



Análisis de Señales Mixtas (CE1110)

Tarea1. FFT y Sistemas de Modulación

Profesor:

Luis Chavarría Zamora

Integrante

Christian Navarro Ellerbrock

Jorge Gutiérrez Vindas

Mauricio Luna Acuña

II Semestre

Fecha de entrega: 15/10/2025

1. ¿Cómo funciona la FFT y cómo se relaciona con la transformada discreta de Fourier? Explique la dualidad que tiene con la serie de Fourier y como muestrea en el entorno continuo.

Para entender el funcionamiento de la transformada rápida de Fourier, se necesita recordar la transformada discreta de Fourier. Esta última se define de la siguiente manera:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Esto se puede reescribir de la siguiente manera:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) W^{nk}$$

Donde: $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Esta W es conocida como el factor twiddle.

La DFT, como se puede notar, requiere operaciones con complejidad alta: N^2 , haciéndola difícil de procesar para una N grande. Para reducir esa complejidad y simplificar los procedimientos para obtener las señales de manera computacional, se creó la FFT (transformada rápida de Fourier). La FFT es exactamente lo mismo matemáticamente que la DFT, pero reorganiza los cálculos para eliminar redundancias y realizar otros acortamientos de tiempo que pueden ayudar a disminuir la complejidad del algoritmo.

Un método utilizado por la FFT es la descomposición en el tiempo, el cual divide la secuencia en subsecuencias pares e impares de manera recursiva. Este aprovecha que $W^{k+N/2} = -W^k$. Esto lo que hace es que la complejidad pase a ser de $(N/2)\log_2 N$. Existen varios otros métodos que realizan otro tipo de mejoras de complejidad.

La FFT se ve como la dualidad completa de la serie continua ya que tanto el dominio del tiempo como el de frecuencia se vuelven discretos y periódicos. La serie de Fourier continua recibe un tiempo continuo, periódico, lo cual produce frecuencias discretas. Por otro lado, las series de Fourier rápidas (también discretas), reciben un

tiempo discreto, periódico y produce frecuencias discretas, periódicas. En cuanto al muestreo continuo, este se da en dos procesos de muestreo distintos:

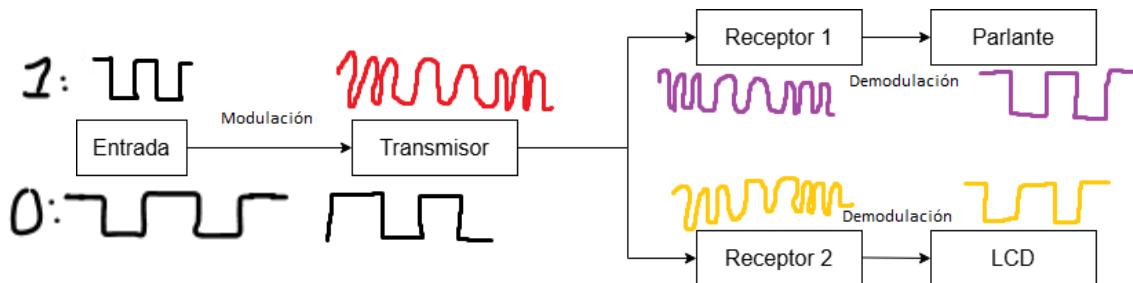
Muestreo Temporal: La DFT muestrea la Transformada de Fourier continua temporalmente de la siguiente manera: $x(n) = x_a(nT)$, donde $T = 1/F_s$. F_s es la frecuencia de muestreo. Esta debe cumplir que $F_s > 2f_{max}$.

Muestreo Frecuencial: La DFT muestrea la Transformada de Fourier continua en frecuencias de la siguiente manera: $f_k = k \cdot F_s/N$. Esto causa que ambos dominios sean periódicos.

2. Implemente una función en Python u Octave que realice la FFT y extraiga su respuesta en el dominio de la frecuencia para una pista de audio libre. Interprete los resultados en cuanto a magnitud y fase. Pueden usar una biblioteca.

Ver código adjunto.

3. A nivel de bloques, ¿explique cómo la modulación y demodulación del proyecto hace uso de la transformada de Fourier? Dibuje cómo se observan las señales.



La Transformada de Fourier analiza la frecuencia presente en la señal cuadrada recibida. Cada bit (0 o 1) está representado por una señal cuadrada de frecuencia específica. El FFT identifica a qué frecuencia senoidal corresponde esa señal cuadrada, permitiendo determinar si se trata de un 0 o un 1 según la frecuencia detectada. Luego, se forma una onda senoidal para mandar esa frecuencia por el transmisor. La FFT da de nuevo la frecuencia de la onda cuadrada original y luego se determina si es un 1 o 0 para así recuperar el mensaje de entrada original ya transmitido.

4. Indique las bibliotecas en microcontroladores que pueden usar con base en el diagrama de bloques en la pregunta 3.

Tras revisar varias bibliotecas que se pueden usar y tomando en cuenta que se quiere utilizar como microcontrolador un Raspberry Pi y Python como lenguaje de programación en software, se toman como posibles opciones las siguientes bibliotecas:

- Generación de las señales cuadradas de entrada: RPi.GPIO, pigpio, time
- FFT y otras matemáticas: numpy, scipy.fftpack, matplotlib.pyplot
- Recepción de señales: spidev, busio
- Procesamiento: threading, queue, collections

5. Implemente un ejemplo de modulación y demodulación usando la función desarrollada. Solo prototipe en su computador (no programe en microcontrolador)

Ver código adjunto

Referencias

E. O. Brigham, The Fast Fourier Transform and Its Applications. Englewood Cliffs, NJ:
Prentice-Hall, 1988.