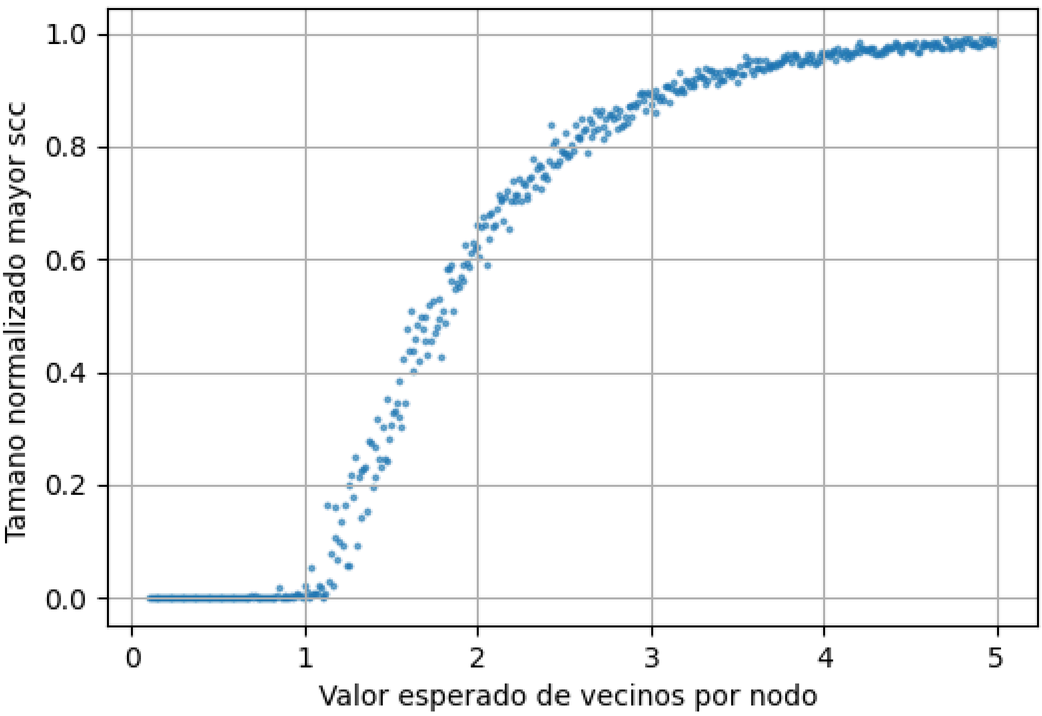
MEMORIA PRÁCTICA 3

Iván Sánchez Bonacasa
Christian Grosso
Grupo 08

Análisis de la primera gráfica



La gráfica presentada refleja un aspecto fundamental de la teoría de grafos y, más específicamente, de los grafos aleatorios Erdős-Rényi. El eje vertical representa el tamaño normalizado de la mayor componente fuertemente conexa (SCC, por sus siglas en inglés), mientras que el eje horizontal muestra el valor esperado de vecinos por nodo en el grafo.

En los grafos Erdős-Rényi, cada nodo está conectado a otros con una probabilidad fija, lo que resulta en un modelo que depende fuertemente del número esperado de conexiones por nodo. Al observar la gráfica, se percibe claramente que para valores pequeños el grafo está compuesto por muchas componentes pequeñas y desconectadas. En esta región, no se forma ninguna estructura global que conecte una proporción significativa de los nodos, lo que implica que la mayor SCC tiene un tamaño normalizado cercano a cero.

Sin embargo, a medida que el valor aumenta y se aproxima al umbral crítico, el comportamiento del sistema cambia de manera drástica. En este punto, comienza a formarse una componente gigante que agrupa un porcentaje considerable de los nodos del grafo. Este fenómeno, conocido como transición de fase, es una característica clave de los grafos aleatorios. En resumen, la gráfica ilustra de manera clara y contundente la transición de fase en la conectividad de un grafo Erdős-Rényi.

Respuestas a las cuestiones de la práctica

¿Ocurrirá igual en grafos dirigidos?

En el caso de grafos no dirigidos, como vimos anteriormente, ocurre una transición de fase marcada en la conectividad cuando el número esperado de vecinos por nodo (m) alcanza un valor crítico de aproximadamente 1. Esto da lugar a la formación de una componente gigante que conecta la mayor parte de los nodos del grafo. En grafos dirigidos, aunque el comportamiento general es similar, existen diferencias importantes debido a la naturaleza de las conexiones dirigidas.

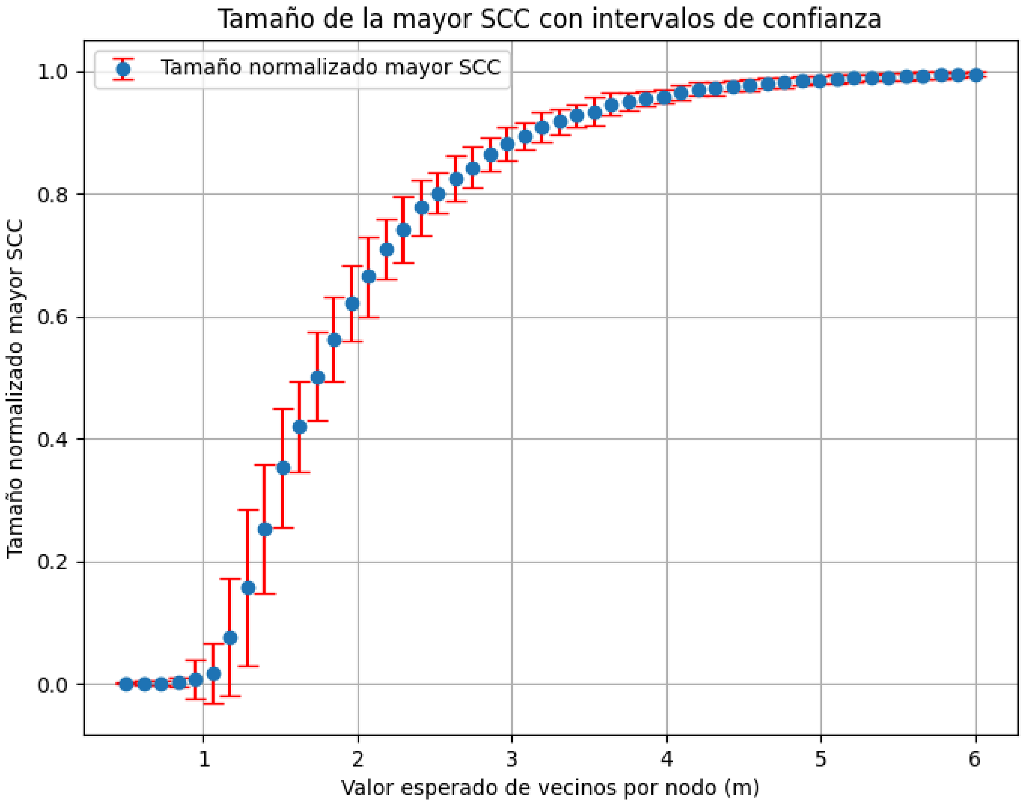
En un grafo dirigido, los nodos pueden tener aristas entrantes y salientes, lo que genera una estructura más compleja. En este caso, podemos distinguir entre diferentes tipos de componentes conectadas:

1. **La componente fuertemente conexa (SCC):** Un conjunto de nodos donde existe un camino dirigido entre cualquier par de nodos.
2. **La componente entrante:** Los nodos desde los que es posible llegar a la SCC, pero que no están conectados de manera bidireccional.
3. **La componente saliente:** Los nodos alcanzables desde la SCC.

Basándonos en los resultados del código y el análisis de grafos Erdős-Rényi dirigidos, la transición de fase en grafos dirigidos también ocurre alrededor de un valor crítico de $m=1$, pero con una sutil diferencia: la componente gigante que emerge está estructurada principalmente como una componente fuertemente conexa, acompañada por las componentes entrante y saliente mencionadas. Esto significa que, alrededor de $m \approx 1$, una proporción significativa de los nodos comienza a pertenecer a la SCC, y la conectividad global del grafo aumenta rápidamente.

Por lo tanto, sí ocurre un fenómeno análogo al de los grafos no dirigidos, pero con características propias de los grafos dirigidos. La formación de la SCC en grafos dirigidos muestra una transición de fase similar, aunque las aristas dirigidas introducen mayor complejidad en la estructura global del grafo.

Análisis de la gráfica del apartado opcional



La gráfica presentada nos permite explorar el comportamiento del tamaño de la mayor componente fuertemente conexa (SCC) en grafos dirigidos generados aleatoriamente, en función del valor esperado de vecinos por nodo (m). A simple vista, destaca la transición que ocurre cuando mm se aproxima a 1. En este contexto, la SCC representa el subconjunto más grande de nodos donde cualquier nodo puede alcanzar a otro a través de caminos dirigidos, y viceversa. A medida que *m* aumenta desde valores cercanos a 0, los nodos comienzan a conectarse de forma progresiva. Inicialmente, estas conexiones son insuficientes para formar componentes de gran tamaño, lo que se traduce en un tamaño normalizado de la mayor SCC cercano a 0. Sin embargo, a medida que se añaden más aristas, se alcanza un punto crítico en m≈1. Aquí, el tamaño de la SCC crece rápidamente, revelando lo que se conoce como una transición de fase.

Antes del punto crítico, las componentes son pequeñas y fragmentadas; después de este punto, una gran parte de los nodos comienza a agruparse en una única componente fuertemente conexa. En el gráfico, esto se observa como un cambio brusco en la curva, donde el tamaño normalizado de la mayor SCC crece rápidamente desde valores cercanos a 0 hasta aproximarse a 1.

Algo importante a tener en cuenta de la gráfica es la inclusión de intervalos de confianza, indicados por las barras rojas. Estas barras nos proporcionan información sobre la variabilidad en el tamaño de la SCC al generar múltiples grafos con el mismo valor de m. Dicha variabilidad es especialmente evidente en la región cercana a m=1.

Por otro lado, para valores extremos de *m*, tanto en los casos de m<1 como en m>2, las barras de error se reducen notablemente. En el primer caso, los grafos son escasamente conectados, por lo que las SCC permanecen pequeñas y la variabilidad entre diferentes realizaciones del grafo es mínima. En el caso de valores altos de mm, prácticamente todos los nodos forman parte de la SCC más grande, lo que también limita la variabilidad entre distintas simulaciones.

El comportamiento general observado en la gráfica es consistente con lo que la teoría predice. A medida que *m* aumenta, el grafo pasa de un estado de desconexión (donde predominan componentes pequeñas) a un estado donde la mayoría de los nodos están conectados bidireccionalmente en una única SCC dominante.

En resumen, la gráfica nos cuenta una historia clara sobre cómo la conectividad emerge en grafos dirigidos. Refleja tanto el comportamiento promedio del tamaño de la SCC como la variabilidad inherente a este proceso.