > t'$ in der unteren Halbebene und für $t < t'$ in der oberen Halbebene.

sie *unterhalb* des Integrationswegs liegen. (Alternativ könnten wir auch die Kontur entlang der reellen Achse belassen, aber die Pole leicht nach unten in die komplexe Ebene verschieben.) Um das Integral für diese Vorschrift zur Behandlung der Pole zu berechnen, benutzen wir den Residuensatz. Dieser besagt, dass das Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve über eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion durch die Residuen der Funktion an den Singularitäten im Innern der Kurve gegeben ist. Die Situation ist in Abb. 24 gezeigt. Die Funktion $f(z)$ habe isolierte Pole an den gezeigten Punkten z_i . Die Integrationskontur umlauft die Pole in mathematisch positivem Sinn. Dann ist

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(f)|_{z=z_i}. \quad (\text{III.62})$$

Dabei ist das Residuum von f an der Polstelle z_i gegeben durch den Koeffizienten der Potenz $(z - z_i)^{-1}$ in der Laurent-Reihe der Funktion um z_i . Handelt es sich speziell bei z_i um eine einfache Polstelle, d.h., ist $f(z)$ um z_i von der Form

$$\frac{g(z)}{z - z_i},$$

(mit g regulär in z_i), so ist

$$\text{Res}(f)|_{z=z_i} = g(z_i). \quad (\text{III.63})$$

Dies ist die einzige Information, die wir im Folgenden benötigen werden.

Wie aber kommen wir in unserem Fall zu einer geschlossenen Kontur? Die Idee ist, die Kontur in der unteren oder oberen Halbebene im Unendlichen als Halbkreis zu schließen, und zwar so, dass die Integration längs des Halbkreises keinen Beitrag leistet. Betrachten wir konkret den Fall $t > t'$ in (III.61). Der zeitabhängige Teil der Exponentialfunktion ist

$$e^{-ick^0(t-t')}.$$

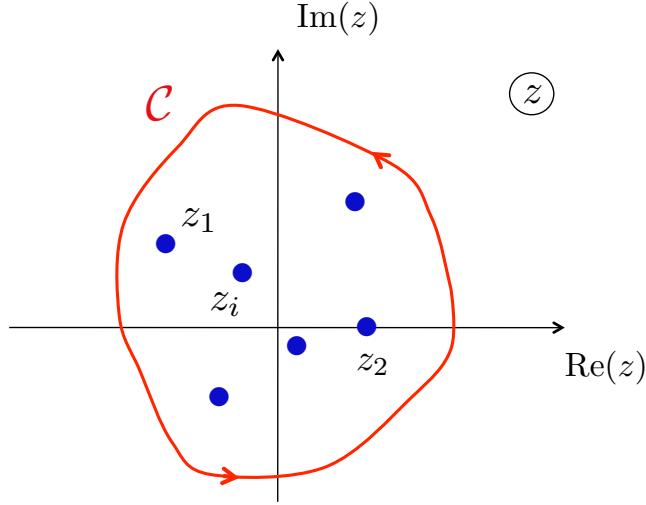


Abb. 24 — Zum Residuensatz.

Für $t > t'$ erhält der Exponent einen negativen Realteil, wenn k^0 einen negativen Imaginärteil besitzt. Schließen wir also die Kontur in der *unteren* Halbebene (linkes Bild in Abb. 23), so hat der Exponent entlang des Halbkreises einen unendlich großen negativen Realteil, und damit verschwindet der Beitrag zum Integral. Nur der Teil der Kontur entlang der reellen k^0 -Achse trägt bei. Damit erhalten wir mit (III.62), (III.63)

$$\int_{C_1} dk^0 e^{-ick^0(t-t')} \left(\frac{1}{k^0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k^0 + |\vec{k}|} \right) = -2\pi i \left(e^{-ic|\vec{k}|(t-t')} - e^{ic|\vec{k}|(t-t')} \right). \quad (\text{III.64})$$

Dabei haben wir ein zusätzliches Vorzeichen angefügt, da die Integration hier mit mathematisch negativem Umlaufsinn geschieht. Wir setzen das Ergebnis in (III.61) ein und erhalten für $t > t'$

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{|\vec{k}|} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(e^{ic|\vec{k}|(t-t')} - e^{-ic|\vec{k}|(t-t')} \right) \\ &\equiv c D(\vec{x} - \vec{x}', t - t'), \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

mit der Funktion D aus (III.28).

Im Fall $t < t'$ brauchen wir einen positiven Imaginärteil von k^0 , damit wir die Kontur schließen können. Dies geschieht dann in der oberen Halbebene (rechtes Bild in Abb. 23). Der Halbkreis im Unendlichen macht wieder keinen Beitrag. Da diesmal keine Pole innerhalb der Kontur liegen, verschwindet das Integral nach dem Residuensatz:

$$\int_{C_2} d\omega e^{-ick^0(t-t')} \left(\frac{1}{k^0 - |\vec{k}|} - \frac{1}{k^0 + |\vec{k}|} \right) = 0. \quad (\text{III.66})$$

Also verschwindet die Greensche Funktion für $t < t'$, genau wie wir dies für die retardierte

Funktion verlangt hatten. Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned}
 G_R(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= c D(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \Theta(t - t') \\
 &\stackrel{(III.28)}{=} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(|\vec{x} - \vec{x}'| - c(t - t')) \Theta(t - t') \\
 &= \frac{1}{4\pi c |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \underbrace{\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}}_{\equiv t_R}\right)\right). \tag{III.67}
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die *retardierte Zeit* t_R eingeführt. Offenbar erzwingt die δ -Funktion, dass stets $t' < t$, wodurch die explizite Θ -Funktion redundant wurde.

Mit der Greenschen Funktion erhalten wir nun nach (III.54) die Lösung der inhomogenen Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' dt' \frac{f(\vec{x}', t')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t_R) \\
 &= \int d^3x' \frac{f\left(\vec{x}', t_R = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{III.68}
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck hat eine klare physikalische Interpretation: Für den Wert der Lösung am Ort \vec{x} zur Zeit t sind alle Quellen bei \vec{x}' verantwortlich. Da ein Lichtsignal gerade die Zeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ benötigt, um die Strecke $|\vec{x} - \vec{x}'|$ zurückzulegen, kommt es dabei allein auf die Quelle zur *früheren, retardierten, Zeit* t_R an (und nicht etwa zum Beispiel zur Zeit t). Das Zeitargument von f auf der rechten Seite von (III.68) drückt also gerade die Kausalität aus.

Es sei noch bemerkt, dass man aus mathematischer Sicht ebenso gut eine Kontur in der komplexen k^0 -Ebene wählen könnte, bei der die Pole *unterhalb* umgangen werden. In diesem Fall erhalten wir eine Greensche Funktion, die für $t > t'$ verschwindet und nur für $t < t'$ beiträgt. Man nennt sie die *avancierte* Greensche Funktion. Sie ist nach unseren Überlegungen nicht geeignet, um die kausale Entwicklung der Lösung vorwärts in der Zeit zu berechnen. Sie kann allerdings im Prinzip benutzt werden, um aus einem bekannten Wert der Lösung Rückschlüsse über die Quelle zu einer früheren Zeit zu ziehen, aus der die Lösung entstanden ist. Die avancierte Greensche Funktion ist insgesamt weniger relevant. In der Quantenfeldtheorie wird die Greensche Funktion zum sogenannten *Propagator*, der letztlich die kausale Ausbreitung von Teilchen und Anti-Teilchen beschreibt. Um die Anti-Teilchen einzubeziehen, braucht man hier eine Kontur, bei der der Pol bei $k^0 = -|\vec{k}|$ unterhalb und der bei $k^0 = +|\vec{k}|$ oberhalb umfahren wird.

Für die inhomogenen Wellengleichungen (III.49) für die Potentiale erhalten wir entsprechend als Lösungen

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}', t_R)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \\
 \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t_R)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{III.69}
 \end{aligned}$$

12.07.2022

Sie stellen eine naheliegende Verallgemeinerung der Lösungen (II.7) und (II.134) im statischen Fall dar. Noch deutlicher wird dies, wenn wir annehmen, dass ϱ und \vec{j} zeitlich nur schwach

variieren, so dass sie sich während der Laufzeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ des Signals nur wenig ändern. Dann wird näherungsweise

$$\varphi(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{III.70})$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{III.71})$$

mit derselben Zeit t auf beiden Seiten. Man nennt diesen Fall *quasistationär*. Hier werden Retardationseffekte vernachlässigbar. (Es sei noch daran erinnert, dass das Potential φ in der Coulomb-Eichung die zeitabhängige *Poisson-Gleichung* (I.206) erfüllt. Diese hat den Ausdruck auf der rechten Seite von (III.70) als exakte Lösung. Die Zeit t ist hier nämlich nur ein Parameter, der auf beiden Seiten auftritt, im Gegensatz zu einer Wellengleichung, in der t ja als echte Variable auftritt.)

III.3 Felder bewegter Ladungen

Als wichtige Anwendung betrachten wir nun eine Punktladung q , die sich längs einer Trajektorie $\vec{X}(t)$ durch den Raum bewegt. Für ihre Ladungs- und Stromdichte haben wir nach (I.295)

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{x}, t) &= q \delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t)), \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= \dot{\vec{X}}(t) \varrho(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Wir setzen dies in (III.69) ein, wobei wir allerdings einen Schritt zurückgehen (siehe erste Zeile von (III.68)) und die Integration über t' noch nicht ausführen. Wir haben also für φ

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta^3(\vec{x}' - \vec{X}(t'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{X}(t')|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{X}(t')|}, \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

wobei wir im zweiten Schritt die Integration d^3x' mittels der δ^3 -Funktion ausgeführt haben. Für die verbleibende Integration über t' benutzen wir die letzte δ -Funktion. Allerdings ist das Argument eine (unter Umständen sehr komplizierte) Funktion von t' , da $\vec{X}(t')$ eine komplizierte Form haben kann. Wir definieren

$$f(t') \equiv t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{X}(t')|}{c} \quad (\text{III.74})$$

und verwenden die Regel

$$\delta(f(t')) = \sum_i \frac{\delta(t' - t_i)}{|f'(t_i)|}. \quad (\text{III.75})$$

Dabei bezeichnen die t_i die einfachen Nullstellen der Funktion $f(t')$. Wir bilden die Ableitung der Funktion:

$$\frac{df(t')}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\vec{x} - \vec{X}(t')| = 1 - \frac{\vec{x} - \vec{X}(t')}{|\vec{x} - \vec{X}(t')|} \cdot \frac{\dot{\vec{X}}(t')}{c}. \quad (\text{III.76})$$

Die Ableitung berechnet man, indem man den Betrag als Wurzel ausschreibt und zweifach die Kettenregel anwendet. Da die Teilchengeschwindigkeit $|\dot{\vec{X}}|$ stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist und $(\vec{x} - \vec{X}(t'))/|\vec{x} - \vec{X}(t')|$ ein Einheitsvektor ist, ist der Ausdruck auf der rechten Seite von (III.76) stets positiv. Dies bedeutet, dass die Funktion f monoton steigend ist. Damit aber kann sie maximal eine Nullstelle haben. Hätte sie keine, so würden die δ -Funktion, und daher auch die Potentiale, verschwinden, was unphysikalisch ist. Daher können wir annehmen, dass f genau eine Nullstelle besitzt, die wir mit t'_0 bezeichnen. Es ist also

$$t'_0 - t + \frac{|\vec{x} - \vec{X}(t'_0)|}{c} = 0, \quad (\text{III.77})$$

woraus wir im Prinzip t'_0 berechnen können. Offenbar wird t'_0 hierdurch eine implizite Funktion von \vec{x} und t , da diese in (III.77) auftreten. Physikalisch ist t'_0 die korrekte retardierte Zeit für den Fall, dass sich die Quelle (die Punktladung) bewegt und berücksichtigt die endliche Laufzeit eines Signals von $\vec{X}(t'_0)$ zu \vec{x} in korrekter Weise. Der Vektor $(\vec{x} - \vec{X}(t'_0))$ ist der Vektor vom Ort der Ladung (zum Zeitpunkt t'_0) zu dem Punkt, an dem man das Potential betrachtet. Um die nachfolgenden Ausdrücke einfacher schreiben zu können, definieren wir

$$\vec{r} \equiv \vec{X}(t'_0), \quad \vec{v} \equiv \dot{\vec{X}}(t'_0), \quad \vec{a} \equiv \ddot{\vec{X}}(t'_0), \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{X}(t'_0)}{|\vec{x} - \vec{X}(t'_0)|} = \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|}. \quad (\text{III.78})$$

Die ersten drei Größen sind Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Ladung zum Zeitpunkt t'_0 . Wir betonen nochmals, dass jede der Größen in (III.78) über t'_0 von \vec{x} und t abhängt. Wir benutzen nun (III.75), (III.76) und werten die δ -Funktion in (III.73) aus. Dies liefert:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}}. \quad (\text{III.79})$$

Völlig analog erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}}{|\vec{x} - \vec{r}|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}} = \frac{\varphi(\vec{x}, t)}{c} \frac{\vec{v}}{c}. \quad (\text{III.80})$$

Man nennt diese Potentiale einer bewegten Punktladung *Liénard-Wiechert-Potentiale*. Sie gelten für jede beliebige Bahnkurve des Teilchens. Man kann nachrechnen, dass sie die Lorenz-Eichbedingung erfüllen. Man sieht, dass sich φ für ein ruhendes Teilchen auf das Coulomb-Potential reduziert und \vec{A} korrekt verschwindet. Für eine bewegte Ladung wird das Coulomb-Potential durch den zweiten Faktor im Nenner modifiziert.

Aus den Potentialen folgen die Felder \vec{E} und \vec{B} . Die Berechnung ist recht aufwändig, da wir dazu ja Orts- und Zeitableitungen der Potentiale berechnen müssen und t'_0 eine implizite Funktion von \vec{x} und t ist. Am Ende findet man:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)}{K^3 R^2} + \frac{\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{a}\right]}{c^2 K^3 R} \right\}, \quad (\text{III.81})$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}(\vec{x}, t). \quad (\text{III.82})$$

Hier haben wir die Abkürzungen

$$R \equiv |\vec{x} - \vec{r}|, \quad K \equiv 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}, \quad (\text{III.83})$$

eingeführt. Wir sehen, dass die Felder jeweils zwei Terme besitzen. Einer von beiden enthält den Beschleunigungsvektor \vec{a} des Teilchens zum Zeitpunkt t'_0 . Man sieht, dass dieser Term für große Abstände von der Ladung, $|\vec{x}| \gg |\vec{X}(t'_0)|$, also große R , dominiert. Denn während der erste Term in (III.81) wie $1/R^2$ abfällt, verhält sich der zweite wie $1/R$. Dies gilt sowohl für das elektrische wie für das magnetische Feld und hat eine wichtige Konsequenz. Denn es folgt, dass der Poynting-Vektor $\vec{S} \sim \vec{E} \times \vec{B}$ für große R wie $1/R^2$ abfällt, oder

$$\vec{S} R^2 = \text{const.} \quad (\text{III.84})$$

für große R . Denkt man sich eine Folge von Kugelschalen in weiten Abständen um die Ladung, so bedeutet (III.84), dass der Energiefluss durch jede Kugelschale gleich ist, bis hin zu $R \rightarrow \infty$. Mit anderen Worten, die Ladung gibt Energie bis in beliebig große Entfernung ab: Sie *strahlt ab*. Man nennt den $1/R$ -Beitrag in den Feldern das *Strahlungsfeld* der Ladung. Im Gegensatz zum Strahlungsfeld liefert der erste Term in (III.81) Beiträge zum Poynting-Vektor, die für große Abstände rascher ($\sim 1/R^3, 1/R^4$) abfallen als die Oberfläche einer Kugelschale ansteigt. Damit entsprechen diese Terme nicht einer Abstrahlung, sondern lokalisierten Feldern, die die Ladung mit sich trägt. Da das Strahlungsfeld den Beschleunigungsvektor enthält, halten wir als wichtige Tatsache fest: *Nur beschleunigte Ladungen strahlen*. Dies leuchtet ein, da wir für gleichförmig bewegte Ladungen stets eine Lorentz-Transformation in ein System machen können, in der die Ladung ruht und daher nur ein elektrisches Feld besitzt, so dass der Poynting-Vektor verschwindet.

Wir berechnen nun den Poynting-Vektor im Fernfeld der Ladung explizit. Es ist zunächst

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \stackrel{(\text{III.82})}{=} \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\vec{n} \vec{E}^2 - \vec{E} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \right). \quad (\text{III.85})$$

Nehmen wir nur den zweiten Term in (III.81) mit, so verschwindet $\vec{n} \cdot \vec{E}$, da der Term ein Vektorprodukt mit \vec{n} enthält. Damit wird

$$\vec{S} \approx \frac{1}{\mu_0 c} \vec{n} \vec{E}^2 \approx \frac{q^2 \vec{n}}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c^5 K^6 R^2} \left(\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right)^2. \quad (\text{III.86})$$

Wir erkennen das diskutierte Verhalten $\sim 1/R^2$ des Poynting-Vektors bei großen R . Der Poynting-Vektor am Ort \vec{x} zeigt längs des Vektors vom Ort der Ladung zum Zeitpunkt t'_0 zum Aufpunkt \vec{x} .

Als Beispiel betrachten wir eine nichtrelativistische, aber beschleunigte Ladung. Wir vernachlässigen Terme $\sim v/c$, was auch bedeutet, dass $K \approx 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{S} &\approx \frac{q^2 \vec{n}}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c^5 |\vec{x} - \vec{r}|^2} \underbrace{(\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{a}])^2}_{= |\vec{n}|^2 (\vec{n} \times \vec{a})^2} \\ &= \frac{q^2 \vec{n}}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 |\vec{x} - \vec{r}|^2} \vec{a}^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{III.87})$$

Hier haben wir den Winkel θ zwischen dem Beschleunigungsvektor und der Abstrahlungsrichtung \vec{n} eingeführt.

Mittels des Poynting-Vektors können wir die Strahlungsleistung der Ladung berechnen. Dazu betrachten wir das linke Bild in Abb. 25. Die Abstrahlung am Ort der Ladung soll in ein Raumwinkelement $d\Omega$ geschehen. Im Abstand R am Ort \vec{x} entsteht eine Fläche $R^2 d\Omega$. Der

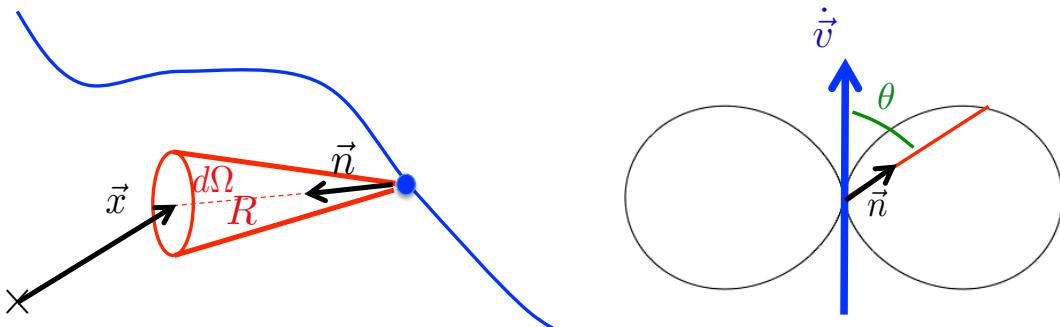


Abb. 25 — Links: Beschleunigtes Teilchen auf Trajektorie. Die Abstrahlung erfolgt in Richtung \vec{n} . Ihre Stärke hängt ab vom Winkel zwischen \vec{n} und dem Beschleunigungsvektor $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$ des Teilchens. Rechts: Polardiagramm für die Strahlungsleistung des Teilchens.

Energiefluss durch diese Fläche ist die Projektion des Poynting-Vektors in Richtung \vec{n} , multipliziert mit der Fläche, also $|\vec{S} \cdot \vec{n}| R^2 d\Omega$. Da der Poynting-Vektor die Einheit $J/(m^2 s)$ hat, hat diese Größe die Einheit J/s . Sie gibt die durch die Ladung in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung an:

$$dP = |\vec{S} \cdot \vec{n}| R^2 d\Omega . \quad (\text{III.88})$$

Mit (III.87) erhalten wir im nichtrelativistischen Fall

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \vec{a}^2 \sin^2 \theta . \quad (\text{III.89})$$

Das rechte Bild in Abb. 25 zeigt ein Polardiagramm für die Leistung. Wie man sieht, ist die Strahlungsleistung maximal für $\theta = \pi/2$, also senkrecht zum Beschleunigungsvektor des Teilchens. Dagegen verschwindet sie in Richtung des Beschleunigungsvektors.

Im voll relativistischen Fall ist die Rechnung komplizierter. Wir geben hier nur ein Ergebnis an, dass für den Fall gilt, dass \vec{v} und \vec{a} des Teilchens parallel (oder antiparallel) sind. Man erhält für die Strahlungsleistung in diesem Fall:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\vec{a}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5} . \quad (\text{III.90})$$

Abbildung 26 zeigt Polardiagramme für $dP/d\Omega$ für $v = 0.2c$ und $v = 0.5c$. Man sieht, dass die Strahlungs“keulen” mit wachsender Geschwindigkeit immer weiter in Richtung von $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ gekippt werden. Die Formel (III.90) findet Anwendung bei der Berechnung von Bremsstrahlungsprozessen.

Eine weitere Anwendung ergibt sich für den Fall $\vec{v} \perp \vec{a}$. Abb. 27 zeigt ein Teilchen mit Ladung q , das sich gleichförmig auf einer Kreisbahn (Radius R_0 , Kreisfrequenz ω) um die z -Achse bewegt. Wir nehmen an, dass das Teilchen nichtrelativistisch ist ($v \ll c$) und untersuchen die Strahlung, die es emittiert. Wir gehen aus vom elektrischen Feld in Gl. (III.81), das wir weit entfernt vom

14.07.2022

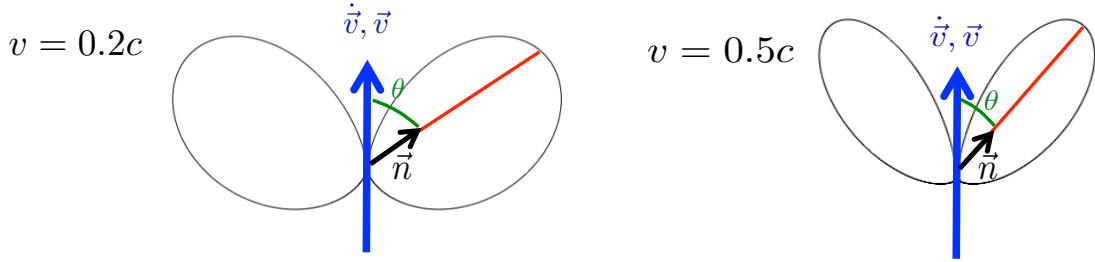


Abb. 26 — Polardiagramme für die Strahlungsleistung eines relativistischen Teilchens, wenn $\vec{v} \parallel \dot{\vec{v}}$, in den Fällen $v = 0.2c$ und $v = 0.5c$.

Teilchen betrachten, also bei $|\vec{x}| \gg R_0$. Wir können dann in (III.78),(III.83) die Näherungen

$$R \equiv |\vec{x} - \vec{r}| \approx |\vec{x}|, \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} \approx \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad (\text{III.91})$$

vornehmen. Außerdem haben wir im nichtrelativistischen Grenzfall $K = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \approx 1$. Setzen wir diese Näherungen in (III.81) ein, so finden wir

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{a})}{|\vec{x}|^3}, \quad (\text{III.92})$$

mit dem Beschleunigungsvektor $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}(t')$ des Teilchens zur retardierten Zeit t' , welche aus (III.77) über die komplizierte Gleichung $t' - t + \sqrt{(\vec{x} - \vec{X}(t'))^2/c} = 0$ folgt. Wenn wir annehmen, dass sich das Teilchen zu $t' = 0$ auf der x -Achse befindet, so können wir seinen Ortsvektor schreiben als

$$\vec{X}(t') = R_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t') \\ \sin(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.93})$$

Hieraus erhalten wir die Beschleunigung als

$$\vec{a}(t') = -R_0 \omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t') \\ \sin(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.94})$$

Setzen wir dies in (III.92) ein, so erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q R_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{x}|} \left(\sin(\omega t' - \phi) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \vartheta \cos(\omega t' - \phi) \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \right), \quad (\text{III.95})$$

wobei die Winkel ϑ und ϕ in der Abbildung gezeigt werden. Mittels Gl. (III.86) erhalten wir hieraus

$$|\vec{S} \cdot \vec{n}| = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{q^2 R_0^2 \omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2 |\vec{x}|^2} \left[\sin^2(\omega t' - \phi) + \cos^2 \vartheta \cos^2(\omega t' - \phi) \right]. \quad (\text{III.96})$$

Der Term in eckigen Klammern ist genau der Faktor $\sin^2 \theta$ in Gl. (III.87), mit dem (zeitabhängigen) Winkel θ zwischen dem Beschleunigungsvektor des Teilchens und \vec{x} .

Aus Gl. (III.96) erhalten wir direkt die abgestrahlte Leistung; siehe (III.88). Um die Ausdrücke zu vereinfachen, mitteln wir zeitlich über eine Periode $T = 2\pi/\omega$, so dass

$$\overline{\sin^2(\omega t' - \phi)} = \overline{\cos^2(\omega t' - \phi)} = \frac{1}{2}. \quad (\text{III.97})$$

Für die zeitlich gemittelte differentielle Leistung haben wir dann

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = |\vec{x}|^2 \overline{|\vec{S} \cdot \vec{n}|} = \frac{\mu_0 q^2 R_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad (\text{III.98})$$

und für die totale Leistung

$$\bar{P} = \int_{-1}^1 d\cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 R_0^2 \omega^4}{16\pi c} \left(2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{\mu_0 q^2 R_0^2 \omega^4}{6\pi c}. \quad (\text{III.99})$$

Eine ähnliche Formel gilt auch im voll relativistischen Fall. Hier haben wir

$$\bar{P} = \frac{\mu_0 q^2 R_0^2 \omega^4 \gamma^4}{6\pi c}, \quad (\text{III.100})$$

mit dem Lorentz-Faktor $\gamma = E/m$ des Teilchens. Da auf einer Kreisbahn $a^2 = R_0^2 \omega^4 = v^4/R_0^2$ gilt, kann man für wachsende Teilchenenergie E den Verlust durch Abstrahlung konstant halten, wenn man den Kreisbahnradius vergrößert. Dies ist der Grund, warum Teilchenbeschleuniger im Laufe der Jahre immer größer gebaut wurden. Ebenso zeigt die Formel, dass Elektronen mit ihrer geringen Masse viel stärker abstrahlen als zum Beispiel Protonen, was der Grund ist, warum die höchsten Energien an Beschleunigern wie dem LHC mit Protonen erreicht werden. Es sei auch noch erwähnt, dass die Abstrahlung auf einer Kreisbahn historisch eine wichtige Rolle bei der Entwicklung von Atommustellen spielte. Nach dem Rutherford'schen Atommustell umkreisen negativ geladene Elektronen einen positiv geladenen Kern. Aufgrund der Abstrahlung würden die Elektronen Energie verlieren und letztlich in den Kern stürzen. Diese Instabilität des Modells inspirierte Bohr zu seinem Modell mit stationären Bahnen für die Elektronen.

III.4 Multipolstrahlung

Als letzte Anwendung der retardierten Potentiale behandeln wir nun noch die Strahlung von Systemen von Ladungen. Dabei denken wir besonders an die Strahlung, die durch zeitlich oszillierende Ladungsdichten und Stromdichten emittiert wird. Dies ist zum Beispiel von Interesse für

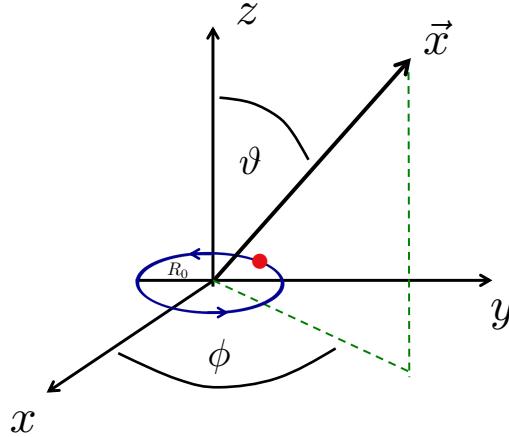


Abb. 27 — Geladenes Teilchen auf einer Kreisbahn.

Antennen. Wir kehren zurück zum Ausdruck für das retardierte Vektorpotential in Gl. (III.69):

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (\text{III.101})$$

Hier ist \vec{j} eine vorgegebene aber beliebige Stromdichte, von der wir lediglich verlangen, dass sie räumlich nur auf einen begrenzten Bereich ausgedehnt ist. Wie wir von der vorhergegangen Diskussion wissen, suchen wir nach Beiträgen $\sim 1/r$ in den elektrischen und magnetischen Feldern, da diese für Strahlungsphänomene relevant sind. Es liegt daher nahe, den Ausdruck in (III.101) für Werte von $r = |\vec{x}|$ zu entwickeln, die viel größer sind als die Ausdehnung der Stromdichteverteilung. Es ist

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'} = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^2}\right) = r - \vec{e}_r \cdot \vec{x}', \quad (\text{III.102})$$

mit $r' = |\vec{x}'|$. Hier haben wir alle quadratischen Terme $\sim r(r'/r)^2$ vernachlässigt. Im Nenner des Integranden in (III.101) können wir einfach die Näherung $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r$ vornehmen, da wir uns nur für den $1/r$ -Anteil interessieren. Im Argument von \vec{j} müssen wir allerdings vorsichtiger sein: Wenn wir die rechte Seite von (III.102) in das Zeitargument von \vec{j} einsetzen, so erhalten wir

$$t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}.$$

Der letzte Term ist von der Ordnung ℓ/c , wobei ℓ die typische Größe der Quelle ist. Der Term könnte eine signifikante Korrektur zu $t - r/c$ leisten, wenn die Quelle nicht so klein ist oder sich zeitlich rasch verändert. Wir behalten den Term daher zunächst und erhalten

$$\vec{A}_{\text{rad}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t_{\text{R}} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}) \quad (\text{III.103})$$

für den Teil des Vektorpotentials, der relevant für Abstrahlung ist. Auf gleiche Weise erhalten wir für das skalare Potential

$$\varphi_{\text{rad}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3x' \varrho(\vec{x}', t_{\text{R}} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}). \quad (\text{III.104})$$

Wir berechnen nun die resultierenden elektrischen und magnetischen Felder. Für $\vec{B}_{\text{rad}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{rad}}$ benötigen wir räumliche Ableitungen. Die einzigen Abhängigkeiten von \vec{x} befinden sich im Vorfaktor $1/r$ und im Zeitargument von \vec{j} . Wenn die Ableitung auf den Vorfaktor $1/r$ wirkt, liefert sie einen Faktor $1/r^2$, der nicht zur Strahlung beiträgt. Wir brauchen daher die Ableitung nur auf das Zeitargument von \vec{j} anzuwenden. Dazu verwenden wir die Kettenregel in der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{x}', t_{\text{R}}) = \vec{\nabla} t_{\text{R}} \times \frac{\partial}{\partial t_{\text{R}}} \vec{j}(\vec{x}', t_{\text{R}}) = \vec{\nabla} t_{\text{R}} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}\right), \quad (\text{III.105})$$

wobei der zweite Schritt richtig ist, da t_{R} und t durch eine einfache konstante Verschiebung auseinander hervorgehen. Wir finden

$$\vec{\nabla} t_{\text{R}} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} r + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r} = -\frac{1}{c} \vec{e}_r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (\text{III.106})$$

Wir vernachlässigen den zweiten Term rechts, da er einen Beitrag $\sim 1/r^2$ zum Magnetfeld leisten würde, an dem wir nicht interessiert sind. Wenn wir alles zusammenfügen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{rad}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\vec{e}_r}{r} \times \int d^3 x' \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}\right) \\ &= -\frac{\vec{e}_r}{c} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{\text{rad}}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{III.107})$$

Die entsprechende Rechnung für das elektrische Strahlungsfeld ist etwas langwieriger und wird hier nicht präsentiert. Man findet am Ende das einfache Ergebnis

$$\vec{E}_{\text{rad}} = -c \vec{e}_r \times \vec{B}_{\text{rad}}. \quad (\text{III.108})$$

Wir sehen, dass die Ladungsdichte ϱ nicht explizit auftritt. Offenbar bilden $\vec{E}_{\text{rad}}, \vec{B}_{\text{rad}}$ und \vec{e}_r ein orthogonales Dreibein. Außerdem gilt $|\vec{E}_{\text{rad}}| = c |\vec{B}_{\text{rad}}|$. Wir erinnern uns (siehe Abschnitt III.1.3), dass diese Eigenschaften genau charakteristisch für elektromagnetische Wellen sind! Dies war zu erwarten, da wir ja genau die “radiativen” $1/r$ -Beiträge in den elektrischen und magnetischen Feldern betrachtet haben. Wir sehen also, dass die Felder bei großen Abständen Strahlungsfelder sind, sofern das Integral $\int d^3 x' \vec{j}(\vec{x}', t - r/c + \vec{e}_r \cdot \vec{x}'/c)$ nicht verschwindet.

Wir können auch die Strahlungsleistung der Quelle berechnen. Nach Gl. (III.88) haben wir

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\vec{S} \cdot \vec{e}_r| r^2 = \frac{1}{\mu_0} \left| (\vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}}) \cdot \vec{e}_r \right| r^2 = \frac{c r^2}{\mu_0} |\vec{B}_{\text{rad}}|^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \left| \vec{x} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{\text{rad}}(\vec{x}, t) \right|^2. \quad (\text{III.109})$$

Wir betrachten nun die möglichen Strahlungsformen etwas näher. Es ist geschickt, dazu den Vektor

$$\vec{\alpha}(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x' \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}\right) \quad (\text{III.110})$$

einzuführen, der in den Ausdrücken für die elektrischen und magnetischen Strahlungsfelder in (III.109) auftritt. Die Funktion $\alpha(\vec{x}, t)$ wird als *Strahlungsvektor* bezeichnet. Wie wir oben gesehen haben, ist die Korrektur $\vec{e}_r \cdot \vec{x}'/c$ im Argument von \vec{j} repräsentativ für die Zeit, die ein Signal braucht, um das abstrahlende System zu durchqueren. Für eine kleine Größe ℓ des

Systems können wir daher eine weitere Entwicklung der Stromdichte um den “großen” Anteil $t - r/c$ im Zeitargument ausführen:

$$\begin{aligned} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}\right) &= \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

Falls die Stromdichte sich auf einer typischen Zeitskala T ändert, sind die Terme in dieser Entwicklung von der Ordnung $j, \ell j/(cT), \ell^2 j/(cT)^2$, und so weiter. Wir sehen, dass jeder Term um den Faktor $\ell/(cT)$, gegenüber dem vorhergehenden unterdrückt ist, aber nicht um ℓ/r . Die Entwicklung sollte sinnvoll sein, falls ℓ klein ist, oder T groß. Im letzteren Fall ist das System nur langsam zeitlich veränderlich. (Für ein harmonisch oszillierendes System bedeutet dies, dass die Frequenz $\omega = 2\pi/T$ klein ist, oder die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ groß.)

Wir setzen die Entwicklung (III.111) in (III.110) ein und erhalten verschiedene Terme mit Integralen über die Stromdichte:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x' \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' (\vec{e}_r \cdot \vec{x}') \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \dots \quad (\text{III.112})$$

Wir haben den dritten Term in der Taylorreihe (III.111) weggelassen, da wir ihn im Folgenden nicht brauchen werden. Wir betrachten nun die beiden Terme auf der rechten Seite von (III.112) einzeln.

(i) Der erste Term ist der *elektrische Dipolterm*. Wir haben bereits in der Magnetostatik Bekanntschaft mit dem Integral $\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')$ gemacht, als Monopolterm im Vektorpotential; siehe Gl. (II.138). Dort hatten wir gefunden, dass der Term für eine *statische* Stromdichte identisch verschwinden muss, als Folge der Kontinuitätsgleichung. Im aktuellen Fall allerdings haben wir eine zeitabhängige Stromdichte, so dass wir den Term neu untersuchen müssen. Wir können das Ergebnis leicht erhalten, indem wir zu Gl. (II.140) zurückkehren. Der zweite Term auf der rechten Seite der ersten Zeile dort wird nun nicht mehr verschwinden, da $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$. Stattdessen finden wir aus Gln. (II.139),(II.140), wenn wir diese für alle drei Komponenten von \vec{j} ausschreiben, dass

$$\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t') = - \int d^3x' \vec{x}' \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \right) = \int d^3x' \vec{x}' \frac{\partial}{\partial t'} \varrho(\vec{x}', t') \equiv \frac{d}{dt'} \vec{d}(t'), \quad (\text{III.113})$$

mit $t' = t - r/c$, und wobei wir im zweiten Schritt die Kontinuitätsgleichung ausgenutzt haben. Offenbar wird das Integral die zeitliche Ableitung des bekannten elektrischen Dipolmoments! Aus diesem Grund bezeichnet man diese Form der Strahlung als *elektrische Dipolstrahlung*, oder auch als *E1-Strahlung*. (Allgemein bezieht sich “En” auf die Potenz n in 2^n für einen Dipol ($n = 1$), Quadrupol ($n = 2$), etc.) Für den Dipolterm alleine haben wir

$$\vec{\alpha}(\vec{x}, t) \equiv \vec{\alpha}_{\text{E1}}(\vec{x}, t) = \ddot{\vec{d}}(t - r/c) \equiv \ddot{\vec{d}}_{\text{R}}. \quad (\text{III.114})$$

Nach Einsetzen in Gln. (III.107),(III.108),(III.109) erhalten wir die Felder als

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{E1}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\vec{e}_r \times \ddot{\vec{d}}_{\text{R}}}{r}, \\ \vec{E}_{\text{E1}} &= -c \vec{e}_r \times \vec{B}_{\text{E1}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \ddot{\vec{d}}_{\text{R}})}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{d}}_{\text{R}}) - \ddot{\vec{d}}_{\text{R}}}{r}, \end{aligned} \quad (\text{III.115})$$

und die entsprechende Strahlungsleistung wird

$$\frac{dP_{E1}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \vec{e}_r \times \ddot{\vec{d}}_R \right|^2. \quad (\text{III.116})$$

Wir sehen, dass die Leistung proportional zu $\sin^2 \theta$ ist, wobei θ der Winkel zwischen $\ddot{\vec{d}}_R$ und dem Ortsvektor \vec{x} ist. Das Strahlungsmuster ist exakt dasselbe wie bei einer beschleunigten Punktladung im Fernfeld und wurde bereit in Abb. 25 gezeigt. Die Abstrahlung ist maximal in der Richtung senkrecht zu \vec{d}_0 und verschwindet in der Richtung von $\ddot{\vec{d}}_R$, oder dazu entgegengesetzt.

Für einen oszillierenden Dipol mit $\ddot{\vec{d}} = \vec{d}_0 e^{-i\omega t}$ haben wir zum Beispiel

19.07.2022

$$\ddot{\vec{d}}_R = -\omega^2 \vec{d}_0 e^{-i\omega(t-r/c)}. \quad (\text{III.117})$$

Die Felder sind dann (die Realteile von)

$$\begin{aligned} \vec{B}_{E1} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} (\vec{e}_r \times \vec{d}_0) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \\ \vec{E}_{E1} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} [\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{d}_0) - \vec{d}_0] \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \end{aligned} \quad (\text{III.118})$$

mit $k = \omega/c$ und $\omega = 2\pi/T$, wobei T die Schwingungsdauer des Dipols ist. Man beachte, dass die Felder Kugelwellen sind und in Phase schwingen. Man sieht leicht, dass sie die Wellengleichung erfüllen:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = 0. \quad (\text{III.119})$$

In der ersten Gleichung haben wir den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten eingesetzt, wobei wir nur den Radialanteil geschrieben haben, da keine Winkel auftreten. Wir erhalten also Wellenlösungen!

Ein oszillierender Dipol kann zum Beispiel realisiert werden durch eine Ladung auf einer Kreisbahn, oder durch zwei entgegengesetzte Ladungen $\pm q$, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt schwingen; siehe das Bild oben links in Abb. 28. Wenn wir die beiden Ladungen groß machen und ihren Abstand klein, so erhalten wir einen idealisierten Dipol (siehe Diskussion nach Gl. (II.125)). Dieser idealisierte oszillierende Dipol wird als *Hertzscher Dipol* bezeichnet. Die anderen Bilder in Abb. 28 zeigen die Zeitentwicklung der elektrischen und magnetischen Feldlinien eines Hertzschen Dipols. Wir haben hier das Verhalten von \vec{E} und \vec{B} nahe dem Dipol nicht untersucht, wenngleich dies nicht sehr kompliziert wäre. Es stellt sich heraus, dass im Nahfeld die Felder \vec{E} und \vec{B} um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Dies bedeutet, dass die oszillierenden Ladungen abwechselnd elektrische und magnetische Felder generieren, und zwar in Abständen von $T/4$, abhängig davon, ob sich die Ladungen gerade in ihrem Schwerpunkt befinden (\vec{B} -Feld) oder maximal ausgelenkt sind (\vec{E} -Feld). Wann immer eins der Felder kurzzeitig verschwindet, löst sich das um $T/4$ früher erzeugte Feld vom Dipol und bewegt sich weg vom Dipol. Das magnetische Feld ist stets senkrecht zum Dipolmoment \vec{d}_0 und daher horizontal, wie wir in (III.118) sehen. Das elektrische Feld hingegen hat nach (III.118) eine komplexere Struktur und bildet die charakteristische "Nierenform" aus. Wie wir oben gesehen haben, oszillieren die Felder im Fernfeld in Phase. Natürlich verliert der oszillierende Dipol aufgrund der Abstrahlung Energie und

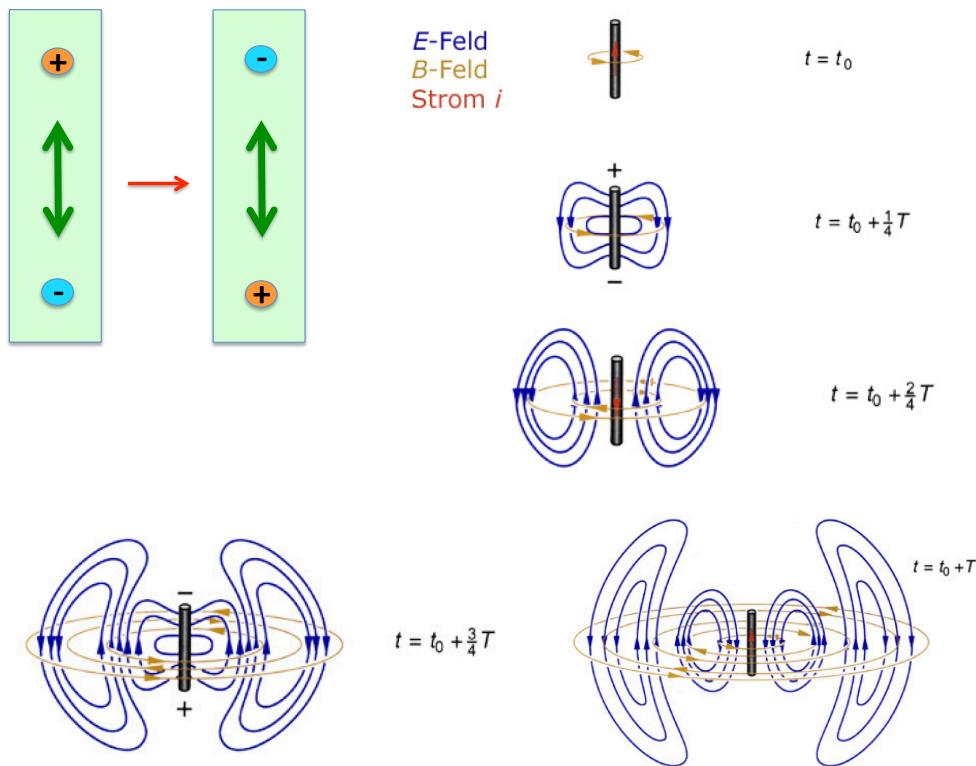


Abb. 28 — Oben links: Hertzscher Dipol. Andere Bilder: Zeitliche Entwicklung der abgestrahlten Dipolfelder. Aus: <http://www.chemgapedia.de/>

wird gedämpft, sofern die Energie nicht kontinuierlich nachgeliefert wird. Der Hertzsche Dipol bildet das Grundprinzip einer Dipolantenne. Die Dipol-Strahlungsformel (III.116) liefert auch den Grund für das Blau des Himmels: Sonnenlicht, das die Atmosphäre durchdringt, regt die Atome und Moleküle dazu an, wie Dipole zu schwingen. Die Abstrahlung ist dabei wegen des Terms $k^4 \sim \omega^4$ in (III.116) im blauen Frequenzbereich viel stärker als im roten, so dass das blaue Licht besser über den Himmel verteilt wird.

(ii) Der zweite Term in Gl. (III.112) enthält den *magnetischen Dipolterm* und den *elektrischen Quadrupolterm*. Er dominiert, falls \vec{d}_R verschwindet. Nach einiger Rechnung, wieder unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung, findet man

$$\begin{aligned} & \int d^3x' (\vec{e}_r \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}', t') \\ &= -\vec{e}_r \times \frac{1}{2} \int d^3x' (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}', t')) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} \int d^3x' \vec{x}' (\vec{e}_r \cdot \vec{x}') \varrho(\vec{x}', t'). \quad (\text{III.120}) \end{aligned}$$

Im ersten Term rechts erkennen wir das magnetische Dipolmoment aus Gl. (II.143), während der zweite Term Kombinationen von Komponenten des elektrischen Quadrupoltensors in (II.128) enthält. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir den Vektor

$$\vec{\mathcal{Q}}(\vec{n}, t') \equiv (\mathcal{Q}_1(\vec{n}, t'), \mathcal{Q}_2(\vec{n}, t'), \mathcal{Q}_3(\vec{n}, t')) , \quad (\text{III.121})$$

mit

$$\mathcal{Q}_i(\vec{n}, t') \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 n_j \int d^3 x' x'_i x'_j \varrho(\vec{x}', t'), \quad (\text{III.122})$$

für einen beliebigen Vektor \vec{n} . Unter Verwendung des magnetischen Dipolmoments in Gl. (II.143) können wir (III.120) nun als

$$\begin{aligned} \int d^3 x' (\vec{e}_r \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}', t') &= -\vec{e}_r \times \vec{m}(t') + \frac{d}{dt'} \vec{\mathcal{Q}}(\vec{e}_r, t') \\ &\equiv \vec{m}_R \times \vec{e}_r + \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{Q}}_R(\vec{e}_r) \end{aligned} \quad (\text{III.123})$$

schreiben, wobei wie zuvor $t' = t - r/c$. Die beiden Terme liefern die *magnetische Dipolstrahlung* und die *elektrische Quadrupolstrahlung*. Zusammen mit dem elektrischen Dipolterm in Eq. (III.114) wird der Strahlungsvektor in (III.112):

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(\vec{x}, t) &= \vec{\alpha}_{E1}(\vec{x}, t) + \vec{\alpha}_{M1}(\vec{x}, t) + \vec{\alpha}_{E2}(\vec{x}, t) + \dots \\ &= \ddot{\vec{d}}_R + \frac{1}{c} \ddot{\vec{m}}_R \times \vec{e}_r + \frac{1}{c} \ddot{\vec{\mathcal{Q}}}_R(\vec{e}_r) + \dots \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \vec{d}(t - r/c) + \frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} \vec{m}(t - r/c) \times \vec{e}_r + \frac{1}{c} \frac{d^3}{dt^3} \vec{\mathcal{Q}}(\vec{e}_r, t - r/c). \end{aligned} \quad (\text{III.124})$$

Es sei betont, dass es keinen Term gibt, der einer Monopolstrahlung entsprechen würde. Ein zeitabhängiges Monopolmoment könnte realisiert werden durch eine “pulsierende” sphärisch symmetrische Ladungsverteilung. Allerdings hätte eine solche Verteilung außerhalb der Verteilung stets das elektrische Feld einer Punktladung, was direkt aus dem Gaußschen Satz folgt. Dieses Feld ist statisch, und es gibt kein Magnetfeld. Damit gibt es auch keine Abstrahlung. Monopolstrahlung könnte nur auftreten, wenn Ladung verloren ginge – daher entspricht die Nicht-Existenz von Monopolstrahlung der Ladungserhaltung.

Um die Felder für die magnetische Dipolstrahlung zu erhalten, setzen wir den M1-Beitrag $\frac{1}{c} \ddot{\vec{m}}_R \times \vec{e}_r$ zum Strahlungsvektor in Gln. (III.107), (III.108) ein. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{M1} &= \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{(\ddot{\vec{m}}_R \times \vec{e}_r) \times \vec{e}_r}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{m}}_R) - \ddot{\vec{m}}_R}{r}, \\ \vec{E}_{M1} &= -c \vec{e}_r \times \vec{B}_{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\vec{e}_r \times \ddot{\vec{m}}_R}{r}. \end{aligned} \quad (\text{III.125})$$

Die entsprechende Strahlungsleistung wird

$$\frac{dP_{M1}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left| \vec{e}_r \times \ddot{\vec{m}}_R \right|^2. \quad (\text{III.126})$$

Die Felder sind völlig analog zu den elektrischen Dipolfeldern (III.115), und die magnetische Dipolstrahlung hat dasselbe Strahlungsmuster wie die elektrische. Sie kann realisiert werden durch einen Wechselstrom, der durch eine Kreisschleife läuft.

Eine Ladung q , die sich gleichförmig auf einer Kreisbahn mit Radius R (z.B. um die z -Achse) bewegt, produziert keine magnetische Dipolstrahlung. Wenn wir annehmen, dass sich die Ladung zur retardierten Zeit $t' = 0$ auf der x -Achse befindet, ist ihr Ortsvektor gegeben durch

$$\vec{X}(t') = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t') \\ \sin(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.127})$$

Es ist $\varrho(\vec{x}', t') = q\delta^3(\vec{x}' - \vec{X}(t'))$. Damit erhalten wir das *elektrische* Dipolmoment

$$\vec{d}(t') = \int d^3x' \vec{x}' \varrho(\vec{x}', t') = q\vec{X}(t'). \quad (\text{III.128})$$

Da $\ddot{\vec{d}} \neq 0$, wird elektrische Dipolstrahlung erzeugt (siehe Beispiel in Abschnitt III.3): Setzen wir

$$\ddot{\vec{d}}_R = \ddot{\vec{d}}(t') = -q\omega^2 \vec{X}(t') \quad (\text{III.129})$$

in Gl. (III.116) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dP_{E1}}{d\Omega} &= \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 R^2}{16\pi^2 c} \left| \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t') \\ \sin(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 R^2}{16\pi^2 c} \left[\sin^2(\phi - \omega t') + \cos^2 \theta \cos^2(\phi - \omega t') \right], \end{aligned} \quad (\text{III.130})$$

in Übereinstimmung mit Gl. (III.96). Die Ladungsstromdichte des Teilchens ist gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = \varrho(\vec{x}', t') \dot{\vec{X}}(t') = qR\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t') \\ \cos(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}' - \vec{X}(t')). \quad (\text{III.131})$$

Damit wird das *magnetische* Dipolmoment:

$$\begin{aligned} \vec{m}_R = \vec{m}(t') &= \frac{1}{2} \int d^3x' (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}', t')) = \frac{1}{2} qR\omega \vec{X}(t') \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t') \\ \cos(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} qR^2 \omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t') \\ \sin(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t') \\ \cos(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q\omega R^2 \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{III.132})$$

Das Moment ist also zeitlich konstant, und es gibt keine magnetische Dipolstrahlung. Für letztere würde eine nicht-gleichförmige Kreisbewegung des Teilchens benötigt.

Die Winkelverteilung der Quadrupolstrahlung wird in den Übungen diskutiert. Quadrupolstrahlung erhält man zum Beispiel von den in der oberen Reihe in Abb. 16 gezeigten Anordnungen, wenn die Ladungen gegeneinander harmonisch um den gemeinsamen Schwerpunkt schwingen.



$$\vec{F}_{\text{Coul.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r \quad \vec{F}_{\text{Grav.}} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Abb. 29 — Coulomb-Kraft (im Fall von Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens) und Newtonsche Gravitationskraft. Unten angegeben ist jeweils die Kraft auf die “Probeladung” q bzw. die “Probemasse” m .

IV Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

IV.1 Einführung

Die Allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein (1916) ist die zweite fundamentale klassische Feldtheorie. Sie ist letztlich eine relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie, so wie die Maxwellsche Elektrodynamik eine relativistische Verallgemeinerung des Coulomb-Gesetzes darstellt. Abbildung 29 vergleicht das Coulomb-Gesetz und das Newtonsche Gravitationsgesetz, die natürlich beide durch eine $1/r^2$ -Abhängigkeit gekennzeichnet sind. Beide Kräfte sind konservativ und lassen sich also als Gradient eines Potentials schreiben. Im Fall der Coulomb-Kraft zum Beispiel ordnen wir der Ladung Q durch $\vec{F}_{\text{Coul.}} = q\vec{E}$ zunächst eine Feldstärke zu, und schreiben diese dann als $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, mit dem Potential der Ladung Q im Abstand r :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{IV.1})$$

Wie wir wissen, verallgemeinert sich dies für eine beliebige Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ auf

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{IV.2})$$

Das Potential erfüllt die Grundgleichung der Elektrostatik, die Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = -\frac{\varrho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (\text{IV.3})$$

Völlig analog gehen wir im Fall der Newtonschen Gravitation vor. Wir führen über $\vec{F}_{\text{Grav.}} = m\vec{g}$ die *Gravitationsfeldstärke* \vec{g} der Masse M ein. Sie ist der negative Gradient des *Gravitationspotentials*: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$. Damit erhalten wir aus dem Newtonschen Gesetz

$$\phi = -G \frac{M}{r}. \quad (\text{IV.4})$$

Auch dies verallgemeinert sich auf das Gravitationspotential einer Massenverteilung mit Massendichte $\varrho_m(\vec{x})$:

$$\phi(\vec{x}) = -G \int d^3x' \frac{\varrho_m(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{IV.5})$$

genau wie in (IV.2). Wie in (IV.3) erfüllt damit auch das Gravitationspotential eine Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 4\pi G \varrho_m(\vec{x}), \quad (\text{IV.6})$$

die Grundgleichung der statischen Newtonschen Gravitationstheorie.

Im ersten Kapitel dieser Vorlesung haben wir gelernt, wie die Poisson-Gleichung der Elektrostatik zu einer relativistischen Theorie der Elektrodynamik verallgemeinert wird. Wir haben gefunden, dass dabei eine Vierer-Vektorgleichung entsteht:

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \xrightarrow{\text{relativ.}} \square A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad (\text{IV.7})$$

(in Lorenz-Eichung). Die nullte Komponente dieser Gleichung reduziert sich im statischen Fall auf die Poisson-Gleichung. Die relativistische Gleichung erfüllt in korrekter Weise die Forderung nach Kausalität der Theorie.

Die relativistische Verallgemeinerung der Theorie der Gravitation erfolgt in gewissem Sinne in sehr ähnlicher Weise. Allerdings gibt es zwei wesentliche Unterschiede: Die Ladung q der Elektrodynamik ist ein echter Lorentz-Skalar. Die auftretende Ladungs *dichte* ist damit kein Skalar, da sie ‘‘Ladung pro Volumen’’ angibt und das Volumen kein Skalar ist (siehe Abschnitt I.5). Die Ladungsdichte wird stattdessen die nullte Komponente eines Vierervektors, was genau der Grund ist, warum in der relativistischen Formulierung eine Gleichung für einen Vierervektor entsteht. Nun wissen wir aus der speziellen Relativitätstheorie, dass Masse und Energie äquivalent sind. Hieraus folgern wir, dass in einer relativistischen Theorie der Gravitation letztlich die *Energiedichte* die zentrale Rolle als Quelle für Gravitationsfelder spielen muss. Die Energie aber ist (im Gegensatz zur Ladung) kein Lorentz-Skalar, sondern selbst die nullte Komponente eines Vierervektors. Wenn wir nun eine Energiedichte, also ‘‘Energie pro Volumen’’, einführen, so muss diese zu einer Komponente eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe werden. Genau dies geschieht, wie wir in der Feldtheorie gesehen haben (siehe Abschnitt I.6.3). Wir erwarten aus diesem Grund, dass die Grundgleichung der relativistischen Gravitation eine *Tensorgleichung* wird,

$$\square g^{\mu\nu} \sim T^{\mu\nu}, \quad (\text{IV.8})$$

mit Potentialen $g^{\mu\nu}$ und dem Energie-Impuls Tensor $T^{\mu\nu}$.

Der zweite Unterschied beruht darin, dass ein Gravitationsfeld selbst Energie trägt (genau wie ja das elektromagnetische Feld Energie trägt) und damit sozusagen Quelle für ‘‘sich selbst’’ sein muss. Damit erwarten wir, dass die Feldgleichung der Gravitation im Allgemeinen *nichtlinear* sein wird. Dies steht im Gegensatz zur Feldgleichung der Elektrodynamik, die linear in den Potentialen A^ν ist, da dort das Feld selbst keine Ladung trägt.

IV.2 Das Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip bildet den Ausgangspunkt für die Allgemeine Relativitätstheorie. Wir betrachten zunächst die Bewegungsgleichungen für die Probeladung q bzw. die Probemasse m , die wir im statischen elektrischen Feld bzw. im statischen Gravitationsfeld erhalten:

$$m \ddot{\vec{x}} = -q \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{Coulomb}), \quad m \ddot{\vec{x}} = -m \vec{\nabla} \phi \quad (\text{Newton}). \quad (\text{IV.9})$$

Auf der linken Seite tritt in beiden Fällen nach dem zweiten Newtonschen Axiom die *träge Masse* auf, die ein Maß für die Fähigkeit eines Körpers ist, einer Beschleunigung Widerstand zu leisten. Auf der rechten Seite haben wir im Coulomb-Fall die Ladung q , die ihrerseits ein Maß für die Fähigkeit eines Körpers ist, ein elektrisches Feld zu spüren (oder zu verursachen). Genauso repräsentiert die Masse m auf der rechten Seite der zweiten Bewegungsgleichung ein Maß für die Fähigkeit eines Körpers, mit einem Gravitationsfeld zu wechselwirken. In der Bewegungsgleichung im elektrischen Feld sind die Parameter m und q natürlich völlig verschiedene Größen und unabhängig voneinander. Angesichts dieser Tatsache ist es eigentlich erstaunlich, dass die Massen auf der linken und rechten Seite der Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld identisch sein sollen. Und doch ist dies nach heutigem Wissensstand zumindest zu sehr hoher Genauigkeit der Fall! Allgemein könnte die Bewegungsgleichung durchaus lauten

$$m_t \ddot{\vec{x}} = -m_g \vec{\nabla} \phi \quad (\text{Newton}) , \quad (\text{IV.10})$$

mit der trägen Masse m_t und der gravitativen (schweren) Masse m_g . Bereits Newton widmete sich der Frage, ob $m_t = m_g$ für alle Körper gilt. Dies kann man experimentell prüfen: Zum Beispiel hätte man als Fallgesetz im Schwerefeld für die Höhe $h(t)$

$$h(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_g}{m_t} g t^2 . \quad (\text{IV.11})$$

Alternativ, und dies war Newtons Methode, kann man die Frequenz einer Pendelschwingung messen. Für diese gilt

$$\omega = \sqrt{\frac{m_g}{m_t} \frac{g}{\ell}} , \quad (\text{IV.12})$$

mit der Pendellänge ℓ . Newton fand, dass träge und schwere Masse auf 10^{-3} genau übereinstimmen (genau genommen zeigte er, dass das Verhältnis aus träger und schwerer Masse für verschiedene Körper im Rahmen dieser Messgenauigkeit stets denselben Wert hat. Gilt dies exakt, so kann man die Einheiten so wählen, dass $m_t = m_g$). Um 1900 führte Eötvös deutlich genauere Experimente mit einer Torsionswaage durch. Zwei an der Waage aufgehängte Körper erfahren sowohl die Gravitationskraft der Erde, als auch die Zentrifugalbeschleunigung durch die Erdrotation. Da erstere m_g enthält, die zweite aber m_t , kann man auch hier das Verhältnis der beiden messen. Eötvös konnte auf diese Weise Newtons Resultat auf ca. 10^{-9} verbessern. Heute benutzt man Fallexperimente; die erreichte Genauigkeit ist mittlerweile ca. 10^{-13} .

Die entscheidende Konsequenz aus der Gleichheit $m_t = m_g$ ist, dass *Gravitationskräfte lokal äquivalent zu Trägheitskräften* sind. Genau diese Erkenntnis gewann Einstein. Betrachten wir zum Beispiel einen frei fallenden Fahrstuhl im Schwerefeld der Erde, das wir als homogen annehmen. Alle Körper im Fahrstuhl fallen gleich schnell, so dass ein Beobachter im Fahrstuhl keine Effekte der Schwerkraft wahrnimmt. Wir können dies etwas formaler formulieren: Es sei $\vec{x}(t)$ der Ortsvektor eines Körpers gegeben in einem Koordinatensystem ("Laborsystem") auf der Erdoberfläche. Die Bewegungsgleichung des Körpers sei

$$m_t \ddot{\vec{x}} = m_g \vec{g} + \sum_i \vec{F}(\vec{x} - \vec{x}_i) . \quad (\text{IV.13})$$

Dabei haben wir zunächst noch zwischen träger und schwerer Masse unterschieden. Die Summe läuft über alle anderen Körper im Fahrstuhl, die mit Kräften beliebiger Art (z.B. mit elektrostatischen Kräften) auf den Körper wirken. Wir gehen nun in ein Koordinatensystem, das mit

dem Fahrstuhl frei fällt. Dazu führen wir folgende Koordinatentransformation durch (die keine Galilei-Transformation ist):

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t \rightarrow t' = t. \quad (\text{IV.14})$$

Wir setzen in die Bewegungsgleichung ein und erhalten in den neuen Koordinaten:

$$m_t \ddot{\vec{x}}' = \underbrace{(m_g - m_t)}_{=0} \vec{g} + \sum_i \vec{F}(\vec{x}' - \vec{x}_i'). \quad (\text{IV.15})$$

Da träge und schwere Masse gleich sind, gibt es keinen Gravitationsterm mehr in der Bewegungsgleichung. Der Beobachter im Laborsystem und der Beobachter im frei fallenden System werden die exakt selben physikalischen Gesetze angeben, *mit der Ausnahme*, dass der Beobachter im Laborsystem zusätzlich das Gravitationsfeld der Erde wahrnehmen wird, der Beobachter im frei fallenden System jedoch nicht. Wir haben in Gl. (IV.13) “generische” Zweikörperkräfte \vec{F} angesetzt, die jeweils vom Differenzvektor $\vec{x} - \vec{x}_i$ abhängen. Einstein verallgemeinerte dies dahingehend, dass in einem frei fallenden Koordinatensystem *alle* Vorgänge so ablaufen, als sei kein Gravitationsfeld vorhanden, beispielsweise auch nukleare Prozesse.

In Wirklichkeit allerdings wird ein Gravitationsfeld nie so exakt homogen sein wie im obigen Beispiel. Selbst in einem frei fallenden Fahrstuhl im Gravitationsfeld der Erde wird man prinzipiell feststellen, dass die Feldlinien zum Erdmittelpunkt hin näher zusammenrücken: Zwei Körper werden zwar eine senkrecht fallende Bewegung zeigen, sich aber leicht aufeinander zu bewegen. In der Realität haben wir also immer ein räumlich und eventuell auch zeitlich variierendes Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{x}, t)$. Dennoch aber sollte es zumindest *lokal* möglich sein, durch geeignete Trägheitskräfte die Gravitationskräfte auszulöschen. Damit formulieren wir das *Äquivalenzprinzip* in der folgenden Form:

“An jedem Raum-Zeit Punkt (ct, \vec{x}) in einem beliebigen Gravitationsfeld ist es möglich, ein ‘lokales Inertialsystem’ zu wählen, so dass innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punkts alle Naturgesetze dieselbe Form haben, wie in einem unbeschleunigten Koordinatensystem ohne Gravitation.”

Der Ausdruck “lokales Inertialsystem” ist dabei bewusst in Anführungszeichen gesetzt. Denn der frei fallende Fahrstuhl zum Beispiel ist natürlich kein Inertialsystem. Der entscheidende Punkt ist, dass im fallenden Fahrstuhl die Prozesse so ablaufen, als wäre man in einem Inertialsystem ohne Gravitation, solange dieser Fahrstuhl infinitesimal klein ist und wir die Prozesse über ein infinitesimales Zeitintervall beobachten. Die Naturgesetze folgen dann einfach den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie.

Letztlich “erzeugen wir also Gravitationsfelder durch bloße Änderung des Koordinatensystems” (Einstein). Die Idee wird insgesamt sein, Naturgesetze aus der speziellen Relativitätstheorie ohne Gravitation zu nehmen, und diese dann mittels lokaler Koordinatentransformationen in ein relativistisches Gesetz im Gravitationsfeld umzuschreiben. Dabei müssen wir erst noch lernen, welche Transformation wir z.B. für eine gegebene Massenverteilung benötigen, um das korrekte Gesetz zu erhalten. Dieses Problem werden wir erst später lösen. Zuvor aber wollen wir untersuchen, welche Auswirkungen Koordinatentransformationen generell auf Bewegungsgleichungen haben. Dies wird uns dann insbesondere auch die generischen Bewegungsgleichungen eines Teilchens in einem Gravitationsfeld liefern.

21.07.2022

IV.3 Bewegung im Gravitationsfeld

IV.3.1 Metrischer Tensor

Um die lokale Äquivalenz von Gravitation und beschleunigten Systemen auszunutzen, betrachten wir das infinitesimale Abstandsquadrat aus (I.101):

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 . \quad (\text{IV.16})$$

Dabei seien die x^μ Koordinaten in einem Inertialsystem; wir verwenden für den Moment noch wie früher die Notation $(x^\mu) = (ct, \vec{x})$. Die Vorfaktoren vor $c^2 dt^2$ und $d\vec{x}^2$ stammen gerade von der Minkowski-Metrik (I.69). Nach (I.102) ist $ds^2 = c^2 d\tau^2$ mit der Eigenzeit τ eines Objekts. Wir gehen nun in ein neues System, das durch Koordinaten $(x'^\mu) = (ct', x', y', z')$ gekennzeichnet ist. Wir betrachten zunächst ein konkretes Beispiel.

Das System mit Koordinaten (ct', x', y', z') rotiere gleichförmig um die z -Achse:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega t') - y' \sin(\omega t') , \\ y &= x' \sin(\omega t') + y' \cos(\omega t') , \\ z &= z' , \quad t = t' . \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Wir schreiben nun ds^2 in den neuen Koordinaten. Dazu benutzen wir

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' + \frac{\partial x}{\partial z'} dz' + \frac{\partial x}{\partial t'} dt' \\ &= dx' \cos(\omega t') - dy' \sin(\omega t') - x' \sin(\omega t') \omega dt' - y' \cos(\omega t') \omega dt' , \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

und analog

$$dy = dx' \sin(\omega t') + dy' \cos(\omega t') + x' \cos(\omega t') \omega dt' - y' \sin(\omega t') \omega dt' . \quad (\text{IV.19})$$

Wir setzen in (IV.16) ein und erhalten

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt'^2 - dz'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dt'^2 \omega^2 (x'^2 + y'^2) - 2dt' \omega (x' dy' - y' dx') \\ &= c^2 dt'^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x'^2 + y'^2) \right) - d\vec{x}'^2 - 2dt' \omega (x' dy' - y' dx') . \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Im Vergleich zu (IV.16) hat der entstehende Ausdruck offenbar kompliziertere Koeffizienten vor den Differentialen dt'^2 usw. Auch hat er “nichtdiagonale” Terme der Form $dt' dx'$, $dt' dy'$. Er ist aber weiterhin eine quadratische Form in den Differentialen.

Wir wissen, dass in einem beschleunigten Bezugssystem Trägheitskräfte (Scheinkräfte) auftreten, in diesem Fall speziell Zentrifugal- und Corioliskräfte. Die Zentrifugalkraft ist gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{ZF}} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') , \quad (\text{IV.21})$$

mit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Wir können sie schreiben als $\vec{F}_{\text{ZF}} = -m \vec{\nabla} \phi_{\text{ZF}}$ mit dem Zentrifugalkpotential

$$\phi_{\text{ZF}} = -\frac{1}{2} \omega^2 (x'^2 + y'^2) . \quad (\text{IV.22})$$

Wir erkennen, dass der Koeffizient des Terms $c^2 dt'^2$ in (IV.20) gerade in der Form

$$1 + \frac{2\phi_{ZF}}{c^2} \quad (\text{IV.23})$$

geschrieben werden kann. Der Koeffizient von $c^2 dt'^2$ bestimmt auch den Zusammenhang zwischen dt' und dem Eigenzeitintervall $d\tau$, dem Zeitintervall, das auf einer Uhr abgelesen wird, die im Inertialsystem ruht. Wir beobachten also eine Zeittilatation einer Uhr, die im rotierenden System ruht, $dt' = d\tau / \sqrt{1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)/c^2} = d\tau / \sqrt{1 - v'^2/c^2}$. Wir werden hier später im Fall der Gravitation statt des Zentrifugalpotentials das Newtonsche Gravitationspotential finden. Dies wird zu einer Zeittilatation im Gravitationsfeld führen.

Insgesamt finden wir also, dass das Abstandsquadrat ds^2 eine andere Form annimmt, wenn wir die Koordinaten wechseln, selbst in einer Situation, die nichts mit der Gravitation zu tun hat. (Im räumlichen Anteil geschieht dies sogar, wenn wir einfach nur von kartesischen Koordinaten zum Beispiel zu Zylinderkoordinaten übergehen; siehe Übungen.) Wir wollen dies nun allgemeiner untersuchen. Wir ändern zunächst die Notation etwas ab: Wir bezeichnen die Koordinaten im Inertialsystem von nun an mit ξ^μ . Die Minkowski-Metrik, die bisher immer mit $g_{\mu\nu}$ bezeichnet wurde, erhält nun das Symbol $\eta_{\mu\nu}$, mit

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.24})$$

Wir haben dann

$$ds^2 = (d\xi^0)^2 - d\xi^1^2 - d\xi^2^2 - d\xi^3^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (\text{IV.25})$$

Die Koordinaten im beschleunigten System seien x^μ . Es gibt also eine Transformation $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Per Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

mit

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (\text{IV.27})$$

Die $g_{\mu\nu}$ sind die Komponenten des *metrischen Tensors*, dessen Name daher stammt, dass er das Abstandsquadrat ds^2 im neuen Koordinatensystem bestimmt. Im Allgemeinen ist $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ eine Funktion der Koordinaten. Dies sehen wir explizit in unserem einfachen Beispiel eines rotierenden Systems oben. $g_{\mu\nu}$ ist symmetrisch; die Komponenten können direkt anhand des Ausdrucks für ds^2 abgelesen werden. Im Beispiel haben wir nach (IV.20)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{c^2} ((x^1)^2 + (x^2)^2) & \frac{\omega}{c} x^2 & -\frac{\omega}{c} x^1 & 0 \\ \frac{\omega}{c} x^2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} x^1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.28})$$

Unsere Formulierung über infinitesimale Größen $d\xi^\mu$ bzw. dx^μ eignet sich in idealer Weise auch zur Anwendung auf das Äquivalenzprinzip, da dieses eine *lokale* Äquivalenz von Gravitations- und Trägheitskräften behauptet. Wir denken also von nun an bei den ξ^μ an die Koordinaten im “lokalen Inertialsystem” und bei den x^μ an die Koordinaten des Systems im Gravitationsfeld.

IV.3.2 Bewegungsgleichungen

Nach dem Äquivalenzprinzip gelten im “lokalen Inertialsystem” die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie. Speziell haben wir für ein freies Teilchen die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (\text{IV.29})$$

mit der Eigenzeit τ des Teilchens. Wir transformieren nun in das Koordinatensystem x^μ mit seiner Metrik $g_{\mu\nu}(x)$. Mit Ketten- und Produktregel erhalten wir aus (IV.29)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}$ und summieren über α :

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}}_{=\delta_\mu^\lambda} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Dabei haben wir im ersten Term die Kettenregel “rückwärts” angewendet, was auf ein Kronecker-Symbol führte. Wir lösen die Gleichung nach $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}$ auf:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (\text{IV.32})$$

was wir schreiben als

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (\text{IV.33})$$

mit den *Christoffel-Symbolen*

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (\text{IV.34})$$

Diese hängen offenbar nur von der Transformation zwischen den Koordinaten ξ^α und x^μ ab. Sie sind symmetrisch bezüglich den unteren beiden Indizes μ, ν . Nach unseren Überlegungen beschreibt (IV.33) die Bewegungsgleichung in einem beschleunigten Bezugssystem, aber auch in einem Gravitationsfeld.

IV.3.3 Zusammenhang zwischen $g_{\mu\nu}$ und $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

Sowohl (IV.27) als auch (IV.34) enthalten den Zusammenhang zwischen den Koordinaten ξ^α des ‘‘lokalen Inertialsystems’’ und den Koordinaten x^μ im Gravitationsfeld. Man kann dies ausnutzen, um einen Zusammenhang zwischen den $g_{\mu\nu}$ und den $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ herzustellen, in dem das ‘‘lokale Inertialsystem’’ nicht mehr auftritt. Dazu leiten wir zunächst eine Hilfsrelation her. Wir multiplizieren $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ mit $\partial\xi^\beta/\partial x^\lambda$ und summieren über alle λ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda} = \underbrace{\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}}_{=\delta_\alpha^\beta} \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (\text{IV.35})$$

Diese Relation werden wir im Folgenden ausnutzen. Nun betrachten wir die Ableitung von $g_{\mu\nu}$ in (IV.27) nach einem x^λ . Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \\ &\stackrel{(\text{IV.35})}{=} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta} \\ &\stackrel{(\text{IV.27})}{=} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Wir addieren nun zu diesem Ausdruck denselben Ausdruck nach Vertauschung $\mu \leftrightarrow \lambda$ und subtrahieren denselben Ausdruck nach Vertauschung $\nu \leftrightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}. \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass die Christoffelsymbole symmetrisch bezüglich der unteren beiden Indizes sind, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, was man direkt an (IV.34) sieht. Wir können Gl. (IV.37) nun noch nach dem Christoffelsymbol auflösen. Dazu führen wir die Inverse zur Metrik ein, die durch

$$g^{\nu\sigma} g_{\rho\nu} = \delta_\rho^\sigma \quad (\text{IV.38})$$

definiert ist. Diese existiert, da es stets zur Transformation $\xi \rightarrow x$ auch eine umgekehrte Transformation geben muss. Man kann leicht nachweisen, dass die Inverse der Metrik explizit gegeben ist durch

$$g^{\nu\sigma} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\beta}. \quad (\text{IV.39})$$

Wir multiplizieren also nun (IV.37) mit $g^{\nu\sigma}$ und erhalten:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (\text{IV.40})$$

Wie wir oben vorweggenommen hatten, ist hier jegliche Abhängigkeit von den lokalen inertialen Koordinaten ξ^α verschwunden. Dies ist bemerkenswert, da es bedeutet, dass allein die Metrik $g_{\mu\nu}$ die Christoffelsymbole und damit die Bewegung eines Teilchens bestimmt. Die Koordinaten des ‘‘lokalen Inertialsystems’’ haben wir also nur als zwischenzeitliche Hilfsmittel verwendet, um

das Äquivalenzprinzip auszunutzen. Wenn es uns später gelingt, Feldgleichungen aufzustellen, nach denen die Metrik bestimmt werden kann, so können wir damit auch direkt die Bewegung von Teilchen im Gravitationsfeld berechnen.

Ein Vergleich mit der Elektrodynamik hilft uns, den physikalischen Inhalt der Christoffelsymbole und der Metrik besser zu verstehen:

	Elektrodynamik	Gravitation
Kraft auf Teilchen:	$m \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = qF^\lambda_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}$	$m \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -m\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$
Verbindung zu Potential:	$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \dots$

Wir sehen, dass die Christoffelsymbole unmittelbar mit den (Gravitations)kräften auf ein Teilchen zusammenhängen, genau wie der Feldstärketensor der Elektrodynamik die Kräfte auf ein geladenes Teilchen im Feld bestimmt (die angegebene Bewegungsgleichung ergibt sich aus Abschnitt I.6.4). Die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sind also die Gegenstücke zum Feldstärketensor. Dabei enthält die Gravitationskraft zwei Terme $dx^\kappa/d\tau$ (letztlich gemäß der Tatsache, dass die Gravitation durch ein Tensorfeld beschrieben wird), die elektromagnetische Kraft nur einen. Weiter sehen wir, dass die Komponenten des metrischen Tensors die Rolle der Gravitationspotentiale spielen. Denn genau wie die Ableitungen der elektromagnetischen Potentiale den Feldstärketensor liefern, bestimmen die Ableitungen der Metrik (zusammen mit der Inversen der Metrik) die Christoffelsymbole. In der Elektrodynamik entstehen bei der relativistischen Verallgemeinerung aus einem skalaren Potential *vier* Komponenten des Vektorpotentials. In der Theorie der Gravitation erhalten wir *zehn* Potentiale, da $g_{\mu\nu}$ als symmetrischer Tensor zehn unabhängige Komponenten hat!

Unsere Betrachtungen in den letzten Abschnitten gingen vom Äquivalenzprinzip aus und bezogen sich auf die Beschreibung der Bewegung im Gravitationsfeld. Mathematisch allerdings haben wir eigentlich nur eine beliebige Koordinatentransformation auf die freie Bewegungsgleichung (IV.29) angewendet. Dies ist unabhängig davon, ob wir dabei wirklich an Gravitation denken, oder nur an den Übergang in ein beschleunigtes Bezugssystem. In der Tat können wir Gl. (IV.33) auf unser Beispiel eines gleichförmig rotierenden Systems aus Abschnitt IV.3.1 anwenden. Aus der Metrik (IV.28) erhalten wir nach (IV.40)

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{\omega^2}{c^2}x^1, \quad \Gamma_{00}^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}x^2, \quad \Gamma_{20}^1 = \Gamma_{02}^1 = -\frac{\omega}{c}, \quad \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{01}^2 = \frac{\omega}{c}. \quad (\text{IV.41})$$

Alle anderen Christoffelsymbole sind Null. Die Bewegungsgleichung (IV.33) wird dann (siehe Übungen)

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}. \quad (\text{IV.42})$$

Auf der rechten Seite entstehen genau die bekannten Zentrifugal- und Coriolis-Scheinkräfte, die im rotierenden System wahrgenommen werden.

Es sei an dieser Stelle nochmal darauf hingewiesen, dass ein wichtiger Unterschied besteht zwischen einer Transformation z.B. in ein rotierendes Koordinatensystem und den Transformationen, die uns in das "lokale Inertialsystem" bringen. Die erste Art von Transformationen ist *global*, d.h. wir können mit einer anzugebenen Transformation von Minkowski-Koordinaten zu den beschleunigten Koordinaten gelangen. Die Gravitationsfelder, die in der Natur vorkommen, sind hingegen inhomogen und bewirken an verschiedenen Punkten unterschiedliche Beschleunigungen. Daher brauchen wir an jedem Punkt eine andere Transformation in das betreffende

“lokale Inertialsystem”. Dies wiederum bedeutet, dass es *keine globale Transformation* gibt, mit der wir simultan von den im Gravitationsfeld gewählten Koordinaten zu Minkowski-Koordinaten gelangen können. Im Folgenden werden wir sehen, dass dies bedeutet, dass der metrische Tensor dann eine *gekrümmte* Raum-Zeit beschreibt.

Bevor wir dazu kommen, sei notiert, dass die Bewegungsgleichung (IV.33) eines Teilchens im Gravitationsfeld auch aus einem Wirkungsprinzip folgt. Ein “frei fallendes” Teilchen im Gravitationsfeld (oder generell in einem beschleunigten Koordinatensystem, bestimmt durch die $g_{\mu\nu}(x)$) so verhält, dass $\int_A^B ds$ stationär (in der Regel minimal) wird. In diesem Sinne bewegt sich das Teilchen auf der kürzesten Bahn, gemessen anhand der Eigenzeit des Teilchens. Man nennt diese Bahn die *Geodäte*. Die Geodäte verallgemeinert den Begriff der “geraden Linie” auf einen allgemeinen Raum mit Metrik $g_{\mu\nu}(x)$.

IV.4 Gravitation und Krümmung der Raumzeit

Einstein wurde bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie sehr vom mathematischen Konzept der *Riemannschen Mannigfaltigkeit* geleitet. Einer seiner engsten Freunde war der Schweizer Mathematiker Marcel Grossmann, der ein Experte auf diesem Gebiet war. Wir werden in diesem Abschnitt einige der mathematischen Grundlagen erörtern. Dabei werden wir die enge Verbindung zu unseren Überlegungen in den bisherigen Abschnitten erkennen. Die Synthese des Äquivalenzprinzips mit der bereits zu Einsteins Zeiten wohlbekannten mathematischen Beschreibung von metrischen Räumen bildet die Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Euklid postulierte, dass die zwei in Abb. 30 (links) gezeigten Geraden sich stets schneiden müssen, wenn für die beiden inneren Schnittwinkel mit einer dritten Geraden $\alpha + \beta < 180^\circ$ gilt (fünftes euklidisches Postulat). Über zwei Jahrtausende versuchten Mathematiker erfolglos, dieses Postulat als Konsequenz der anderen euklidischen Postulate zu etablieren. Dass dies nicht möglich ist, wurde um 1825 klar, als Gauß, Bolyai und Lobachevski unabhängig voneinander einen Raum entdeckten, der heute als *zweidimensionaler Raum konstanter negativer Krümmung* bezeichnet wird. Dieser Raum ist ein mathematisch völlig konsistenter metrischer Raum, der aber das fünfte Postulat nicht erfüllt. Man kann ihn sich in etwa wie den im rechten Bild von Abb. 30 gezeigten “Sattel” vorstellen.

Vor Gauß hatte man nur zweidimensionale Räume (Flächen) diskutiert, die in den \mathbb{R}^3 eingebettet waren, wie z.B. die zweidimensionale Kugeloberfläche S^2 . Diese Einbettung ist nicht konsistent möglich für den zweidimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. Gauß erkannte, dass ein zweidimensionaler Raum nicht eingebettet werden muss, um ihm Eigenschaften wie zum Beispiel eine Krümmung zuordnen zu können. Es ist möglich, den Raum vollständig durch *innere (intrinsische)* Eigenschaften zu beschreiben, die durch Messungen innerhalb des Raums bestimmt werden können (z.B. der Winkelsumme in einem Dreieck oder des Verhältnisses von Umfang und Radius eines Kreises). Dazu reicht allein die Angabe einer Metrik aus. Konkret betrachtete Gauß eine wichtige Klasse von zweidimensionalen Räumen, nämlich solche, bei denen es in jeder genügend kleinen Region möglich ist, *lokal* ein euklidisches Koordinatensystem (ξ_1, ξ_2) zu wählen, so dass der (infinitesimale) Abstand ds zweier Punkte den Satz von Pythagoras,

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2, \quad (\text{IV.43})$$

erfüllt. Dies ist zum Beispiel der Fall für eingebettete Räume wie die oben erwähnte S^2 -Sphäre, aber auch für den Raum negativer Krümmung. Für solche Räume ist die Metrik global stets

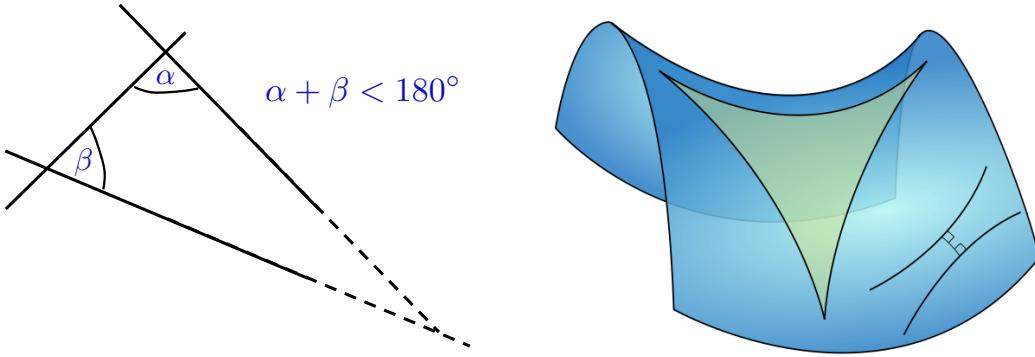


Abb. 30 — Links: Zum fünften euklidischen Postulat. Rechts: Raum negativer Krümmung. Man sieht, dass zwei Geraden, die eine dritte in rechten Winkeln schneiden, auseinanderstreben. Gleichermaßen ist die Winkelsumme in einem Dreieck kleiner als 180° . Aus: http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_curvature.

eine quadratische Form in den Differentialen der Koordinaten:

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2. \quad (\text{IV.44})$$

Sie ist symmetrisch, $g_{ij} = g_{ji}$, so dass wir nur einen Term $\sim 2g_{12} dx_1 dx_2$ zu schreiben brauchen. Die metrischen Koeffizienten g_{ij} sind im Allgemeinen Funktionen der Koordinaten. Sie bestimmen alle inneren Eigenschaften des Raumes. Wir betrachten einige konkrete Beispiele:

(i) Der \mathbb{R}^2 in kartesischen Koordinaten. Die Metrik ist hier

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2. \quad (\text{IV.45})$$

Schreiben wir die g_{ij} in eine Matrix g , so wird hier

$$g \equiv (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.46})$$

Wir sehen, dass die Koeffizienten unabhängig von den Koordinaten sind.

(ii) Der \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi. \quad (\text{IV.47})$$

Es ist $dx_1 = dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi$ und $dx_2 = dr \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi$, woraus folgt:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (\text{IV.48})$$

Die Metrik nimmt also in diesen Koordinaten die Form

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.49})$$

an. Der Eintrag g_{22} ist hier abhängig von r , also eine Funktion der Koordinaten. Diese Tatsache an sich ist also offenbar kein besonderes Indiz hinsichtlich der Struktur des Raumes. Denn wir haben es ja hier immer noch mit dem gewöhnlichen \mathbb{R}^2 zu tun, der flach ist.

(iii) Die S^2 -Sphäre im \mathbb{R}^3 . Wir schreiben in Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.50})$$

wobei R fest ist. Nach kurzer Rechnung findet man

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{IV.51})$$

und damit

$$g = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.52})$$

Dies ist die Metrik eines zweidimensionalen Raumes, auch wenn wir sie durch Einbettung in den \mathbb{R}^3 gefunden haben. Der wichtige Punkt ist nun, dass es *keine globale Transformation* $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2)$ gibt, mit der die Metrik auf die Form

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 \quad (\text{IV.53})$$

gebracht werden könnte. Man kann dies zwar lokal stets beliebig genau erreichen, nicht aber global (dies ist auch der Grund, warum man die Erdoberfläche nicht so leicht in zweidimensionalen Karten darstellen kann). Die Metrik (IV.52) beschreibt einen gekrümmten Raum, der nicht in einen flachen Raum transformiert werden kann. Die Eigenschaft der Krümmung ist also eine feste Eigenschaft eines betrachteten Raums und durch die Metrik bestimmt. Als letztes Beispiel:

(iv) Der zweidimensionale Raum H^2 mit der Metrik

26.07.2022

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{IV.54})$$

Dieser Raum ist ebenfalls gekrümmt und kann nicht global auf den flachen \mathbb{R}^2 transformiert werden. Im Gegensatz zur Sphäre S^2 kann man diese Metrik nicht durch zu (IV.50),(IV.51) analoge Schritte konstruieren, d.h. nicht durch Einbettung in den \mathbb{R}^3 . Dennoch ist der H^2 ein völlig legitimer metrischer Raum, der eben einfach durch (IV.54) definiert ist. Er ist der oben erwähnte Raum konstanter negativer Krümmung, auf den Gauß, Bolyai und Lobachevski stießen.

Der Vergleich von (IV.48) mit (IV.51),(IV.54) zeigt, dass die Koordinatenabhängigkeit der metrischen Koeffizienten kein hinreichendes Kriterium für die Krümmungseigenschaft eines Raumes ist. Sie ist aber eine notwendige Bedingung:

- Raum gekrümmmt \Rightarrow die g_{ij} sind Funktionen der Koordinaten.

Außerdem gilt:

- Raum nicht gekrümmmt \Leftrightarrow eine *globale* Transformation zu kartesischen Koordinaten ist möglich.

Wir werden noch ein hinreichendes Kriterium finden müssen, um einem Raum anhand seiner Metrik „anzusehen“, ob er flach ist oder nicht. Im Fall von zweidimensionalen Flächen hat bereits Gauß ein solches Kriterium hergeleitet, die sogenannte *Gaußsche Krümmung* K . Sie ist

eine komplizierte Funktion der g_{ij} und hängt im Allgemeinen dadurch auch von den Koordinaten x_1, x_2 ab. Ein zweidimensionaler Raum ist genau dann flach (also global äquivalent zum \mathbb{R}^2), wenn K identisch verschwindet. So findet man zum Beispiel, dass die Metrik in (IV.48) auf $K = 0$ führt. Gekrümmte Räume hingegen haben $K \neq 0$. Die beiden Metriken in (IV.52) und (IV.54) sind dabei besonders, da die zugehörigen Räume eine *konstante* Krümmung besitzen. Für die Sphäre S^2 ist $K = 1/R^2$, für den H^2 hat man $K = -1/R^2$ (daher auch der Name ‘‘Raum konstanter negativer Krümmung’’). Am Rande sei bemerkt, dass man die Metriken für \mathbb{R}^2, S^2, H^2 in einer gemeinsamen Form schreiben kann. Dazu führen wir bei allen drei Räumen eine Variable ρ ein, die wir jeweils wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 : \quad & \rho = r/R, \\ S^2 : \quad & \rho = \sin \theta, \\ H^2 : \quad & \rho = \sinh \theta.\end{aligned}\tag{IV.55}$$

Die Metriken (IV.48),(IV.51),(IV.54) kann man dann zusammenfassen als

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\varphi^2 \right),\tag{IV.56}$$

wobei $k = 0$ für den \mathbb{R}^2 , $k = +1$ für S^2 , $k = -1$ für H^2 . Dies mag an dieser Stelle eher als mathematische Spielerei erscheinen, hat aber eine praktische Bedeutung. Nehmen wir an, wir fragen nach einem zweidimensionalen Raum, der in alle Richtungen gleich erscheinen soll, also isotrop sein soll. Wir erwarten für einen solchen Raum, dass auch seine Krümmung überall gleich ist. Die Metrik (IV.56) ist die allgemeine Metrik für *alle zweidimensionalen Räume konstanter Krümmung*. Es stellt sich heraus, dass man ihre Form auch direkt aus der Forderung nach Isotropie ableiten kann, ohne dass man wissen muss, welche Räume sie am Ende beschreibt. Dies macht man sich z.B. in der Kosmologie zunutze. Auch hier geht man aus von allgemeinen Prinzipien (Isotropie und Homogenität des Universums) und stellt die allgemeinste mögliche Form der Metrik auf. Die dabei entstehende *Robertson-Walker-Metrik* ähnelt der in (IV.56) (auch wenn sie natürlich vier Variablen (drei Raumkomponenten und die Zeit) enthält).

Riemann verallgemeinerte 1854 die obigen Betrachtungen auf N -dimensionale Räume. Unter einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit* verstehen wir einen topologischen Raum, der (i) *lokal* dem euklidischen \mathbb{R}^N gleicht, (ii) für den in jedem Punkt die ersten beiden Ableitungen nach den Koordinaten existieren, und (iii) für den eine Metrik der Form $ds^2 = g_{ij}(x^k)dx^i dx^j$ definiert ist. Für unsere Zwecke soll der Raum lokal natürlich nicht wirklich euklidisch sein, sondern ein Minkowski-Raum mit Metrik $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Man kann aber den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit ohne weiteres entsprechend ausdehnen (man spricht dann manchmal auch von einer *Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit*).

Zu Einsteins Zeiten war der Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit in der Mathematik also bereits lange etabliert. Abbildung 31 sammelt unsere Aussagen zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten einerseits und zur Gravitation und zum Äquivalenzprinzip andererseits. Die Gegenüberstellung gibt in gewissem Sinn genau Einsteins Gedankengang wieder. Er kam zu dem Schluss, dass *die geometrische Struktur der Raum-Zeit die einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist*. Insbesondere *ist in einem Gravitationsfeld die Raum-Zeit gekrümmmt*. Die Gravitation wird also geometrisiert – man spricht in diesem Zusammenhang statt von Gravitation manchmal auch von *Geometrodynamik*. Ein Teilchen bewegt sich durch die Raum-Zeit auf einer Geodäte, die durch die Christoffelsymbole und damit durch die Metrik bestimmt wird. In gewissem Sinn

Mathematik der Riemann-Mfg.keiten	Physik der Gravitation
<ul style="list-style-type: none"> • <i>lokal</i> euklidisch • Raum ohne Krümmung: \exists globale Trafo zu euklidischer Metrik • gekrümmter Raum: \nexists globale Trafo zu euklidischer Metrik 	<ul style="list-style-type: none"> • \exists "lokales IS" • Grav. vernachlässigt: Gesetze der SRT, Minkowski Raum-Zeit • Gravitationsfeld: können <i>nicht global</i> zu Minkowski-Koord. transformieren

Abb. 31 — Gegenüberstellung einiger Eigenschaften von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit den Aussagen des Äquivalenzprinzips.

ersetzt dies den Begriff der Gravitationskraft: Die Raumzeit ist aufgrund von Quellen (Masse, Energie) gekrümmt (in einer Weise, die wir noch quantitativ verstehen müssen). Das Teilchen bewegt sich einfach entlang der "kürzesten" Verbindung durch diese gekrümmte Raum-Zeit. Dies ist die Art und Weise, wie es die gravitative Wirkung der Quellen wahrnimmt.

IV.5 Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz

Die Bewegungsgleichung für ein frei fallendes Teilchen haben wir in Abschnitt IV.3.2 direkt aus dem Äquivalenzprinzip hergeleitet. Wir könnten nun andere physikalische Gesetze betrachten, zum Beispiel ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, das sich gleichzeitig in einem Gravitationsfeld befindet. Wir würden in das "lokale Inertialsystem" gehen, dort mittels der Gesetze der speziellen Relativitätstheorie die Bewegungsgleichung aufstellen und analog zu den Schritten (IV.29)-(IV.33) die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld ausarbeiten. Es ist klar, dass es mühsam sein wird, für jede neue physikalische Situation diesen Weg zu gehen. Wir werden in diesem Abschnitt eine Methode entwickeln, die denselben physikalischen Inhalt hat, aber wesentlich direkter und eleganter ist. Sie basiert auf dem *Prinzip der allgemeinen Kovarianz*, das besagt:

"Betrachte eine physikalische Gleichung (ein Gesetz) mit den folgenden Eigenschaften:
 (1) Die Gleichung gilt ohne Gravitation, d.h., sie ist kompatibel mit der speziellen Relativitätstheorie;
 (2) die Gleichung ist 'allgemein kovariant', was bedeutet, dass sie forminvariant ist unter einer beliebigen Koordinatentransformation.
 Dann gilt die Gleichung einem beliebigen Gravitationsfeld."

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz folgt aus dem Äquivalenzprinzip. Um dies zu sehen, nehmen wir an, dass wir in einem beliebigen Gravitationsfeld sind und eine Gleichung haben, die (1) und (2) erfüllt. (2) besagt dann, dass die Gleichung in allen Koordinatensystemen gilt, falls sie in einem gilt. Nun gibt es nach dem Äquivalenzprinzip immer ein “lokales Inertialsystem”, in dem die Gravitation abwesend ist. Dort aber gilt die Gleichung nach (1). Also gilt sie in jedem System und damit in jedem beliebigen Gravitationsfeld.

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz erleichtert uns die Formulierung von physikalischen Gesetzen in Anwesenheit von Gravitationsfeldern enorm. Die Idee wird sein, Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie zu nehmen und so zu schreiben, dass sie forminvariant unter einer allgemeinen Koordinatentransformation sind. Die Gleichung gilt dann in jedem Gravitationsfeld. Wie immer bei Transformationen ist es extrem nützlich, Größen zu haben, die unter der Transformation (hier die allgemeine Koordinatentransformation) ein wohldefiniertes einfaches Verhalten haben. Diese Größen sind Skalare, Vektoren, und allgemeiner, Tensoren.

IV.5.1 Vektoren und Tensoren

Als Skalar bezeichnen wir eine Größe, die sich unter einer Koordinatentransformation $x \rightarrow x'$ nicht ändert. Die Ruhemasse m ist ein Skalar, ebenso das infinitesimale Abstandsquadrat ds^2 . Auch ein Feld φ mit $\varphi'(x') = \varphi(x)$ ist ein Skalar.

Wir führen nun Vektoren ein. Dazu betrachten wir das Verhalten der Differentiale der Koordinaten unter der beliebigen Koordinatentransformation $x \rightarrow x' = x'(x)$:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (\text{IV.57})$$

Dies definiert das Transformationsverhalten eines Vektors: Jede Größe V^μ , die sich unter der Transformation verhält wie

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (\text{IV.58})$$

ist ein *kontravarianter Vektor* (genauer, die Komponente eines solchen). Dies wird motiviert, wenn man Lorentz-Transformationen betrachtet. Bei diesen ist der Zusammenhang zwischen x' und x linear und konstant (siehe Gl. (I.75)), so dass $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu_\nu$. Also reduziert sich (IV.58) für Lorentz-Transformationen auf das gewohnte Verhalten eines kontravarianten Lorentz-Vektors, wie es sein sollte.

Es ist geschickt, auch wieder einen *kovarianten Vektor* einzuführen, der nach

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (\text{IV.59})$$

transformiert. Auch dies ist kompatibel mit den Lorentztransformationen: Nach (I.89) und (I.88) transformiert ein kovarianter Lorentz-Vektor gerade nach der inversen Lorentztransformation, die man nach (I.75) gerade durch $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ erhält.

Das Transformationsverhalten von Vektoren kann leicht auf allgemeinere Tensoren ausgedehnt werden. Für einen Tensor $T^\mu_\nu{}^\lambda$ haben wir

$$T'^\mu_\nu{}^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^\kappa_\rho{}^\sigma. \quad (\text{IV.60})$$

Zu jedem oberen Index hat man also eine Transformation wie in (IV.58), und zu jedem unteren eine wie in (IV.59).

Ein wichtiger Tensor ist der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ aus (IV.27). Dass er wirklich ein Tensor ist, rechnet man nach. Wir untersuchen dazu (IV.27) für neue Koordinaten x' :

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &\equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x'^\nu} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \underbrace{\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}}_{\stackrel{\text{(IV.27)}}{=} g_{\rho\sigma}} \eta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

Die linke Seite hat also das korrekte Transformationsverhalten eines Tensors zweiter Stufe mit kovarianten Komponenten. Die über (IV.38) definierte Inverse $g^{\mu\nu}$ des metrischen Tensors ist ein kontravarianter Tensor.

Es gelten die üblichen Regeln für Tensoren, die wir auch von Lorentz-Tensoren kennen. So ist zum Beispiel eine Linearkombination von Tensoren wieder ein Tensor. Haben wir zwei Tensoren $A^\mu{}_\nu$ und B^ρ , so ist das “direkte Produkt” $T^\mu{}_\nu{}^\rho = A^\mu{}_\nu B^\rho$ ebenfalls ein Tensor. Zwei besonders wichtige Regeln sind:

(i) *Kontraktion*: Setzen wir bei einem Tensor einen oberen und einen unteren Index gleich und summieren über ihn, so ergibt sich ein neuer Tensor niedrigerer Stufe, z.B.

$$T^\mu{}_\nu{}^\rho{}_\nu \equiv \tilde{T}^{\mu\rho}. \quad (\text{IV.62})$$

(ii) *Hoch- bzw. Herunterziehen von Indizes*: Haben wir z.B. einen Tensor $T^{\mu\rho}{}_\sigma$, so ist

$$\tilde{T}_\nu{}^\rho{}_\sigma \equiv T^{\mu\rho}{}_\sigma g_{\mu\nu} \quad (\text{IV.63})$$

wieder ein Tensor, bei dem eine kontravariante durch eine kovariante Komponente ersetzt worden ist.

Wir sehen nun, wie wir eine große Klasse von Gleichungen schreiben können, die forminvariant unter beliebigen Koordinatentransformationen sind: Eine Gleichung der Form

$$V^\mu = U^\mu \quad (\text{IV.64})$$

mit zwei Vektoren V, U ist automatisch forminvariant, da sie nach einer Transformation zu

$$V'^\mu = U'^\mu \quad (\text{IV.65})$$

wird (siehe auch Abschnitt I.4). Eine Gleichung $V^\mu = 42$ hingegen kann nicht forminvariant sein, da die beiden Seiten verschieden transformieren.

Es gibt aber auch wichtige Größen, die zunächst kein einfaches Transformationsverhalten haben. Für das Integrationsmaß d^4x haben wir unter einer Koordinatentransformation

$$d^4x' = |\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)| d^4x \equiv |\mathcal{J}| d^4x, \quad (\text{IV.66})$$

wobei \mathcal{J} die Jacobi-Determinante für die Transformation ist. Das Maß ist also im Allgemeinen kein Skalar, was im Gegensatz zum Fall der Lorentz-Transformationen steht, bei denen $|\det(\Lambda)| = 1$ (Gl. (I.116)). Wir können dies allerdings korrigieren: Wir schreiben (IV.61) als

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \quad (\text{IV.67})$$

Die rechte Seite kann man als Produkt von drei 4×4 -Matrizen auffassen. Wir bilden die Determinante der Gleichung. Mit

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \quad (\text{IV.68})$$

erhalten wir

$$g' = \left(\det \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \right) \right)^2 g = \mathcal{J}^{-2} g. \quad (\text{IV.69})$$

Vergleichen wir dies mit (IV.66), so erkennen wir, dass

$$\sqrt{g} d^4x \quad (\text{IV.70})$$

ein Skalar ist. Dies ist wichtig für die Konstruktion einer Wirkung $\int d^4x \mathcal{L}$ für die Allgemeine Relativitätstheorie.

IV.5.2 Transformation der $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

Die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ bilden allerdings keinen Tensor, wie wir nun zeigen werden. Wir gehen aus von der Definition (IV.34), in der $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$. Wir schreiben die Symbole nun für neue Koordinaten x' und wenden Ketten- und Produktregel an:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu\nu}^\lambda &\equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\eta \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.71})$$

Im ersten Term auf der rechten Seite erkennen wir wieder Christoffel-Symbole. Im zweiten Term tritt die Kombination $\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta_\sigma^\rho$ auf. Wir finden

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\eta\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (\text{IV.72})$$

Das Auftreten des zweiten Terms bedeutet, dass die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ keinen Tensor bilden. Es ist nützlich, diesen Term auf eine etwas andere Weise zu schreiben. Wir leiten die Relation

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\lambda \quad (\text{IV.73})$$

nach x'^μ ab. Wieder mit Ketten- und Produktregel erhalten wir

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} = 0. \quad (\text{IV.74})$$

Also kann man (IV.72) schreiben als

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\eta\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}. \quad (\text{IV.75})$$

Wir wenden nun das Prinzip der allgemeinen Kovarianz zum ersten Mal an, um die Bewegungsgleichung (IV.33) eines Teilchens im freien Fall auf neue Weise herzuleiten. Die Gleichung gilt in Abwesenheit der Gravitation, wo

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = 0. \quad (\text{IV.76})$$

Damit ist die erste Voraussetzung für das Prinzip erfüllt. Nun müssen wir noch zeigen, dass die Gleichung allgemein kovariant ist. Wir betrachten

$$\frac{d^2x'^\lambda}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (\text{IV.77})$$

Aus Gl. (IV.75) folgt

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau} = \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\eta\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (\text{IV.78})$$

Wir benutzen wieder mehrfach $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\sigma$ etc. und finden

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (\text{IV.79})$$

Wir addieren dies zu (IV.77) und erhalten:

$$\frac{d^2x'^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma'_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \left(\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right). \quad (\text{IV.80})$$

Die Kombination transformiert also genau wie ein kontravarianter Vektor! Damit ist die Gleichung

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{IV.81})$$

allgemein kovariant. Da sie im “lokalen Inertialsystem” erfüllt ist, gilt sie somit nach dem Prinzip der allgemeinen Kovarianz in einem beliebigen Gravitationsfeld. Sie ist also *die* Bewegungsgleichung für ein frei fallendes Teilchen.

IV.5.3 Kovariante Ableitung

In der speziellen Relativitätstheorie liefert die Ableitung eines Tensors einen neuen Tensor. So ist zum Beispiel $\partial_\mu V^\nu$ ein Tensor zweiter Stufe, wenn V ein Vektor ist. Im Fall von allgemeinen Koordinatentransformationen ändert sich dies. Wir berechnen mit Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &\stackrel{(\text{IV.58})}{=} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Gäbe es nur den ersten Term auf der rechten Seite, so wäre $\partial_\mu V^\nu$ ein Tensor. Aufgrund des zweiten Terms transformiert die Ableitung im Allgemeinen nicht wie ein Tensor. Wir können aber

leicht eine “verallgemeinerte” Ableitung definieren, die das korrekte Transformationsverhalten eines Tensors liefert. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} &\stackrel{(IV.75)}{=} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \right) \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \underbrace{\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}}}_{=\delta_{\eta}^{\sigma}} V^{\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

Wir addieren dies zu (IV.82) und erhalten

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \right), \quad (\text{IV.84})$$

was genau dem Transformationsverhalten eines Tensors zweiter Stufe (mit einem oberen und einem unteren Index) entspricht. Wir definieren daher die *kovariante Ableitung*

$$D_{\lambda} V^{\mu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa} = \partial_{\lambda} V^{\mu} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa}, \quad (\text{IV.85})$$

die gerade so von der gewöhnlichen Ableitung abweicht, dass sie aus V einen Tensor zweiter Stufe macht. Für eine kovariante Komponente eines Vektors finden wir nach analoger Rechnung

$$D_{\lambda} V_{\mu} = \partial_{\lambda} V_{\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} V_{\kappa}. \quad (\text{IV.86})$$

Dies verallgemeinert sich auf beliebige Tensoren. Ist zum Beispiel $T^{\mu\sigma}_{\rho}$ ein Tensor dritter Stufe, so ist

$$D_{\lambda} T^{\mu\sigma}_{\rho} = \partial_{\lambda} T^{\mu\sigma}_{\rho} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} T^{\kappa\sigma}_{\rho} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\sigma} T^{\mu\kappa}_{\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} T^{\mu\sigma}_{\kappa}. \quad (\text{IV.87})$$

Man hat also für jeden oberen Index einen zusätzlichen Term wie in (IV.85) und für jeden unteren Index einen wie in (IV.86). Speziell für den metrischen Tensor ist

$$D_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa} g_{\mu\kappa} \stackrel{(\text{IV.36})}{=} 0, \quad (\text{IV.88})$$

was bedeutet, dass das Herauf- oder Herunterziehen von Indizes mittels des metrischen Tensors mit der kovarianten Ableitung vertauscht. Man braucht sich also keine Gedanken über die Reihenfolge dieser Operationen zu machen. Dies ist eine sehr nützliche Eigenschaft der kovarianten Ableitung, die nicht trivial ist, da ja $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$.

Der zweite Term in der kovarianten Ableitung (IV.85) eines Vektors hat eine geometrische Interpretation, die wir hier nur kurz skizzieren. Verschiebt man einen Vektor im flachen Raum parallel, so ändert sich der Vektor nicht. Dies ist anders im gekrümmten Raum, wo der Vektor bei einer Parallelverschiebung entlang eines geschlossenen Wegs eine Drehung erfährt (siehe Abb. 32). In der kovarianten Ableitung liefert der erste Term die übliche Änderung des Vektors entlang des Wegs. Der zweite Term liefert den Beitrag zur Änderung des Vektors aufgrund der Krümmung des Raumes.

Feld- oder Bewegungsgleichungen aus der speziellen Relativitätstheorie enthalten typischerweise Ableitungen. Die kovariante Ableitung erlaubt uns, diese dann über das Prinzip der allgemeinen Kovarianz auf Gleichungen zu übertragen, die auch im Gravitationsfeld gelten. Dazu

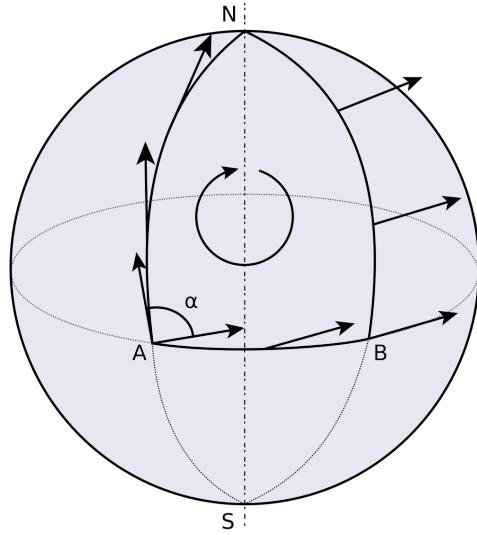


Abb. 32 — Parallel Verschiebung eines Vektors V im gekrümmten Raum von A nach N nach B und zurück nach A. Der Vektor wird entlang der Kurve $x(\tau)$ über die Gleichung $\frac{DV^\mu}{D\tau} \equiv D_\lambda V^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$ transportiert. Aus: https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_transport#/media/File:Parallel-Transport.svg

ersetzen wir

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &\longrightarrow g_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu &\longrightarrow D_\mu.\end{aligned}\tag{IV.89}$$

Wir wenden dies zum Beispiel auf die Feldgleichungen der Elektrodynamik,

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu, \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0,\end{aligned}\tag{IV.90}$$

(siehe Gln. (I.181), (I.188)) an. In einem beliebigen Gravitationsfeld mit bekannter Metrik lauten die Gleichungen dann

$$\begin{aligned}D_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu, \\ D^\lambda F^{\mu\nu} + D^\mu F^{\nu\lambda} + D^\nu F^{\lambda\mu} &= 0.\end{aligned}\tag{IV.91}$$

Denn die Gleichungen gelten in der speziellen Relativitätstheorie und sind allgemein kovariant.

IV.6 Die Einsteinschen Feldgleichungen

28.07.2022

Wir kommen nun zu den fundamentalen Feldgleichungen der Gravitation, die uns für eine gegebene Verteilung von Quellen den metrischen Tensor liefern. Wir können diese Gleichungen nicht herleiten, da sie über die spezielle Relativitätstheorie hinausgehen. Wir müssen die Gleichungen also anhand einfacher Prinzipien postulieren. Letzten Endes muss dann das Experiment

über die Richtigkeit der Gleichungen entscheiden. In Analogie zur Elektrodynamik erwarten wir, dass die Gleichungen die zweiten Ableitungen des metrischen Tensors enthalten. Wir verlangen außerdem, dass die Feldgleichungen kovariant sind. Ferner müssen sie sich im geeigneten Grenzfall statischer schwacher Felder und nichtrelativistischer Bewegung auf die Ergebnisse der etablierten Newtonschen Theorie reduzieren. Zunächst sammeln wir die diversen Zutaten für die Feldgleichungen.

IV.6.1 Der Krümmungstensor

Wir erinnern uns an die in Abschnitt IV.4 aufgeworfene Frage, wie man einer gegebenen Metrik ansehen kann, ob sie einen gekrümmten Raum beschreibt, oder einen flachen Raum für den man lediglich krummlinige Koordinaten gewählt hat. Die allgemeine Antwort auf diese Frage liefert der Krümmungstensor. Um ihn einzuführen, betrachten wir zweite kovariante Ableitungen der Form $D_\kappa D_\nu$ eines Vektorfelds. Man findet, dass diese nicht miteinander vertauschen, sondern dass

$$D_\kappa D_\nu V_\mu - D_\nu D_\kappa V_\mu = -V_\lambda R^\lambda_{\mu\nu\kappa}, \quad (\text{IV.92})$$

mit

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}. \quad (\text{IV.93})$$

Dies ist der *Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor*. Auch wenn er Größen wie gewöhnliche Ableitungen und die Christoffelsymbole enthält, die allesamt keine Tensoren sind, ist er ein echter Tensor: Bei einer Koordinatentransformation findet man

$$R'^\tau_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R^\lambda_{\mu\nu\kappa}. \quad (\text{IV.94})$$

Eine alternative und häufig benutzte Form des Krümmungstensors erhält man, wenn man den Index λ nach unten zieht und im ersten Teil die Christoffelsymbole explizit aus (IV.40) einsetzt:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}). \quad (\text{IV.95})$$

Es gilt nun folgende Aussage (die hier nicht bewiesen wird):

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann nicht gekrümmmt, wenn alle Komponenten des Krümmungstensors verschwinden.

Der Krümmungstensor erlaubt uns also direkt zu entscheiden, ob ein Raum gekrümmmt ist oder nicht. Da wir postuliert haben, dass in einem Gravitationsfeld die Raum-Zeit gekrümmmt ist, ist es nicht überraschend, dass der Krümmungstensor eine entscheidende Rolle in den Feldgleichungen der Gravitation spielt, wie wir sehen werden.

Wir halten einige Eigenschaften des Krümmungstensors fest, auch diese ohne Beweis:

(i) $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ ist eindeutig in dem Sinne, dass er der einzige echte Tensor ist, den man aus $g_{\mu\nu}$ und dessen ersten und zweiten Ableitungen bilden kann, und der linear in den zweiten Ableitungen ist. Feldgleichungen sollten typischerweise zweite (aber keine höheren) Ableitungen enthalten.

(ii) $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ ist stets ein Tensor vierter Stufe, unabhängig davon, wieviele Dimensionen d der Raum hat. Die Anzahl der unabhängigen Komponenten von $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ hängt allerdings von d ab. Durch

Abzählen unter Berücksichtigung der Symmetrien des Tensors findet man, dass es $d^2(d^2 - 1)/12$ unabhängige Komponenten gibt. In $d = 2$ Dimensionen ist dies eine einzige Komponente, die gerade der Gaußschen Krümmung aus Abschnitt IV.4 entspricht. In $d = 4$ Dimensionen sind es bereits 20 freie Komponenten.

(iii) Es gibt eine Reihe von (Anti-)Symmetrien bezüglich der Vertauschung von Indizes. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\mu\nu\kappa} &= -R^\lambda_{\mu\kappa\nu}, \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (\text{IV.96})$$

(iv) Es gilt die *Bianchi-Identität*

$$D_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + D_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0. \quad (\text{IV.97})$$

Wichtig für uns werden Kontraktionen des Krümmungstensors sein. Der *Ricci-Tensor* ist definiert durch

$$R_{\mu\kappa} \equiv g^{\nu\lambda} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R^\nu_{\mu\nu\kappa}. \quad (\text{IV.98})$$

Er ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, $R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$, und hat damit in $d = 4$ Dimensionen 10 unabhängige Komponenten. Alle anderen Kontraktionen des Krümmungstensors verschwinden entweder oder sind proportional zum Ricci-Tensor. Der *Ricci-Skalar* schließlich ist definiert durch

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (\text{IV.99})$$

Eine wichtige Eigenschaft von $R_{\mu\kappa}$ und R ist

$$D^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0. \quad (\text{IV.100})$$

Dies sieht man, wenn man die Bianchi-Identität (IV.97) mit $g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa}$ kontrahiert und die Eigenschaften (IV.96) ausnutzt, sowie die Tatsache, dass der metrische Tensor mit der kovarianten Ableitung vertauscht (siehe (IV.88)):

$$\begin{aligned} g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} (D_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + D_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta}) &= 0 \\ \Leftrightarrow D_\eta R - D^\mu R_{\mu\eta} - D^\lambda R_{\eta\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.101})$$

Die beiden letzten Terme auf der linken Seite sind gleich. Nach Division durch (-2) folgt (IV.100).

IV.6.2 Der Energie-Impuls Tensor

Wir postulieren, dass *alle* Formen von Energie Quellen für Gravitationsfelder sind. Dies erwarten wir unmittelbar aufgrund der Tatsache, dass Massen die Quellen der Gravitation in der Newtonschen Theorie sind und nach der speziellen Relativitätstheorie Masse und Energie äquivalent sind. Energie und Impuls treten als Dichten im Energie-Impuls Tensor auf, wie wir aus der Feldtheorie wissen (siehe Abschnitte I.6.2 und I.6.3). Daher erwarten wir, dass der Energie-Impuls Tensor in den Feldgleichungen der Gravitation auftritt. Haben wir zum Beispiel elektromagnetische Felder mit ihrem Energie-Impuls Tensor

$$T_{\text{e.m.}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (\text{IV.102})$$

(siehe (I.261)), so sind auch diese Quellen von Gravitationsfeldern. Wir haben dann also die Feldgleichungen der Gravitation zu kombinieren mit denen des elektromagnetischen Feldes aus Gl. (IV.91) im Gravitationsfeld. Dies läuft ein sehr komplexes gekoppeltes Problem hinaus. Im Hinblick auf Vorgänge im Universum (zum Beispiel in der Nähe von Sternen) sind andere Formen von Energie relevanter, zum Beispiel die Energien und Massen von Himmelskörpern oder die Energiedichte des Universums selbst. Wir betrachten einen makroskopisch ausgedehnten Körper, der gasförmig, flüssig, oder fest sein kann. In jedem Raum-Zeit Punkt haben wir eine lokale Geschwindigkeit der Materie im Körper. Wir verlangen, dass ein Beobachter, der sich lokal mit dieser Geschwindigkeit mitbewegt, die Materie um sich herum als isotrop sieht. Man kann zeigen, dass der Energie-Impuls Tensor aus Sicht eines solchen Beobachters die Form

$$(\tilde{T}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varrho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.103})$$

hat. Dabei ist die Größe ϱc^2 die von dem Beobachter in seinem ruhenden System gesehene Energiedichte. \mathcal{P} spielt die Rolle eines Drucks. Nach Boost in ein beliebiges Inertialsystem erhält man den Tensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\varrho + \frac{\mathcal{P}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} \mathcal{P}, \quad (\text{IV.104})$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit u . Zusätzlich braucht man noch eine Zustandsgleichung, wie zum Beispiel $\mathcal{P} = \text{const} \times \varrho$ für ein ideales Gas. Die Wichtigkeit des Energie-Impuls Tensors (IV.104) kommt daher, dass er sehr weitreichende Anwendungen besitzt und viele verschiedene Systeme beschreibt. So gilt er für ideale Flüssigkeiten, für viele Gase und sogar Quantengase. Selbst die Verhältnisse im ganzen Universum, das auf großen Skalen zumindest näherungsweise homogen und isotrop ist, können durch diesen Tensor beschrieben werden. Der Tensor (IV.104) findet auch Anwendung auf nichtrelativistische makroskopische Objekte wie zum Beispiel einen Stern oder die Erde: Für einen festen Körper ist stets $\mathcal{P} \ll \varrho c^2$. Wegen $u \sim (c, \vec{v})$ (siehe (I.105)) und $v^i \ll c$ hat man im nichtrelativistischen Fall

$$\frac{|T^{0i}|}{T^{00}} \sim \frac{v^i}{c} \ll 1, \quad \frac{|T^{ij}|}{T^{00}} \sim \frac{v^i v^j}{c^2} \ll 1. \quad (\text{IV.105})$$

Damit wird der Energie-Impuls Tensor dann in guter Näherung

$$(T^{\mu\nu}) \approx \begin{pmatrix} \varrho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.106})$$

Die kovariante Verallgemeinerung des Energie-Impuls Tensors (IV.104) folgt mittels (IV.89) direkt:

$$T^{\mu\nu} = \left(\varrho + \frac{\mathcal{P}}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{P}. \quad (\text{IV.107})$$

Hat man ein System, das aus verschiedenen Bestandteilen besteht, z.B. aus Materie, einem elektromagnetischen Feld und weiteren Komponenten, so ist der Energie-Impuls Tensor entsprechend

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{Materie}}^{\mu\nu} + T_{\text{e.m.}}^{\mu\nu} + \dots. \quad (\text{IV.108})$$

Dieser ist die Quelle für das Gravitationsfeld. Allerdings ist hier der Beitrag des Gravitationsfelds selbst noch nicht enthalten – wir müssen noch klären, wie dieser zu berücksichtigen ist. Der Tensor (IV.108) ist in der speziellen Relativitätstheorie (in Abwesenheit von Gravitation) für ein abgeschlossenes System erhalten, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$; die entsprechenden Noether-Ladungen liefern Energie- und Impulserhaltung (siehe z.B. Gl. (I.240) und die Diskussion in Abschnitt I.6.2). Im Gravitationsfeld wird nach (IV.89) hieraus das Erhaltungsgesetz

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{IV.109})$$

IV.6.3 Die Feldgleichungen

Wir sind nun in der Lage, die Feldgleichungen der Gravitation aufzustellen. Wie bereits erwähnt, können wir die Gleichungen nicht herleiten, sondern müssen sie anhand einfacher Prinzipien postulieren. Das Newtonsche Gesetz

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 4\pi G \varrho(\vec{x}) \quad (\text{IV.110})$$

soll ein Grenzfall der Gleichungen für schwache statische Felder sein. Wir erinnern uns (siehe Diskussion nach Gl. (IV.40)), dass die Komponenten der Metrik die Rolle der Gravitationspotentiale spielen. Eine naheliegende relativistische Verallgemeinerung von (IV.110) wäre daher

$$\square g_{\mu\nu} = \lambda T_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.111})$$

mit dem d'Alembert-Operator $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ und einer zu bestimmenden Konstanten λ . Diese Gleichung kann allerdings nicht ganz korrekt sein. Denn wir erwarten Nichtlinearitäten in der Feldgleichung aufgrund der Tatsache, dass das Gravitationsfeld selbst Energie und Impuls trägt und somit eine Quelle “für sich selbst” ist. Wir machen daher den allgemeineren Ansatz

$$G_{\mu\nu} = \lambda T_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.112})$$

in dem auch der Tensor $G_{\mu\nu}$ zu bestimmen ist. Er muss den folgenden Anforderungen genügen:

- Er muss ein Tensor sein, da $T_{\mu\nu}$ ein Tensor ist und wir eine kovariante Gleichung haben wollen. Denn die Feldgleichung soll ja prinzipiell für jedes Gravitationsfeld gültig sein;
- er soll aus ersten und zweiten Ableitungen des metrischen Tensors aufgebaut sein und dabei nichtlinear sein. Dabei erwarten wir allerdings, dass er linear in den zweiten Ableitungen ist, so wie auch in der Elektrodynamik die Feldgleichungen für A^μ linear in den zweiten Ableitungen sind. Höhere Ableitungen als zweite treten in der Physik in Bewegungsgleichungen nicht auf;
- er muss symmetrisch sein, $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$, da $T_{\mu\nu}$ symmetrisch ist;
- er muss erhalten sein, im Sinne von

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 , \quad (\text{IV.113})$$

da dies nach (IV.109) auch für $T_{\mu\nu}$ gilt;

- mit ihm muss der Newtonsche Grenzfall (IV.110) reproduziert werden.

Wir behaupten nun, dass die aus diesen Forderungen resultierenden korrekten Feldgleichungen gegeben sind durch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (\text{IV.114})$$

Dies sind die *Einsteinschen Feldgleichungen* (1915). Den Tensor

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (\text{IV.115})$$

(die Normierung fixiert die Konstante λ in (IV.112)) bezeichnet man auch als *Einstein-Tensor*. Er erfüllt genau die oben gestellten Forderungen. Er ist ein symmetrischer Tensor aus der Metrik und ihren ersten und zweiten Ableitungen. Dabei ist er linear in den zweiten Ableitungen. Nach (IV.100) ist er erhalten. Der Nachweis, dass (IV.114) den Newtonschen Grenzfall korrekt reproduziert, ist etwas aufwendiger und wird im nächsten Abschnitt erbracht.

Zuvor sammeln wir einige Eigenschaften der Einsteinschen Feldgleichungen:

- (i) Sie stellen zehn nichtlineare partielle Differentialgleichungen für die Komponenten $g_{\mu\nu}(x)$ des metrischen Tensors dar. Sie sind damit sehr kompliziert; es gibt im Allgemeinen kein Standardverfahren zu ihrer Lösung.
- (ii) Da der metrische Tensor ebenfalls zehn unabhängige Komponenten hat, könnte man zunächst denken, dass die Feldgleichungen $g_{\mu\nu}$ vollständig festlegen. Dies aber ist nicht der Fall. Denn der Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$ erfüllt automatisch (d.h. für jede Metrik) Gl. (IV.113), so dass nur sechs der Feldgleichungen (IV.114) unabhängig sein können. Die Erhaltung von $G_{\mu\nu}$ folgte gerade aus dem Erhaltungsgesetz (IV.109) für die Quellen des Gravitationsgesetzes, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Es ist instruktiv, dies noch einmal mit der Elektrodynamik zu vergleichen. Dort haben wir zunächst die vier Feldgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$. Auch diese sind nicht alle unabhängig, da aufgrund der Ladungserhaltung $\partial_\nu j^\nu = 0$ auch $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ gelten muss. In beiden Fällen reduziert also die Erhaltung der Quellen die Anzahl der unabhängigen Feldgleichungen. In der Elektrodynamik entspricht die Stromerhaltung gerade der Eichinvarianz (siehe Abschnitt I.5.5). Auch in der Gravitationstheorie entsteht durch $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ eine Art Eichinvarianz. Genauer ist es eine Invarianz unter der Wahl der Koordinaten: Ist $g_{\mu\nu}(x)$ eine Lösung der Feldgleichungen für ein gegebenes Problem, so auch $g'_{\mu\nu}(x')$, das aus einer *globalen* Transformation $x \rightarrow x'$ aus $g_{\mu\nu}(x)$ hervorgeht. Denn die Feldgleichungen sind ja kovariant und gelten damit in jedem Koordinatensystem. Am einfachsten sieht man dies am Beispiel des flachen Raums, der sich als eine mögliche Lösung von $R_{\mu\nu} = 0$ ergibt: Hier ist die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ Lösung, aber ebenso zum Beispiel dieselbe Metrik in Kugelkoordinaten, $g'_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$. Genau wie man die Eichinvarianz in der Elektrodynamik benutzt, um die Lösung von Problemen zu vereinfachen (speziell in der Lorenz-Eichung durch Entkopplung der Feldgleichungen), ist auch die Invarianz unter Koordinatentransformationen in der Allgemeinen Relativitätstheorie von großer Nützlichkeit. Auch hier dient sie zum Beispiel zur Entkopplung der linearisierten Feldgleichungen, wie wir sehen werden.
- (iii) Die Feldgleichungen können auch aus einem Wirkungsprinzip hergeleitet werden. Dazu definiert man die *Einstein-Hilbert-Wirkung*:

$$S_{\text{Grav.}} \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R + S_{\text{Materie}}. \quad (\text{IV.116})$$

Dabei ist wieder $g = \det(g_{\mu\nu})$ (siehe (IV.68)) und S_{Materie} bezeichnet den Beitrag von Materie (z.B. von Himmelskörpern) zur Wirkung. Da der Ricci-Skalar R und das Integrationsmaß $\sqrt{g} d^4x$ (siehe (IV.70)) Skalare unter allgemeinen Koordinatentransformationen sind, ist die Wirkung (IV.116) ebenfalls ein Skalar. Man kann zeigen, dass Variation der Wirkung nach den Feldern $g_{\mu\nu}(x)$ die Einsteinschen Feldgleichungen liefert.

Die “Herleitung” der Einsteinschen Feldgleichungen in diesem Abschnitt ist plausibel, da sie auf naheliegenden Postulaten beruht. Sie ist allerdings nicht zwingend. Am Ende muss wie immer das Experiment über die Richtigkeit einer aufgestellten Theorie entscheiden. Abänderungen der Feldgleichungen sind denkbar und wurden historisch auch mehrfach vorgeschlagen. Berühmt ist die *kosmologische Konstante* Λ , die Einstein zunächst vorschlug und dann wieder verwarf. Mit ihr lauten die Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.117})$$

oder

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + \varrho_\Lambda c^2 g_{\mu\nu}), \quad (\text{IV.118})$$

mit $\varrho_\Lambda = \Lambda c^2/(8\pi G)$. Wir erkennen, dass für $\mu = \nu = 0$ auf der rechten Seite eine “effektive” Energiedichte $\varrho c^2 + \varrho_\Lambda c^2$ auftritt. In diesem Sinne ist $\varrho_\Lambda c^2$ als Energiedichte des Vakuums zu interpretieren. Ein Term $\Lambda g_{\mu\nu}$ mit konstantem Λ ist wegen (IV.88) erhalten und damit zunächst erlaubt. Er verletzt allerdings die Forderung, dass auf der linken Seite der Feldgleichungen nur erste und zweite Ableitungen des metrischen Tensors auftreten sollen. Noch wichtiger ist, dass er den Newtonschen Limes ändert. Da das Newtonsche Gravitationsgesetz insgesamt sehr genau gilt, muss die kosmologische Konstante sehr klein sein. Seit den 1990er Jahren haben Beobachtungen von entfernten Supernovae gezeigt, dass unser Universum beschleunigt expandiert. Dies deutet auf einen Beitrag von ca. 70% “dunkler” Energie zur Energiedichte des Universums hin, der am einfachsten durch eine kosmologische Konstante erklärt werden kann. Ein großes ungelöstes Problem der modernen Physik ist, dass es zur Zeit kein fundamentales Verständnis bezüglich einer kosmologischen Konstanten gibt. So würde man aus teilchenphysikalischen Überlegungen eine kosmologische Konstante erwarten, die mehr als 100 Größenordnungen über dem beobachteten Wert liegt! Dies ist mit Abstand die größte in der Physik bekannte Diskrepanz.

IV.6.4 Newtonscher Grenzfall

Wir müssen nun noch nachweisen, dass unsere Feldgleichung (IV.114) im Fall statischer schwacher Felder das Newtonsche Gravitationsgesetz reproduziert. Dazu kontrahieren wir die Feldgleichung zunächst mit $g^{\mu\nu}$ und erhalten

$$R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu \equiv -\frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (\text{IV.119})$$

wobei wir $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ benutzt haben. Das resultierende R setzen wir in den zweiten Term auf der linken Seite von (IV.114) ein und bringen den Term auf die andere Seite. Wir erhalten:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (\text{IV.120})$$

als äquivalente Form der Feldgleichungen. Für eine statische nichtrelativistische Massenverteilung ist nach (IV.106) nur $T_{00} \approx \varrho c^2$ relevant.

Da ein Gravitationsfeld einer gekrümmten Raum-Zeit entspricht, erwarten wir für ein sehr schwaches Feld, dass die Metrik näherungsweise die Minkowski-Metrik des flachen Raums ist. Wir setzen daher

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.121})$$

mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Die Christoffelsymbole sind nach (IV.40) näherungsweise linear in den (Ableitungen der) $h_{\mu\nu}$, da $\partial\eta_{\mu\nu}/\partial x^\lambda = 0$. Wir vernachlässigen stets Terme der Ordnung $(h_{\mu\nu})^2$. Damit sind auch die Terme im Krümmungstensor (IV.93) vernachlässigbar, die quadratisch in den Christoffel-Symbolen sind. Es bleiben nur die ersten beiden Terme in (IV.93). Da wir für den Ricci-Tensor noch λ und ν kontrahieren müssen, erhalten wir

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\nu}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^\nu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{IV.122})$$

Da alle Zeitableitungen im statischen Fall verschwinden, ergibt sich hieraus für die 00-Komponente:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{\partial\Gamma_{00}^\nu}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial\Gamma_{00}^i}{\partial x^i} \\ &\stackrel{(\text{IV.40})}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[g^{\nu i} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[g^{ji} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right] \\ &\stackrel{(\text{IV.121})}{\approx} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\underbrace{(\eta^{ji} + h^{ji})}_{=-\delta^{ij}} \frac{\partial(\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^j} \right] \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \Delta h_{00} \\ &\approx -\frac{1}{2} \Delta g_{00}. \end{aligned} \quad (\text{IV.123})$$

Wir haben wieder stets alle Terme der Ordnung $(h_{\mu\nu})^2$ vernachlässigt. Im dritten Schritt haben wir ausgenutzt, dass $\eta_{\mu\nu}$ konstant ist. Wir setzen das Ergebnis nun in (IV.120) ein. Weiter verwenden wir dort $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ und $T \approx \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \approx T_{00} \approx \varrho c^2$. Damit wird die Gleichung insgesamt näherungsweise zu

$$\Delta g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2} \varrho. \quad (\text{IV.124})$$

Die letzte Information, die wir noch benötigen, erhalten wir aus dem statischen Limes der Bewegungsgleichung (IV.33) im Gravitationsfeld. Für ein nichtrelativistisches Teilchen ist

$$\left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \ll \frac{dx^0}{d\tau}, \quad (\text{IV.125})$$

da die Teilchengeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist und da die Zeitkoordinate ähnlich der Eigenzeit ist. Damit tritt auf der rechten Seite von (IV.33) nur der Term mit $\mu = 0, \nu = 0$ signifikant bei, und die Bewegungsgleichung wird mit $x^0 = ct$ näherungsweise

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 c^2. \quad (\text{IV.126})$$

An der Rechnung in (IV.123) lesen wir ab, dass

$$\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (\text{IV.127})$$

Wir erhalten damit für die räumlichen Komponenten in (IV.126)

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}, \quad (\text{IV.128})$$

oder vektoriell

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} \stackrel{!}{=} -\vec{\nabla}\phi, \quad (\text{IV.129})$$

wobei wir in der zweiten Zeile das bekannte Ergebnis der Newtonschen Gravitationstheorie mit dem Gravitationspotential $\phi(\vec{x})$ geschrieben haben (siehe (IV.9)). Die Bewegungsgleichung wird also konsistent mit der der Newtonschen Theorie, wenn $h_{00} = 2\phi/c^2$, modulo einer möglichen additiven Konstanten, die wir als Null wählen, da alle Felder (und auch ϕ) im Unendlichen verschwinden sollen. Also haben wir

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (\text{IV.130})$$

Setzen wir dies in Gl. (IV.124) ein, so finden wir

$$\Delta\phi \approx 4\pi G \varrho, \quad (\text{IV.131})$$

also genau das Newtonsche Ergebnis! Damit ist der korrekte Newtonsche Limes der Einsteinschen Feldgleichungen gezeigt.

Die in (IV.130) auftretende Abweichung von 1 ist analog zu der, die wir im Beispiel einer rotierenden Scheibe gefunden hatten (siehe Gl. (IV.23)), nur dass hier das Gravitationspotential statt des Zentrifugalpotentials auftritt. Der Term $2\phi/c^2$ ist ein Maß für die Verformung der Raum-Zeit in einem schwachen Gravitationsfeld. Mittels des einfachen Newtonschen Gravitationspotentials einer sphärischen Massenverteilung, $\phi = -MG/r$, können wir die Verformung abschätzen. Auf der Erdoberfläche ist der Wert ca. 10^{-9} , auf der Sonne 10^{-6} , auf einem weißen Zwerg 10^{-4} . Auf einem Neutronenstern ist sie mit ca. 0.3 bereits sehr deutlich ausgeprägt.

Die Tatsache, dass $g_{00} \neq 1$ in (IV.130) hat eine wichtige beobachtbare Konsequenz. Nach Gl. (IV.26) ist

$$cd\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}. \quad (\text{IV.132})$$

Es sei $d\tau$ gerade der zeitliche Abstand zwischen zwei "Ticks" einer Uhr in Ruhe und ohne Gravitation. Gehen wir nun in ein Gravitationsfeld, und ruht die Uhr im dort gewählten Koordinatensystem, so ist $dx^i = 0$, und daher

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(x)} dt. \quad (\text{IV.133})$$

Somit wird der zeitliche Abstand der Ticks in dem System als $d\tau/\sqrt{g_{00}(x)}$ wahrgenommen. Betrachten wir zwei verschiedene Raum-Zeitpunkte x_1, x_2 , so haben wir

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{g_{00}(x_2)}}{\sqrt{g_{00}(x_1)}} \stackrel{(\text{IV.130})}{\approx} 1 + \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{c^2}, \quad (\text{IV.134})$$

wobei wir wieder angenommen haben, dass wir schwache Felder haben. Da ϕ negativ ist, wird die rechte Seite größer als 1, wenn sich der Ort \vec{x}_1 tiefer im Gravitationspotential befindet als der Ort \vec{x}_2 . Dies bedeutet, dass z.B. eine Uhr auf der Erdoberfläche langsamer geht als eine Uhr, die sich in einer Höhe oberhalb der Erdoberfläche befindet. Dies ist die sogenannte Zeitdilatation im Gravitationsfeld. Sie ist eine direkte Folge des Äquivalenzprinzips. Sie manifestiert sich auch als Rotverschiebung von Licht, das von einer Quelle tiefer im Gravitationsfeld kommend an einem Punkt mit schwächerem Feld beobachtet wird.

IV.7 Lösungen der Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen sind nichtlinear und nicht in voller Allgemeinheit exakt lösbar. Dies steht im Gegensatz zu den linearen Gleichungen der Elektrodynamik, deren Lösung wir über die retardierten Potentiale gewinnen konnten. Neben numerischen Verfahren benutzt man hauptsächlich drei Ansätze:

- Man kann die Gleichungen für schwache (aber durchaus zeitabhängige) Felder linearisieren. Dann kann man die aus der Elektrodynamik bekannten Lösungsmethoden anwenden.
- Manchmal sind exakte Lösungen möglich, wenn im betrachteten System Symmetrien vorhanden sind. Hat man zum Beispiel eine isotrope und homogene Massen-/Energie-Verteilung, die unter Umständen auch noch statisch ist, so ist auch die Metrik in ihrer Form stark festgelegt. Dies macht man sich bei der Behandlung von Gravitationsfeldern um Sterne zunutze, und auch in der Kosmologie.
- Man kann den Newtonschen Grenzfall systematisch erweitern, indem man erste relativistische Korrekturen berechnet. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Post-Newtonischen* Näherungen.

Wir werden im Folgenden die ersten beiden Zugänge noch kurz ansprechen.

IV.7.1 Linearisierte Gleichungen

Wir betrachten hier wieder schwache Felder und gehen von

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.135})$$

mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ aus. Im Gegensatz zum Newtonschen Grenzfall verlangen wir allerdings nicht, dass die Metrik zeitunabhängig ist. Zur ersten Ordnung in $h_{\mu\nu}$ wird der Krümmungstensor nach (IV.95)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right). \quad (\text{IV.136})$$

Quadratische Terme in den Christoffel-Symbolen sind vernachlässigbar. Nach Hochziehen des Index λ und Kontraktion mit ν mittels $\eta^{\lambda\nu}$ erhält man für den Ricci-Tensor (wir benennen nach der Kontraktion κ in ν um)

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \underbrace{\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \partial x^\lambda}}_{= \square h_{\mu\nu}} \right) \equiv \tilde{R}_{\mu\nu}. \quad (\text{IV.137})$$

Damit erhalten wir aus (IV.120) die linearisierten Feldgleichungen

$$\tilde{R}_{\mu\nu} \approx -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right) \equiv -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}. \quad (\text{IV.138})$$

Bevor wir diese Gleichung weiter behandeln, machen wir folgende Bemerkung: Entwickelt man den Ricci-Tensor zur zweiten Ordnung in den $h_{\mu\nu}$, so findet man nach langer Rechnung genähere Feldgleichungen der Form

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{R} \approx -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}), \quad (\text{IV.139})$$

wobei \tilde{R} der zu $\tilde{R}_{\mu\nu}$ gehörige Ricci-Skalar erster Ordnung in $h_{\mu\nu}$ ist. Der Term $t_{\mu\nu}$ auf der rechten Seite von (IV.139), der die Terme zweiter Ordnung in $h_{\mu\nu}$ enthält und ein komplizierter Ausdruck ist, kann als Energie-Impuls Tensor des Gravitationsfelds interpretiert werden. Diese Interpretation stützt sich auf zwei Beobachtungen: Zunächst ist er quadratisch in den Feldern, genau wie man dies von Energie-Impuls Tensoren in der Feldtheorie kennt (siehe Gln. (I.239),(I.261)). Wichtiger ist, dass der Tensor $T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ im “herkömmlichen” Sinne erhalten ist. Man findet nämlich durch explizite Rechnung, dass

$$\partial^\mu \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{R} \right) = 0 , \quad (\text{IV.140})$$

so dass auch $\partial^\mu (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0$ gilt. Für ein abgeschlossenes System werden Energie- und Impulserhaltung genau durch die Erhaltung des totalen Energie-Impuls Tensors ausgedrückt, wie in Abschnitt I.6.2 diskutiert. Hieraus folgt die oben genannte Interpretation von $t_{\mu\nu}$ als Energie-Impuls Tensor des Gravitationsfelds. Wir sehen daran, dass es richtig war, in den Einsteinschen Feldgleichungen nur den Energie-Impuls Tensor von Materie bzw. anderen vorhandenen Feldern zu berücksichtigen. Der Energie-Impuls Tensor des Gravitationsfelds verbirgt sich in der *linken* Seite, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, der Feldgleichungen und tritt nicht explizit auf der rechten Seite auf. Er manifestiert sich als Nichtlinearität der Gleichungen und berücksichtigt die Tatsache, dass das Gravitationsfeld selbst Energie trägt und seine eigene Quelle ist.

Wir kehren nun zu Gl. (IV.138) zurück. Man weist leicht nach, dass die linke Seite, $\tilde{R}_{\mu\nu}$ aus (IV.137), invariant ist unter der Transformation

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} , \quad (\text{IV.141})$$

mit beliebigen Funktionen $\varepsilon_\mu(x)$. Eine solche Transformation entspricht genau der Änderung des metrischen Tensors unter einer Transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ der Koordinaten, wenn man nur Terme erster Ordnung in ε berücksichtigt. Denn der metrische Tensor transformiert nach (IV.61):

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \\ \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &\approx (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \varepsilon^\rho) (\delta_\nu^\sigma - \partial_\nu \varepsilon^\sigma) (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &\approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu , \end{aligned} \quad (\text{IV.142})$$

wobei wir Terme höherer Ordnung in ε oder h , oder Terme $\sim \varepsilon h$, stets vernachlässigt haben.

Die Transformation (IV.141) entspricht damit genau der im vorherigen Abschnitt diskutierten Freiheit bei der Koordinatenwahl in den Einsteinschen Feldgleichungen. Wir nutzen diese Freiheit nun aus, um (IV.138) weiter zu vereinfachen. Wir wählen die ε_μ in (IV.141) so, dass

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h'^\lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h'^\lambda}{\partial x^\mu} . \quad (\text{IV.143})$$

Man kann zeigen, dass dies immer geht; man muss dazu nur eine inhomogene Wellengleichung lösen. Die Bedingung (IV.143) ist das Analogon zur Lorenz-Eichung in der Elektrodynamik. Mit ihr heben sich die ersten drei Terme in der Klammer in (IV.137) weg und (IV.138) wird zu

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.144})$$

Dies ist eine einfache inhomogene Wellengleichung, deren Lösung wir aus (III.68) kennen:

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t_R)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{IV.145})$$

In ihr tritt wieder die retardierte Zeit $t_R = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ auf, die der endlichen Ausbreitung von Gravitationseffekten Rechnung trägt. In der linearisierten Form werden die Feldgleichungen also lösbar. Auch im leeren Raum, wo $S_{\mu\nu} \equiv 0$, besitzt (IV.144) natürlich nicht-triviale Lösungen, wie wir aus den Abschnitten III.1.2 und III.1.3 wissen. Dies sind Wellenlösungen, die man in der Gravitationstheorie als *Gravitationswellen* bezeichnet. Die Abstrahlung von Gravitationswellen zum Beispiel durch beschleunigte Massen ist eine Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie, analog zur Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen durch beschleunigte Ladungen. Ein direkter experimenteller Nachweis von Gravitationswellen gelang 2015, genau 100 Jahre nachdem Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie formuliert hatte!

IV.7.2 Schwarzschild-Lösung

Wenn es im betrachteten Problem Symmetrien gibt, dann können exakte Lösungen der Feldgleichungen möglich werden. Schwarzschild fand eine solche Lösung bereits 1916 unter der Annahme eines isotropen (also sphärisch-symmetrischen) und statischen Gravitationsfelds, das im Unendlichen verschwindet. Diese Annahme ist zum Beispiel sinnvoll, wenn man Bahnen von Planeten im Feld eines Zentralgestirns berechnen will. Statt die Feldgleichungen direkt zu lösen, ist es geschickter, zunächst zu überlegen, welche Form die Metrik für das Problem haben kann, da auch diese durch die Symmetrie eingeschränkt wird. Im Fall der Schwarzschild-Lösung gehen wir wie folgt vor. Wir betrachten die Minkowski-Metrik und wählen Kugelkoordinaten für den räumlichen Anteil. Das Vierer-Abstandsquadrat ist dann

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{IV.146})$$

Da das Feld im Unendlichen verschwindet, muss dies die Metrik für große r sein. Im isotropen und zeitunabhängigen Fall setzen wir an:

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - C(r) r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{IV.147})$$

mit Funktionen A, B, C , die nur von r abhängen, nicht aber von den Winkeln. Man beachte, dass der Term $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ aufgrund der Isotropie des Problems weiter in dieser Kombination auftreten muss. Terme der Form $d\theta dr, d\phi dr$ sind ebenfalls aus diesem Grund nicht möglich. Wir sehen hier, wie die Symmetrie die Form der Metrik einschränkt. Ein Term $\sim dt dr$ wäre erlaubt, kann aber durch eine Wahl einer anderen Zeitkoordinate, $t \rightarrow t + \psi(r)$ eliminiert werden.

Durch Wahl einer neuen Koordinate für den Radius, $r' = r\sqrt{C(r)}$, kann man die Funktion C in (IV.147) eliminieren. Wir nehmen an, dass dies geschehen ist und bezeichnen den neuen Radius wieder mit r . Dann wird

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{IV.148})$$

Hieraus folgt

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.149})$$

für den metrischen Tensor. Dies ist die sogenannte *Standardform* der Metrik im sphärisch-symmetrischen und statischen Fall. Mit ihr kann man in längeren Rechnungen zunächst die Christoffel-Symbole und dann die Komponenten des Ricci-Tensors berechnen. Man erhält für die letzteren:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA}, \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA}, \\ R_{\theta\theta} &= -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A}, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (\text{IV.150})$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. Schwarzschild betrachtete nun die Feldgleichungen im Außenraum einer sphärischen Massenverteilung (also z.B. im Sonnensystem außerhalb der Sonne). Er löste also die Gleichungen $R_{\mu\nu} = 0$, da ja im Außenraum keine Quellen vorhanden sind und die Massendichte verschwindet. (Man beachte, dass nur der Ricci-Tensor verschwindet, nicht aber der volle Krümmungstensor – sonst wäre der Raum nicht gekrümmmt!) Man findet aus (IV.150) relativ leicht

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2MG/c^2}{r}}, \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}. \quad (\text{IV.151})$$

Dies ist die *Schwarzschild-Lösung*. Man sieht, dass wie gewünscht $A(r), B(r) \rightarrow 1$ für $r \rightarrow \infty$. Man bezeichnet die Größe $r_S \equiv 2MG/c^2$ auch als den *Schwarzschild-Radius*. Läge die komplette Masse des Zentralgestirns innerhalb von r_S , so wäre die Fluchtgeschwindigkeit von seiner Oberfläche gerade gleich der Lichtgeschwindigkeit. Licht kann also nicht entweichen, und wir sprechen von einem *schwarzen Loch*. Für die Sonne liegt der Schwarzschild-Radius bei ca. 3km. Am Schwarzschild-Radius hat die Metrik eine Singularität, wie man an (IV.151) sieht, die eine Singularität des benutzten Koordinatensystems ist. Speziell divergiert für gegebene Eigenzeit die Größe $d\tau/B(r)$ am Schwarzschild-Radius, so dass eine im Feld ruhende Uhr dort unendlich langsam zu gehen scheint.

Die Schwarzschild-Metrik ist offenbar verschieden von der Minkowski-Metrik (IV.146). Sie liefert Vorhersagen für Abweichungen von der Newtonschen Gravitationstheorie, die experimentell getestet werden können. Besonders berühmte Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie sind die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld der Sonne (eine Vorhersage, die bereits 1919 bestätigt wurde) und die *Perihelverschiebung* des Merkur. Wie aus der Physik III bekannt, sind die Ellipsenbahnen im reinen $1/r$ -Potential stets geschlossen. Allerdings führt bereits in der Newtonschen Theorie die Anwesenheit anderer Planeten (und auch die Abplattung der Sonne) dazu, dass es leichte Abweichungen vom $1/r$ -Potential gibt, so dass die Planeten eine Rosettenbahn beschreiben und sich der sonnennächste Punkt, das Perihel, von einem zum nächsten Umlauf leicht verschiebt. Dies ist besonders ausgeprägt beim Merkur, bei dem die Perihelverschiebung ca. $575''/\text{Jahrhundert}$ beträgt. Bereits im 19. Jahrhundert waren theoretische Rechnungen basierend auf der Newtonschen Theorie sehr genau und sagten einen Wert von $532''/\text{Jahrhundert}$ vorher. Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert genau die fehlenden $43''/\text{Jahrhundert}$, letztlich durch eine Abänderung des reinen $1/r$ -Verhaltens des Gravitationspotentials.

A Grundlagen der Vektoranalysis

Wir notieren einen Vektor des \mathbb{R}^3 als $\vec{x} = (x, y, z)$ und betrachten den Vektor der partiellen Ableitungen, $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Dieser ist ein Differentialoperator, der natürlich nur bei Anwendung auf eine Funktion Sinn erhält. Wenden wir ihn auf ein skalares Feld $\varphi(\vec{x})$ an, so erhalten wir den *Gradienten* des Feldes:

$$\vec{\nabla}\varphi \equiv \text{grad } \varphi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

der also als Komponenten die partiellen Ableitungen des Feldes hat. Um eine anschauliche Interpretation für den Gradienten zu erhalten, betrachten wir die Änderung des Feldes $\varphi(\vec{x})$, wenn wir vom Punkt \vec{x} zum infinitesimal entfernten Punkt $\vec{x} + d\vec{x}$ gehen. Die Änderung $d\varphi(\vec{x})$ ergibt sich durch die Beiträge von jedem der drei Argumente des Feldes:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\varphi \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Es tritt also der Gradient auf, skalar multipliziert mit der Richtung, in die wir vom Ort \vec{x} gegangen sind. Da das Skalarprodukt von zwei Vektoren maximal wird, wenn die beiden Vektoren parallel sind, wird die Änderung $d\varphi$ des Feldes maximal, wenn wir $d\vec{x}$ gerade parallel zum Gradienten wählen. Dies aber bedeutet, dass der Gradient genau die Richtung angibt, in der sich das Feld vom Punkt \vec{x} ausgehend am stärksten ändert. Verschwindet hingegen der Gradient des Feldes am Punkt \vec{x} , so hat das Feld nach (A.2) einen stationären Punkt, beispielsweise ein Extremum.

Der Vektor $\vec{\nabla}$ kann auch auf Vektorfelder angewendet werden, entweder als Skalarprodukt oder als Vektor/Kreuzprodukt. Es sei

$$\vec{V}(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} V^x(\vec{x}) \\ V^y(\vec{x}) \\ V^z(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

das Vektorfeld. Dann ist seine *Divergenz* definiert als:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \equiv \text{div } \vec{V} \equiv \frac{\partial V^x}{\partial x} + \frac{\partial V^y}{\partial y} + \frac{\partial V^z}{\partial z}. \quad (\text{A.4})$$

Die Divergenz ist ein Skalar. Wie der Name andeutet, hat ein Vektorfeld mit nichtverschwindender Divergenz die Eigenschaft, dass seine ‘‘Feldlinien’’ auseinanderstreben. So hat zum Beispiel das erste Vektorfeld in Abb. A.1 offenbar eine Divergenz, das zweite nicht. Allerdings gilt auch für das dritte gezeigte Vektorfeld $\text{div } \vec{V} \neq 0$, obwohl das Feld stets in eine Richtung zeigt.

Das Kreuzprodukt liefert die *Rotation* des Vektorfelds, die ein Vektor ist:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \equiv \text{rot } \vec{V} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V^x(\vec{x}) \\ V^y(\vec{x}) \\ V^z(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^z}{\partial y} - \frac{\partial V^y}{\partial z} \\ \frac{\partial V^x}{\partial z} - \frac{\partial V^z}{\partial x} \\ \frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

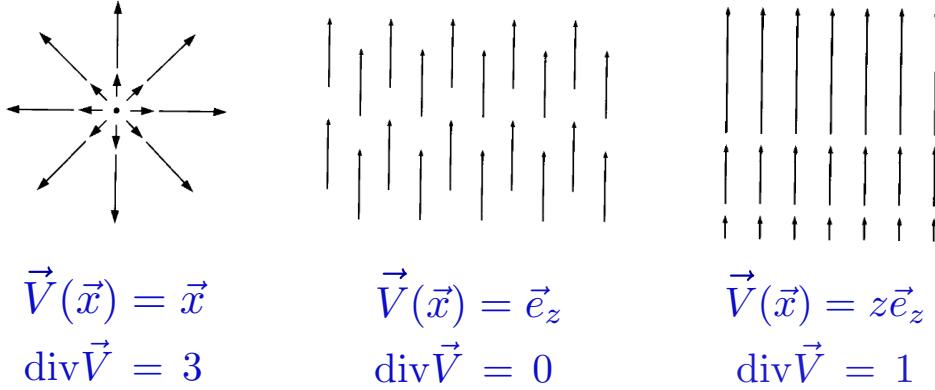


Abb. A.1 — Verschiedene Vektorfelder und ihre Divergenz (aus: D.J. Griffiths, *Elektrodynamik*, Pearson).

Die Rotation ist ein Maß für “Wirbel” des Felds. Abbildung A.2 zeigt zwei Felder mit nichtverwindender Rotation.

Mit Hilfe des vollständig antisymmetrischen Symbols

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = \text{gerade Perm. von } 123 \\ -1 & ijk = \text{ungerade Perm. von } 123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

kann die i -te Komponente der Rotation geschrieben werden als

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})^i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} V^k. \quad (\text{A.7})$$

Dabei haben wir $(x, y, z) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$ gesetzt; wir werden die beiden Notationen von nun an synonym verwenden.

In Übungsaufgabe 1 werden einige Produktregeln für Gradient, Divergenz und Rotation gezeigt, zum Beispiel $(\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}))$ sind skalare Felder und $\vec{V}(\vec{x})$ und $\vec{U}(\vec{x})$ Vektorfelder):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\varphi\psi) &= (\vec{\nabla}\varphi)\psi + \varphi\vec{\nabla}\psi, \\ \vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{V}) &= (\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{V} + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}), \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}), \\ \vec{\nabla} \times (\varphi\vec{V}) &= (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{V} + \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{V}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Gleichung (A.7) führt auf zwei wichtige Relationen, die zweite Ableitungen betreffen (siehe Aufgabe 1):

(i) Für ein skalares Feld φ ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) \equiv \vec{0}. \quad (\text{A.9})$$

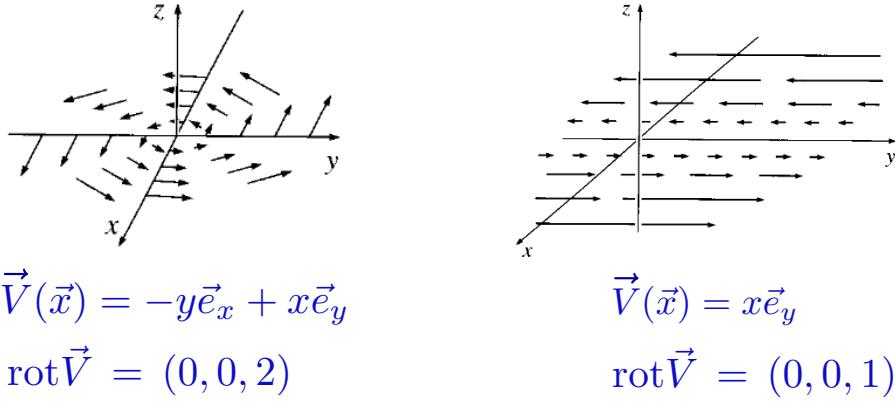


Abb. A.2 — Verschiedene Vektorfelder und ihre Rotation (aus: D.J. Griffiths, *Elektrodynamik*, Pearson).

Denn für die i -te Komponente gilt

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi))^i = \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi , \quad (\text{A.10})$$

was als Produkt der symmetrischen Kombination $\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$ mit dem vollständig antisymmetrischen ε^{ijk} verschwindet.

(ii) Ebenso ist mit demselben Argument für ein Vektorfeld \vec{V}

$$\text{div rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 . \quad (\text{A.11})$$

Insgesamt gibt es fünf verschiedene Kombinationen, die zweite Ableitungen enthalten. Die anderen drei lauten:

(iii) Zuerst ist

$$\text{div grad } \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \vec{\nabla}^2 \varphi = \Delta \varphi , \quad (\text{A.12})$$

mit dem Laplace-Operator Δ .

(iv) Die Kombination

$$\text{grad div } \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \quad (\text{A.13})$$

kann nicht weiter umgeschrieben werden.

(v) Schließlich haben wir noch

$$\text{rot rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} , \quad (\text{A.14})$$

wie man mit der Identität $\sum_k \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{i'j'k} = \delta^{ii'} \delta^{jj'} - \delta^{ij'} \delta^{ji'}$ nachrechnet. Insgesamt sehen wir, dass alle Kombinationen der zweiten Ableitungen entweder verschwinden, oder durch $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ und den Laplace-Operator ausgedrückt werden können.

B Integralrechnung in drei und vier Dimensionen

Im dreidimensionalen Raum können wir drei Typen von Integrationen definieren: Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale und Volumenintegrale.

(i) *Volumenintegrale*: Diese setzen wir hier als bekannt voraus. Man hat zum Beispiel Integrale der Form

$$\int_V d^3x \varphi(\vec{x}) , \quad \int_V d^3x \vec{F}(\vec{x}) , \quad \text{usw.} , \quad (\text{B.1})$$

über eine skalare Funktion φ oder ein Vektorfeld \vec{F} . Bei letzterem ist in jeder Komponente einzeln zu integrieren, und das Ergebnis ist wieder ein Vektor.

(ii) *Kurvenintegrale*: Eine Kurve \mathcal{C} im \mathbb{R}^3 ist parametrisiert durch einen reellen Parameter t als

$$\vec{x} = \vec{x}(t) , \quad t \in [t_0, t_1] . \quad (\text{B.2})$$

Sie kann zum Beispiel geschlossen sein ($\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_0)$), oder aber auch offen. Wir wollen zuerst einen Ausdruck für die Länge ℓ der Kurve angeben. Dazu betrachten wir das linke Bild in Abb. B.1. Die Länge ergibt sich als Summe über alle Wegelemente ds , die wiederum über den Satz von Pythagoras als $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt |\dot{\vec{x}}| , \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit $\dot{\vec{x}} \equiv d\vec{x}/dt$. Allgemeiner können wir eine beliebige skalare Funktion $\varphi(\vec{x})$ integrieren. Dies führt auf das *Kurvenintegral erster Art*:

$$I_1 \equiv \int_{\mathcal{C}} \varphi(\vec{x}) ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \varphi(\vec{x}(t)) |\dot{\vec{x}}| . \quad (\text{B.4})$$

In der Physik ist in der Regel ein anderes Kurvenintegral wichtiger. Hier betrachtet man ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$, und man möchte die Orientierung des Vektorfelds entlang der Kurve messen (siehe rechtes Bild in Abb. B.1). Das vektorielle Wegelement $d\vec{s} = \dot{\vec{x}} dt$ ist immer tangential zur Kurve und hat die Länge ds . Die relative Orientierung des Vektorfelds wird durch das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ bestimmt. Wir definieren daher:

$$I_2 \equiv \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (\text{B.5})$$

als das *Kurvenintegral zweiter Art*. Dieses Integral tritt zum Beispiel in der Mechanik als Arbeit auf. Ist \vec{F} speziell von der Form $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, so hat man

$$\vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \varphi(\vec{x}(t)) ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel rückwärts angewendet haben. Damit wird das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \varphi(\vec{x}(t)) = \varphi(\vec{x}(t_1)) - \varphi(\vec{x}(t_0)) , \quad (\text{B.6})$$

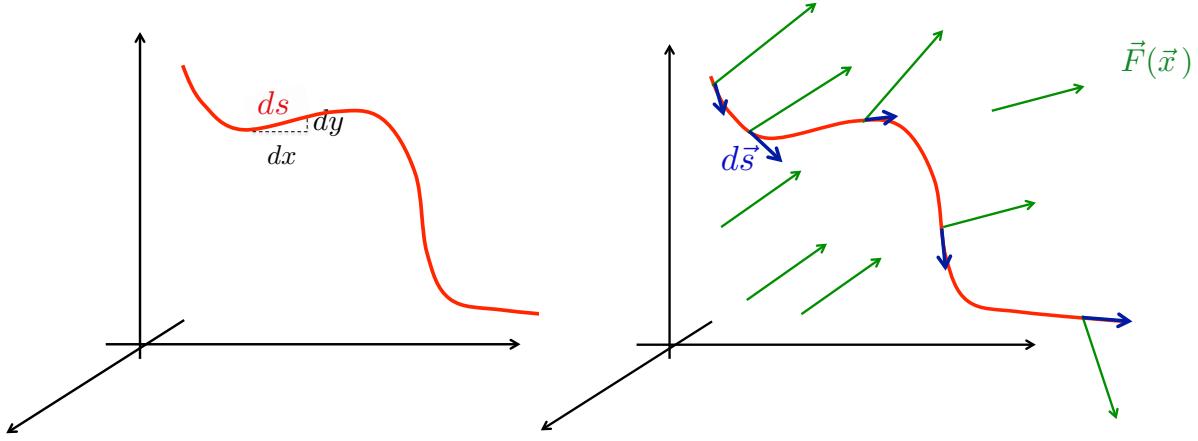


Abb. B.1 — Links: Zum Kurvenintegral erster Art. Die Kurve liegt der Einfachheit halber in der x - y -Ebene.
Rechts: Zum Kurvenintegral zweiter Art. $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichnet ein Vektorfeld.

unabhängig vom Weg, den man gewählt hat. Wie aus der Mechanik bekannt, nennt man das Vektorfeld \vec{F} dann *konservativ*.

(iii) *Oberflächenintegrale*: Eine Fläche im \mathbb{R}^3 wird durch zwei Parameter parametrisiert:

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v), \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1]. \quad (\text{B.7})$$

Wir definieren (siehe linkes Bild in Abb. B.2) die Vektoren

$$\begin{aligned} d\vec{U} &\equiv \vec{x}(u + du, v) - \vec{x}(u, v) \approx \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du, \\ d\vec{V} &\equiv \vec{x}(u, v + dv) - \vec{x}(u, v) \approx \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Sie sind tangential zur Fläche und spannen das in der Figur gezeigte Parallelogramm auf. Dessen Fläche ist das Flächenelement

$$da \equiv |d\vec{U} \times d\vec{V}| = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| dudv. \quad (\text{B.9})$$

Analog zum Kurvenintegral erster Art fragen wir nun nach dem Flächeninhalt der gesamten Fläche. Dieser ergibt sich durch Aufsummation der Flächen aller Parallelogramme:

$$\mathcal{F} = \int da = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} dv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|. \quad (\text{B.10})$$

Allgemein haben wir wieder für eine skalare Funktion $\varphi(\vec{x})$ das *Flächenintegral erster Art*:

$$I_1 \equiv \int_S da \varphi(\vec{x}) = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} dv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| \varphi(\vec{x}(u, v)). \quad (\text{B.11})$$

Auch hier ist in der Physik eher ein anderes Flächenintegral wichtiger. Das rechte Bild in Abb. B.2 zeigt ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$, das auch auf der Fläche definiert ist. Wir fragen nach

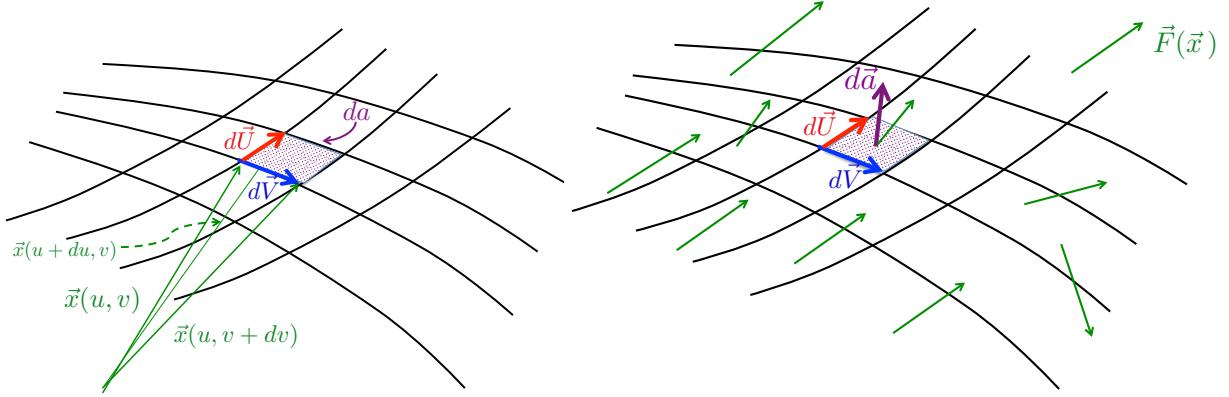


Abb. B.2 — Links: Zum Flächenintegral erster Art. Rechts: Zum Flächenintegral zweiter Art. $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichnet ein Vektorfeld.

der Orientierung des Feldes relativ zum lokalen Normalenvektor auf die Fläche. Wir definieren den Vektor

$$d\vec{a} \equiv d\vec{U} \times d\vec{V} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) dudv, \quad (\text{B.12})$$

der senkrecht auf $d\vec{U}$ und $d\vec{V}$ und damit auf das Parallelogramm steht. Seine Länge $|d\vec{a}|$ ist durch da in (B.9) gegeben. Nun definieren wir das *Flächenintegral zweiter Art*:

$$I_2 \equiv \int_S \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{a} = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} dv \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) \cdot \vec{F}(\vec{x}(u, v)). \quad (\text{B.13})$$

Man bezeichnet den Ausdruck aus anschaulichen Gründen auch als den *Fluss* des Vektorfeldes durch die Fläche. Immer die Komponente des Vektorfeldes parallel zum Normalenvektor auf die Fläche trägt zum Fluss bei.

Die hier eingeführten Integrationen lassen sich auch auf höher-dimensionale Räume verallgemeinern, und speziell auch auf die vierdimensionale Minkowski Raum-Zeit. Dies soll hier noch kurz diskutiert werden. In vier Dimensionen gibt es vier Typen von Integrationen:

(i) *Kurvenintegral*: Eine Kurve im vierdimensionalen Raum wird durch $x^\mu(t)$ parametrisiert, wobei t ein Bahnparameter (z.B. die Eigenzeit) ist. Das Kurvenintegral (zweiter Art) über ein Vierer-Vektorfeld $F^\mu(x)$ ist in Analogie zu (B.5) definiert durch

$$\int_C dx^\mu F_\mu \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dx^\mu}{dt} F_\mu(x(t)). \quad (\text{B.14})$$

(ii) *Integral über eine zweidimensionale Fläche*: Diese wird parametrisiert als $x^\mu(u, v)$. In drei Dimensionen gab es an jedem Punkt der betrachteten Fläche einen Normalenvektor. In vier Dimensionen muss dies anders sein, da es an jedem Punkt noch *zwei* orthogonale Richtungen gibt. Um zu sehen, wie dieser Tatsache Rechnung zu tragen ist, erinnern wir uns zunächst an Gl. (B.12), die wir umschreiben. Die i -te Komponente von $d\vec{a}$ ist

$$da^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} - \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) dudv \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} d\tilde{a}^{jk}. \quad (\text{B.15})$$

Dabei liefert der hintere Term in Klammern denselben Beitrag wie der erste, was den Faktor $1/2$ erklärt. Jeder Term $d\tilde{a}^{jk}$ gibt geometrisch die Fläche an, die man erhält, wenn man das in Abb. B.2 betrachtete Parallelogramm in die (x^j, x^k) -Ebene projiziert. In Analogie hierzu definieren wir in vier Dimensionen zunächst die Projektionen

$$d\tilde{a}^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \right) dudv , \quad (\text{B.16})$$

und dann

$$da^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d\tilde{a}_{\rho\sigma} . \quad (\text{B.17})$$

Die beiden Indizes des Tensors $da^{\mu\nu}$ spiegeln genau die beiden zur Fläche senkrechten Richtungen wider. Ein Integral über die Fläche ist dann zum Beispiel von der Form

$$\int_S da^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) , \quad (\text{B.18})$$

mit einem Tensorfeld $F_{\mu\nu}$.

(iii) Integral über eine dreidimensionale Hyperfläche: Eine solche Fläche ist parametrisiert durch $x^\mu(u, v, w)$, mit drei reellen Parametern. Sie besteht aus kleinen dreidimensionalen Volumenelementen (Parallelepipeden), die durch dx^μ/du , dx^μ/dv , dx^μ/dw aufgespannt werden. Der Fall ist wieder näher an dem einer zweidimensionalen Fläche im \mathbb{R}^3 , da es in jedem Punkt der Fläche genau *eine* Richtung senkrecht zum betrachteten Parallelepiped gibt. Man sieht in Gl. (B.15), dass die Projektion der zweidimensionalen Fläche in eine der Koordinatenebenen durch

$$d\tilde{a}^{jk} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} - \frac{\partial x^k}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) dudv = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^j}{\partial u} & \frac{\partial x^j}{\partial v} \\ \frac{\partial x^k}{\partial u} & \frac{\partial x^k}{\partial v} \end{pmatrix} dudv \quad (\text{B.19})$$

beschrieben wird. Dementsprechend definieren wir hier die Projektionen

$$d\tilde{S}^{\mu\nu\rho} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} & \frac{\partial x^\mu}{\partial v} & \frac{\partial x^\mu}{\partial w} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial u} & \frac{\partial x^\nu}{\partial v} & \frac{\partial x^\nu}{\partial w} \\ \frac{\partial x^\rho}{\partial u} & \frac{\partial x^\rho}{\partial v} & \frac{\partial x^\rho}{\partial w} \end{pmatrix} dudvdw , \quad (\text{B.20})$$

und damit (vgl. (B.15))

$$dS^\mu \equiv -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d\tilde{S}_{\nu\rho\sigma} . \quad (\text{B.21})$$

Dies ist genau der zum Parallelepiped senkrecht stehende Vierer-Vektor, dessen Länge das Volumen des Epipeds angibt. Er ist das Analogon zum Vektor $d\vec{a}$ in (B.12) im Fall der zweidimensionalen Fläche im \mathbb{R}^3 . Ein Integral über die dreidimensionale Hyperfläche ist nun zum Beispiel von der Form

$$\int_H dS^\mu F_\mu(x) , \quad (\text{B.22})$$

mit einem Vektorfeld F_μ .

(iv) Schließlich gibt es natürlich noch die gewöhnliche Integration über ein vierdimensionales Raum-Zeit Volumen \mathcal{V} :

$$\int_V d^4x = \int cdt d^3x . \quad (\text{B.23})$$

Es sei noch bemerkt, dass die in den obigen Ausdrücken auftretenden Integrationsmaße dx^μ , $da^{\mu\nu}$, dS^μ , d^4x Lorentz-kovariant sind, also Skalare, Vektoren, Tensoren (je nach Zahl ihrer Indizes).