



MASTER'S THESIS : STOCHASTIC ALPHA,BETA,RHO (SABR
MODEL)

Christopher CLEMENTE PIRES
Supervisé par : M. Noufel Frikha

Contents

1	Introduction	2
2	Modèle SABR - Fondations théoriques	2
2.0.1	Modèle Black-Scholes	2
2.0.2	Modèles de volatilité locale	3
2.0.3	Formulation	3
2.0.4	Problèmes avec les modèles de volatilité locale	4
2.1	Produits de taux d'intérêt	4
2.1.1	Discount Factor	4
2.1.2	Coupon & Fixing	5
2.1.3	FRA (Forward Rate Agreement)	5
2.1.4	Swap de taux d'intérêt/ Interest rate swap(IRS)	6
2.2	Description mathématique	7
2.2.1	Preuve de la volatilité implicite σ_{BS}	8
2.2.2	Paramètres du modèle SABR	12
2.2.3	Parameterization du modèle SABR	16
2.2.4	Couverture du risque sous le modèle SABR	16
2.3	Applications (Risk Management,Swaption pricer...)	19
2.3.1	Suite des recherches sur le modèle SABR	19
2.4	Issues	19
2.4.1	Dynamique du modèle SABR	19
2.4.2	Calibration sur des volatilités trop faibles ou trop élevées	19
3	Le modèle SABR dans un environnement de taux d'intérêt négatifs	20
3.1	Effet des taux d'intérêt négatifs sur les modèles financiers	20
3.2	Shifted SABR	20
4	Python pricer : Swaption	22
4.1	Cap/Floor/Swaption	22
4.1.1	Notations	22
4.1.2	Définitions	22
4.2	Calibration du modèle	23
4.2.1	Modèle Log-Normal Shifté	24
4.2.2	Valorisation des Cap	24
4.3	Swaption SABR/Shifted SABR	26
4.3.1	Swaption Shifted SABR	30
5	Analysis and conclusions	33
5.1	Discussions and conclusions	33

1 Introduction

Lorsque l'on price des options, il est important de modéliser avec précision la volatilité implicite, qui n'est pas observable directement sur le marché. Sa valeur doit être telle que, lorsqu'elle est utilisée comme variable dans un modèle de pricing, la valeur de l'option corresponde à celle du marché.

Dans le modèle de pricing le plus connu, le modèle de Black-Scholes, cette volatilité est considérée comme constante. Cependant, des options avec des strikes différents nécessitent des volatilités qui correspondent à leur valeur sur le marché. Cette différence de volatilité est représentée par une courbe en pente descendante pour le marché action, que l'on appelle "Skew de volatilité" ou en forme de smile pour le marché des devises, appelée "Volatility smile".

C'est pour ces raisons que les modèles de volatilité locales se sont développés, en réponse aux faiblesses du modèle de Black-Scholes, notamment le modèle Dupire qui introduit une surface de volatilité locale pour refléter les variations de volatilité observées sur le marché. Ce modèle peut toutefois rencontrer des difficultés à modéliser le volatility smile.

Des modèles de volatilité stochastiques répondent plus facilement à cela, notamment notre modèle SABR : Stochastic Alpha Beta Rho, qui sera le sujet principal de ce mémoire.

2 Modèle SABR - Fondations théoriques

2.0.1 Modèle Black-Scholes

Un pré-requis important pour comprendre le modèle SABR est le modèle de Black-Scholes. Ce modèle est apparu en 1973 et est l'un des modèles de pricing les plus connus pour les options européennes. La plus grande innovation de ce modèle est l'introduction des variations du prix du sous-jacent dans les variations de valeur de l'option. Bien qu'il soit très utile et facile d'utilisation, ce modèle se base sur des hypothèses très contraignantes, qui ne sont pas vraiment vérifiées sur le marché : les rendements suivent une distribution normale, une situation de marché efficient, mais surtout un taux sans risque et une volatilité qui sont constants, la volatilité implicite ne change donc pas en fonction du strike et du temps restant pour atteindre la maturité de l'option.

Dans ces modèles, le prix d'un Call européen est donné par :

$$C = S_0 \Phi(d1) - Ke^{-rT} \Phi(d2)$$

Et pour un Put :

$$P = -S_0 \Phi(-d1) + Ke^{-rT} \Phi(-d2)$$

où :

- $d1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
- $d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$
- S_0 est la valeur actuelle du sous-jacent
- T est le temps restant jusqu'à la maturité de l'option
- K est le prix strike
- r est le taux sans risque
- σ est la volatilité implicite de l'option
- Φ est la fonction de répartition de la loi Normale

L'une des critiques les plus importante de ce modèle est la distribution normale, qui tend à sous-estimer les événements imprévus tels que les crashes sur les marchés actions par exemple, rendant les couvertures au risque très instables, inefficaces et coûteuses.

2.0.2 Modèles de volatilité locale

Pour résoudre ces problèmes, le concept de volatilité locale va être développé, notamment par Dupire. On traite ici la volatilité comme une fonction à la fois du prix du sous-jacent S_0 et du temps t . Ces modèles sont différents des modèles de volatilité stochastiques, dans lesquels la volatilité est également sujet à de l'aléatoire, provenant d'une composante aléatoire additionnelle.

2.0.3 Formulation

Dans ce modèle, notre asset S_t est sous-jacent d'un produit dérivé et suit une équation stochastique différentielle de la forme :

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

sous la probabilité risque-neutre, avec r_t le taux sans risque instantané et W_t est un processus de Wiener, qui représente la composante aléatoire dans la dynamique, dont l'amplitude est mesurée par la volatilité instantanée σ_t .

Ce modèle suggère donc l'utilisation d'une fonction de volatilité constante par morceaux-pour chaque date d'exercice du marché. L'objectif est donc de calibrer la volatilité des actifs au travers des différents strikes, afin d'obtenir une volatilité qui pourra être utilisée dans le modèle de BS.

Pour ce faire, on commence avec une fonction de diffusion localement stochastique, et on effectue une calibration des volatilités locales pour connaître le prix marché des différentes options européennes liquides.

On spécifie le process : $dF_t = \sigma_{loc}(t, F)F_t dW_t$

Alors pour $i=1,2,\dots,I$:

$$\begin{aligned}\sigma_{loc}(t, F) &= \sigma_{loc}^1, t < t_{ex}^1 \\ \sigma_{loc}(t, F) &= \sigma_{loc}^i, t \in (t_{ex}^{i-1}, t_{ex}^i) \\ \sigma_{loc}(t, F) &= \sigma_{loc}^I, t > t_{ex}^I\end{aligned}$$

Par exemple, on peut utiliser une fonction constante par morceaux, et calibrer la fonction locale de volatilité pour retourner la même valeur que les options liquides échangées pour différentes maturités et strike.

2.0.4 Problèmes avec les modèles de volatilité locale

Ces modèles possèdent eux aussi de nombreuses limitations, ils ne sont pas market consistent (la valorisation des actifs diffère de la valeur marché), ce qui peut conduire à des couvertures qui seront faussées.

Les modèles de volatilités locales attribuent donc des volatilités différentes à différents points du marché, créant ainsi une fonction de volatilité déterministe. Ils permettent également de créer un framework pour pricer des options exotiques. Toutefois, ces modèles ne sont pas adaptés pour le gérer le risque, puisque la dynamique du smile de volatilité est contraire à celle observée sur le marché. Il est donc important de préciser le champ d'application de tels modèles.

2.1 Produits de taux d'intérêt

2.1.1 Discount Factor

Le discount factor, noté $P^D(t, T)$; représente la valeur actuelle, à l'instant t , d'un euro payable à un futur instant T . Il est essentiel dans le calcul de la valeur actuelle des flux financiers futurs, permettant ainsi d'évaluer des instruments financiers comme les obligations ou les swaps de taux.

Le facteur de discount est inversement proportionnel au taux d'intérêt : plus le taux d'intérêt est élevé, plus la valeur actuelle est faible, et vice-versa.

Une manière commune de calculer le facteur d'actualisation, en supposant un taux d'intérêt continu, se base sur la formule exponentielle suivante, dans laquelle r_d désigne le taux d'intérêt annuel continu observé au temps t pour la période s'étendant de t à T , soit pour une durée de $\Delta T = T - t$:

$$P^D(t, T) = e^{-r_d \delta}$$

Avec δ la fraction de temps ΔT adaptée en fonction de la convention de comptage de jours choisie.

Exemple : Pour la convention ACT/360, la fraction de temps est calculée comme $\Delta T/360$.

Cette approche permet de calculer de manière précise le discount factor, offrant ainsi une mesure ajustée de la valeur actuelle d'une devise, payable dans le futur. Cette formule illustre la façon dont la Net Present Value diminue avec l'augmentation de la durée jusqu'au paiement, ce qui reflète le concept de la valeur temporelle de l'argent. Le taux d'intérêt r_d dans cette formule peut être dérivé de la courbe des taux d'intérêt pour la devise et la période de temps concernée.

Dans le contexte des instruments financiers, la grecque θ mesure la sensibilité de la valeur de l'instrument au passage du temps. Typiquement, pour la plupart des options et autres instruments dérivés, θ est négatif, ce qui signifie que la valeur de l'instrument diminue avec le passage du temps. Cela reflète directement le concept de la valeur temporelle de l'argent : à mesure que le temps passe, le facteur de discount diminue, ce qui réduit la valeur présente des flux financiers futurs.

Le taux correspondant à la majorité des produits dérivés est le taux LIBOR (London Interbank Offered Rate). Il représente le taux auquel les banques sont prêtes à emprunter de l'argent entre elles pour une certaine période et une certaine devise. Les taux LIBOR sont fixés quotidiennement, pour différentes maturités. On peut le calculer à partir du prix d'un zero-coupon bond :

$$L(0, T) = \frac{1}{P(0, T) * \delta} - 1$$

Les taux LIBOR étaient autrefois considérés comme des taux sans risque, mais suite à la crise financière de 2008, des suspicions de manipulation de ce taux sont apparues, permettant aux institutions d'emprunter à moindre coût et de réaliser un profit sur les transactions dépendant directement du LIBOR.

2.1.2 Coupon & Fixing

On rappelle quelques définitions qui vont être importantes pour la suite :

Tenor : Désigne la durée restante jusqu'au prochain coupon d'un instrument financier. Dans le contexte des taux d'intérêt, le tenor peut faire référence à la période jusqu'au prochain réajustement de taux pour un instrument à taux variable. Le tenor est souvent utilisé dans le calcul des taux d'intérêt et la détermination des courbes de rendement.

Maturité : La maturité en revanche, se réfère à la date à laquelle le principal d'un instrument financier doit être remboursé. Elle marque donc la fin de vie de l'instrument et est cruciale pour déterminer sa durée, les flux futurs ainsi que son évaluation.

2.1.3 FRA (Forward Rate Agreement)

Un forward rate agreement est un contrat bilatéral par lequel deux parties conviennent d'échanger un taux d'intérêt fixe contre un taux variable sur un montant principal déterminé, pour une période future précise.

Désignons par $FRA_{j \times j'}$ un tel accord ajusté pour une période allant de j à j' mois, commençant après j mois. La période effective du FRA inclut un délai standard, que l'on nomme spot lag.

Dans le cas d'un FRA avec une échéance de j mois, la date de fixation du prix est notée t_0 et le taux fixe négocié est représenté par K . A cette date t_0 , le taux LIBOR correspondant $F_{t_0}^j$ est déterminé. L'objectif d'un FRA est de couvrir le risque de taux d'intérêt en fixant dès aujourd'hui un taux pour une période future.

Le paiement convenu d'un FRA à la date $t = \text{spot}(t_0)$ est donné par la formule :

$$\delta \left(\frac{F_{t_0}^j - K}{1 + \delta F_{t_0}^j} \right)$$

La valeur d'un FRA d'une durée de j mois avec un taux fixe K , à la date de fixing t_0 au moment de la signature, notée V_{t_0} , dépend des attentes sur l'évolution future des taux d'intérêt et peut être exprimée comme suit :

$$P^D(t, \text{spot}(t_0)) \left(\frac{F_{t_0}^j - K}{1 + \delta F_{t_0}^j} \right)$$

Les montants nominaux pour les dépôts sont généralement exprimés en millions de l'unité de la devise concernée, et la date spot t_0 est habituellement fixée à deux jours ouvrables après le fixing.

Lorsque les FRA sont cotés sur le marché, leur Valeur Nette Actuelle (NPV) est égale à zéro, le taux $K(t)$ utilisé pour la cotation est égal au taux forward. Même si les FRA présentent une liquidité inférieure à celle d'autres instruments financiers comme les futures ou les swaps, ils sont couramment utilisés pour la construction de courbes de taux forward, particulièrement pour des périodes courtes de trois mois, car ils fournissent des indications précises sur les anticipations de taux à court terme.

2.1.4 Swap de taux d'intérêt/ Interest rate swap(IRS)

Un IRS est défini comme un ensemble de flux fixes (coupons fixes) c_i aux dates \tilde{t}_i . Ces coupons sont souvent des coupons constants K multipliés par la fraction de temps $\tilde{\delta}_i$ et actualisés. Un IRS comporte un ensemble de flux "flottants" sur une période $[t_{i-1}, t_i]$ avec $t_i = t_{i-1} + j$

On peut alors calculer la NPV d'un IRS grâce à la formule suivante : (Préciser les composantes ici).

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}} c_i P^D(t, \tilde{t}_i) - \sum_{i=1}^n P^D(t, t_i) \left(\frac{P^j(t, t_{i-1})}{P^j(t, t_i)} - 1 \right)$$

Le prix d'un IRS est obtenu en calculant la différence entre la somme actualisée des paiements fixes et celle des paiements flottants. Cette valeur représente la NPV de l'IRS. Si la NPV est positive, le swap est avantageux pour la partie fixe, si elle est négative alors il est avantageux pour la partie flottante.

Le taux "Forward Swap" est celui pour lequel la NPV est égale à zéro. C'est l'un des principes fondamentaux dans la valoration des IRS. C'est le taux qui équilibre les flux de paiements futurs fixes et flottants du swap, de telle sorte que la NPV du swap soit nulle au moment de l'évaluation. A ce taux, la valeur des paiements fixes actualisés est égale à la valeur des paiements flottants actualisés selon le taux actuel du marché.

2.2 Description mathématique

Le modèle SABR est un modèle de volatilité stochastique. Il fournit un set de 4 paramètres qui permettent de déterminer un smile de volatilité spécifique à une maturité et à un forward F donnés. Ce modèle produit une estimation de la courbe de la volatilité implicite, qui est ensuite utilisée comme paramètre dans le modèle de BS, pour pricer des swaptions, caps et d'autres produits de taux.

Les paramètres sont donc les suivants :

- α est la volatilité stochastique.
- β correspond au choix de la distribution de l'actif sous-jacent.
- ρ représente la corrélation entre la volatilité et le taux forward.
- ν correspond à la volatilité de la volatilité α (VolVol)

Sous ce modèle, l'underlying forward rate a la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1 \\ d\sigma_t = \nu \sigma_t dW_t^2 \\ F(0) = f \\ \sigma(0) = \alpha \end{cases}$$

Avec $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$, W^1 et W^2 des processus de Wiener, et α, β, ρ des constantes.

Les 3 paramètres β, ν, ρ doivent être calibrés sur les données marché, ces trois inputs permettent alors de déterminer le paramètre Alpha du modèle. Nos résultats peuvent alors être utilisés dans le modèle BS afin de pricer nos options.

En utilisant une méthode appelée "singular perturbation analysis", on peut dériver le principal résultat du modèle SABR :

$$\sigma_{BS}(T, K, F_0, \sigma_0, \alpha, \beta, \rho) = \frac{\sigma_0}{(F_0 K)^{(1-\beta)/2} (1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2(\frac{F_0}{K}) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4(\frac{F_0}{K}) + \dots)} * \frac{x}{y(x)} \\ * \left\{ 1 + T * \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\sigma_0^2}{(F_0 K)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \beta \sigma_0 \alpha}{(F_0 K)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \alpha^2 \right] + \dots \right\}$$

Avec :

$$x = \frac{\alpha}{\sigma_0 (F_0 K)^{\frac{1-\beta}{2}} \log\left(\frac{F_0}{K}\right)} \\ y(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho x + x^2} + x - \rho}{1-\rho}\right)$$

Dans le cas d'options ATM, on a $K=F_0$, et cette formule se réduit alors :

$$\sigma_{ATM} = \sigma_{BS}(F_0, F_0) = \frac{\alpha}{F_0^{(1-\beta)}} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{F_0^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \beta \alpha \nu}{F_0^{(1-\beta)}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \alpha^2 \right] + \dots \right\} \quad (1)$$

Les termes en "..." sont négligeables.

Cette formule étant très complexe, on peut la simplifier afin de la rendre davantage compréhensible, on peut l'approcher par :

$$\sigma_{BS}(K, F_0) = \frac{\alpha}{F_0^{1-\beta}} \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \log\left(\frac{K}{f}\right) + \frac{1}{12}((1 - \beta)^2 + (2 - 3\rho^2)\lambda^2) \log^2\left(\frac{K}{f}\right) + \dots \right] \quad (2)$$

$$\text{Avec } \lambda = \frac{\nu}{\alpha} F_0^{1-\beta} \quad (3)$$

qui compare la VolVol avec la volatilité locale $\frac{F_0^{1-\beta}}{\alpha}$.

Cette formule simplifiée n'est pas assez précise pour pricer, mais l'est suffisamment pour représenter le comportement du modèle SABR.

Rentrons en détails sur les membres de cette formule :

- Le facteur $\frac{\alpha}{F_0^{1-\beta}}$ représente la volatilité implicite pour des options ATM. Le backbone traversé par des options ATM est alors $\sigma_{BS}(F_0, F_0) = \frac{\alpha}{F_0^{1-\beta}}$, qui est presque entièrement déterminé par l'exposant β : avec $\beta = 0$ (on est dans le cas d'un modèle stochastique Gaussien) on a un backbone fortement incliné vers le bas, et pour $\beta = 1$ on a un backbone quasiment plat.
- Le second terme, $-\frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \log\left(\frac{K}{f}\right)$ représente le skew, c'est à dire la pente de la volatilité implicite par rapport au strike K.
- Enfin, dans le dernier terme, $\frac{1}{12}(1 - \beta)^2 \log^2\left(\frac{K}{f}\right)$ est un terme de smile, mais il est dominé par le deuxième terme et a donc une influence moindre sur celui-ci. La partie $\frac{1}{12}(2 - 3\rho^2)\lambda^2 \log^2\left(\frac{K}{f}\right)$ est le smile induit par l'effet volga (Vol-Gamma), cela s'explique par le fait que des mouvements importants et inhabituels du forward se réalisent davantage lorsque la volatilité α augmente.

2.2.1 Preuve de la volatilité implicite σ_{BS}

Pour prouver la forme de la volatilité implicite donnée plus tôt, on commence par considérer les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} dF_t = \tilde{\sigma}C(F_t)dW_t^1 \\ d\tilde{\sigma}_t = \tilde{\nu}\tilde{\sigma}_tdW_t^2 \\ F(0) = f \\ \tilde{\sigma}(0) = \alpha \end{cases}$$

Pour retrouver notre dynamique du modèle SABR, on prend simplement le cas spécial $C(f) = f^\beta$. On considère également que les volatilité $\tilde{\sigma}$ et la VolVol $\tilde{\nu}$ sont négligeables et peuvent donc être écrites comme : $\tilde{\sigma} \rightarrow \epsilon\sigma, \tilde{\nu} \rightarrow \epsilon\nu$. On a alors :

$$\begin{cases} dF_t = \epsilon \sigma C(F_t) dW_t^1 \\ d\sigma_t = \epsilon \nu \sigma dW_t^2 \\ F(0) = f \\ \sigma(0) = \alpha \end{cases}$$

Première étape : Dériver la PDE

Considérons les dynamiques données à l'instant, on définit la fonction de densité de transition \mathbf{p} :

$$p(t, f, \alpha, T, \tilde{F}, \tilde{\sigma}) d\tilde{F} d\tilde{\sigma} = P(\tilde{F} < F(T) < \tilde{F} + d\tilde{F}, \tilde{\sigma} < \sigma(T) < \tilde{\sigma} + d\tilde{\sigma} | F(t) = f, \sigma(t) = \alpha)$$

\tilde{F} et $\tilde{\sigma}$ sont introduits pour différencier les variables de notre fonction de densité de transition et celles de notre processus. Cette fonction satisfait la **Kolmogorov Forward Equation**, qui décrit l'évolution temporelle de la densité de probabilité :

$$\partial_T p = \frac{1}{2} \epsilon^2 \tilde{\sigma}^2 \partial_{\tilde{F}\tilde{F}} p [C^2(\tilde{F})p] + \epsilon^2 \rho \nu \partial_{\tilde{F}\tilde{\sigma}} [\tilde{\sigma}^2 C(\tilde{F})p] + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nu^2 \partial_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} [\tilde{\sigma}^2 p] \quad [1]$$

Avec $t < T$ et $p = \delta(\tilde{F} - f) \delta(\tilde{\sigma} - \alpha)$ lorsque $t=T$.

On considère alors $V(t, f, \alpha)$ la valeur d'une option Call européenne à l'instant t , avec $F(t) = f$ et $\sigma(t) = \alpha$. On note T_{ex} la date d'exercice de l'option et K son strike :

$$V(t, f, \alpha) = \mathbb{E}[(F(T_{ex}) - K)^+ | F(t) = f, \sigma(t) = \alpha]$$

La fonction de densité définie pouvant être réécrite :

$$p(t, f, \alpha, T, \tilde{F}, \tilde{\sigma}) = \delta(\tilde{F} - f) \delta(\tilde{\sigma} - \alpha) + \int_t^{T_{ex}} \partial_T p(t, f, \alpha, T, \tilde{F}, \tilde{\sigma}) dT$$

Ici, le premier terme représente la probabilité que F et σ restent égaux à leurs valeurs initiales f et α . Le deuxième terme, l'intégrale, reflète l'évolution de la densité de transition en fonction du temps.

On peut développer la formule de la valeur de notre option Call :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \int_t^{T_{ex}} \int_K^\infty \int_{-\infty}^\infty (\tilde{F} - K) \partial_T p(t, f, \alpha, T, \tilde{F}, \tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} d\tilde{F} dT$$

La première intégrale se fait entre la date actuelle t et la maturité T_{ex} , ce qui permet de capturer les différentes évolutions du processus $F(t)$ à chaque instant entre ces deux dates. La seconde intégrale se fait entre K et ∞ car nous sommes dans le cas d'un call européen, et enfin la dernière intégrale concerne toutes les valeurs possibles de la volatilité.

Et en utilisant l'équation [1] :

$$\begin{aligned} V(t, f, \alpha) &= [f - K]^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 \int_t^{T_{ex}} \int_K^\infty \int_{-\infty}^\infty (\tilde{F} - K) \tilde{\sigma}^2 \partial_{\tilde{F}\tilde{F}} p [C^2(\tilde{F})p] d\tilde{\sigma} d\tilde{F} dT \\ &\quad + \epsilon^2 \int_t^{T_{ex}} \int_K^\infty (\tilde{F} - K) [\int_{-\infty}^\infty (\rho \nu \partial_{\tilde{F}\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}^2 C(\tilde{F})p) + \frac{1}{2} \nu^2 \partial_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}^2 p)) d\tilde{\sigma}] d\tilde{F} dT \end{aligned}$$

De plus, comme $\partial_f[\tilde{\sigma}^2 C(\tilde{F})p], \partial_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}[\tilde{\sigma}^2 p] \xrightarrow{\tilde{\sigma} \rightarrow \pm\infty} 0$, c'est l'une des conditions que doivent respecter les termes associés à la volatilité dans l'équation de Kolmogorov, pour assurer la stabilité des solutions on impose que la densité de transition et ses dérivées tendent vers zéro aux bornes infinies. On a alors :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int_t^{T_{ex}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_K^{\infty} \tilde{\sigma}^2(\tilde{F} - K) \partial_{\tilde{F}\tilde{F}}[C^2(\tilde{F})p] d\tilde{F} d\tilde{\sigma} dT \quad [2]$$

Dans cette expression, l'ordre des deux dernières intégrales a été modifié. On effectue alors deux intégrations par parties par rapport à \tilde{F} :

$$\begin{aligned} \int_K^{\infty} \tilde{\sigma}^2(\tilde{F} - K) \partial_{\tilde{F}\tilde{F}}[C^2(\tilde{F})p] d\tilde{F} &= [\tilde{\sigma}^2(\tilde{F} - K) \partial_{\tilde{F}}[C^2(\tilde{F})p]]_K^{\infty} - \int_K^{\infty} \tilde{\sigma}^2 \partial_{\tilde{F}}[C^2(\tilde{F})p] d\tilde{F} \\ &= -\tilde{\sigma}^2[C^2(\tilde{F})p]_K^{\infty} \text{ par la limite donnée précédemment, la borne supérieure du premier} \\ &\quad \text{terme tend vers 0, et en K il vaut 0 également.} \\ &= \tilde{\sigma}^2 C^2(K)p \end{aligned}$$

En remplaçant alors dans [2] :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K) \int_t^{T_{ex}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}^2 p(t, f, \alpha, T, K, \tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} dT$$

On définit :

$$P(t, f, \alpha, T, K) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}^2 p(t, f, \alpha, T, K, \tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma} dT$$

On a alors :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K) \int_t^{T_{ex}} P(t, f, \alpha, T, K) dT$$

Et P satisfait l'équation backward de Kolmogorov :

$$\begin{aligned} \partial_t P + \frac{1}{2}\epsilon^2 \alpha^2 C^2(f) \partial_{ff} P + \epsilon^2 \rho \nu \alpha^2 C(f) \partial_{f\alpha} P + \frac{1}{2}\epsilon^2 \nu^2 \alpha^2 \partial_{\alpha\alpha} P &= 0 \quad \forall t < T \\ P &= \alpha^2 \delta(f - K) \text{ si } t = T \end{aligned}$$

t n'apparaît donc pas dans l'équation, P dépend donc de T-t et non de t et de T indépendamment. On définit alors $\tau = T - t$, et on a :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K) \int_t^{\tau_{ex}} P(\tau, f, \alpha, K) d\tau \text{ avec } \tau_{ex} = T_{ex} - t \quad [3]$$

et P est alors solution de :

$$\begin{aligned} \partial_t P &= \frac{1}{2}\epsilon^2 \alpha^2 C^2(f) \partial_{ff} P + \epsilon^2 \rho \nu \alpha^2 C(f) \partial_{f\alpha} P + \frac{1}{2}\epsilon^2 \nu^2 \alpha^2 \partial_{\alpha\alpha} P \quad \forall \tau > 0 \quad [4] \\ P &= \alpha^2 \delta(f - K) \text{ pour } \tau = 0 \end{aligned}$$

Deuxième étape : Résoudre le PDE en utilisant une singular perturbation technique. Le prix de l'option est alors obtenu en effectuant une intégration par rapport au temps.

On résoud donc [4] et on substitue cette solution dans [3] pour obtenir le prix de notre option sous le modèle SABR :

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}} - \epsilon^2 \theta}^{\infty} q^{-\frac{3}{2}} e^{-q} dq$$

Avec :

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \theta &= \log\left(\frac{\epsilon \alpha z}{f - K} \sqrt{B(0)B(\epsilon \alpha z)}\right) + \log\left(\frac{x I^{\frac{1}{2}}(\epsilon \nu z)}{z}\right) + \frac{1}{4} \epsilon^2 \rho \nu \alpha b_1 z^2 \\ B(x) &= \sqrt{\frac{1 - 2\rho x + x^2}{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$

Etape 3 : Calculer le prix $V(t, f, \sigma_N, K)$ avec F suivant un modèle normal, et en prenant $C(f) = 1, \nu = 0$ et $\epsilon \alpha = \sigma_N$
La volatilité implicite normale est alors obtenue en égalisant les prix :

$$V(t, f, \sigma_N, K) = V(t, C(f), \alpha, \nu, \rho)$$

On considère donc le modèle normal :

$$dF_t = \sigma_N dW_t, F(0) = f$$

Cela correspond à un cas spécial du modèle SABR lorsque $C(f)=1, \nu = 0$ et $\epsilon \alpha = \sigma_N$. L'objectif ici est d'exprimer la volatilité normale σ_N par rapport aux paramètres du modèle SABR. La volatilité pourra alors être utilisé comme input pour le modèle normal standard.

Pour égaliser les prix, **Hagan** a considéré un small time expansion in τ_{ex} et donc sur T_{ex} .

$$\sigma_N(K) = \sigma_N^0(K)(1 + \sigma_N^1(K)T_{ex}) + O(T_{ex}^2)$$

Cette approximation peut donc produire des résultats erronés pour des grandes maturités. Cette approche nous donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \frac{\epsilon \alpha (f - K)}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}} \cdot \left(\frac{\xi}{\tilde{x}(\xi)}\right) \cdot [1 + \left(\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24}\alpha^2 C^2(f_{av}) + \frac{1}{4}\rho \nu \alpha \gamma_1 C(f_{av}) + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\right)\epsilon^2 \tau_{ex} + \dots] \\ \text{Avec : } f_{av} &= \sqrt{fK}, \gamma_1 = \frac{C'(f_{av})}{C(f_{av})}, \gamma_2 = \frac{C''(f_{av})}{C(f_{av})} \\ \xi &= \frac{\nu}{\alpha} \frac{f - K}{C(f_{av})} \text{ et } \tilde{x}(\xi) = \log\left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho\xi + \xi^2} - \rho + \xi}{1 - \rho}\right) \end{aligned}$$

Etape 4 : On considère le modèle log-normal :

$$dF_t = \sigma_B F_t dW_t, F(0) = f$$

La volatilité implicite normale de l'étape précédente est alors utilisée sous le modèle log-normal avec $C(f) = f, \nu = 0$ et $\epsilon\alpha = \sigma_B$. On obtient alors σ_B en égalisant les équations suivantes :

$$\sigma_N(K, C(f), \alpha, \nu, \rho) = \sigma_N^B(K, f, \sigma_B)$$

Ce qui nous donne le résultat :

$$\sigma_B(K) = \frac{\alpha \log(\frac{f}{K})}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}} \cdot \left(\frac{\xi}{\tilde{x}(\xi)} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2 + \frac{1}{f_{av}^2}}{24} \alpha^2 C^2(f_{av}) + \frac{1}{4} \rho \nu \alpha \gamma_1 C(f_{av}) + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right) \epsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right]$$

Avec : $\xi = \frac{\nu}{\alpha} \frac{f-K}{C(f_{av})}$ et $\tilde{x}(\xi) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\xi+\xi^2}-\rho+\xi}{1-\rho}\right)$

Tout comme la volatilité implicite normale, σ_B doit être utilisé dans un pricer BS pour obtenir le prix d'une option call européenne. Ce résultat ayant été trouvé en faisant des approximations, les résultats seront forcément moins précis qu'en utilisant σ_N

Etape 5 : Maintenant que nous avons la volatilité implicite normale et la log-normale pour la fonction $C(f)$, il suffit de prendre le cas spécial $C(f)=f^\beta$. En recalculant σ_B on retombe alors sur la formule de volatilité implicite donnée par **Hagan**. A noter que ce calcul nécessite une nouvelle approximation, **Hagan** ayant considéré une 'expansion' en $\log(\frac{f}{K})$, ce qui implique que K ait une valeur proche de f .

2.2.2 Paramètres du modèle SABR

Comme je l'ai déjà dis, le modèle SABR dépend de 4 paramètres. Nous pouvons étudier les effets de ceux-ci sur le smile.

1. β : C'est le power parameter, il contrôle la raideur du skew. Il a des effets similaires au ρ , c'est pourquoi il est souvent fixé avant la calibration des autres paramètres. **West** a démontré (2005) que β est très sensible au temps, et tend vers 0 lorsque l'option se rapproche de sa maturité. Une des solutions est alors de fixer β plutôt que de le faire varier en fonction du temps, ce qui limite les besoins de recalibration. On utilise alors généralement $\beta = 0.5$, ce qui nous donne un modèle similaire au Cox-Ingersoll-Ross model.

Notre process devient alors :

$$dF_t = \sigma \sqrt{F_t} dW_t$$

On peut alors déduire le niveau actuel du price process, qui est égal à la racine carré de F_t . On ne peut donc pas utiliser des taux d'intérêts négatifs.

Au contraire, si on fixe le β à 1, on obtient un modèle similaire à celui de Black, avec un forward process qui a une distribution log-normale :

$$df_t = \alpha_t f_t dW_t$$

Le modèle est tout de même différent de celui de BS puisqu'on a une volatilité stochastique et non constante.

En résumé, plus notre β est élevé, plus l'output du modèle SABR a une courbe plate, et plus il est bas, plus notre pente est importante.

Plutôt que de fixer β , il existe également des techniques pour le calculer. On part du processus forward :

$$df_t = \alpha_t f_t^\beta dW_t^1$$

On a donc :

$$\text{StdDev}\left[\frac{df_t}{f_t}\right] = \alpha_t \frac{f_t^\beta}{f_t} = \alpha_t f_t^{\beta-1}$$

En restreignant β à l'intervalle $[0,1[$, on constate que cette standard deviation a une relation inverse au prix forward. Pour le cas des actions, Beckers a présenté en 1980 un raisonnement économique qui explique ce phénomène : si le prix de l'action d'une entreprise chute, la valeur marché de son equity diminue plus rapidement que celle de sa dette. L'entreprise devient alors de plus en plus risquée pour les investisseurs, ce qui augmente la volatilité.

Pour faire le lien avec notre exemple, on introduit la notion de **backbone** : c'est la courbe tracée par la volatilité implicite ATM par rapport à différents niveaux ATM du processus forward. En passant par le log dans notre équation précédente, on obtient:

$$\log(\text{StdDev}\left[\frac{df_t}{f_t}\right]) = \log(\alpha_t) + (\beta - 1)\log(f_t) \Leftrightarrow \log(\sigma_{ATM}) = \log(\alpha_t) + (\beta - 1)\log(f_t)$$

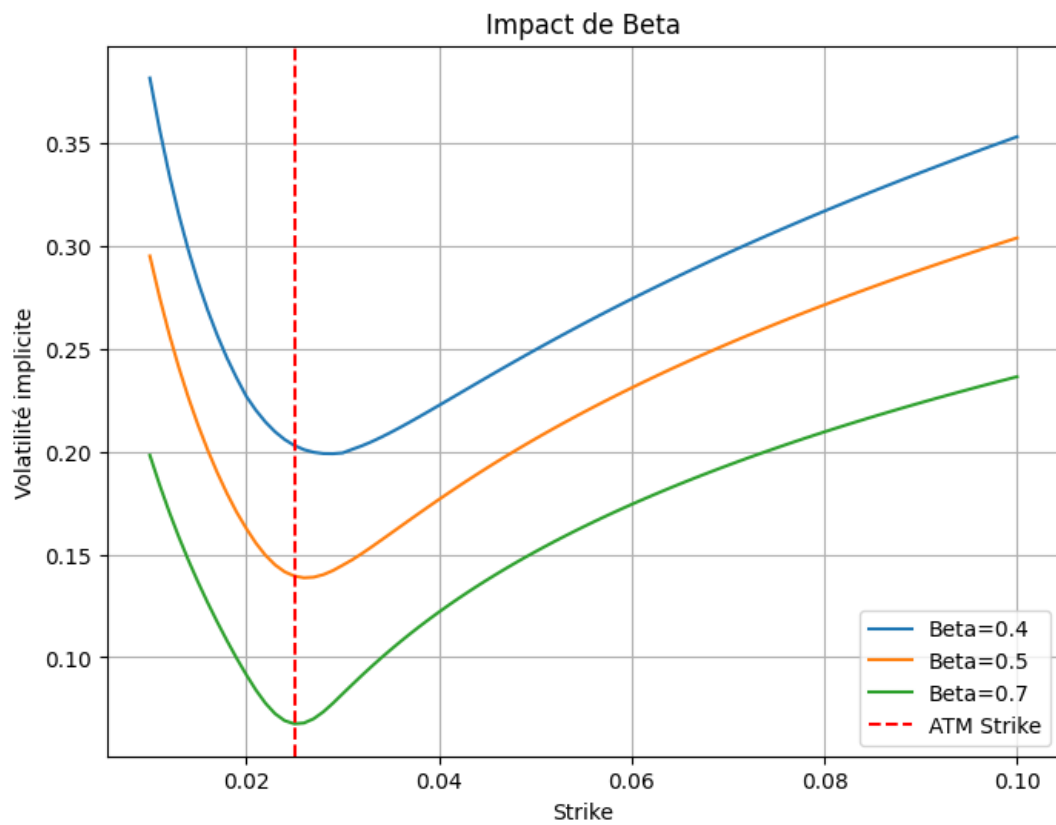
Enfin, on reprend la forme de la volatilité ATM sur le modèle SABR, et on constate que la contribution de σ_B provient principalement du terme $\frac{(1-\beta)^2}{24}$.

En prenant en compte le fait que **Hagan** a spécifié qu'omettre le dernier terme résulte en une marge d'erreur de maximum 3%, pour un raisonnement analytique nous pouvons raisonner sur une expression réduite, contrairement au cas du pricing pour lequel la formule complète doit être étudiée. On se ramène donc à :

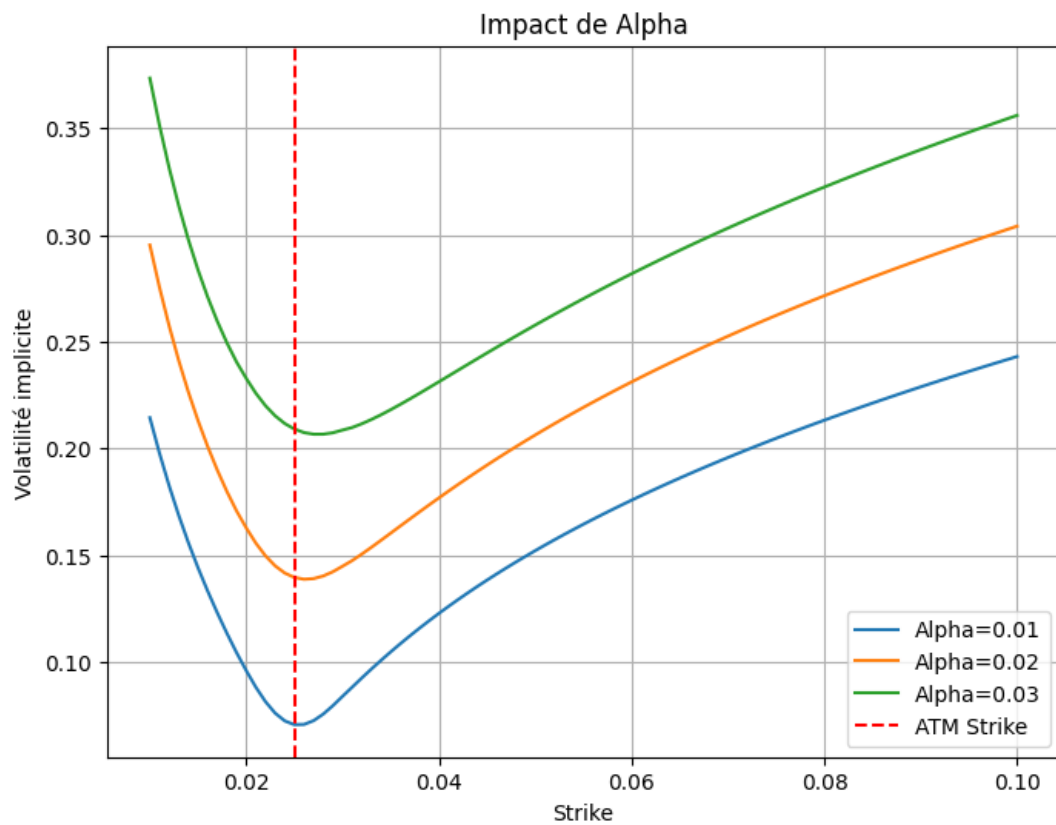
$$\begin{aligned} \sigma_B(f, f) &\simeq \frac{\alpha_0}{f^{(1-\beta)}} = \alpha_0 f^{(\beta-1)} \\ \Leftrightarrow \log(\sigma_B(f, f)) &= \log(\alpha_0) + (\beta - 1)\log(f_t) \end{aligned}$$

On se ramène donc à une égalité similaire à celle introduite pour le backbone.

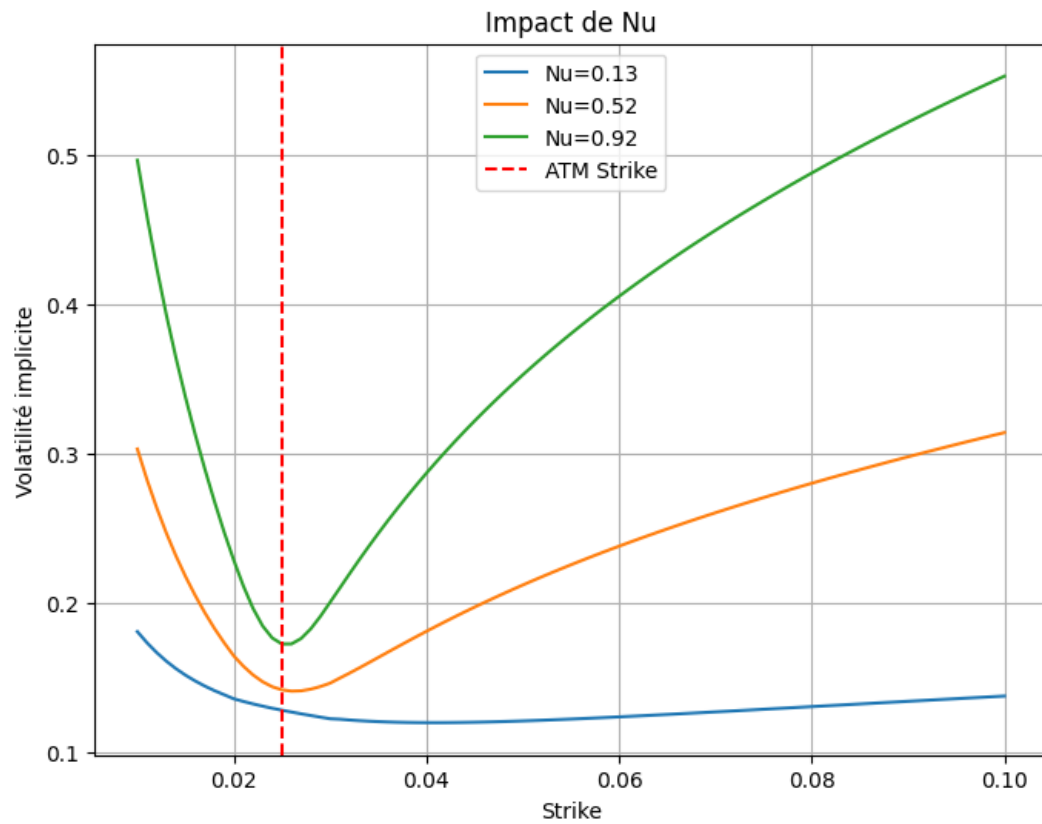
Nous avons donc une méthode d'estimation de β pour notre modèle, qui consiste en une régression linéaire sur les paramètres $(\log(\sigma_{ATM}), \log(f_{ATM}))$ pour des niveaux ATM différents. β est alors estimé par le coefficient de pente de la courbe de régression + 1. On peut représenter l'influence des différents paramètres du modèle SABR graphiquement, en traçant la volatilité implicite en fonction du strike, en gardant les 3 autres paramètres du modèles fixes et en modifiant la valeur du dernier. On utilisera cette méthode pour les 4 paramètres, et en s'intéressant ici à β , la ligne rouge représentant le strike pour lequel notre option est ATM :



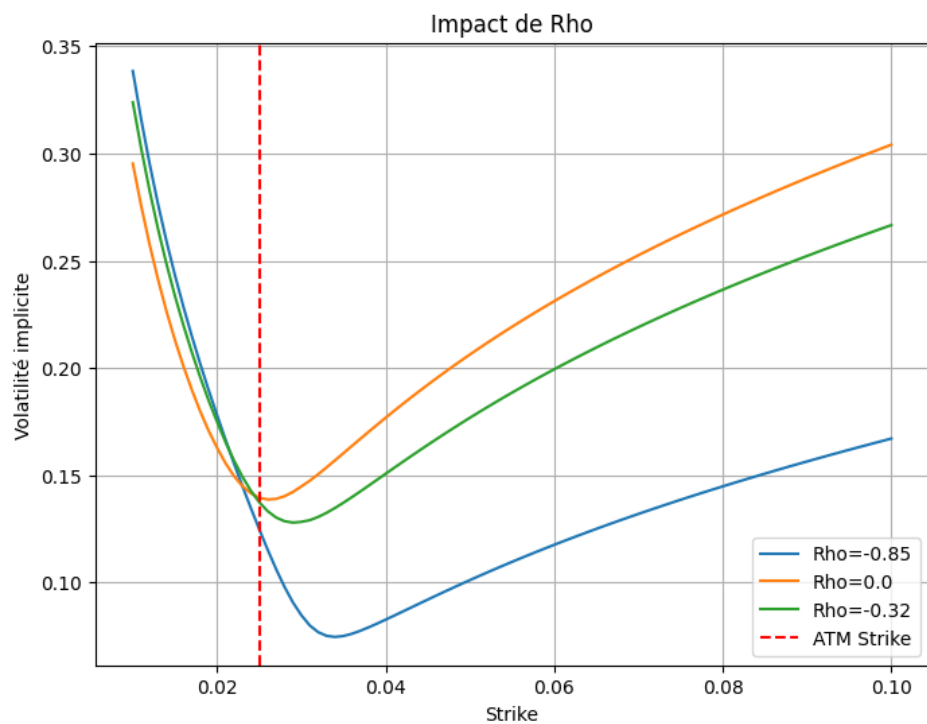
2. α influence directement le level du skew, un petit changement de ce paramètre déplacerait la courbe dans la même direction : un changement positif augmente les valeurs du smile :



3. ν représente la volatilité de la volatilité (VolVol), il affecte la courbure du smile comme nous pouvons le voir sur le graphe suivant :



4. ρ est notre coefficient de corrélation, il influence directement la courbure du skew, on le montre une nouvelle fois :



2.2.3 Parameterization du modèle SABR

Comme dit plus haut, on fixe généralement le β de notre modèle puis on détermine les coefficients α_0 , ρ et ν afin de calibrer notre modèle. Pour ce faire, il existe deux méthodes :

- Estimation de α_0 , ρ et ν : on résoud simplement le problème d'optimisation qui minimise la somme des erreurs au carré décrite plus tôt. On peut utiliser des méthodes standards d'optimisation telles que la méthode Newton-Raphson.
- Estimation de ρ et ν : On commence ici par estimer ρ et ν et à partir de cela on en déduit α_0 en utilisant l'approximation pour les volatilités ATM donnée plus haut. En connaissant σ_{ATM} , on peut inverser la formule de la volatilité implicite, ce qui nous donne :

$$\sigma_{ATM} = \frac{\alpha_0}{f^{(1-\beta)}} \left[1 + \left(\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha_0^2}{f^{(2-2\beta)}} + \frac{\rho\beta\nu\alpha_0}{4f^{(1-\beta)}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right) T \right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = A\alpha_0^3 + B\alpha_0^2 + C\alpha_0 - \sigma_{ATM}f^{(1-\beta)}$$

Avec $A = \frac{(1-\beta)^2 T}{24f^{(2-2\beta)}}$, $B = \frac{\rho\beta}{4f^{(1-\beta)}}$ et $C = [1 + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 T]$. Cette équation du troisième ordre peut avoir jusqu'à trois racines réelles, même si en général il n'y aura qu'une seule racine.

Pour faire la calibration, on peut alors suivre le schéma suivant :

- On assigne des valeurs initiales à ρ et ν .
- On résoud l'équation cubique ci-dessus pour obtenir une estimation de α_0
- On minimise la somme du carré des erreurs par rapport à ρ et ν
- On reprend notre équation cubique à partir de ces nouvelles valeurs
- Si la somme du carré des erreurs dépasse le seuil de tolérance que l'on a spécifié, on reprend à l'étape 3.
- Mathématiquement, notre problème revient donc ici à minimiser l'expression suivante :

$$\min_{\rho, \nu} \sum_i (\bar{\sigma}_i - \sigma_B(\nu, \rho, \alpha_0(\rho, \nu, \sigma_{ATM}), K_i, f, \beta))^2$$

On utilise donc dans ce cas σ_{ATM} comme un input supplémentaire pour déterminer α_0 , comparé au cas dans lequel on estime directement α_0 , ρ et ν

C'est cette deuxième méthode que l'on utilisera dans l'application Python de la prochaine partie, pour pricer des swaptions.

2.2.4 Couverture du risque sous le modèle SABR

On rappelle qu'en dérivant la formule de BS pour le prix d'une option Call/Put par rapport au prix du sous-jacent, on obtient : $\Delta = \Phi(d1)$. Un delta proche de 0 correspond à une option call OTM : ayant une valeur très faible, un changement de prix du sous-jacent a un effet moindre sur la valeur de l'option. Au contraire, les options call ITM auront un delta proche de 1. Le delta est très pratique pour hedger un portfolio en le rendant

insensible aux variations du sous-jacent : on dit que le portfolio est **delta-neutral**.

Le vega représente lui la sensibilité du prix d'une option par rapport aux variations de la volatilité implicite de son sous-jacent, il est le même pour les options Call et Put. On a donc sous le modèle BS :

$$\Lambda = \frac{\partial C(\cdot)}{\partial \sigma_B}$$

ce qui nous donne :

$$\Lambda = S_0 \sqrt{T} \Phi'(d1)$$

Les modèles de volatilités locales sont peu efficaces pour se couvrir, le modèle SABR a donc été créé pour résoudre ce problème. On utilise les mêmes noms de Grecques, mais le calcul est modifié par rapport au modèle Black-Scholes. Par exemple, le Delta correspond au changement de la valeur actuelle de l'option lorsque le taux forward augmente et que les autres paramètres restent fixes. Le calcul des Grecs requiert certains ajustements sous le modèle SABR :

$$\Delta_{SABR} = \frac{\partial V}{\partial F} = \frac{\partial BS}{\partial F} + \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} \cdot \frac{\partial BS(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial F} = \Delta_{BS} + \Lambda_{BS} \cdot \frac{\partial \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial F}$$

Le premier terme correspond au delta classique sous le modèle BS, le deuxième terme correspond au "backbone adjustment" : le vega classique sous le modèle BS multiplié par le changement prédit de la volatilité sous BS par rapport au forward price. Ce dernier terme peut donc être calculé numériquement.

Le vega doit également être ajusté de la manière suivante :

$$\Lambda_{SABR} = \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} \cdot \frac{\frac{\partial \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_{BS}(F, F, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha}} = \Lambda_{BS} \cdot \frac{\frac{\partial \Lambda_{BS}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \Lambda_{BS(ATM)}}{\partial \alpha}} \approx \Lambda_{BS} \cdot \frac{\sigma_{BS}(F, K)}{\sigma_{BS}(F, F)}$$

Ce terme peut lui aussi être calculé numériquement, et on remarque que pour des options ATM, le Vega est identique à celui de BS

Ces deux Grecques sont considérés comme les Grecques classiques du modèle SABR, mais Barlett (2006) a dérivé des nouvelles formules de risque : **Les Barlett Greeks**.

Pour les obtenir, on récrit la dynamique du modèle SABR par rapport à des mouvements browniens indépendants W_t et Z_t :

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^\beta dW_t \\ d\tilde{\alpha}_t &= \nu \alpha_t (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t) \\ \text{On a donc : } d\tilde{\alpha}_t &= \frac{\rho \nu}{F^\beta} dF_t + \nu \alpha_t \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \end{aligned}$$

La dynamique de $\tilde{\alpha}_t$ se décompose en deux composantes indépendantes : le changement de F_t et les **changement idiosyncratique en α_t défini par Barlett**. On peut alors poser en utilisant la dynamique que l'on vient de spécifier :

$$\partial_f \alpha = \frac{\rho \nu}{f^\beta} \Delta f$$

Par dérivée de la formule de Taylor à plusieurs variables, on sait que :

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \Delta \sigma$$

On peut décomposer $\Delta \sigma$: Puisque la volatilité σ dépend de f et de α , $\Delta \sigma$ peut être décomposé en variation de f et de α selon la règle de dérivation partielle :

$$\Delta \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \Delta \alpha$$

On a alors :

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial f} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho \nu}{f^\beta} \right) \Delta f$$

et donc :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial f} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho \nu}{f^\beta} \right)$$

On a le même type de dérivée pour le Vega. On s'attend à un changement du sous-jacent lorsque la volatilité est modifiée, donc que f devienne $\partial_\alpha f$ lorsque α est modifiée de $\delta \alpha$:

$$\partial_\alpha f = \frac{\rho f^\beta}{\nu} d\alpha_t$$

Et par un raisonnement similaire, on obtient que :

$$\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial f} \frac{\rho f^\beta}{\nu} \right)$$

Puisque Delta doit être ajusté, de manière logique nous devons également ajuster notre gamma :

$$\begin{aligned} \Gamma_{SABR} &= \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial F} \left(\Delta_{BS} + \Lambda_{BS} \cdot \frac{\partial \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{F} \right) \\ &= \Gamma_{BS} + \frac{\partial \Lambda_{BS}}{\partial F} \cdot \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu) + \Lambda_{BS} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial F^2} \end{aligned}$$

Le modèle SABR introduit également deux nouvelles Greeks qui vont être très utile pour le hedging :

- Vanna : Risque associé à ρ , des changements sur le coefficient de corrélation modifient l'Alpha, ce qui doit être calculé :

$$Vanna_{SABR} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{Black}} \cdot \frac{\partial \sigma_{Black}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \rho}$$

- Volga : Risque associé à ν : des changements sur la VolVol ont aussi un effet sur l'Alpha, on calcule donc :

$$Volga_{SABR} = \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} \cdot \frac{\partial \sigma_{BS}(F, K, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \nu}$$

Ces deux nouvelles Greeks peuvent être calculées en utilisant des méthodes numériques standards.

2.3 Applications (Risk Management, Swaption pricer...)

Le modèle SABR peut être utilisé pour le risk management. En l'utilisant, on peut calculer Δ et ν pour différents strike prices et donc limiter les risques d'un portefeuille de produits dérivés. Toutefois, ce modèle n'est pas uniquement utile pour le risk management, il peut aussi être utilisé pour le pricing de produits financiers, notamment les swaptions; aussi bien avec des strikes positifs dans le cas du modèle SABR classique, que des strikes pouvant être négatifs pour le modèle SABR Shifté.

2.3.1 Suite des recherches sur le modèle SABR

Alors qu'il existe un fort intérêt pour les modèles de volatilité stochastique, peu de recherches empiriques ont vu le jour sur le modèle SABR. Certains, comme **Wu** en 2012 ont essayé d'approfondir les recherches, il a notamment effectué une étude empirique en observant les capacités du modèle pour pricer et se couvrir du risque en utilisant des caps de taux d'intérêt.

Ses résultats ont montré que ce modèle permet de fit le smile de volatilité implicite de manière précise. Il faut toutefois une re-calibration journalière des paramètres du modèle pour obtenir les résultats les plus précis possibles.

Il a également utilisé la formule de **Obloj** dans son analyse. Toutefois, ses études ne prennent pas en compte le shifted SABR.

On peut également citer **Antonov** (2019) qui a créé un nouveau modèle SABR qui prend en compte des taux d'intérêt négatifs, appelé **Free-boundary SABR model**. L'objectif est d'éviter le choix d'un paramètre de shift, en forçant le forward rate à être positif, en faisant en sorte que le forward rate process dépende de la valeur absolue du forward rate.

2.4 Issues

2.4.1 Dynamique du modèle SABR

Avec la dynamique du modèle SABR que l'on a donné, selon le choix de notre β , on peut avoir des résultats très différents pour le Δ . La question du choix de β est donc très importante et il semble qu'aucun consensus n'existe sur ce sujet. On doit donc faire un choix sur ce paramètre, comme nous le verrons dans l'application Python.

2.4.2 Calibration sur des volatilités trop faibles ou trop élevées

Le modèle SABR peut se révéler inefficace pour des volatilités extrêmes, des strikes trop faibles ou encore des maturités importantes. Ce problème fait que le modèle SABR, et notamment ses Greeks sont mal adaptés aux problèmes de couverture des risques.

3 Le modèle SABR dans un environnement de taux d'intérêt négatifs

3.1 Effet des taux d'intérêt négatifs sur les modèles financiers

Le concept de taux d'intérêt négatifs peut paraître contre-intuitif. Le but d'un taux d'intérêt étant de rémunérer un emprunt, pourquoi paierait-on quelqu'un pour qu'il emprunte de l'argent?

Dans ce cas, c'est le prêteur qui prend le risque de défaut du prêt. Les taux d'intérêt négatifs peuvent être utilisés par les banques centrales pour augmenter l'emprunt lorsque l'économie d'un pays est en période de récession. L'objectif est de relancer l'économie en stimulant la consommation et l'investissement. Il s'agit souvent d'une mesure de dernier recours, lorsqu'elle n'a plus d'autres solutions. Durant ces périodes, la valeur de la monnaie d'un pays diminue fortement, les banques centrales doivent alors appliquer des taux d'intérêt négatifs.

Les taux d'intérêt négatifs sont donc mis en place pour stimuler l'activité économique et lutter contre l'inflation. Toutefois, de nombreux économistes mettent en garde qu'ils pourraient également avoir des effets secondaires néfastes pour l'économie.

Pour illustrer cela on peut prendre l'exemple des mortgages, qui sont contractuellement liés au taux d'intérêt en vigueur, et donc des taux d'intérêts négatifs pourraient comprimer les marges bénéficiaires au point que les banques prêtent de moins en moins d'argent.

Les particuliers peuvent également retirer leur argent des banques et le conserver, puisque le conserver dans la banque leur coûterait de l'argent.

Dans ce contexte, les produits financiers liés aux taux d'intérêt peuvent être difficiles à modéliser, notamment les swaps de taux et les swaptions. C'est dans cet environnement que le modèle Shifted SABR va se révéler utile, en introduisant un paramètre de shift afin d'ajouter un certain niveau fixe aux taux.

3.2 Shifted SABR

Le shifted SABR est une extension du modèle, qui permet une application dans des environnements de taux d'intérêts négatifs. Pour obtenir une volatilité spécifique au produit, nous utilisons le modèle de volatilité stochastique SABR shifté, qui est une extension du modèle CEV.

On le définit comme :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t(F_t + s)^\beta dW_t^1 \\ d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^2 \end{cases}$$

avec :

- F_t est le taux forward
- β est l'exposant CEV, compris entre 0 et 1. (On rappelle que $\beta = 1 \Rightarrow$ Modèle Log-Normal Shifté)

- ρ représente la corrélation entre la volatilité et le taux forward, $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$
- α est la volatilité de la volatilité σ_t (la VolVol).
- σ_0 est la valeur initiale de la volatilité stochastique.

Les paramètres α, β, ρ et σ_0 sont les paramètres du modèle SABR Shifté. Ce modèle est couramment utilisé pour la cotation de la volatilité implicite car il dispose d'une formule fermée qui permet de déterminer la volatilité de marché en fonction de ces paramètres; qui sont mis à jour quotidiennement sur le marché, ce qui permet une calibration précise du modèle.

Pour utiliser ce modèle, on commence par récupérer les valeurs appropriées des paramètres α, β, ρ et σ_0 pour obtenir une volatilité σ_{floor} , qui peut ensuite être utilisée dans le modèle de Black pour calculer le prix du floor. Le shift s modifie la borne inférieure, qui passe de 0 à $-s$, F_t pouvant ainsi atteindre des niveaux négatifs. Ce shift peut être inclut dans la calibration ou fixé à l'avance.

On peut dériver le prix d'une option call sous le modèle shifted SABR, en supposant que le prix sous le modèle SABR est connu :

Considérons s un shift positif tel que :

- $F_t + s > 0 \forall t \in [0, T]$.
- $K + s > 0 \forall \text{ strike } K$

On définit alors le shifted forward rate : $X_t = F_t + s$. La valeur d'une option call peut alors se réécrire :

$$\mathbb{E}[(F_t - K)^+] = \mathbb{E}[((F_t + s) - (K + s))^+] = \mathbb{E}[(X_t - (K + s))^+]$$

On constate donc que la valeur d'une option call sur F avec un strike K est égal à celle d'une option call sur X avec un strike $K+s$. On réutilise ensuite la dynamique de F_t :

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1$$

$$\text{Ce qui équivaut à : } d(F_t + s) = \sigma_t (F_t + s)^\beta dW_t^1$$

$$\text{Puis en utilisant que } X_t = F_t + s : dX_t = \sigma_t X_t^\beta dW_t^1$$

X suit donc un modèle SABR ayant pour dynamique :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma_t X_t^\beta dW_t^1 \\ X(0) = x \\ d\sigma_t = \nu \sigma_t dW_t^2 \\ \sigma(0) = \alpha \end{cases}$$

On en conclut donc que le prix d'une option call du modèle shifted SABR avec un forward f et un strike K est le même qu'une option call du modèle SABR avec un forward $f+s$ et un strike $K+s$, on a donc un décalage correspondant à notre shift s .

4 Python pricer : Swaption

4.1 Cap/Floor/Swaption

Dans cette partie, je vais réaliser une application sur Python, pour pricer des Swaption en utilisant le modèle SABR, mais également pour produire une surface de volatilité implicite.

Ma méthodologie est la suivante :

- Calcul des taux forward
- Décomposition des volatilités en une surface bootstrappée de volatilité.
- Calibration des paramètres SABR par rapport à cette surface afin d'obtenir une surface lissée de volatilités SABR.

4.1.1 Notations

- T : désigne la maturité
- σ la volatilité implicite
- K le prix strike, K_{ATM} le strike à la monnaie
- σ_T^{jM} la volatilité implicite d'un caplet de tenor j mois et de maturité T

A noter que le tenor désigne la durée restante avant l'expiration d'un contrat alors que la maturité désigne la date à laquelle un instrument financier arrive à échéance et doit être remboursé. ATM désigne la moneyness de notre option, si le strike price K est très proche du prix actuel du sous-jacent S sur le marché, l'option est dite ATM, elle a alors une valeur intrinsèque proche de 0, mais possède une valeur temps qui peut varier selon la volatilité du marché et le temps restant jusqu'à l'échéance de l'option.

4.1.2 Définitions

- Cap : Produit dérivé de taux, composé de plusieurs périodes. A la fin de chacune d'entre elles, l'acheteur reçoit soit la différence entre un taux d'intérêt flottant et un taux fixe, soit 0 si le taux fixe est supérieur au taux flottant. Le taux d'intérêt fixe est déterminé au début du contrat, il s'agit du strike de l'option.
- Caplet : Cap composé d'une seule période.
- Volatilité d'un caplet (Volatilité forward) : Volatilité qui, utilisée dans le modèles de Black-Scholes, renverra le prix exact du cap ou du floor observé sur le marché. Le prix d'un cap dépend donc directement de la volatilité de chacun des caplets qui le compose.
- Floor : Produit dérivé de taux qui fixe un taux d'intérêt minimum pour un actif sous-jacent. Ainsi, peu importe le niveau des taux d'intérêt sur le marché, le taux d'intérêt payé sur l'actif ne tombera pas en dessous de ce niveau minimum prédéterminé. C'est donc une couverture très efficace contre la volatilité des taux.

Lors de la mise en place du contrat, les deux parties s'accordent sur les paramètres suivants :

1. **La devise** dans laquelle les paiements seront effectués
2. **Le taux de référence** : Libor ou Ester par exemple, ce qui correspond au prix du sous-jacent de l'option.
3. **Le strike K**
4. **Le montant nominal sur lequel portent les intérêts**
5. **La durée du contrat** : généralement entre 1 mois et 10 ans.
6. **Périodicité des flux**
7. **La prime** : correspond au coût payé par l'acquéreur de l'option à la signature du contrat, elle est généralement exprimée en pourcentage du nominal.

Le principal intérêt des caps et des floors est d'offrir une couverture contre un sens de variation particulier des taux d'intérêt. Contrairement aux FRA et aux swaps de taux, les options sur taux offrent la garantie d'une perte maximale qui est égale à la prime initialement versée, dans le cas où les taux évoluent dans le sens inverse de celui prédit. Un cap permet à son acquéreur de se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt qui dépasserait le strike, en échange du paiement d'une prime.

Un floor permet à son acheteur de se couvrir ou de tirer profit d'une baisse des taux monétaires en deçà d'un certain niveau.

4.2 Calibration du modèle

Pour chaque maturité d'option différente et chaque sous-jacent, le modèle SABR doit être calibré. La calibration du modèle consiste à déterminer les différents paramètres dont il dépend. Une méthode de calibration nécessite que notre paramètre β soit fixé. On estime alors α, ν et ρ . Pour ce faire, on minimise l'erreur entre le modèle et la volatilité observée sur le marché σ_{mkt} en utilisant la somme du carrés des erreurs :

$$\Omega = (\tilde{\alpha}, \tilde{\rho}, \tilde{\nu}) = \underset{\Omega}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n (\sigma_{mkt} - \sigma_{BS}(K, S, \Omega))^2$$

Avec :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha, \\ -1 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \nu \end{cases}$$

On rentre alors nos paramètres $(\tilde{\alpha}, \tilde{\rho}, \tilde{\nu})$ dans notre équation (en 2.1) pour obtenir σ_{BS} puis on utilise la méthode BS pour pricer notre option.

4.2.1 Modèle Log-Normal Shifté

Le calcul du prix des Caps/Floors implique l'utilisation d'un modèle Black Shifté, qui est défini comme suit :

La dynamique du forward est donnée par une volatilité et un paramètre de décalage s :

$$dF_t = \sigma(F_t + s)dW_t$$

Le prix d'une option européenne de maturité T et de strike K est alors donné par :

$$PV = \Phi(0)BS(\phi, T, K + s, F_0 + s, \sigma)$$

Notre paramètre de décalage permet de calibrer certaines formes de smiles décroissants en fonction du strike, parfois observés sur les marchés des caps, floors et swaptions.

4.2.2 Valorisation des Cap

Il existe deux grand types de Caplet :

1. Caplet Forward-Looking avec payoff $(R_j(T_j) - K)^+$: Caplet dont le taux R_j prévalant sur la période $[T_{j-1}, T_j]$ est connu en fin de période (donc en T_j).
2. Caplet Backward-Looking avec payoff $(R_j(T_{j-1}) - K)^+$: Caplet dont le taux R_j prévalant sur la période $[T_{j-1}, T_j]$ est connu en début de période (donc en T_{j-1}).

En modélisant le taux forward sous la mesure $T_j - Forward$ et en utilisant la propriété des espérances conditionnelles pour introduire la tribu $F_{T_{j-1}}$, l'inégalité de Jensen et la martingale R_j , on obtient :

$$\mathbb{E}^{T_j}[(R_j(T_j) - K)^+ | F_t] \geq \mathbb{E}^{T_j}[(R_j(T_{j-1}) - K)^+ | F_t]$$

Cela prouve donc que le caplet Backward-Looking (à droite) est généralement plus coûteux que le caplet Forward-Looking. On doit donc ajuster nos modèles de valorisation, en utilisant l'équation suivante pour les caplets via les formules de Black :

$$\text{Black}(R, K, \nu) = R \cdot \mathcal{N}\left(\frac{\ln(\frac{R}{K}) + \frac{1}{2}\nu^2}{\nu\sqrt{T}}\right) - K \cdot \mathcal{N}\left(\frac{\ln(\frac{R}{K}) - \frac{1}{2}\nu^2}{\nu\sqrt{T}}\right)$$

On définit alors les prix des caplets Forward-Looking $C_F(T_j)$ et Backward-Looking $C_B(T_j)$ comme suit :

$$\begin{cases} C_F(T_j) = P(t, T_j) \cdot \text{Black}(R, K, v_j^F(t)) & \text{si } t \leq T_{j-1} \\ C_B(T_j) = P(t, T_j) \cdot \text{Black}(R, K, v_j^B(t)) & \text{si } t \leq T_j \end{cases}$$

Les volatilités $v_j^F(t)$ et $v_j^B(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} v_j^F(t) = \sigma_f^2(T_{j-1} - t)^+ \\ v_j^B(t) = \sigma_b^2 \int_t^{T_j} \left(\min\left(\frac{T_j - s}{T_j - T_{j-1}}, 1\right) \right)^2 ds = \sigma_b^2 \left((T_j - t) + \frac{(T_j - (T_j - 1))^3}{3(T_j - T_{j-1})^2} \right) \end{cases}$$

Avant la réforme LIBOR, nous étions dans le cas Forward-Looking. Désormais, on considère le cas Backward-Looking. On a deux changements majeurs :

1. Ajustement de la période de mise en avant dans la formule.
2. Inclusion du premier caplet. En effet, pour un cap Forward-Looking, si $t = T_{j-1}$, le taux $R_j(T_{j-1})$ est fixé. Il n'est donc pas nécessaire de valoriser le caplet correspondant, car il a déjà une valeur. Cependant, pour le Backward-Looking, le taux de la première période étant fixé en T_j , la valorisation du premier caplet est cruciale.

Démonstration pour retrouver le résultat de $v_j^b(t)$:

De base on a : $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$

$$\Rightarrow d\langle S \rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 S_u^2 d\langle W \rangle_u \quad (4)$$

$$= \int_0^t \sigma_u^2 S_u^2 du \quad (5)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(S_t) = \int_0^t \sigma_u^2 du \quad (6)$$

On passe à : $dS_t = \sigma_t g_t S_t dW_t$

$$\Rightarrow d\langle S \rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 g_u^2 S_u^2 du \quad (7)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(S_t) = \int_0^t \sigma_u^2 g_u^2 du = \int_0^t \sigma^2 g_u^2 du = \sigma^2 \int_0^t g_u^2 du$$

Avec

$$\begin{cases} g_t = g_{att}(t) = \min\left(\frac{(T_0 + \delta - t)^+}{\delta}, 1\right) = \min\left(\frac{(T_{end} - t)^+}{\delta}, 1\right) \\ \delta \in \{3M, 6M, 9M, 12M\} = T_{end} - T_{start} = T_j - T_{j-1} \\ T_{start} = T_0 = T_{j-1} = \text{date de début} \\ T_{end} = T_{j-1} + \delta = T_0 + \delta = T_j = \text{date de fin} \\ t = \text{date de pricing} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\text{Var}(S_{T_j}) = \sigma^2 \left[\int_t^{T_j} \left(\min\left(\frac{(T_j - u)^+}{T_j - T_{j-1}}, 1\right) \right)^2 du \right] \quad (8)$$

Or,

$$u < T_{j-1} \Leftrightarrow T_j - u > T_j - T_{j-1} \Leftrightarrow \frac{T_j - u}{T_j - T_{j-1}} > 1 \quad (9)$$

D'où,

$$\text{Var}(S_{T_j}) = \sigma^2 \left(\int_t^{T_{j-1}} du + \int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(\frac{T_j - u}{T_j - T_{j-1}} \right)^2 du \right) \quad (10)$$

$$= \sigma^2 \left((T_{j-1} - t)^+ + \frac{1}{(T_j - T_{j-1})^2} \int_{T_{j-1}}^{T_j} (T_j - u)^2 du \right) \quad (11)$$

$$= \sigma^2 \left((T_{j-1} - t)^+ + \frac{1}{(T_j - T_{j-1})^2} \left[\frac{(T_j - u)^3}{3} \right]_{T_{j-1}}^{T_j} \right) \quad (12)$$

$$= \sigma^2 \left((T_{j-1} - t)^+ + \frac{(T_j - T_{j-1})^3}{3(T_j - T_{j-1})^2} \right) \quad (13)$$

4.3 Swaption SABR/Shifted SABR

Il existe deux grands types de swaption, qui ont des cash flows et des valuations différentes :

1. **Physical Settlement** : Dans le cas des physical settlement, le propriétaire de l'option a la possibilité de rentrer dans le swap sous des conditions pré-établies. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Payer Swaption } PV_t^{phys} &= A(t, T_S, T_E) [(R(t, T_S, T_E) - K)^+] \\ \text{où : } A(t, T_S, T_E) &= \sum_{i=S+1}^E \delta_i^{fix} D(t, T_i) \end{aligned}$$

2. **Cash settlement** : Le propriétaire de l'option reçoit la potentielle PV positive du swap à la date de l'exercice, mais dans ce cas le par swap rate est utilisé en tant que discount rate. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Payer Swaption } PV_t^{cash} &= \tilde{A}(t, T_S, T_E) [(R(t, T_S, T_E) - K)^+] \\ \text{où : } \tilde{A}(t, T_S, T_E) &= \sum_{i=S+1}^E \frac{\delta_i^{fix}}{(1 + \delta_i^{fix} R(t, T_S, T_E))^{T_i - t}} \end{aligned}$$

La principale différence entre la valuation d'un cash ou d'un physical settlement réside donc dans le discounting. On peut alors chercher la forme fermée pour estimer la valeur d'un swaption : En considérant le par swap rate $R(\cdot)$ comme le sous-jacent, une similarité avec une option call européenne standard apparaît. La principale différence dans le pricing réside dans le fait que le sous-jacent dans le modèle BS respecte l'égalité :

$$E_0^Q[S_T] = e^{r_f T} S_0$$

La PV de de l'asset est alors une martingale lorsque nous utilisons $g_t = (e^{r_f T})_t$ comme le numéraire, mais le par swap rate (le sous-jacent dans un swaption) a besoin d'un autre numeraire : la fonction $A(\cdot)$.

On a alors les résultats suivants (qui sont admis) :

$$\text{Payer Swaption } PV_t = A(t, T_S, T_E) [R(t, T_S, T_E) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{R(t, T_S, T_E)}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Le prix du swaption opposé (celui qui reçoit) peut-être obtenu simplement en utilisant une relation de parité, similaire à la call-put parity pour une option vanilla européenne standard. Tous les contrats ayant le même strike K .

Application Python

On va maintenant chercher à faire un pricer de swaption sur Python, en commençant par calibrer le modèle afin de reproduire le plus fidèlement possible les prix observés sur le marché. On commence par générer un jeu de données de volatilités et de strikes. J'utilise ici une méthode de calibration qui consiste à fixer une valeur pour β . Les paramètres ρ et ν sont alors directement fittés, alors que α est impliqué par la volatilité ATM. C'est une approche largement répandue dans le cas des swaptions.

Pour obtenir α en fonction de la volatilité ATM σ_{ATM} , on résout le polynôme cubique suivant, en prenant la plus petite racine réelle positive :

$$\frac{(1-\beta)^2 T}{24 F^{(2-2\beta)}} \alpha^3 + \frac{\rho \beta \nu T}{4 F^{(1-\beta)}} \alpha^2 + \left(1 + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 T\right) \alpha - \sigma_{ATM} F^{(1-\beta)} = 0$$

Avec :

- F la forward value
- T représente la fraction d'année jusqu'à l'échéance (maturity).

On définit donc la fonction suivante pour la résoudre :

```
1 def alphasroots(Rho, Nu):
2     coeffs = [
3         (1 - Beta)**2 * YearsToExercise[k] / 24 / CurrentForwardValues[k]**(2 - 2 *
4             Beta),
5         Rho * Beta * Nu * YearsToExercise[k] / 4 / CurrentForwardValues[k]**(1 - Beta
6             ),
7         1 + (2 - 3 * Rho**2) * Nu**2 * YearsToExercise[k] / 24,
8         -MarketVolatilities[3, k] * CurrentForwardValues[k]**(1 - Beta)
9     ]
10    return np.roots(coeffs)
```

On convertit ensuite cette volatilité ATM en α en prenant la plus petite racine réelle positive grâce à la fonction :

```
1 def atmVol2SabrAlpha(Rho, Nu):
2     roots = alphasroots(Rho, Nu)
3     real_roots = [root.real for root in roots if np.isreal(root) and root > 0]
4     return min(real_roots) if real_roots else np.inf
```

On utilise ici un ensemble donné de ρ et ν , on définit alors notre fonction objective qui va permettre de fit les paramètres ρ et ν :

```
1 def objFun(X):
2     Rho, Nu = X
3     Alpha = atmVol2SabrAlpha(Rho, Nu)
4     return MarketVolatilities[:, k] - [
5         sabr_vol(Alpha, Beta, Rho, Nu, CurrentForwardValues[k], MarketStrikes[j, k],
6             YearsToExercise[k])
7         for j in range(len(MarketStrikes))
8     ]
```

On cherche ici à minimiser la différence entre les volatilités de marché **MarketVolatilities** et les volatilités calculées par le modèle SABR pour chaque strike.

A noter qu'on utilise ici, afin de faciliter les calculs, la version fermée de l'approximation de la volatilité implicite de Black pour le modèle SABR, développé par Obloj (2008) :

$$\sigma_B(F, K) = \frac{\nu \log(F/K)}{x(z)} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(FK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\nu\alpha}{(FK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + \dots \right\}$$

$$z = \frac{\nu F^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{\alpha (1-\beta)}$$

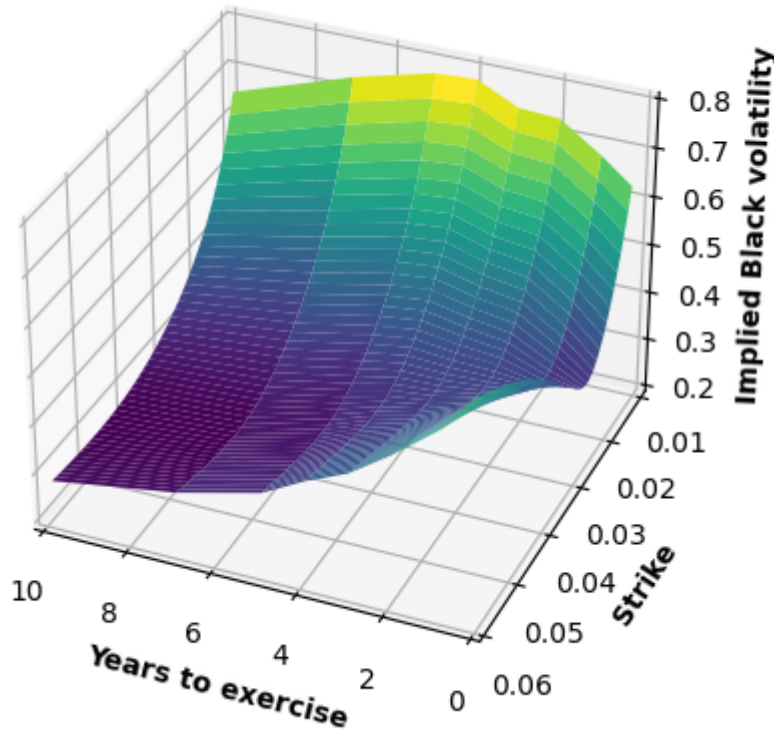
$$x(z) = \log \left\{ \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right\}$$

Cette formule est utilisée car la formule de **Hagan** peut produire des résultats incorrects pour des strikes faibles avec de longues maturités.

On obtient alors les résultats suivants pour notre jeu de données :

	Alpha	Beta	Rho	Nu
3M into 10Y	0.051928	0.5	0.398401	1.418509
1Y into 10Y	0.054525	0.5	0.292126	1.145204
2Y into 10Y	0.057921	0.5	0.232578	0.967721
3Y into 10Y	0.057769	0.5	0.192539	0.832657
4Y into 10Y	0.055546	0.5	0.123659	0.792183
5Y into 10Y	0.051134	0.5	0.048933	0.735043
7Y into 10Y	0.044755	0.5	0.067645	0.664599
10Y into 10Y	0.045281	0.5	0.008167	0.472633

On trace ensuite une surface de volatilité, en fonction de la maturité et des strikes :



- *compute_forward_swap_rate*

Cette fonction permet de calculer le forward swap rate que l'on va utiliser pour pricer notre swaption.

- **blackvolbysabr**

Enfin, cette fonction utilise la volatilité implicite pour calculer la volatilité implicite en prenant comme input nos paramètres calibrés.

```
1 def blackvolbysabr(alpha, beta, rho, nu, SwaptionSettle, SwaptionExerciseDate,
2   forward_swap_rate, strike):
3     T = yearfrac(SwaptionSettle, [SwaptionExerciseDate])[0]
4     volatility = sabr_vol(alpha, beta, rho, nu, forward_swap_rate, strike, T)
5     return volatility
```

La dernière étape est donc de coder une formule classique de pricing sous le modèle BS :

```
1 def black_scholes_price(F, K, T, sigma, opt_type="call", notional=1):
2
3     d1 = (np.log(F / K) + 0.5 * sigma**2 * T) / (sigma * np.sqrt(T))
4     d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
5
6     if opt_type == "call":
7         option_price = np.exp(-0 * T) * (F * norm.cdf(d1) - K * norm.cdf(d2))
8         option_price = np.exp(-0 * T) * (K * norm.cdf(-d2) - F * norm.cdf(-d1))
9     else:
10         raise ValueError("Option type must be 'call' or 'put'.")
11
12     price = option_price * notional
13
14     return price
```

et on obtient alors les résultats suivants :

Current Forward Swap Rate: 0.0160

Price of the swaption: 17.3455

4.3.1 Swaption Shifted SABR

On va cette fois s'intéresser à un pricer qui prend en compte des strikes négatifs pour évaluer des swaptions, en utilisant donc le modèle Shifted SABR, défini précédemment. On utilise une nouvelle fois des Shifted Black volatilités pour calibrer notre modèle, puis on calcule la Shifted Black volatilité.

Pour ce faire, on utilise une nouvelle fois la méthode de calibration consistant à fixer β à 0.5.

On prend donc comme jeu de données des **MarketShiftedBlackVolatilities** et des strikes à la fois positifs et négatifs. On va cette fois utiliser un **Shift** pour gérer les taux négatifs, ici 8 % .

On calcule alors les **MarketStrikes** en sommant les **Strikes**, le **Shift** et les *current_forward_value*. Ce calcul permet de déplacer les strikes du marché de telle sorte qu'ils soient alignés avec le shift appliqué.

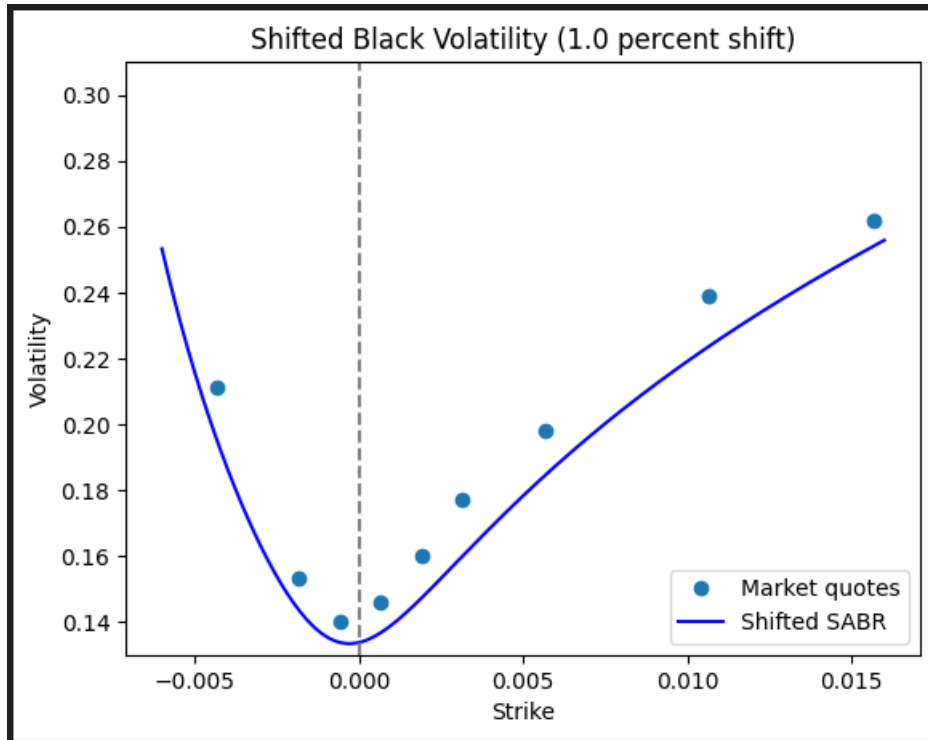
La partie sur la calibration des paramètres de notre modèle est identique à celle du modèle SABR que l'on vient d'étudier. Cependant, les strikes sont à la fois positifs et négatifs, on doit donc adapter la fonction qui calcule la volatilité :

```

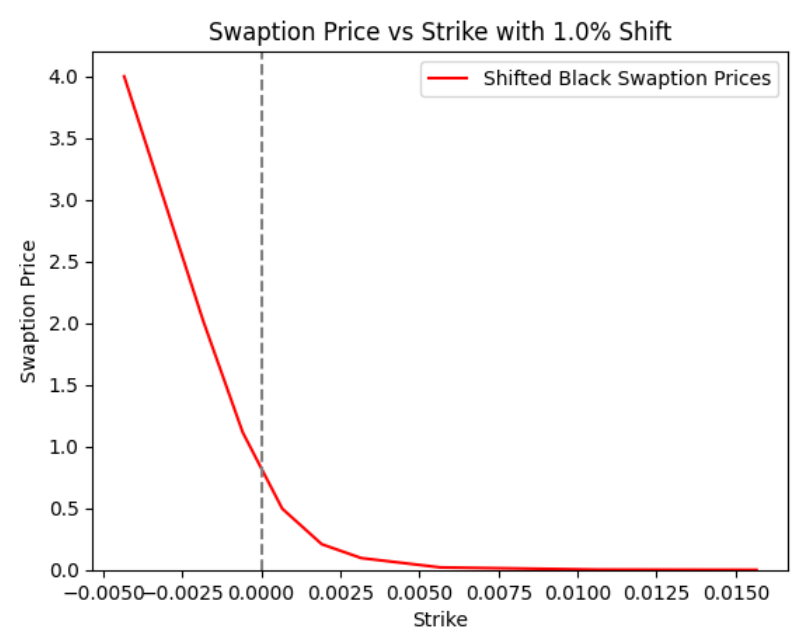
1 def sabr_volatility(alpha, beta, rho, nu, f, k, t, shift):
2     f_shifted = f + shift
3     k_shifted = k + shift
4
5     if f_shifted == k_shifted:
6         z = nu / alpha * (f_shifted ** (1 - beta)) * np.sqrt(t)
7         x_z = np.log((np.sqrt(1 - 2*rho*z + z**2) + z - rho) / (1 - rho))
8         return alpha * (f_shifted ** (beta - 1)) * (1 + ((1 - beta) ** 2 / 24 * (np.log(
9             f_shifted/k_shifted))**2 + (1 - beta)**4 / 1920 * (np.log(f_shifted/k_shifted
10             ))**4) * z / x_z)
11
12     else:
13         z = nu / alpha * (f_shifted * k_shifted) ** ((1 - beta) / 2) * np.log(f_shifted /
14             k_shifted)
15         x_z = np.log((np.sqrt(1 - 2 * rho * z + z ** 2) + z - rho) / (1 - rho))
16         return alpha / ((f_shifted * k_shifted) ** ((1 - beta) / 2)) * z / x_z * (1 + ((1
17             - beta) ** 2 / 24 * (np.log(f_shifted/k_shifted))**2 + (1 - beta)**4 / 1920
18             * (np.log(f_shifted/k_shifted))**4) * z / x_z)

```

Le shift permet donc de rendre le modèle valide même pour des strikes négatifs, en déplaçant l'ensemble des taux vers des valeurs positives. Sans le shift, on aurait des strikes négatifs dans la formule de **Hagan**. On peut alors représenter la volatilité en fonction du strike, et pour notre jeu de données on obtient le résultat suivant :



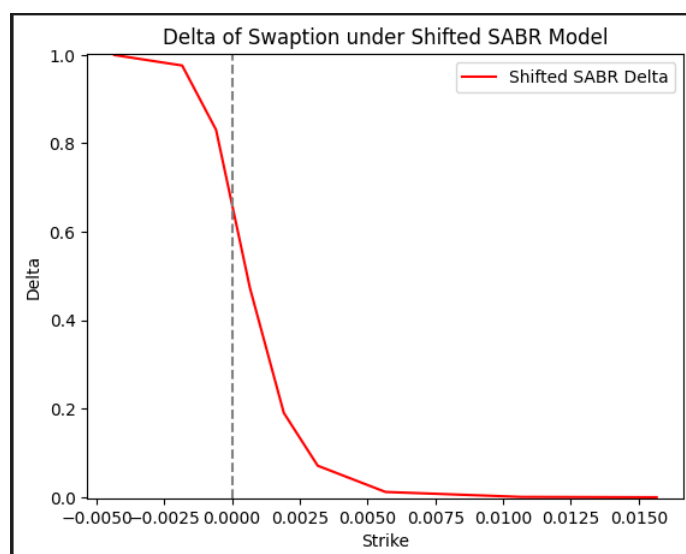
On introduit ensuite la fonction **shiftedblack** permettant de calculer le prix de notre swaption. On prend ici un notional de 800 et en traçant le prix de l'option en fonction du prix strike, on obtient :



Enfin, on peut tracer le delta de l'option pour notre gamme de strike. Pour cela, on utilise la fonction **shifted_sabr_delta**. La première étape est d'approximer la dérivée, on prend pour cela une légère perturbation que l'on applique au taux forward. Ici elle est égale à 1e-6. On recalcule ensuite la volatilité implicite pour les perturbations vers le haut et celles vers le bas, puis le prix. Le delta peut alors être approximé par la formule :

$$\Delta = \frac{Prix(f+\epsilon) - Prix(f-\epsilon)}{2\epsilon}$$

On utilise ici une différence finie car la fonction de volatilité implicite du modèle SABR est difficile à dériver. On obtient alors le graphe suivant :



5 Analysis and conclusions

5.1 Discussions and conclusions

Les hypothèses du modèle Black-Scholes sont souvent non vérifiées sur le marché, une volatilité constante est en contradiction avec le comportement réel du marché lors de la tarification des options européennes. La notion de smile de volatilité démontre clairement cette contradiction : la volatilité varie non seulement en fonction du temps mais aussi en fonction du prix strike.

Les modèles de volatilité locale ont tenté de répondre à ces besoins en incluant une volatilité dynamique, mais comme nous l'avons vu ils sont surtout applicables pour la tarification mais très peu pour se couvrir contre les risques.

Le modèle SABR introduit par **Hagan et al (2002)** permet de calculer la volatilité implicite des options, pour pouvoir ensuite l'utiliser dans le modèle de Black-Scholes. En démontrant la formule fermée et l'influence des différents paramètres sur nos résultats, on constate que le modèle SABR est très efficace pour ajuster le smile de volatilité.

Des expansions du modèle SABR viennent répondre à d'autres problématiques, notamment le modèle SABR shifté qui permet de prendre en compte des strikes négatifs ce qui est très important dans certaines situations économiques.

Les sources sur le modèle SABR shifté sont peu nombreuses, il est donc difficile de comparer différents travaux sur le sujet. Les travaux de **Wu** ont toutefois conclut que le modèle SABR était très précis pour estimer les volatilités implicites

References

1. Properties of the SABR Model, **Nan Zhang**
2. On the Calibration of the SABR Model and its Extensions, **Cheng Luo**
3. The SABR model in a negative interest rate framework, **Jökull Ívarsson**
4. Managing Smile Risk, **PATRICK S. HAGAN, DEEP KUMAR , ANDREW S. LESNIEWSKI , AND DIANA E. WOODWARD**
5. Understanding the SABR model for option pricing, Course by **Sarbojeet Saha**
6. SABR Model Extensions for negative rates, **Najib Jamjam**
7. Cours sur les produits et stratégies de taux, **Frédéric Leroy**
8. The Sabr/Libor Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives, **Riccardo Rebonato**